# Fourierreihe

# Lernziel der 4. Lerneinheit: WP 2 – Fourierreihe

In der vierten Lerneinheit finden wir den Einstieg in die Frequenzbereichsanalyse von Signalen.

- Wir betrachten zunächste die allgemeine Darstellung von Signalen mittels gewichteter Überlagerung orthogonaler Basisfunktionen und erläutern die besondere Bedeutung der Orthogonalität.
- Orthogonale Reihenentwicklungen sind bei der Analyse von Signalen und Systemen, aber auch in vielen technischen Anwendungen (z.B. bei der Verarbeitung von Signalen und bei der Datenkompression) von großer Bedeutung.
- Wir führen die Fourierreihenentwicklung als den Spezialfall einer Reihenentwicklung für periodischer Signale mittels trignometrischer (d.h. Cosinus und Sinus) und komplexer Exponential-Funktionen ein.
- Wir lernen, dass die Fourierreihenkoeffizienten ein Maß dafür sind wie ähnliche die darzustellende Funktion zu der jeweiligen Basisfunktion bei ganzzahligen Vielfachen der Grundfrequenz ist.

# Einstieg Fourieranalyse

- Zunächst betrachten wir den allgemeinen Fall: Die Darstellung von Funktionen als Linearkombination orthogonaler Basisfunktionen.
- In der Signalanalyse und in technischen Anwendungen sind orthogonale Reihendarstellungen von großer Bedeutung (z.B. die Bildkompression und die Datenreduktion im maschinellen Lernen).
- Die ursprüngliche Funktion wird in Form eines Vektors in einem Koordinatensystem orthogonaler Basisvektoren dargestellt.

# Einstieg Fourieranalyse

Das über dem Intervall $[a, b]$ definierte Signal $x(t)$ wird als Linearkombination (unendliche Summe) orthogonaler Basisfunktionen, d.h. einer Schar orthogonaler Funktionen $\{\phi_k(t)\}_{k=-\infty}^{\infty}$, dargestellt.

$$x(t) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N}^{N} c_k \phi_k(t)$$

Die Linearkoeffizienten berechnen sich als:

$$c_k = \frac{1}{E_k} \int_a^b x(t)\phi_k^*(t)\mathrm{d}t, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

mit einer positiven Normalisierungskonstante $E_k$.

Der Linearkoeffizient $c_k$ ist ein Korrelationsmaß für die „Ähnlichkeit" des Signals $x(t)$ mit der Basisfunktion $\phi_k(t)$.

# Orthogonale Funktionen
## Beispiel einer endlichen Reihenentwicklung

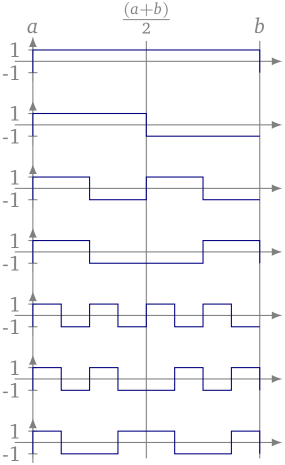



Abbildung: Haar-Wavelet als Bespiel einer Schar orthogonaler Basisfunktionen

# Orthogonale Funktionen
## Beispiel einer endlichen Reihenentwicklung

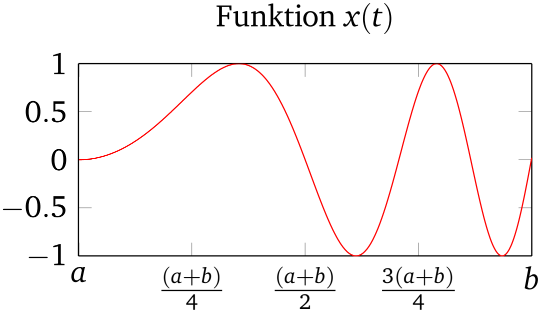



Abbildung: Zu approximierende Funktion

# Orthogonale Funktionen
## Beispiel einer endlichen Reihenentwicklung

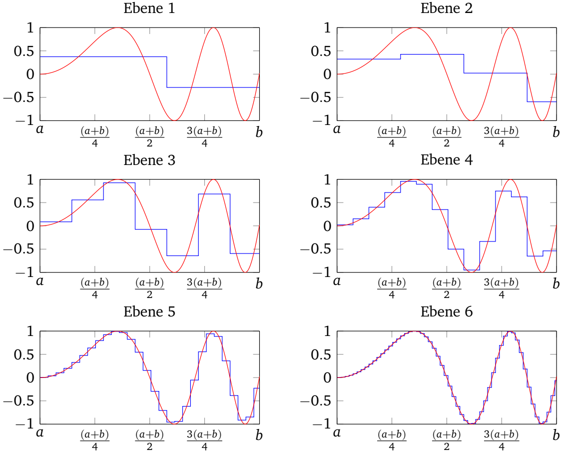



Abbildung: Die Approximation mit einer endlichen Anzahl von Basisfunktionen am Beispiel der Haar-Wavelets

# Orthogonale Funktionen

Für orthogonale Basisfunktionen ergibt sich eine einfache Berechnung der Reihenkoeffizienten $\{c_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$.

Orthogonalität: Die Elemente der Funktionsschar $\{\phi_k(t)\}_{k=-\infty}^{\infty}$, definiert über dem Intervall $[a, b]$, sind orthogonal, wenn gilt:

$$\begin{aligned}\int_a^b \phi_l(t)\phi_k^*(t)\,\mathrm{d}t &= \begin{cases} E_k, & l = k \\ 0, & l \neq k \end{cases} \\ &= E_k \delta[l-k],\end{aligned}$$

wobei die (diskrete) Kronecker-Delta Funktion als

$$\delta[k] = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & \text{anderswo.} \end{cases}$$

definiert ist.

# Einstieg Fourieranalyse

Der Reihenkoeffizient $c_k$ ist ein Korrelationsmaß für die „Ähnlichkeit" des Signals $x(t)$ mit der Basisfunktion $\phi_k(t)$.

Transformationspaar:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \phi_k(t); \qquad c_k = \frac{1}{E_k} \int_a^b x(t)\phi_k^*(t)\mathrm{d}t, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Nachweis der Transformationsbeziehung durch Multiplikation mit $\phi_k^*(t)$ und Integration bzgl. $t$:

$$\frac{1}{E_k} \int_a^b x(t)\phi_k^*(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{E_k} \int_a^b \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l \phi_l(t)\phi_k^*(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{E_k} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_l \int_a^b \phi_l(t)\phi_k^*(t)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{E_k}{E_k} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_l \delta[k-l] = c_k$$

# Trigonometrischen Funktionen Orthogonalität

Die trigonometrischen Funktionen $\{\phi_n(t) = \cos(\omega_0 nt)\}_{n=0}^{\infty}$ und $\{\phi_{-n}(t) = \sin(\omega_0 nt)\}_{n=1}^{\infty}$ erfüllen die Ortogonalitätseigenschaften:

$$\begin{aligned}
\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \sin(\omega_0 mt)\sin(\omega_0 nt)\mathrm{d}t &= \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{T_0}{2}, & m = n \end{cases} \\
\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos(\omega_0 mt)\cos(\omega_0 nt)\mathrm{d}t &= \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{T_0}{2}, & m = n \end{cases}
\end{aligned}$$

und

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \sin(\omega_0 mt)\cos(\omega_0 nt)\mathrm{d}t = 0, \qquad \forall m, n \in \mathbb{N},$$

wobei $\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \bullet \,\mathrm{d}t$ die Integration über eine Periodedauer $T_0$ der Grundfrequenz $\omega_0$ bezeichnet ($T = \frac{2\pi}{T_0}$).

## Fourierreihendarstellung eines periodischen Signals: Die Trigonometrische Fourierreihe

Ein reellwertiges periodisches Signal $x(t)$ mit der Periodendauer $T_0$ und Grundfrequenz $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ lässt sich als Linearkombination der trigonometrischer Funktionen

$$\begin{array}{rrcll} & \phi_n(t) & = & \cos(\omega_0 nt) & \text{für} \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \\ \text{und} & \phi_{-n}(t) & = & \sin(\omega_0 nt) & \text{für} \quad n = 1, 2, 3, 4, \ldots \end{array}$$

ausdrücken.
Die Trigonometrische Fourierreihenentwicklung des Signals $x(t)$ ist

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_0 nt) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\omega_0 nt), \qquad -\infty < t < \infty,$$

wobei $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ und $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ die zugehörigen Fourierkoeffizienten sind.

# Berechnung der Fourierkoeffizienten

Die Fourierkoeffizienten der trigonometrischen Fourierreihe

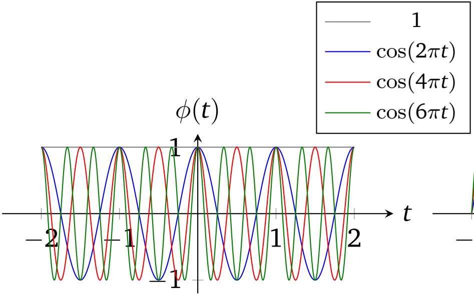
$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_0 n t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\omega_0 n t)$$

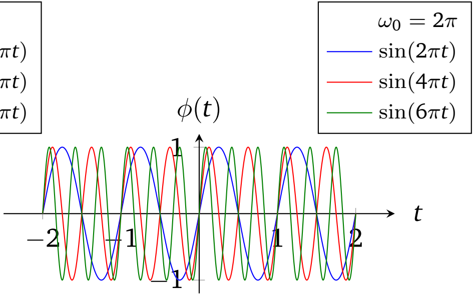
werden über die Integrale:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cos(\omega_0 n t) \mathrm{d}t \\ b_n &= \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \sin(\omega_0 n t) \mathrm{d}t \end{aligned}$$

berechnet.

# Darstellung der orthogonaline Basisfunktionen für verschiedene Ordnungen



# Cosinus als Überlagerung komplexer Zeiger (negativer und positiver Frequenz)

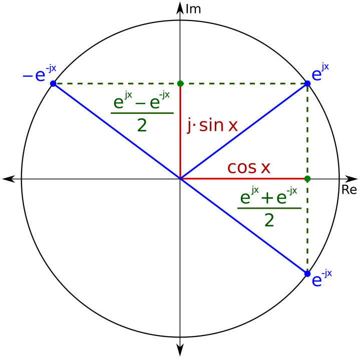
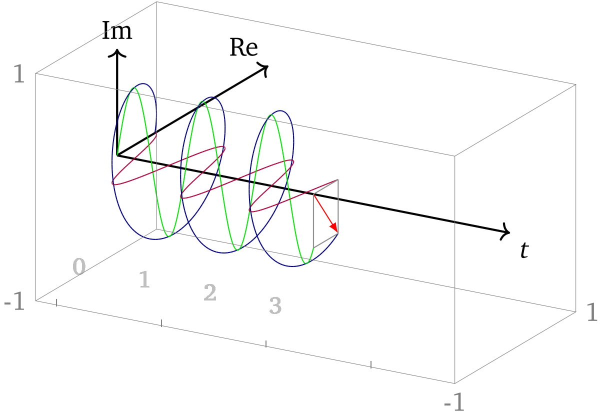



Abbildung: Darstellung einer komplexen Exponentialfunktion mittels Sinus und Cosinus-Funktionen

# Die komplexe Exponentialfunktion




Phasor Animation

# Komplexe Fourierreihe

- Die Familie der komplexen Exponentialfunktionen

$$\phi_k(t) = e^{j\omega_0 kt} = \cos(\omega_0 kt) + j\sin(\omega_0 kt) \quad \text{für} \quad k \in \mathbb{Z}$$

stellt ebenfalls einer Schar orthogonaler Basisfunktionen dar.

Orthogonalität: $$\int_0^{T_0} e^{j\omega_0 kt} e^{-j\omega_0 lt}\,\mathrm{d}t = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{j\omega_0 (k-l)t}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} T_0, & l = k \\ 0, & l \neq k \end{cases}$$

$$= T_0 \delta[l-k]$$

# Fourierreihenentwicklung mittels komplexer Exponentialfunktionen

Das komplexwertige periodische Signal $x(t)$, mit Periodendauer $T_0$ und Grundfrequenz $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$, lässt sich als komplexwertige Fourierreihe entwickeln:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\omega_0 n t}.$$

Die zugehörigen Fourierkoeffizienten sind durch

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j\omega_0 n t} \mathrm{d}t, \qquad n \in \mathbb{N},$$

gegeben.

# Fourierreihenentwicklung mittels trigonometrischer und komplexer Exponentialfunktionen

Die trigonometrischen Funktionen und die komplexen Exponentialfunktion eignen sich besonders gut als Basisfunktionen für die Reihendarstellung von alltäglichen Messignalen, da sie:

- periodisch sind,
- mathematisch einfach handhabbar sind,
- und physikalisch anschauliche Interpretationen ermöglichen.

## Beispiel: Fourierreihenentwicklung des Rechtecksimpulszugs

$$x(t) = \begin{cases} 0, & -T_0/2 < t < -\tau/2 \\ K, & -\tau/2 < t < \tau/2 \\ 0, & \tau/2 < t < T_0/2 \end{cases} \qquad x(t) = x(t + T_0)$$

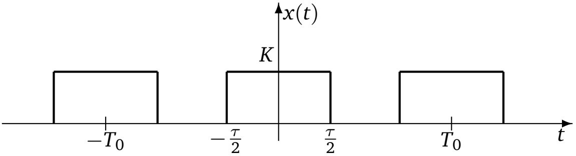



Abbildung: Rechtecksimpulszug, $x(t)$.

Idealisierte Signale dieser Art sind als Modellvorstellungen für reale Signale weit verbreitet (z.B, Pulsgenerator, Optischer Drehzahlmesser,...).

# Beispiel: Fourierreihenentwicklung des Rechtecksimpulszugs

$$
\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j\omega_0 n t} \mathrm{d}t, \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \\
&= \frac{1}{T_0}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} K e^{-j\omega_0 n t} \mathrm{d}t = \frac{K}{T_0}\frac{1}{\omega_0 n} j \left[ e^{-j\frac{\omega_0 n\,\tau}{2}} - e^{+j\frac{\omega_0 n\,\tau}{2}} \right] \\
&= -\frac{j}{2\pi n} K 2j \sin\left(\frac{\omega_0 n\,\tau}{2}\right) = \frac{K}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n\,\tau}{T_0}\right) = \frac{K\tau T_0}{\pi n \tau T_0}\sin\left(\frac{\pi n\,\tau}{T_0}\right) \\
&= \frac{K\tau}{T_0}\mathrm{si}\left(\pi\frac{n\,\tau}{T_0}\right) = \frac{K\tau}{T_0}\mathrm{sinc}\left(\frac{n\,\tau}{T_0}\right)
\end{aligned}
$$

wobei

$$\mathrm{si}(x) = \frac{\sin(x)}{x} \text{ und } \mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}.$$

# Fourierkoeffizienten des Rechtecksimpulszug

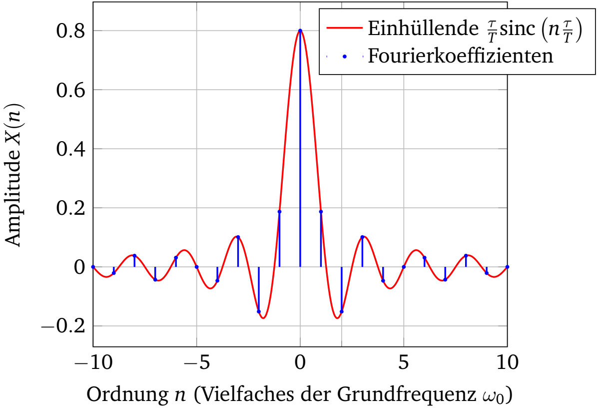



Abbildung: Fourierkoeffizienten $c_n e^{j\omega_0 nt}$ für $\frac{\tau}{T_0} = 0.8, K = 1$

# Darstellung der Fourierkoeffizienten im Frequenzbereich: Interpretation

- Das Amplitudenspektrum, $|c_n|$, stellt die Amplitude (bzw. den Betrag) der Fourierkoeffizienten gegen den Frequenzindex $n$ dar.

- Der Phasengang, $\arg c_n$, stellt die Phase (das komplexe Argument) der Fourierkoeffizienten gegen den Frequenzindex $n$ dar.

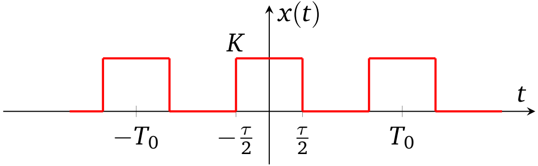
Die Spektralkomponenten (Spektrallinien) stellen die Signalanteile bei positiven und „negativen" Frequenzen dar.

Bei reellwertigen Zeitsignalen ist das Amplitudenspektrum gerade und das Phasenspektrum ungerade.

# **Beispiel:** Rechtecksimpulszug

Gegeben sei das mit $T_0$ periodische Zeitsignal

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} K\, r_{\frac{\tau}{2}}\left(t - nT_0\right).$$




Da das Signal $x(t)$ periodisch ist, lässt es sich als Fourierreihe mit der Grundfrequenz $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ darstellen.

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\omega_0 nt}.$$

# Zusammenhang zwischen Zeit- und Frequenzbereich

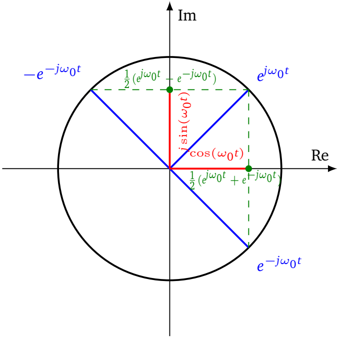
Anhand derr Ergebnisse der Berechnung der Fourierreihenkoeffizienten des Rechtecksimpulszug lassen sich grundlegende Eigenschaften der Fourierreihenentwicklung erkennen:

1. Für konstantes $T_0$ nimmt die Breite der Einhüllenden des Amplitudespektrums (d.h. die Bandbreite) mit abnehmender Pulsbreite $\tau$ zu.
2. Für einen konstanten Wert von $\tau$ nimmt der Abstand $\omega_0$ zwischen den Spektrallinien gemäß $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ mit steigender Periodendauer $T_0$ von $x(t)$ ab.

# Symmetrieeigenschaft der Fourierkoeffizienten reellwertiger Funktionen

Gegeben sei ein reellwertiges periodisches Signal mit der Periodendauer $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

Die komplexwertigen Fourierreihenkoeffizienten weisen dann folgende Symmetrie auf:




$$\begin{aligned} c_n^* &= \left[\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j\omega_0 n t} \mathrm{d}t\right]^* \\ &= \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{j\omega_0 n t} \mathrm{d}t = c_{-n} \end{aligned}$$

$|c_n^*| = |c_{-n}| = |c_n|$ und $\arg c_n^* = -\arg c_n = \arg c_{-n}$
Für $\mathrm{Re} c_n \geq 0$ gilt: $\arg c_n = \arctan \frac{\mathrm{Im}\, c_n}{\mathrm{Re}\, c_n}$

# Zusammenhang zwischen trigonometrischer und komplexer Fourierreihe

Wir betrachten die komplexe Fourierreihe des reellwertigen Signals $x(t)$:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= c_0 + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{j\omega_0 nt} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{j\omega_0 nt} \\
&= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( c_n^* e^{-j\omega_0 nt} + c_n e^{j\omega_0 nt} \right) \\
&= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}\{c_n e^{j\omega_0 nt}\} \\
&= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ 2\,\mathrm{Re}\{c_n\} \cos\left(\omega_0 nt\right) - 2\,\mathrm{Im}\{c_n\} \sin\left(\omega_0 nt\right) \right]
\end{aligned}
$$

# Zusammenhang zwischen trigonometrischer und komplexer Fourierreihe

Das reellwertige Signal $x(t)$ lässt sich also wie folgt mittels seiner komplexen Fourierreihenkoeffizienten ausdrücken:

$$x(t) \quad = \quad c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ 2\,\mathrm{Re}\{c_n\} \cos\left(\omega_0 n t\right) - 2\,\mathrm{Im}\{c_n\} \sin\left(\omega_0 n t\right) \right]$$

Daher gilt folgende Beziehung zwischen den Koeffizienten der komplexen und der trigonometrischen Fourierreihe:

$$\begin{aligned} a_n \quad &= \quad 2\,\mathrm{Re}\{c_n\} = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cos\left(\omega_0 n t\right) \mathrm{d}t \in \mathbb{R} \\ b_n \quad &= \quad -2\,\mathrm{Im}\{c_n\} = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \sin\left(\omega_0 n t\right) \mathrm{d}t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

# Fourierkoeffizienten reellwertiger Funktionen

Weitere Vereinfachungen ergeben sich, wenn $x(t)$ eine gerade reellwertige Funktion ist (d.h. wenn $x(t) = x(-t)$).

In diesem Fall sind auch die Fourierkoeffizienten $\{c_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ rein reellwertig.

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j\omega_0 n t} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{T_0} \left[ \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \cos(\omega_0 n t) \, \mathrm{d}t - \underbrace{j \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \sin(\omega_0 n t) \, \mathrm{d}t}_{=0} \right]$$

# Fourierkoeffizienten reellwertiger Funktionen

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j\omega_0 n t} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{T_0} \left[ \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \cos(\omega_0 n t) \, \mathrm{d}t - j \underbrace{\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \sin(\omega_0 n t) \, \mathrm{d}t}_{=0} \right]$$

Da $x(t)$ gerade ist und das Produkt einer graden und einer ungeraden Funktion ungerade ist, ist der Integrad $x(t) \sin(\omega_0 n t)$ des zweiten Integrals ungerade.

Das Integral einer ungeraden Funktion verschwindet über einem um $t = 0$ symmetrischen Intervall.

Ebenso ist $c_n$ rein imaginärwertig (d.h. $\mathrm{Re}\{c_n\} = 0$), wenn $x(t)$ reellwertig und ungerade ist.

# Konvergenz der Fourierreihe

# Lernziel der 5. Lerneinheit: WP 2 – Konvergenz der Fourierreihe

In der fünften Lerneinheit beantworten wir die wichtige Frage, unter welchen Bedingungen sich Signale exakt als Fourierreihe entwickeln lassen.

- Das führt uns auf die unterschiedlich starken Konvergenzbegriffe, d.h. die gleichmäßigen- und der punktweisen Konvergenz,
- und die Dirichlet-Bedingungen die hinreichend (aber nicht notwendig) für die Konvergenz der Fourierreihe sind.
- Wir lernen, dass die Fourierreihe eines „hinreichend glatten“ Signals $x(t)$ überall dort wo das Signal stetig ist gleichmäßig gegen $x(t)$ konvergiert und an den Sprungstellen punktweise gegen den Mittelwert des links- und rechtsseitigen Grenzwerts konvergiert.

# Konvergenz der Fourierreihenentwicklung

Die Fourierreihenentwicklung, d.h. die unendliche Summe

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_0 n t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\omega_0 n t), \qquad -\infty < t < \infty$$

konvergiert nicht notwendigerweise gegen $x(t)$.

D.h., die Fourierreihe existiert nicht für alle periodischen Signale.

Die im Folgenden beschriebenen Konvergenzbedingungen müssen erfüllt sein.

# Endliche Fourierreihe

Wir definieren die Funktionsfolge $x_N(t)$ für $N \in \mathbb{N}$ als endlichen Fourierreihe von $x(t)$:

$$x_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(\omega_0 n t) + \sum_{n=1}^{N} b_n \sin(\omega_0 n t)$$

Da die Reihenentwicklung bei endlichem $N$ abgebrochen wird, stellt $x_N(t)$ in der Regel nur eine Approximation des Signals $x(t)$ dar.

Die Approximation wird mit steigendem $N$, d.h., mit der Anzahl der Summanden in der Reihenentwicklung, immer genauer.

Anschließend lassen wir $N$ immer größer werden und interessieren uns für den Approximationsfehler im Grenzwert, wenn $N \to \infty$.

# Konvergenzkriterien der Fourierreihe – Zwei verschiedene Konvergenzarten von Funktionsfolgen

$$x_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(\omega_0 nt) + \sum_{n=1}^{N} b_n \sin(\omega_0 nt)$$

Punktweise Konvergenz: Die Funktionsfolge $x_N(t)$ konvergiert an der Stelle $t \in \mathcal{D}$ punktweise gegen $x(t)$, wenn für jedes $\epsilon_t > 0$ ein $N_0$ existiert, so dass für alle $N \geq N_0$:

$$|x_N(t) - x(t)| \leq \epsilon_t.$$

Gleichmäßige Konvergenz: Die Funktionsfolge $x_N(t)$ konvergiert über einem Definitionsbereich $\mathcal{D}$ gleichmäßig gegen $x(t)$, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $N_0$ existiert, so dass **für alle** $t$ in $\mathcal{D}$ und $N \geq N_0$ :

$$|x_N(t) - x(t)| \leq \epsilon.$$

# Endliche Fourierreihe: Konvergenzkriterien

$a_0 = 1, \quad a_k = 0, \quad b_k = \frac{1}{\pi k}\left(1 - (-1)^k\right)$

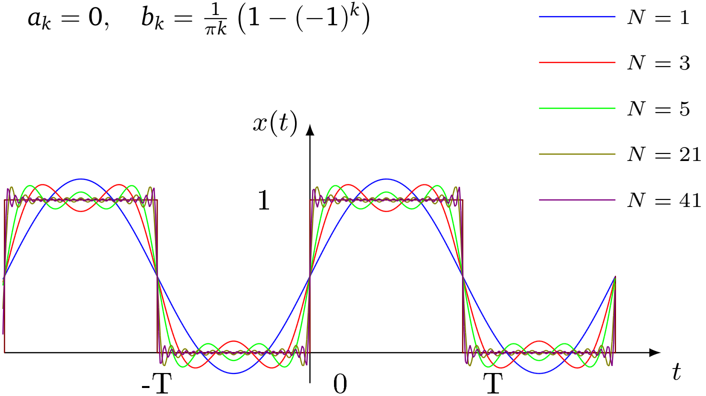



Abbildung: Gibbs'sches Phänomen

Konvergenzkriterien Animation

# Kriterium zur gleichmäßigen Konvergenz

Es sei $x(t)$ eine auf dem Interval $[a, b]$ stetig und stückweise stetig differenzierbare Funktion, dann konvergiert die Fourierreihe auf $(a, b)$ gleichmäßig gegen $x(t)$.

Gleichmäßige Konvergenz gilt nicht an Sprungstellen.

Gibbs'schen Phänomen: Das Gibbs'sche Phänomen beschreibt die Eigenschaft der Fourierreihe an Sprungstellen um ca. 9% überzuschwingen.

An Sprungstellen gilt lediglich die punktweise Konvergenz aber keine gleichmäßige Konvergenz (bei geeigneter Definition der Funktionswerte an den Sprungstellen).

# Dirichlet Bedingungen

Wenn das mit $T_0$ periodische Signal $x(t)$

(i) über einer Periode $T_0$ absolut integrierbar ist, d.h.

$$\int_{\tau}^{\tau+T_0} |x(t)| \mathrm{d}t < \infty \qquad ,$$

und innerhalb einer Periode

(ii) eine endliche Anzahl von Maxima und Minima besitzt,

(iii) und eine endliche Anzahl von Sprungstellen aufweist,

dann konvergiert die Fourierreihe:

1. überall dort wo $x(t)$ stetig und stetig differenzierbar ist, gleichmäßig gegen $x(t)$.

2. an den Sprungstellen und Stellen an denen $x(t)$ nicht stetig differenzierbar ist, punktweise gegen den Mittelwert des links- und rechtseitigen Grenzwerts.

# Dirichlet Bedingungen

D.h. punktweise Konvergenz gilt, wenn $x(t)$ an der Sprungstelle bei $t_0$ als:

$$x(t_0) = \frac{1}{2}[x(t_0^+) + x(t_0^-)].$$

definiert ist, wobei

$$\begin{aligned} x(t_0^+) &= \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t > t_0}} x(t) \\ x(t_0^-) &= \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t < t_0}} x(t). \end{aligned}$$

Die Dirichlet Bedingungen sind hinreichend aber nicht notwendig.

# Eigenschaften der Fourierreihe

# Parseval's Theorem

Die mittlere Leistung eines periodischen Signals $x(t)$ mit der Periodendauer $T_0$ und Grundfrequenz $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ ist:

$$P = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)x^*(t)\mathrm{d}t,$$

Unter Verwendung der Fourierreihenentwicklung ergibt sich:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^* e^{-j\omega_0 nt}\right)\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^*\left[\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-j\omega_0 nt}\mathrm{d}t\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^* c_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2, \end{aligned}$$

# Parseval's Theorem

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 \mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2.$$

- Die mittlere Leistung eines periodischen Signals ergibt sich als Summe der Leistungen (Quadrate) seiner Fourierkoeffizienten.
- Das Parseval Theorem gilt für alle Signaldarstellungen mittels orthogonaler Basisfunktionen.

# Darstellung periodischer Signale im Frequenzbereich

# Lernziel der 6. Lerneinheit: WP 2 – Darstellung der Fourierreihe im Frequenzbereich

In der 6. Lerneinheit nutzen wir die Fourierreihenentwicklung um Signale im Frequenzbereich darzustellen.

- Die Fourierreihenkoeffizienten geben an mit welcher „Intensität" das jeweilige „ganzzahligen Vielfache der Grundfrequenz" im Signal enthalten ist.
- Mithilfe der komplexen Fourierkoeffizienten lassen sich Signale als Linienspektrum (d.h. Betrag) und (diskreten) Phasengang gegen die diskreten Frequenzen darstellen.
- Unter den zuvor betrachteten Konvergenzbedingungen ist die Frequenzbereichsdarstellung mithilfe der Fourierkoeffizienten äquivalent zu der Zeitbereichsdarstellung, d.h., bei der Transformation geht keine Information verloren.
- Wir betrachen die Frequenzbereichsdarstellung in LTI-Systemen und erkennen, dass die komplexen Exponentialfunktionen Eigenfunktionen von LTI-Systemen sind, die das System ohne Verzerrung und leiglich mit einer komplexwertigen Dämpfung passieren.

# Darstellung der Fourierkoeffizienten im Frequenzbereich

Die Fourierreihe eines mit $T_0$ periodischen Signals $x(t)$ ist

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\omega_0 nt}$$

Die zugehörigen Fourierkoeffizienten sind

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j\omega_0 nt} \mathrm{d}t.$$

Für reellwertige Signale $x(t)$ gilt die Symmetriebeziehung:

$$\begin{aligned} c_n^* &= c_{-n} \quad \text{(konjugiert-symmetrisch)} \\ |c_n| &= |c_{-n}| \quad \text{(gerade)} \\ \Theta_n &= -\Theta_{-n} \quad \text{(ungerade).} \end{aligned}$$

# **Beispiel:** Periodische Rechtecksschwingung

Gesucht ist der Amplituden- und Phasengang der periodischen Rechtecksschwingung mit der Periodendauer $T = 2$.

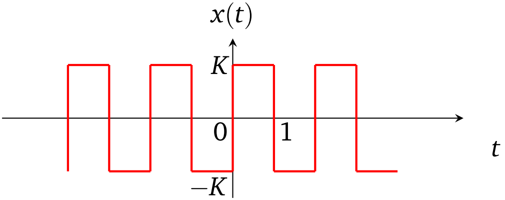



Abbildung: Periodische Rechtecksschwingung $x(t)$

$$x(t) = \begin{cases} -K, & -1 < t < 0 \\ K, & 0 < t < 1 \end{cases}, \qquad K > 0$$

## Beispiel: Periodische Rechtecksschwingung

Wegen $x(t) = x(t+2)$ ist $T_0 = 2$ und $\omega_0 = 2\pi/2 = \pi$.

$$
\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-j\omega_0 nt}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x(t)e^{-j\pi nt}\,\mathrm{d}t = \frac{K}{2}\left[\int_0^1 e^{-j\pi nt}\,\mathrm{d}t - \int_{-1}^{0} e^{-j\pi nt}\,\mathrm{d}t\right] \\
&= \frac{jK}{2\pi n}\left\{\left[e^{-j\pi nt}\right]_0^1 - \left[e^{-j\pi nt}\right]_{-1}^{0}\right\} = \frac{K}{j\pi n}\left(1-\cos\pi n\right) \\
&= \begin{cases} \dfrac{2K}{j\pi n}, & n \text{ ungerade} \\ 0, & n \text{ gerade} \end{cases}
\end{aligned}
$$

# Beispiel: Periodische Rechtecksschwingung

Das Signal $x(t)$ ist ungerade, daher sind die zugehörigen Fourierkoeffizienten rein imaginär-wertig.

Amplitudenspektrum:

$$|c_n| = \begin{cases} \dfrac{2K}{|n|\pi}, & n \text{ ungerade} \\ 0, & n \text{ gerade} \end{cases}$$

Phasengang;

$$\arg c_n = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & n = 2m-1, \quad m = 1, 2, \ldots \\ 0, & n = 2m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\ \frac{\pi}{2}, & n = -(2m-1), \quad m = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

# Beispiel: Periodische Rechtecksschwingung Amplitudenspektrum und Phasengang

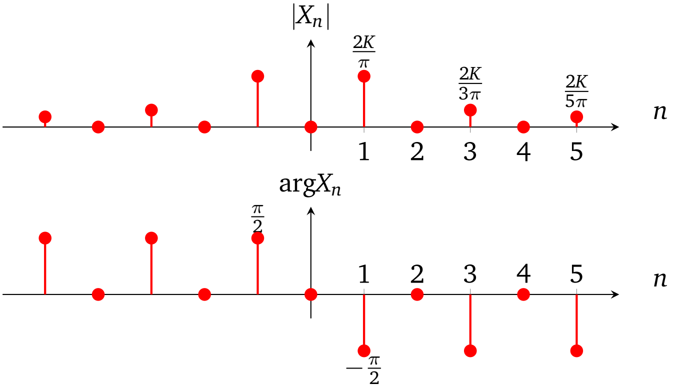



Abbildung: Amplitudenspektrum und Phasengang der Rechtecksschwingung $x(t)$

## Beispiel: Periodische Rechtecksschwingung

- Das Amplitudenspektrum ist ein Linienspektrum. Es existiert nur bei ganzahligen Werten $n$ (ganzahligen Vielfachen der Grundfrequenz).
- Das Amplitudenspektrum nimmt mit $\frac{1}{n}$ ab und ist gerade Funktion in $n$.
- Der Phasengang ist für $n < 0$ positiv (identisch $\frac{\pi}{2}$), für $n > 0$ negativ (identisch $-\frac{\pi}{2}$).
- Die komplexen Fourierkoeffizienten $c_n$ sind rein imaginär-wertig und konjugiert-symmetrisch in $n$ ($c_n = c^*_{-n}$).

# Systeme mit periodischen Eingängen

# LTI-Systeme mit periodischen Eingängen

Wir betrachten ein LTI-System mit Impulsantwort $h(t)$ und Eingangssignal $x(t)$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Der Systemausgang des LTI-Systems für ein periodisches Eingangssignal der Form $x(t) = e^{j\omega_0 t}$ ist:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{j\omega_0(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau \\ &= e^{j\omega_0 t}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega_0\tau}\,\mathrm{d}\tau}_{H(j\omega_0)}. \end{aligned}$$

# LTI-Systeme mit periodischen Eingängen

$$y(t) = H(j\omega_0)e^{j\omega_0 t}$$

$H(j\omega_0)$ ist eine allgemein komplexwertige Konstante (später definieren wir $H(j\omega)$ als die Übertragungsfunktion (Frequenzantwort) des Systems an der Frequenz $\omega$).

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t.$$

Nach Betrag und Phase aufgespalten: $H(j\omega_0) = |H(j\omega_0)|e^{j\Theta_H(\omega_0)}$:

- $|H(j\omega_0)|$ ist die Amplitudenantwort des Systems zur Kreisfrequenz $\omega_0$.
- $\Theta_H(\omega_0)$ ist die Phasenantwort des Systems zur Kreisfrequenz $\omega_0$.

Die Systemantwort auf eine komplexe Exponentialfunktion an der Frequenz $\omega_0$ ist:

$$y(t) = |H(j\omega_0)|e^{j\Theta_H(\omega_0)}e^{j\omega_0 t} = |H(j\omega_0)|e^{j(\omega_0 t + \Theta_H(\omega_0))}.$$

# LTI-Systeme mit periodischen Eingängen

- Die komplexe Harmonische $e^{j\omega_0 t}$ stellt eine Eigenfunktion eines LTI-Systems dar.
- Das System wirkt sich auf die Eigenfunktion lediglich in Form einer komplexen Skalierung der Eigenfunktion mit $H(j\omega_0)$ aus.
- Die Signalform des Eingangssignals $x(t)$ wird jedoch ansonsten nicht beinflusst (verzerrt).

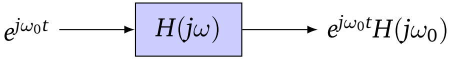



Abbildung: Übertragungsfunktion eines LTI-Systems

$$\mathcal{T}\{e^{j\omega_0 t}\} = e^{j\omega_0 t} \cdot H(j\omega_0)$$

# LTI-Systeme mit periodischen Eingängen

- Die Übertragungsfunktion, $H(j\omega)$, an der Frequenz $\omega_0$ kann als Eigenwert des Systems für die Eigenfunktion $e^{j\omega_0 t}$ aufgefasst werden.
- Der Eigenwert charakterisiert eindeutig die Antwort eines LTI-Systems auf eine komplexe Harmonische $e^{j\omega_0 t}$.

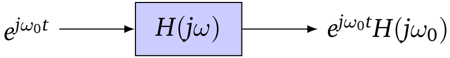
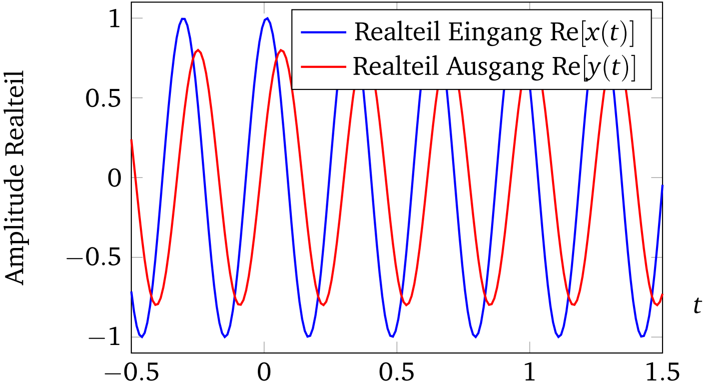



Abbildung: Übertragungsfunktion eines LTI-Systems

$$\mathcal{T}\{e^{j\omega_0 t}\} = e^{j\omega_0 t} \cdot H(j\omega_0)$$

# LTI-Systeme mit periodischen Eingängen
## Beispiel: Komplexe Harmonische am Eingang

$$x(t) = e^{j(\omega_0 t + \phi)}; \quad \phi = \frac{\pi}{3}; \quad H(j\omega_0) = 0.8e^{-j\frac{\pi}{2}}; \quad y(t) = 0.8e^{j(\omega_0 t + \phi - \frac{\pi}{2})}$$



# LTI-Systeme mit periodischen Eingängen

Die Systemantwort, $y(t)$, eines LTI-Systems auf den periodischen Eingang $x(t)$ lässt sich aus der Fourierreihenentwicklung einfach bestimmen.

Das Signal $x(t)$ sei mit $T_0$ und $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ periodisch.

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{j\omega_0 n t}.$$

Für harmonische Eingänge $x(t)$ gilt in LTI-Systemen mit der Impulsantwort $h(t)$:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{H(n \cdot j \cdot \omega_0) \, c_n}_{Y_n} \, e^{j\omega_0 n t}.$$

# LTI-Systeme mit periodischen Eingängen

Die Systemantwort $H(n \cdot j \cdot \omega_0)$ ist für jedes $n$ eine komplexwertige Konstante.

Daher ist der Ausgang $y(t)$ genau wie der Eingang periodisch.

Die Fourierkoeffizienten des Signals $y(t)$ am Ausgang berechnen sich zu $Y_n = H(n \cdot j \cdot \omega_0)\, c_n$.

Die Periodendauer von $y(t)$ ist daher identisch mit der von $x(t)$.

Die Antwort eines LTI-Systems auf einen mit $T_0$ periodischen Eingang ist ebenfalls mit $T_0$ periodisch.

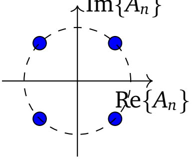
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\omega_0 nt} \longrightarrow \boxed{H(n \cdot j \cdot \omega_0)} \longrightarrow y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{H(n \cdot j \cdot \omega_0) c_n}_{Y_n} e^{j\omega_0 nt}$$

$$\mathcal{T}\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{j\omega_0 nt}\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{H(n \cdot j \cdot \omega_0)\, c_n}_{Y_n}\, e^{n \cdot j \cdot \omega_0}$$

# Beispiel: OFDM System

Orthogonal Frequency Division Multiplexing (OFDM): $N$ Trägerfrequenzen $\{\omega_n\}_{n=1}^N$ zur digitalen Datenübertragung.

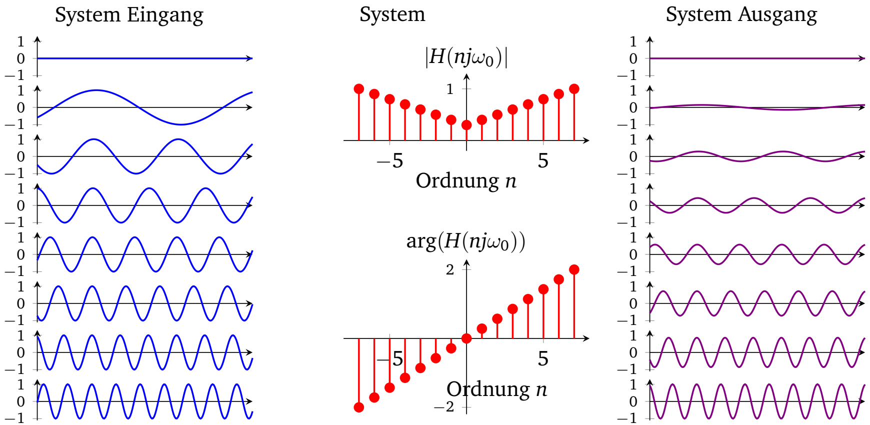
Information werden als komplex-wertige Symbole $\{A_n\}_{n=1}^N$ auf Träger $e^{j\omega_n t}$ moduliert.




$$x(t) = \sum_{n=1}^{N-1} \underbrace{A_n}_{\text{Symbol}} \cdot \underbrace{e^{j\omega_n t}}_{\text{Träger bei Frequenz} \omega_n}$$

QPSK Konstellationsdiagramm

# Beispiel: LTI-System



# Zusammenfassung der wichtigsten Ergebnisse

- Jedes periodische Signal lässt sich als unendliche Summe von Sinus- und Kosinussignalen darstellen, wobei die kleinste Periodendauer dieser trigonometrischen Funktionen gleich der kleinsten Periodendauer des darzustellenden periodischen Signals ist.

- Die trigonometrische Fourierreihenentwicklung stellt einen Sonderfall einer Reihendarstellung mittels orthogonaler Basisfunktionen dar.

- Die Orthogonalitätseigenschaft der Sinus- und Kosinusfunktionen bzw. der komplexen Exponentialfunktionen für verschiedene Ordnungen der Grundfrequenz $\omega_0$ erlaubt es uns, die Fourierreihenkoeffizienten auf einfache Weise zu berechnen.