Vorlesung
Deterministische Signale und Systeme

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Marius Pesavento

Copyright

Übergang zur Einseitige Laplace Transformation

- FT als Instrument für Analyse von LTI Systemen kennengelernt.
- Fourieranalyse von Systemen mit periodischen Eingängen nur mithilfe verallgemeinerten Funktionen.
- Bei Analyse von **instabilen Systemen** stößt FT an ihre Grenzen, da **Impulsantwort nicht absolut integrierbar**.
- In diesem Fall kann die Frequenzbereichsanalyse mithilfe der **Laplace Transformation** (LT) durchgeführt werden.
- Die LT kann als Verallgemeinerung der FT aufgefasst werden, bei der $j\omega$ durch $p = \sigma + j\omega$ ersetzt wird.
- Berechnung der LT auch in Fällen möglich, in denen die FT nicht existiert.

Beidseitige LT

Beidseitige LT $X(p)$ eines Signals $x(t)$ definiert als

$$X(p) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-pt} \, \mathrm{d}t$$

wobei $p = \sigma + j\omega$.
Beidseitige LT als FT, wenn $y(t;\sigma) = x(t)e^{-\sigma t}$ gewählt wird und
$Y(\omega;\sigma) = \mathcal{F}\{y(t;\sigma)\}$.

$$X(p) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-pt} \, \mathrm{d}t \Big|_{p=\sigma+j\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} y(t;\sigma) e^{-j\omega t} \, \mathrm{d}t = Y(\omega;\sigma)$$

Beidseitige LT $X(p)|_{p=\sigma+j\omega}$ des Signals $x(t)$ entspricht FT des Signals $x(t)e^{-\sigma t}$.

Andererseits erhält man das Signal $X(\omega)$ aus der LT für $\mathrm{Re}\{p\} = \sigma = 0$.

Konvergenz der beidseitigen LT

Aus den **Konvergenzbedingungen** der FT ergibt sich für beidseitige LT:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma t} \, \mathrm{d}t < \infty,$$

für ein beliebiges endliches σ.

Beidseitige LT konvergiert somit lediglich für bestimmte Werte von $\sigma = \mathrm{Re}\{p\}$.

Der Bereich der Werte in der komplexen Ebene, für die $X(p)$ konvergiert, wird **Konvergenzbereich** (KB) genannt.

Konvergenz der LT
Beispiel: $x(t) = e^{-at}u(t)$

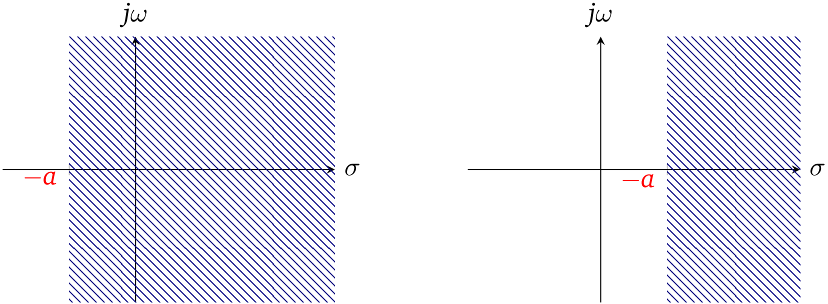

Abbildung: Konvergenzbereich a) $a > 0$ und b) $a < 0$.