



Kap. 1: Einführung

Amplitude

Abtastung

$$\frac{1}{T_p} = \frac{1}{nT_b} \geq 2f_m$$

T_p

Abtastrate Zeit

Amplitude

A_7

A_6

A_5

A_4

A_3

A_2

A_1

A_0

Quantisierung

Zeit

Codierung

Digitales Basisbandsignal

0 1 0 0 1 1 1

A
 $\frac{A}{2}$
0

$T_p = n \cdot T_b$

T_b



IMP

5 Abtastung eines bandbegrenzten Signals

5.1 Ideale Signalabtastung und Pulsamplitudenmodulation

5.2 Rückgewinnung des abgetasteten Signals und Zeitmultiplex

5.3 Pulsdauer- und Pulswinkelmodulation

5.3.1 Pulsdauermodulation

5.3.2 Pulswinkelmodulation

6 Pulscodemodulation (A/D-Wandlung)

6.1 Erzeugung der Pulscodemodulation

6.2 Analog/Digital-Wandlung mit linearer Quantisierung

6.1.1 Erforderliche Bandbreite zur Übertragung

6.1.2 Quantisierungsparameter

6.1.3 Quantisierungsfehler & -rauschleistung

6.1.4 Verfahren zur Analog/Digital-Wandlung

6.3 Nichtlineare Quantisierung

PCM – Übertragungssystem

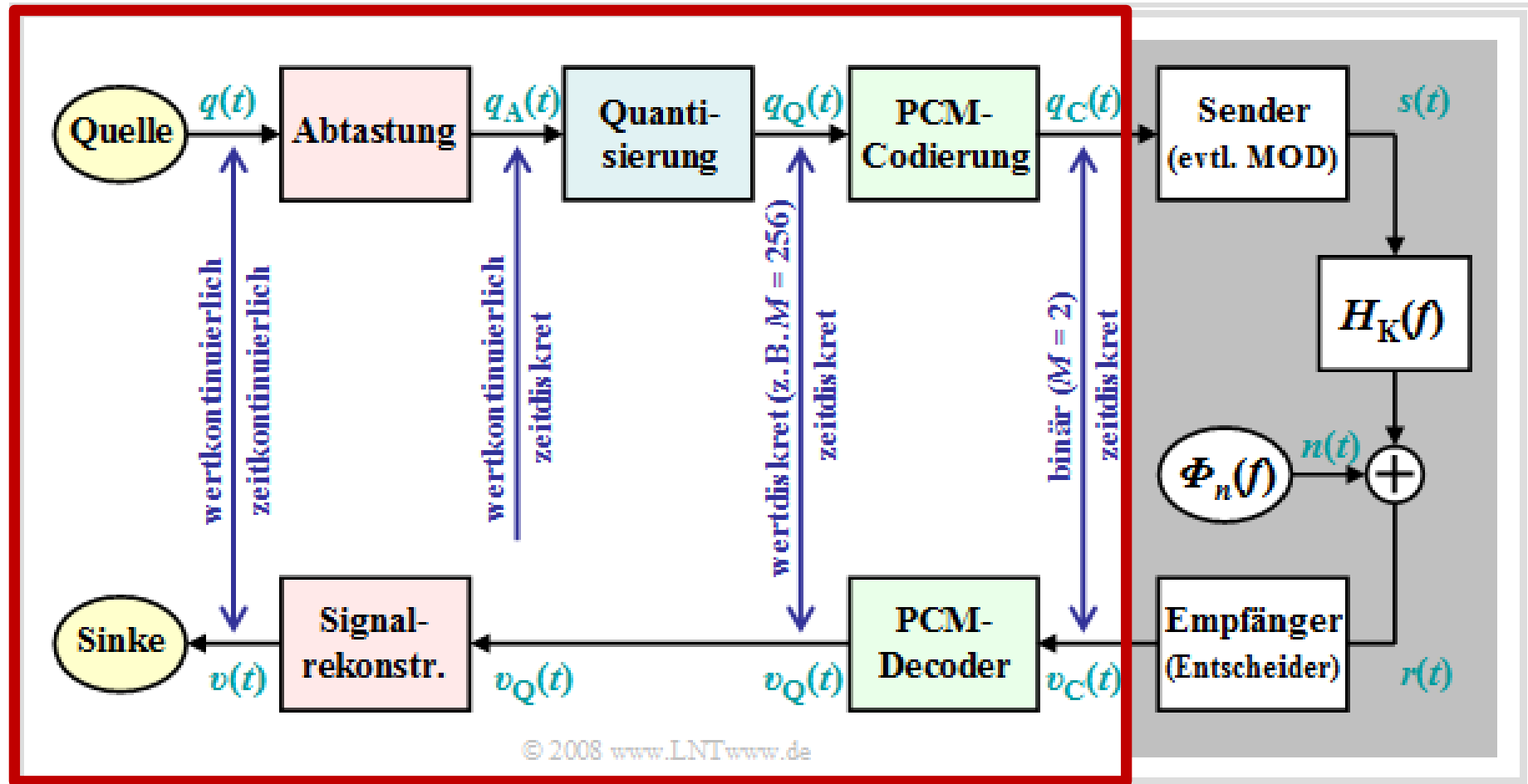
Digitaler Sender und Empfänger

<https://www.lntwww.de/Modulationsverfahren/Pulscodemodulation>

Erzeugung eines PCM-Datensignals (Digitales Basisbandsignal)



UNIVERSITÄT
DARMSTADT

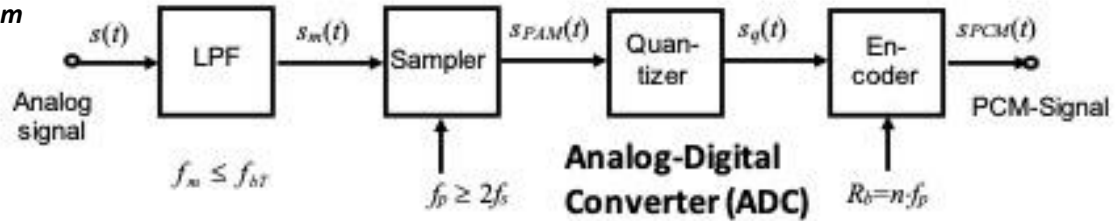


Kap. 6: Erzeugung eines PCM-Datensignals
Einfaches Beispiel zur Einführung

Kap. 9: Digitale
Modulation

Erzeugung eines PCM-Datensignals (Digitales Basisbandsignal)

$s_m(t)$
Band-limited, analog modulated
signal with maximum frequency f_m
4V



0V
0 T_p $2T_p$ $3T_p$ $4T_p$ $5T_p$ $6T_p$ $7T_p$ $i \cdot T_p$ t

$$s_{PAM}(t) = s_m(i \cdot T_p)$$

After Sampler

Sampling

f_m = maximale
Frequenz

$$f_p \geq 2f_m$$

$N = 4$ Amplitudenstufen

Abtastung
im Intervall $T_p \leq \frac{1}{2 \cdot f_m}$

$x_4 = 4V$
 $x_3 = 3V$
 $x_2 = 2V$
 $x_1 = 1V$

0V
0 T_p $2T_p$ $3T_p$ $4T_p$ $5T_p$ $6T_p$ $7T_p$ $i \cdot T_p$ t

$s_q(t)$

After Quantizer

Quantizing

Quantisierung
 $N = 4$ Amplitudenstufen

k	Decision thresholds x_i	Quantizing values y_k
4	$x_3 < s_m(i \cdot T_p) \leq x_4$	$y_4 = 3.5V$
3	$x_2 < s_m(i \cdot T_p) \leq x_3$	$y_3 = 2.5V$
2	$x_1 < s_m(i \cdot T_p) \leq x_2$	$y_2 = 1.5V$
1	$0 < s_m(i \cdot T_p) \leq x_1$	$y_1 = 0.5V$

Codierung
mit $n = 2$ Bits

Codierung eines Abtastwertes mit
Bittiefe $n = \text{lb}(N) \rightarrow n$ Bits der Bitdauer T_b

0V
0 T_p $2T_p$ $3T_p$ $4T_p$ $5T_p$ $6T_p$ $7T_p$ $i \cdot T_p$ t

$$e(i \cdot T_p) = s_m(i \cdot T_p) - s_q(i \cdot T_p)$$

Quantizing Error

N-Quantizing amplitudes	Coding $n=\text{lb}(N)$ Bits
$s_q(t) = 0.5V$	0 0
$s_q(t) = 1.5V$	0 1
$s_q(t) = 2.5V$	1 0
$s_q(t) = 3.5V$	1 1

Abtastintervall $T_p = n \cdot T_b \leq \frac{1}{2 \cdot f_m}$

0.5V

-0.5V T_p $2T_p$

$s_{PCM}(t)$ After Encoder

$$T_p = n \cdot T_b$$

Coding

Datenrate $R_b = \frac{1}{T_b} = \frac{n}{T_p} \geq n \cdot 2 \cdot f_m$

1V

0V
0 T_p $2T_p$ $3T_p$ t

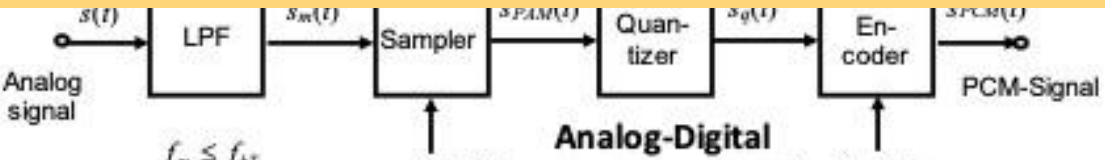
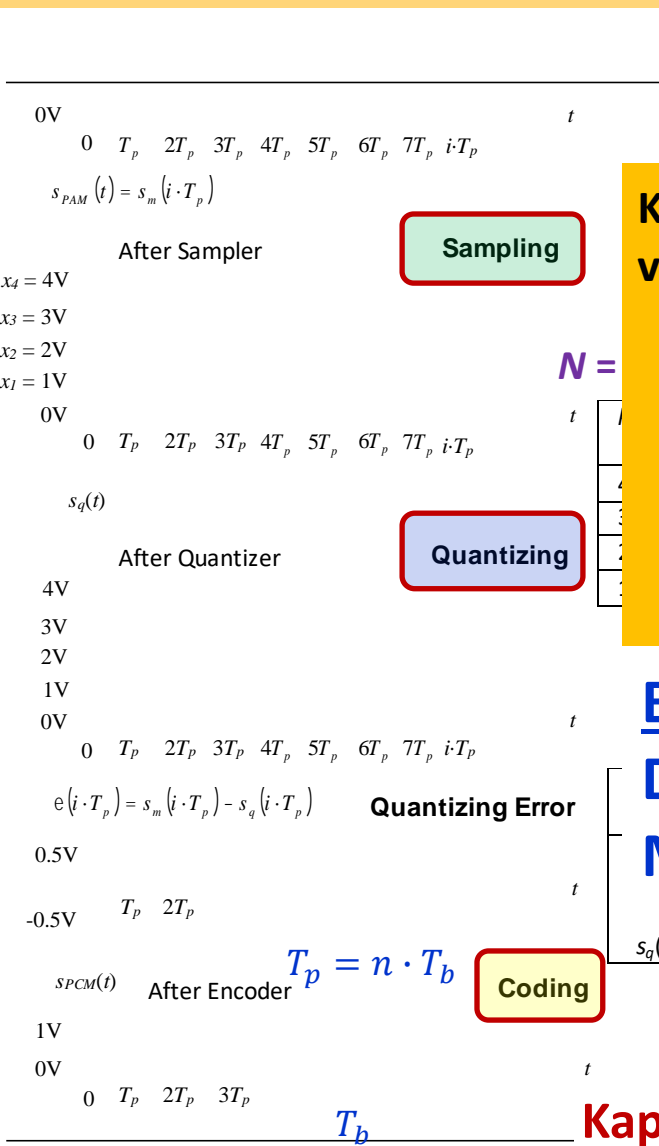
T_b

Kap. 1: Einführung

Erforderliche
Bandbreite $B_{min} = \frac{1}{2T_b} = \frac{n}{2T_p} \geq n \cdot f_m$

Hohe Übertragungsrate $R_b = 1/T_b$ (kurze Bitdauer T_b) bzw. große Codewortlängen n erfordern hohe Bandbreite B im Basisband

➔ $n \cdot$ Bandbreite f_m des analogen BB-Signals (z. B. Telefonie $f_m=3.4$ kHz)



Kleine Quantisierungsfehler erfordern hohe Auflösung, d.h. viele Amplitudenstufen $N = 2^n$ bzw. Codierungsbits $n = \text{lb}(N)$:

- Hohe Datenraten (binäre Signale)
 - Hohe Bandbreite erforderlich!
 - Geräteintern unkritisch
 - Übertragung aber teuer/aufwendig
- ==> mehrwertige Signale (später in Kap. 6)

Beispiele:
 Digitale PCM-Signale für Audio-CD, DVD, ...
 MP3-Quellencodierung (Datenkompression)

Datenrate $R_b = \frac{1}{T_b} = \frac{n}{T_p} \geq n \cdot 2 \cdot f_m$

Erforderliche Bandbreite $B_{min} = \frac{1}{2T_b} = \frac{n}{2T_p} \geq n \cdot f_m$

PCM-Signale & MP3-Datenkompression

Übliche Sample-Raten: 44.1 kHz (Musik CD), 48 kHz (DVD) und 96 kHz (Tonstudio)

Übliche Bits pro Codewort: 16 Bit (Musik CD) oder 24 Bit bzw. 32 Bit im Studio

Bandbegrenztes Audio-Signal (menschliches Gehör 20 Hz bis 20 kHz): $f_{max} \geq 20 \text{ kHz}$

Abtastrate $f_p \geq 2 \cdot f_{max} \geq 40 \text{ kHz}$

PCM-Übertragungs-/Bitrate: $R_b = n \cdot f_p \geq n \cdot 2 \cdot f_{max} \geq 16 \text{ bit} \cdot 40 \text{ kHz} = 640 \text{ kbit/s}$

Speicherplatz S in MB(yte) = $R_b \times 60 \text{ s} / 8 \text{ bit} = 4800 \text{ kB}$ (8 Bit = 1 Byte & 1024 Byte sind 1 MB)

Audio-CD Standard (WAV-Datenformat): Um bei CD eine Reserve zu haben, wurde ein **16-Bit-PCM-Signal** mit einer **Abtastrate von $f_p = 44.1 \text{ kHz}$** gewählt

- Bittiefe: $n = \text{lb}(N) = 16 \text{ bits}$ pro Codewort, $2^{16} = 65536$ Werte pro Sample ($D = 6 \cdot n = 96 \text{ dB}$)
- Stereo: $R_b = 2 \text{ Kanäle} \times 16 \text{ bit} \times 44.1 \text{ kHz} = 1411.2 \text{ kbit/s} \rightarrow S_{CD} = R_b \times 60 \text{ s} / 8 \text{ bit} = 10584 \text{ kB}$

MP3-Quellencodierung (Datenkompression):

Eingangssignal 16-Bit-PCM-Signal → Ausgangssignal MP3-codiert

- durchschnittliche Bitrate von 128 bis 192 kbit/s meist ideal, MAX 320 kbit/s
- z.B. **128 kbit/s** (Kompressionsverhältnis $\approx 1:11$) $\rightarrow S_{MP3} = 128 \text{ kbit/s} \times 60 \text{ s} / 8 \text{ bit} = 960 \text{ kB}$

Übertragung eines Liedes von 1 min über ISDN-Verbindung (64 kbit/s = 8 kB/s = 480 kB/min):

WAV-Format: 22.05 min und **MP3 128 kbit/s:** 2 min

Speicherung auf einer 10 GB Festplatte: **WAV-Format** ca. 944 min (15 CDs à 60 min) und **MP3 128 kbit/s** ca. 10417 min (173 CDs)

PCM-Signale & MP3-Datenkompression

Übliche Sample-Raten: 44.1 kHz (Musik CD), 48 kHz (DVD) und 96 kHz (Tonstudio)

Übliche Bits pro Codewort: 16 Bit (Musik CD) oder 24 Bit bzw. 32 Bit im Studio

AAC (Apple Audio-Streaming) für bessere Soundqualität: digitale Anlieferungen von Musik mit 48 kHz Samplerate und 24 bit Bittiefe

PCM-Bitrate (Stereo): $R_b = 2 \text{ Kanäle} \cdot 24 \text{ bit} \cdot 48 \text{ kHz} = 2304 \text{ kbit/s}$

VORTEILE 48 kHz SAMPLERATE

- Master for Itunes nun verlustfrei (Lossless encoding)
- Bessere anti-aliasing Filter (TP oder „Hi-Cuts“), die bei einer Samplerate von 48 kHz wesentlich weniger Verzerrungen erzeugen als mit einer Samplerate von 44.1 kHz

NACHTEILE 48 kHz SAMPLERATE

- Mehr benötigter Speicherplatz

Menschliche Ohr hört nur von 20 Hz bis 20 kHz; laut wissenschaftlichen Studien kann das **Ohr über die Knochenschallaufnahme Frequenzen bis 50 kHz wahrnehmen**. Was hier aber viel entscheidender ist, ist die Tatsache das eine **Begrenzung bei 22.05 kHz sich auch negativ auf die Berechnungen innerhalb des hörbaren Frequenzbereiches (20 Hz bis 20 kHz) auswirkt**. Dieses Hörspektrum wird durch Alter, Beruf und Geschlecht beeinflusst. **Mit zunehmendem Alter verringert sich die Hörbarkeit der oberen Frequenzen auf etwa 12 kHz**. Töne, die höher sind als der hörbare Frequenzbereich, nennt man Ultraschall, niedrigere Infraschall. **Junge Menschen hören oft noch einige kHz im Ultraschallbereich.**

6 Pulscodemodulation (A/D-Wandlung)

6.1 Erzeugung der Pulscodemodulation

6.2 Analog/Digital-Wandlung mit linearer Quantisierung

6.2.1 Erforderliche Bandbreite zur Übertragung von binären NRZ-Signalen

6.2.2 Verfahren zur Analog/Digital-Wandlung

6.2.3 Quantisierungsfehler und Quantisierungsrauschleistung

6.3 Nichtlineare Quantisierung

6.4 PCM-Übertragungssystem

6.4.1 Bitfehlerwahrscheinlichkeit

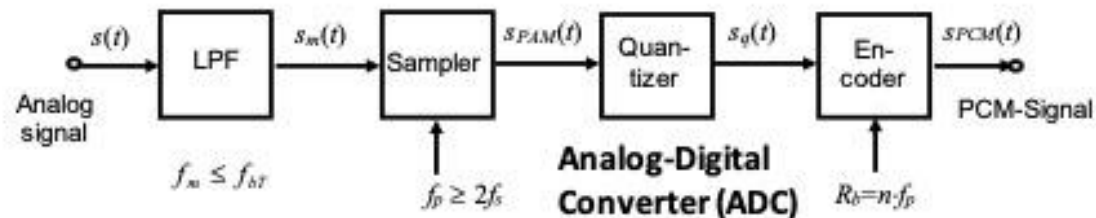
6.4.2 Fehlerwahrscheinlichkeit des PCM-Codewortes

6.5 PCM-Zeitmultiplex

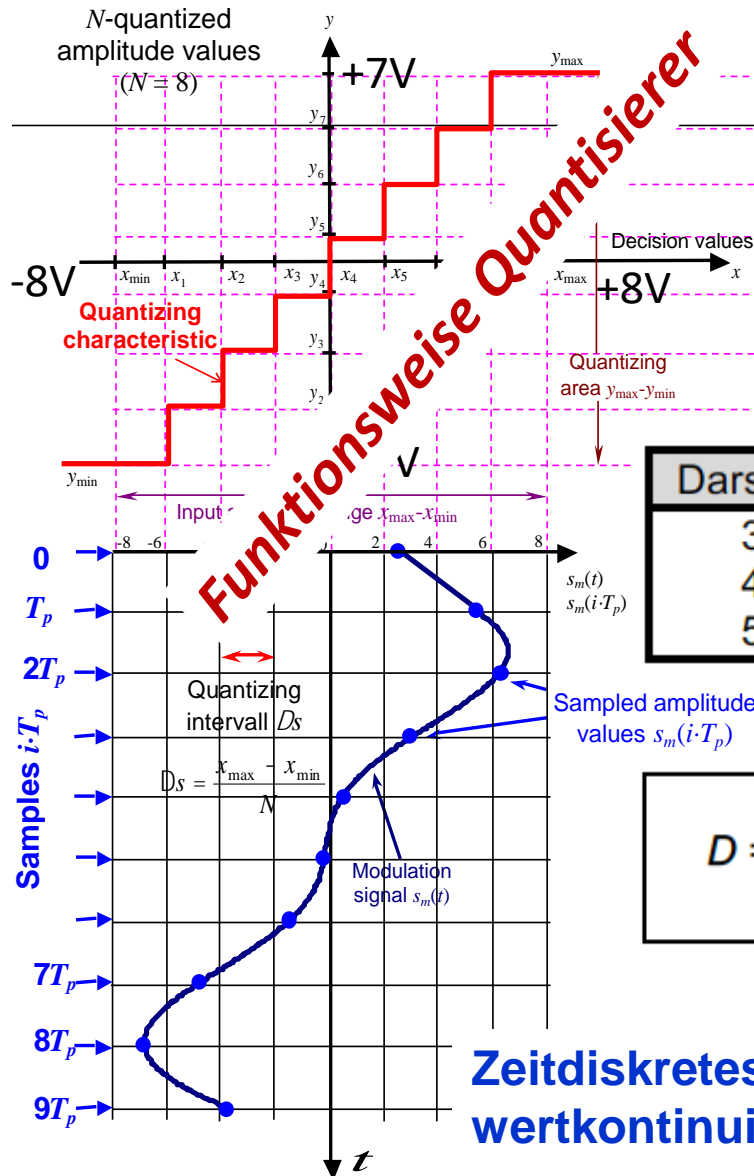
6.5.1 Getrennte Codierung

6.5.2 Zentrale Codierung

6.6 Beispiel: PCM30-Grundsystem (ISDN)



b) Gleichmäßige Quantisierung



Funktionsweise Quantisierer

$N=8$ Amplitudenstufen von $x_{\min} = -8V$ bis $x_{\max} = +8V$ ($y_{\min} = -7V$; $y_{\max} = +7V$)

Auflösungs(vermögen) (resolution)

$$\Delta s = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{N}$$

$$= \frac{8V - (-8V)}{8} = 2V$$

$$\Delta s = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{N - 1}$$

$$= \frac{7V - (-7V)}{8 - 1} = 2V$$

Darstellung	Quantisierungsintervalle N	Auflösung Δs
3-bit	$N = 2^3 = 8$	2 V
4-bit	$N = 2^4 = 16$	1 V
5-bit	$N = 2^5 = 32$	0.5 V

Dynamik(bereich) (dynamic range)

$$D = 20 \cdot \lg \left(\frac{x_{\max} - x_{\min}}{\Delta s} \right)$$

Erhöhung um 1bit

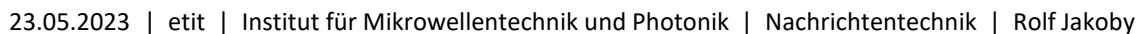
→ Auflösung verdoppelt

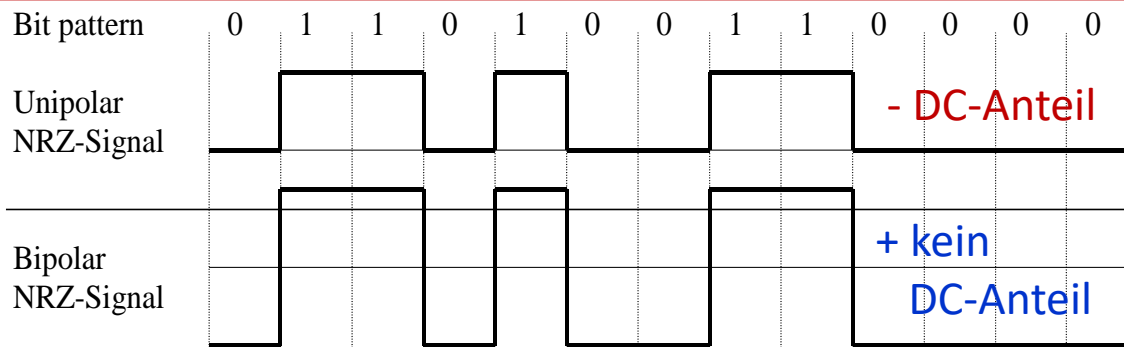
→ Dynamik steigt um 6 dB

$$= 20 \cdot \lg(N) = 20 \cdot \lg(2^n) = n \cdot \underbrace{20 \cdot \lg(2)}_{6 \text{ dB}} = 6 \cdot n \text{ in dB}$$

Zeitdiskretes (abgetastete) & wertkontinuierliches Eingangssignal

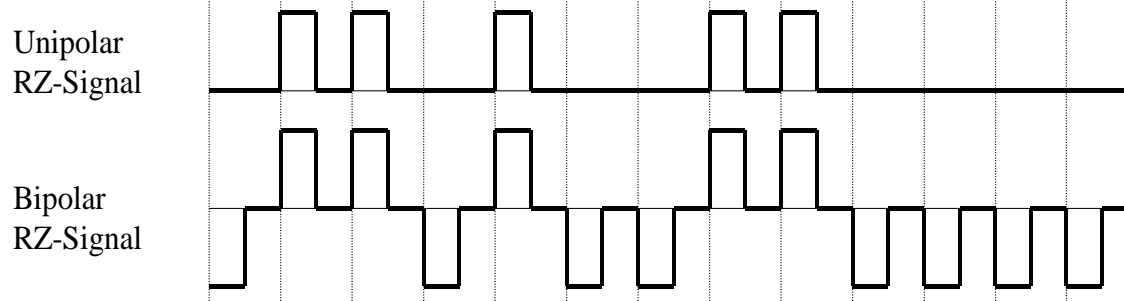
Codierung





Unipolarer/Bipolarer NRZ-Code

- + einfachster Code, wenig Bandbreite
- keine Taktregeneration möglich bei langen 0-/1-Folgen. Code ungeeignet für synchrone serielle Übertragung. Wird aber geräteintern verwendet.



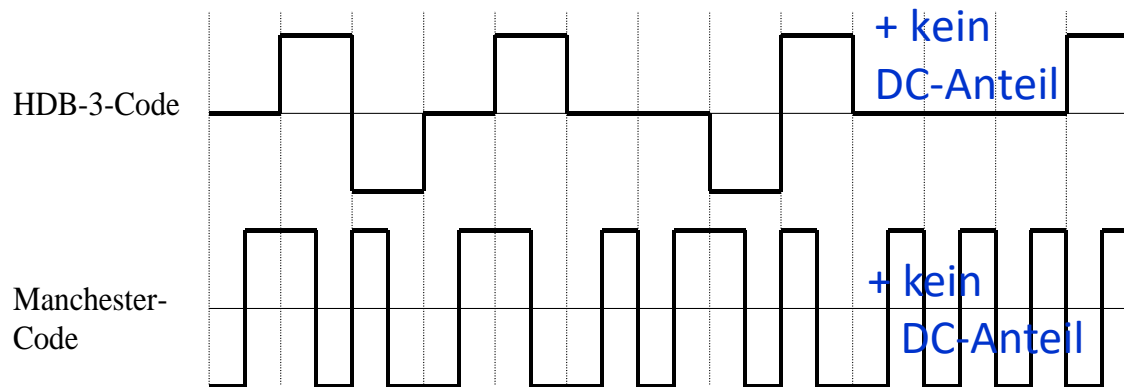
Unipolarer/Bipolarer RZ-Code

- + Taktregeneration im Empfänger möglich (außer bei langen 0-Folgen)
- große Bandbreite, da Pulse bei gleicher Datenrate nur noch halb so breit sind
- + Taktregeneration im Empfänger stets möglich (Synchron.)

HDB-3-Code für Weitdistanzübertragungen über Koaxialkabel.

ITU-R: Normcode für PCM-Übertragungen auf den Hierarchien 2 MBit/s und 34 MBit/s.

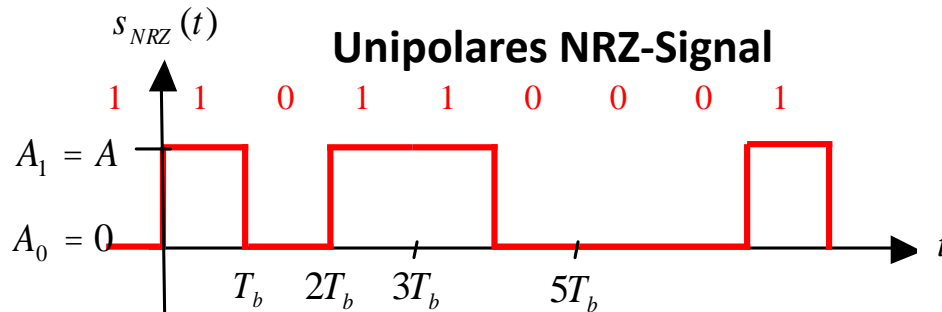
Kleine Bandbreite & Sichere Synchronisation des Empfängers



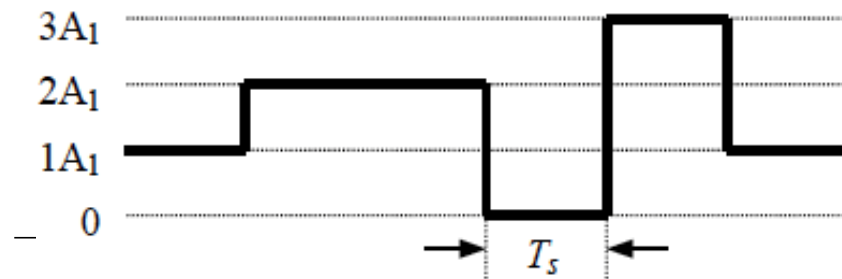
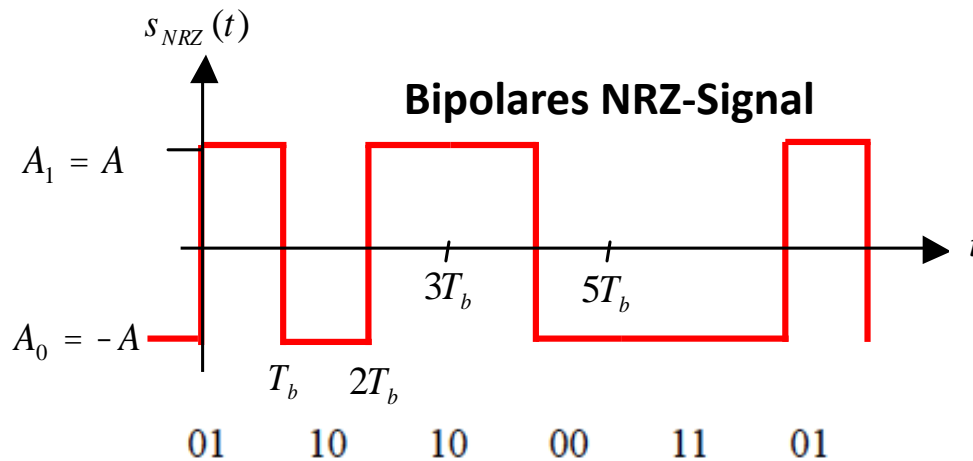
Manchester Codierung für serielle Übertragung über kürzere Distanzen. Schaltflanken treten in der Mitte des Bitintervalls auf → stellen Synchronisation des Empfängers sicher (ausreichende Taktinformation).

Basisbandsignale

Uni- und Bipolare NRZ-Signale



➤ **Geräte-intern**
→ **zweiwertige Signale**



➤ **Kanalübertragung**
→ **Mehrwertige Modulations-
signale (Mapping)**

6 Pulscodemodulation (A/D-Wandlung)

6.1 Erzeugung der Pulscodemodulation

6.2 Analog/Digital-Wandlung mit linearer Quantisierung

6.2.1 Erforderliche Bandbreite zur Übertragung von binären NRZ-Signalen

6.2.2 Verfahren zur Analog/Digital-Wandlung

6.2.3 Quantisierungsfehler und Quantisierungsrauschleistung

6.3 Nichtlineare Quantisierung

6.4 PCM-Übertragungssystem

6.4.1 Bitfehlerwahrscheinlichkeit

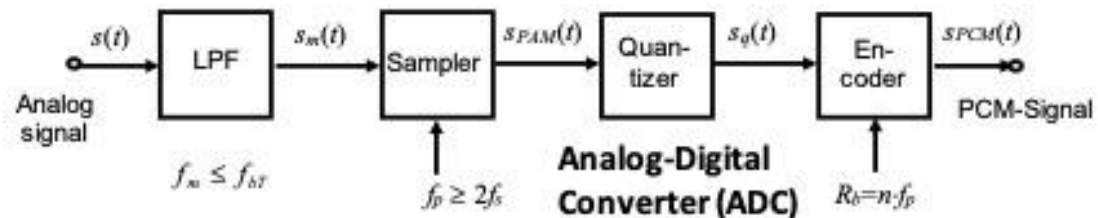
6.4.2 Fehlerwahrscheinlichkeit des PCM-Codewortes

6.5 PCM-Zeitmultiplex

6.5.1 Getrennte Codierung

6.5.2 Zentrale Codierung

6.6 Beispiel: PCM30-Grundsystem (ISDN)



Sampler

Quantizer

Encoder

Parallel to serial converter

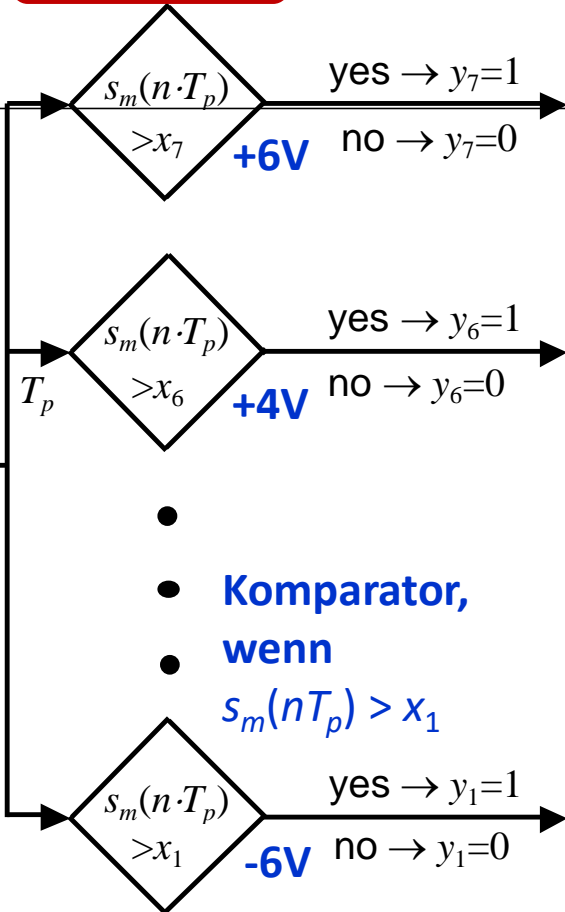
Schaltungstechnische Umsetzung der A/D-Wandlung

Amplitudenbereich $\pm 8V$

Idealer Abtaster
 $s_m(t)$
 $s_m(n \cdot T_p)$

$$\frac{1}{T_p} \geq 2 \cdot f_m$$

Abtasttheorem



- Komparator, wenn $s_m(nT_p) > x_1$

Verfahren zur Analog-Digital-Wandlung

- (1) Zählverfahren
- (2) Iterationsverfahren
- (3) Direktverfahren (Parallelcodierer)

MSB (most significant bit)

n -ary codeword

b_2
 b_1
 b_0

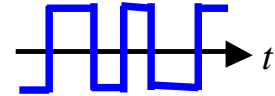
LSB (least significant bit)

Logic Circuit

$$b_2 = y_4$$

$$b_1 = y_6 \vee (y_2 \wedge y_4^{-1})$$

$$b_0 = y_7 \vee (y_5 \wedge y_6^{-1}) \vee (y_3 \wedge y_4^{-1}) \vee (y_1 \wedge y_2^{-1})$$



PCM-signal $s_{PCM}(t)$

Analog-Digital-Wandlung

Direktverfahren (Parallelcodierer)



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

									Codeword			Binary Number
	x_i	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	b_2	b_1	b_0	z
$s_m(n \cdot T_p) < x_1$	-6V	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$s_m(n \cdot T_p) > x_1$	-6V	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
$s_m(n \cdot T_p) > x_2$	-4V	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	2
$s_m(n \cdot T_p) > x_3$	-2V	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	3
$s_m(n \cdot T_p) > x_4$	0V	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	4
$s_m(n \cdot T_p) > x_5$	2V	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	5
$s_m(n \cdot T_p) > x_6$	4V	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	6
$s_m(n \cdot T_p) > x_7$	6V	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	7

$$b_2 2^2 + b_1 2^1 + b_0 2^0 = z$$

Sampler

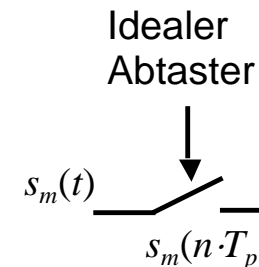
Quantizer

Encoder

Parallel to serial converter

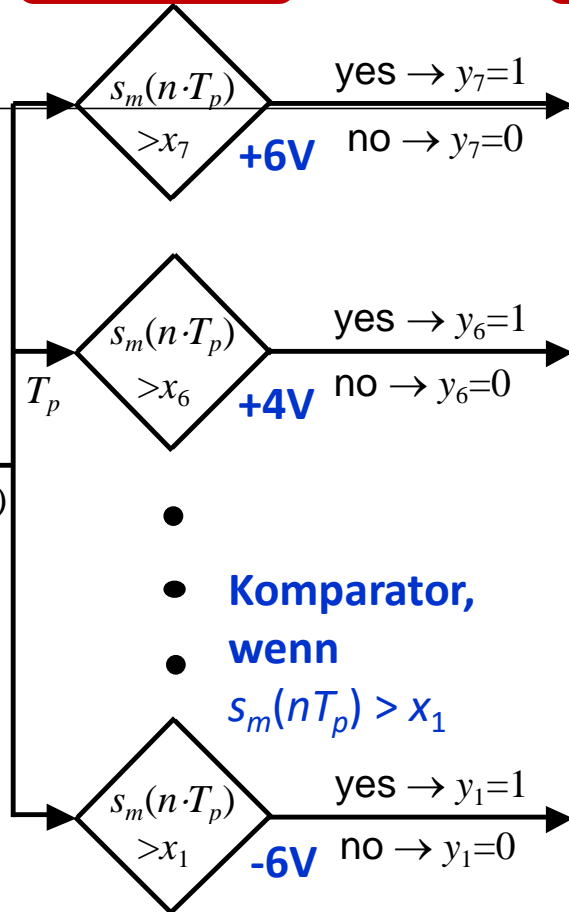
Schaltungstechnische Umsetzung der A/D-Wandlung

Amplitudenbereich $\pm 8V$



$$\frac{1}{T_p} \geq 2 \cdot f_m$$

Abtasttheorem



-
- **Komparator, wenn**
- **$s_m(nT_p) > x_1$**

Verfahren zur Analog-Digital-Wandlung

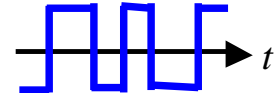
- (1) Zählverfahren
- (2) Iterationsverfahren
- (3) Direktverfahren (Parallelcodierer)

MSB (most significant bit)

n -ary codeword

b_2
 b_1
 b_0

LSB (least significant bit)



PCM-signal $s_{PCM}(t)$

Logic Circuit

$$b_2 = y_4$$

$$b_1 = y_6 \vee (y_2 \wedge y_4^{-1})$$

$$b_0 = y_7 \vee (y_5 \wedge y_6^{-1}) \vee (y_3 \wedge y_4^{-1}) \vee (y_1 \wedge y_2^{-1})$$

Analog-Digital-Wandlung

Direktverfahren (Parallelcodierer)



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

	x_i	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	Codeword			Binary Number
$s_m(n \cdot T_p) < x_1$	-6V	0	0	0	0	0	0	0	b_2	b_1	b_0	z
$s_m(n \cdot T_p) > x_1$	-6V	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
$s_m(n \cdot T_p) > x_2$	-4V	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	2
$s_m(n \cdot T_p) > x_3$	-2V	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	3
$s_m(n \cdot T_p) > x_4$	0V	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	4
$s_m(n \cdot T_p) > x_5$	2V	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	5
$s_m(n \cdot T_p) > x_6$	4V	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	6
$s_m(n \cdot T_p) > x_7$	6V	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	7

$$b_2 2^2 + b_1 2^1 + b_0 2^0 = z$$

Sampler

Quantizer

Encoder

Parallel to serial converter

Schaltungstechnische Umsetzung der A/D-Wandlung

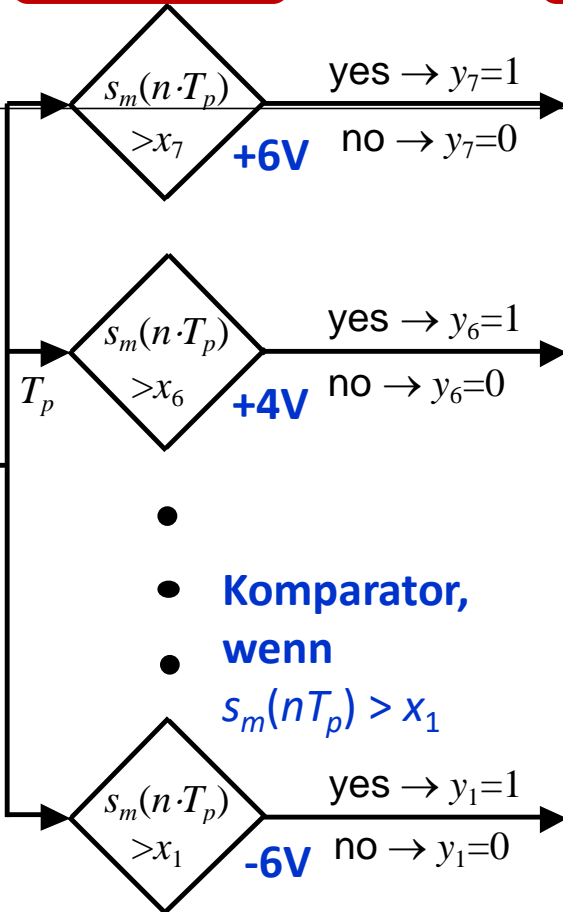
Amplitudenbereich $\pm 8V$

Idealer Abtaster

$s_m(t)$
 $s_m(n \cdot T_p)$

$$\frac{1}{T_p} \geq 2 \cdot f_m$$

Abtasttheorem



- Komparator, wenn $s_m(nT_p) > x_1$

Verfahren zur Analog-Digital-Wandlung

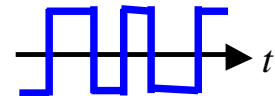
- (1) Zählverfahren
- (2) Iterationsverfahren
- (3) Direktverfahren (Parallelcodierer)

MSB (most significant bit)

n -ary codeword

b_2
 b_1
 b_0

LSB (least significant bit)



PCM-signal $s_{PCM}(t)$

Logic Circuit

$$b_2 = y_4$$

$$b_1 = y_6 \vee (y_2 \wedge y_4^{-1})$$

$$b_0 = y_7 \vee (y_5 \wedge y_6^{-1}) \vee (y_3 \wedge y_4^{-1}) \vee (y_1 \wedge y_2^{-1})$$

Inhalt der Nachrichtentechnik

Teil 2: Digitale Basisband-Signalverarbeitung



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

6 Pulscodemodulation (A/D-Wandlung)

6.1 Erzeugung der Pulscodemodulation

6.2 Analog/Digital-Wandlung mit linearer Quantisierung

6.2.1 Erforderliche Bandbreite zur Übertragung von binären NRZ-Signalen

6.2.2 Verfahren zur Analog/Digital-Wandlung

6.2.3 Quantisierungsfehler und Quantisierungsrauschleistung

6.3 Nichtlineare Quantisierung

6.4 PCM-Übertragungssystem

6.4.1 Bitfehlerwahrscheinlichkeit

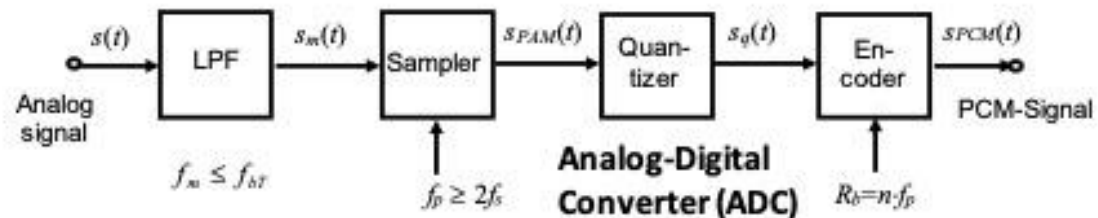
6.4.2 Fehlerwahrscheinlichkeit des PCM-Codewortes

6.5 PCM-Zeitmultiplex

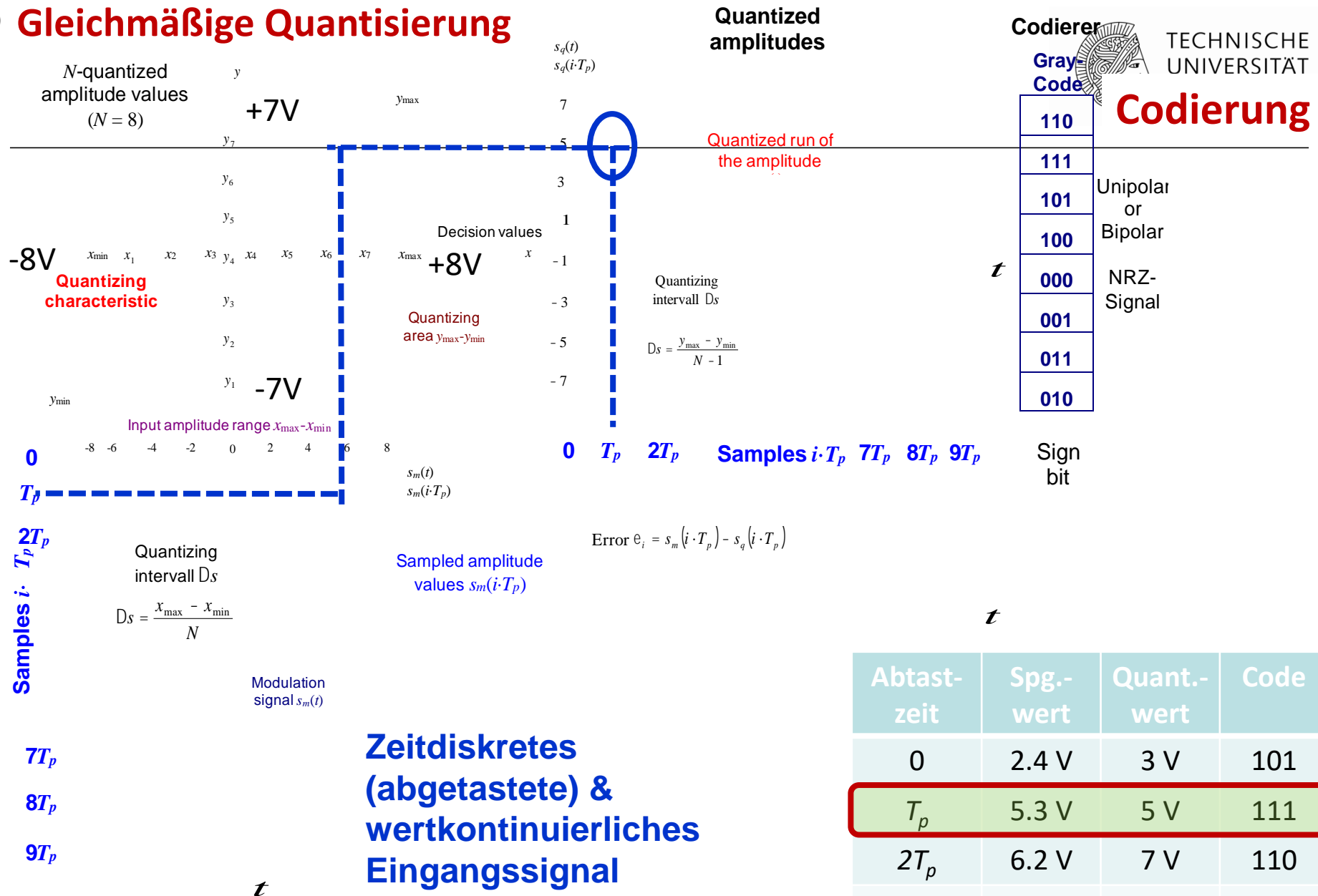
6.5.1 Getrennte Codierung

6.5.2 Zentrale Codierung

6.6 Beispiel: PCM30-Grundsystem (ISDN)



b) Gleichmäßige Quantisierung



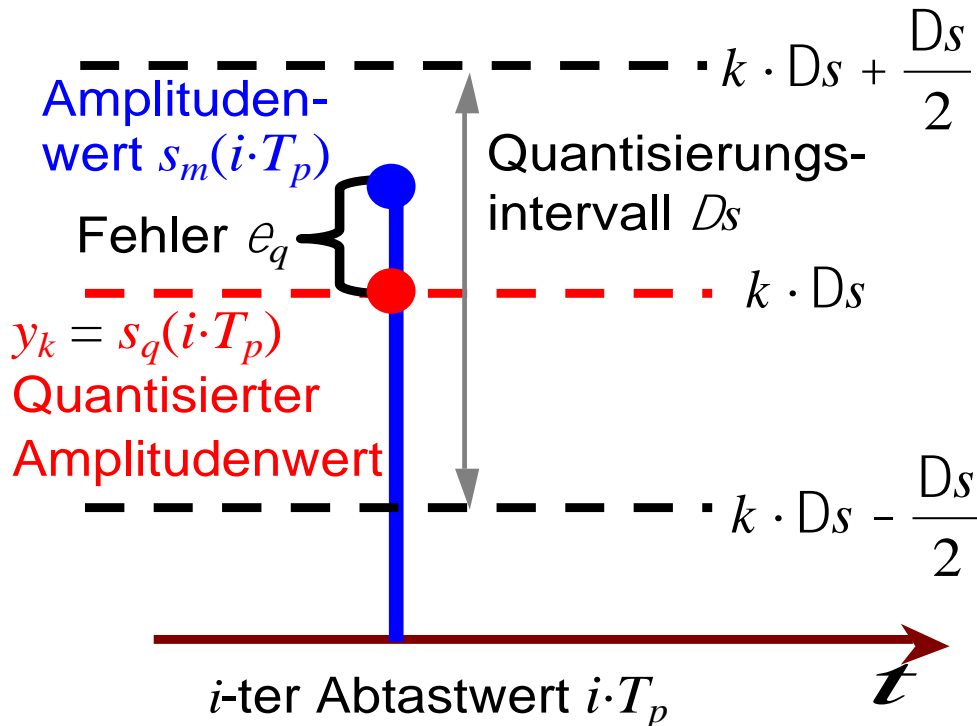
Quantisierungsfehler & Quantisierungsleistung

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für das PCM-Fehlersignal



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

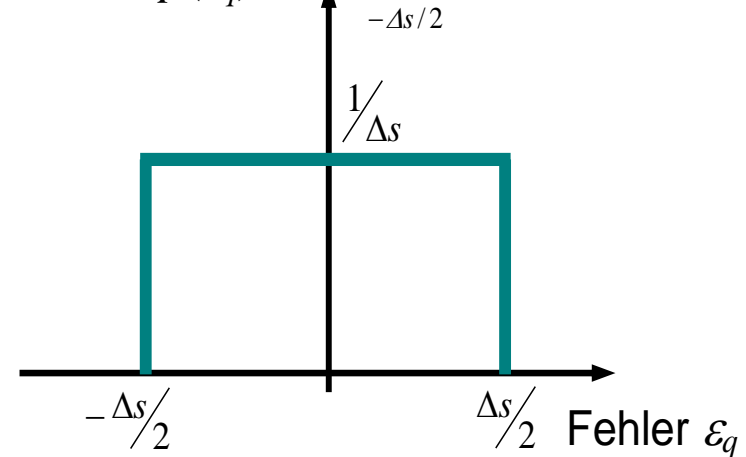
$$\varepsilon_q(i \cdot T_p) = s_m(i \cdot T_p) - s_q(i \cdot T_p)$$



Quantisierungsrauschleistung

$$P_q = \frac{1}{R} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} p(\varepsilon_q) \cdot \varepsilon_q^2 d\varepsilon_q$$

Probability density function $p(\varepsilon_q)$

$$\int_{-\Delta s/2}^{\Delta s/2} p(\varepsilon_q) d\varepsilon_q = 1$$


Quantisierungsfehler & Quantisierungsleistung

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für das PCM-Fehlersignal



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

$$P_q = \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{\Delta s} \cdot \int_{-\Delta s/2}^{+\Delta s/2} \varepsilon_q^2 d\varepsilon_q$$
$$= \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{\Delta s} \cdot \frac{\varepsilon_q^3}{3} \bigg|_{-\Delta s/2}^{+\Delta s/2}$$

$$P_q = \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{\Delta s} \cdot \frac{1}{3} \left\{ \frac{\Delta s^3}{8} - \left(-\frac{\Delta s^3}{8} \right) \right\}$$
$$= \frac{1}{R} \cdot \frac{\Delta s^2}{12}$$

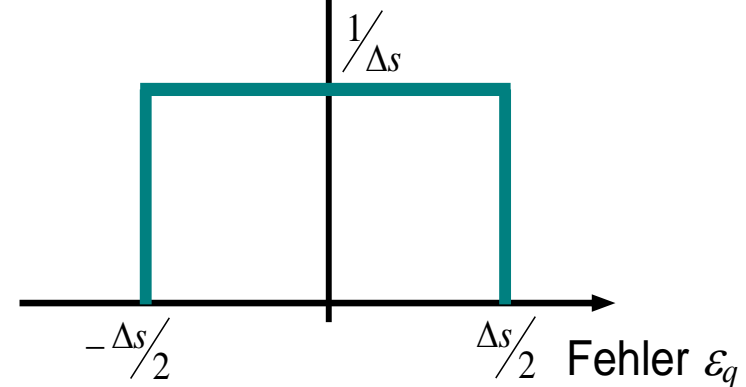
Signal-zu-Quantisierungsrauschverhältnis

$$SNR_q = 10 \cdot \lg \left(\frac{P_s}{P_q} \right) = 10 \cdot \lg \left(\frac{12 \cdot R \cdot P_s}{\Delta s^2} \right) \text{ in dB,}$$

Quantisierungsrauschleistung

$$P_q = \frac{1}{R} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} p(\varepsilon_q) \cdot \varepsilon_q^2 d\varepsilon_q$$

Probability density function $p(\varepsilon_q)$

$$\int_{-\Delta s/2}^{+\Delta s/2} p(\varepsilon_q) d\varepsilon_q = 1$$


Beispiel 6-1: Sinussignale bei Vollasssteuerung

Gegeben ist ein cos-förmiges Audiosignal (Testton) $s_m(t) = \hat{s}_m \cdot \cos(2\pi \cdot f_m \cdot t)$ mit der Amplitude $\hat{s}_m = 1 \text{ V}$, mit der der Quantisierer voll angesteuert wird ($x_{\min} = -1 \text{ V}$ bis $x_{\max} = 1 \text{ V}$).

Gesucht sind die Auflösung Δs , Dynamik D und SNR_q für eine Codewortlänge von $n_v = 3$ bis 8.

Lösung: Amplitudeneingangsbereich, Auflösungsvermögen

$$2 \cdot \hat{s}_m; \quad \Delta s = \frac{2 \cdot \hat{s}_m}{N}$$

Mittlere Signalleistung

$$P_s = \frac{\hat{s}_m^2}{2R} = \frac{\left(\frac{N \cdot \Delta s}{2}\right)^2}{2R} = \frac{(N \cdot \Delta s)^2}{8R}$$

Mittlere Quantisierungsrauschleistung

$$P_q = \frac{\Delta s^2}{12 \cdot R} = \frac{[2\hat{s}_m / N]^2}{12 \cdot R} = \frac{\hat{s}_m^2}{3 \cdot R \cdot N^2}$$

Signal-zu-Quantisierungsrauschverhältnis

$$SNR_q = 10 \cdot \lg \frac{P_s}{P_q} = 10 \cdot \lg \left(\frac{\hat{s}_m^2}{2 \cdot R} \cdot \frac{3 \cdot R \cdot N^2}{\hat{s}_m^2} \right)$$

$$SNR_q = 10 \cdot \lg \left(\frac{(N \cdot \Delta s)^2}{8R} \cdot \frac{12R}{\Delta s^2} \right) = 10 \cdot \lg \left(\frac{3 \cdot N^2}{2} \right) = \underbrace{10 \cdot \lg \left(\frac{3}{2} \right)}_{1.8 \text{ dB}} + 20 \cdot \lg(N) \approx 1.8 + 6 \cdot n_v \text{ in dB}$$

Codewort- länge n_v	Quantisierungs- intervalle $N = 2^{n_v}$	Auflösung $\Delta s = \frac{2 \cdot \hat{s}_m}{N}$ in mV	Dynamik $D = 20 \cdot \lg(N)$ in dB	SNR_q in dB
3	8	250	18.06	19.82 dB
4	16	125	24.08	25.84 dB ↙ 6 dB
5	32	62.5	30.10	31.86 dB ↙ 6 dB
6	64	31.25	36.12	37.88 dB ↙ 6 dB
7	128	15.625	42.14	43.9 dB ↙ 6 dB
8	256	7.8125	48.16	49.9 dB ↙ 6 dB

Tab. 6-1: Auflösung Δs , Dynamik D und Rauschabstand des quantisierten cos-Signals für Codewortlängen $n_v=3$ bis 8.

Ergebnis: Jedes zusätzliche Bit zur Quantisierung erhöht das SNR_q um etwa 6 dB, d.h. es ergibt sich ein 6dB-Gewinn pro Bit Wortbreite.

Beispiel 6-2: Zufallssignale (Sprache, Musik) bei Teilaussteuerung

Bei zufälligen Eingangssignalen muss auf eine starke Aussteuerung verzichtet werden, da gelegentliche hohe Momentanwerte den Quantisierer übersteuern würden ($s_m(t) > x_{\max} + \Delta s/2$). Dies führt zu nichtlinearen Verzerrungen. Eine Faustregel für die Aussteuerung ist, dass die üblichen **Signalamplituden nur ein Viertel des Aussteuerungsbereiches des Quantisierers aussteuern** sollen. D.h. bei positiven und negativen Amplituden wird nur ein Achtel des Gesamtaussteuerungsbereichs genutzt:

$$\frac{x_{\max}}{4} = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{8} = \frac{N \cdot \Delta s}{8} = \frac{2^n \cdot \Delta s}{2^3} = 2^{n-3} \cdot \Delta s \stackrel{!}{=} \sqrt{R \cdot P_s} \Rightarrow P_s = \frac{1}{R} \cdot [2^{n-3} \cdot \Delta s]^2$$
$$\Rightarrow SNR_q = 10 \cdot \lg\left(\frac{P_s}{P_q}\right) = 10 \cdot \lg\left(\frac{[2^{n-3} \cdot \Delta s]^2}{R} \cdot \frac{12 \cdot R}{\Delta s^2}\right)$$
$$P_q = \frac{1}{R} \cdot \frac{\Delta s^2}{12}$$
$$= 10 \cdot \lg(12 \cdot 2^{2(n-3)}) = 10 \cdot \lg\left(\frac{12}{64} \cdot 2^{2n}\right) = 10 \cdot \lg\left(\frac{3}{16}\right) + n \cdot \underbrace{20 \cdot \lg(2)}_{\approx 6\text{dB}} \approx -7.3 + 6 \cdot n \quad \text{in dB.}$$

$\underbrace{10 \cdot \lg\left(\frac{3}{16}\right)}_{\approx -7.27\text{dB}}$

Bei dieser Vorgabe einer Teilaussteuerung wird der Quantisierungsrauschabstand SNR_q bei gleicher Codewortlänge gegenüber der Vollaussteuerung mit einem Sinussignal **um 9.1 dB schlechter**.

Inhalt der Nachrichtentechnik

Teil 2: Digitale Basisband-Signalverarbeitung



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

6 Pulscodemodulation (A/D-Wandlung)

6.1 Erzeugung der Pulscodemodulation

6.2 Analog/Digital-Wandlung mit linearer Quantisierung

6.2.1 Erforderliche Bandbreite zur Übertragung von binären NRZ-Signalen

6.2.2 Verfahren zur Analog/Digital-Wandlung

6.2.3 Quantisierungsfehler und Quantisierungsrauschleistung

6.3 Nichtlineare Quantisierung

6.4 PCM-Übertragungssystem

6.4.1 Bitfehlerwahrscheinlichkeit

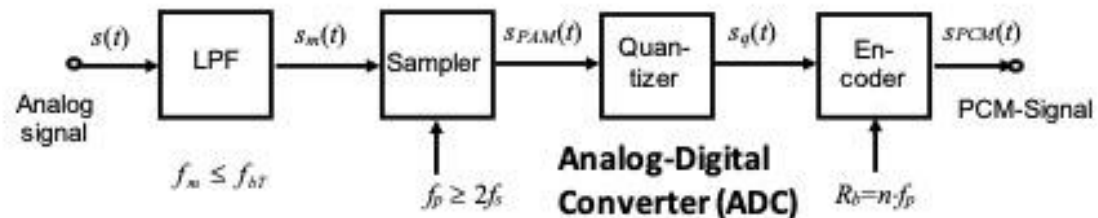
6.4.2 Fehlerwahrscheinlichkeit des PCM-Codewortes

6.5 PCM-Zeitmultiplex

6.5.1 Getrennte Codierung

6.5.2 Zentrale Codierung

6.6 Beispiel: PCM30-Grundsystem (ISDN)



6.3 Nichtlineare Quantisierung

Lineare Amplitudenquantisierung mit gleichgroßen Intervallen

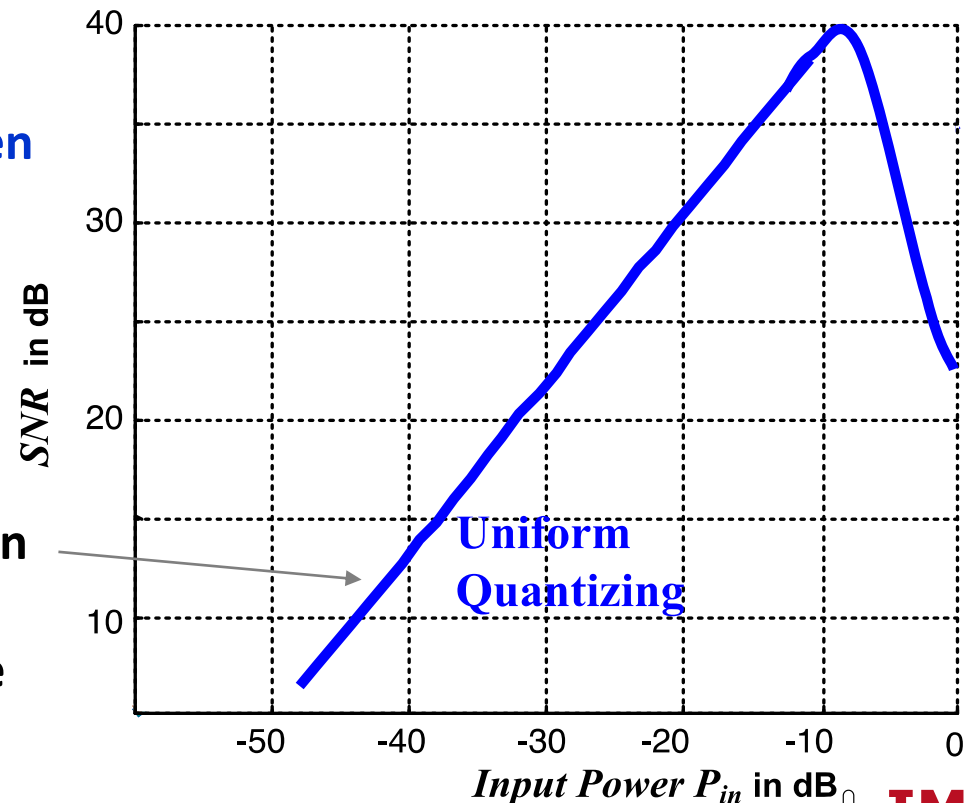
⇒ Absoluter Quantisierungsfehler für alle Eingangsamplituden gleich

⇒ Relative Quantisierungsfehler für kleine Signalamplituden größer

⇒ SNR_q stark abhängig
von den Eingangssignalamplituden

Geringes SNR_q für kleine Amplituden

Erwünscht: konstantes SNR_q für alle
Eingangsamplituden



6.3 Nichtlineare Quantisierung

Lineare Amplitudenquantisierung mit gleichgroßen Intervallen

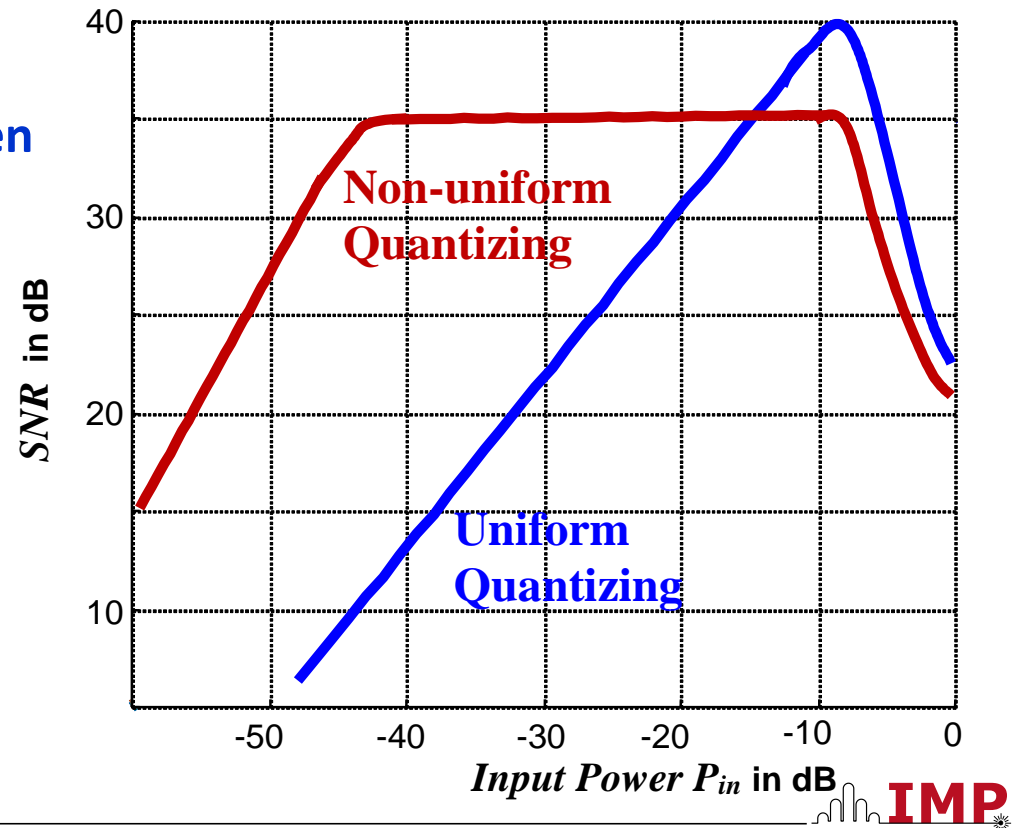
⇒ Absoluter Quantisierungsfehler für alle Eingangsamplituden gleich

⇒ Relative Quantisierungsfehler für kleine Signalamplituden größer

⇒ SNR_q stark abhängig
von den Eingangssignalamplituden

Konstantes SNR_q über einen großen
Eingangssignalamplitudenbereich
erfordert
nichtgleichmäßige Quantisierung

Weitere Gründe → nächste Folie

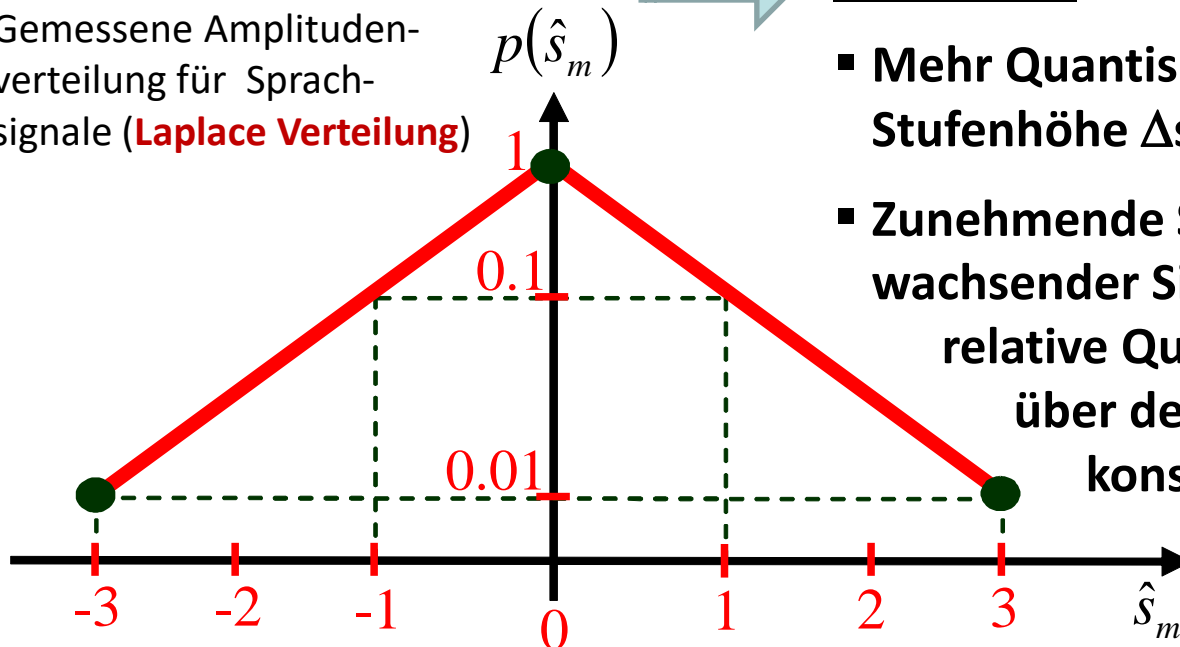


Nichtgleichmäßige Quantisierung

Sprach- und Musiksignale:

- Kleine Amplituden treten wesentlich häufiger auf als hohe Amplituden
→ gemessene Amplitudenverteilung für Sprachsignale (**Laplace Verteilung**)
- Menschliches Ohr bei großer Lautstärke unempfindlicher gegenüber dem Quantisierungsgeräusch.

Gemessene Amplitudenverteilung für Sprachsignale (**Laplace Verteilung**)

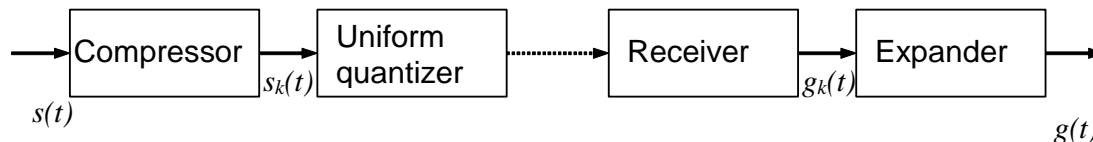
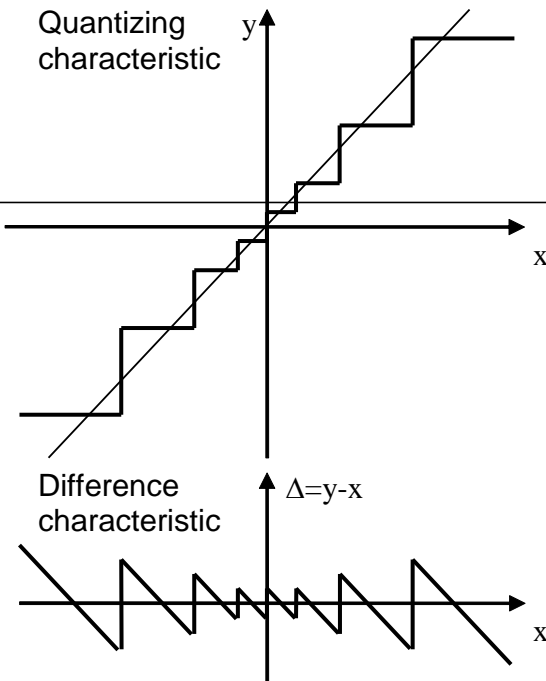


Forderung: **nichtgleichmäßige Quantisierung**

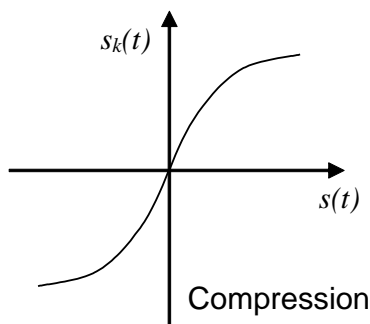
- Mehr Quantisierungsintervalle (geringere Stufenhöhe Δs) für kleine Amplituden
- Zunehmende Stufenhöhe Δs mit wachsender Signalamplitude, so dass der relative Quantisierungsfehler möglichst über den Amplitudeneingangsbereich konstant bleibt

Forderung: **nichtgleichmäßige Quantisierung**

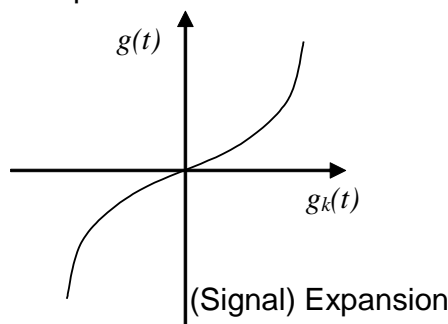
- Mehr Quantisierungsintervalle (geringere Stufenhöhe Δs) für kleine Amplituden
- Zunehmende Stufenhöhe Δs mit wachsender Signalamplitude, so dass der relative Quantisierungsfehler möglichst über den Amplitudeneingangsbereich konstant bleibt



Network with non-linear transmission characteristic



Characteristic inverse to compression characteristic

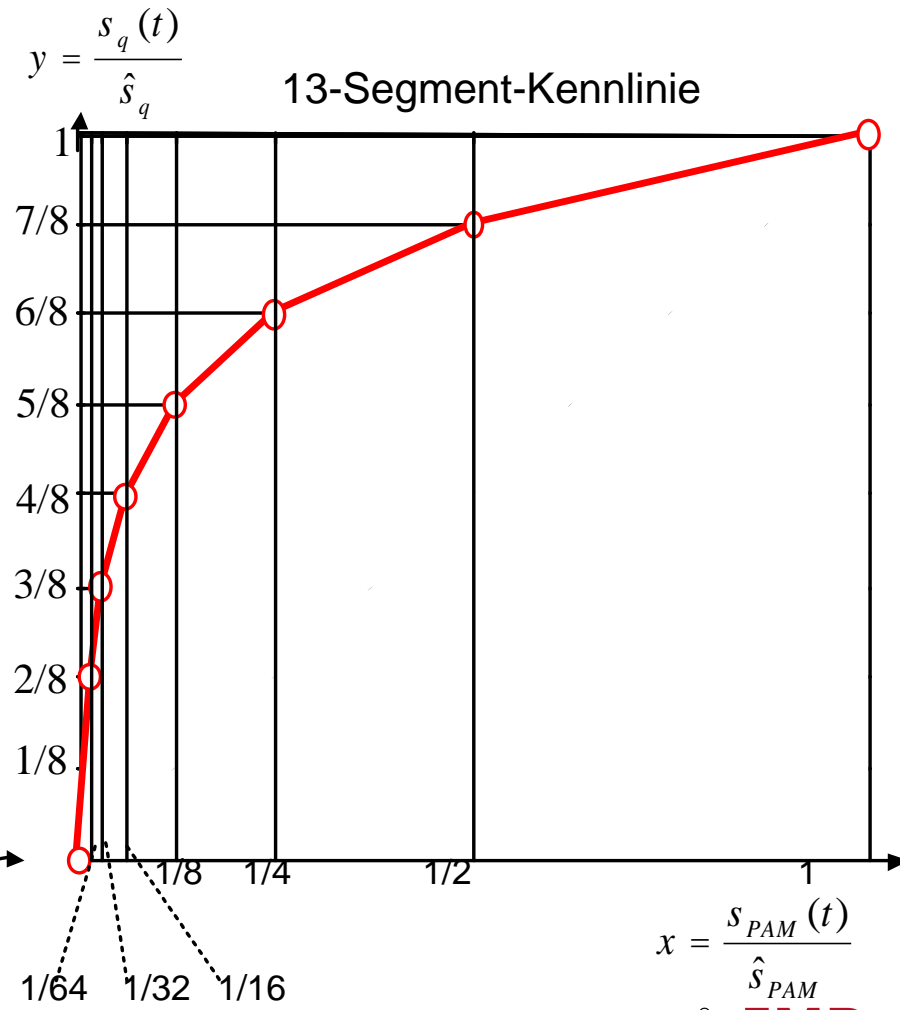
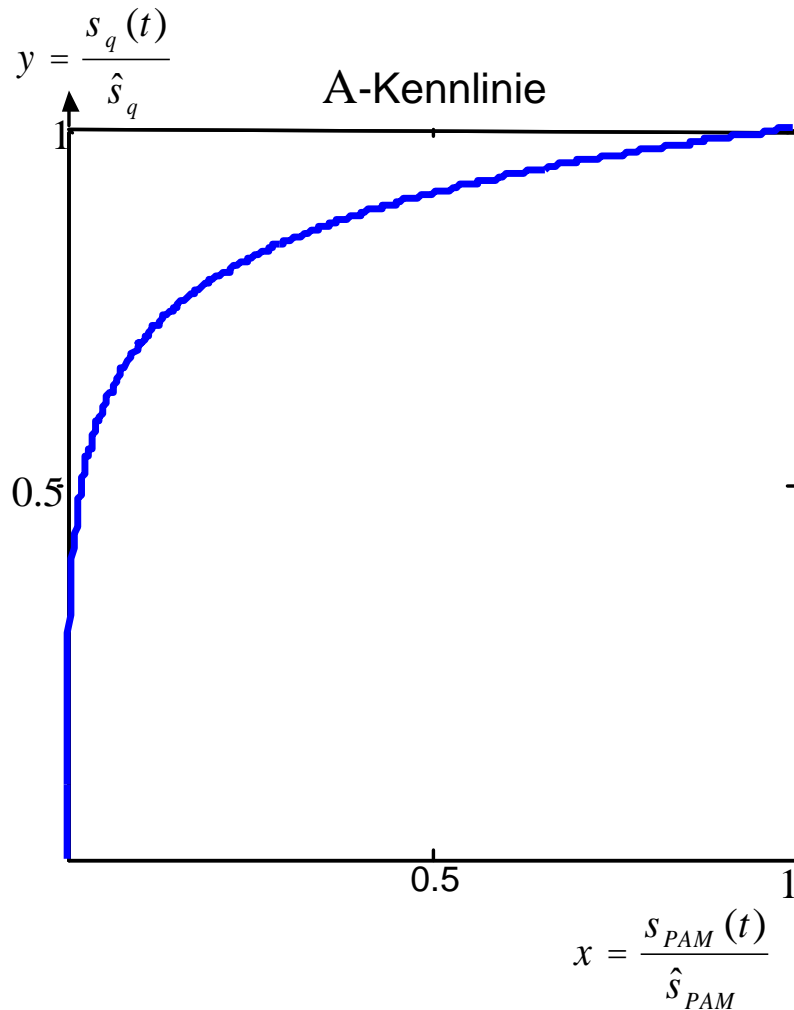


Prinzip der Nichtgleichmäßigen Quantisierung

Nichtgleichmäßige Quantisierung

A-Kennlinie für ISDN (Europa)

Ziel: Signal-Quantisierungs-
geräuschabstand von Segment
zu Segment jeweils konstant



Nichtgleichmäßige Quantisierung

A-Kennlinie für ISDN (Europa)

Ziel: Signal-Quantisierungs-
geräuschabstand von Segment
zu Segment jeweils konstant

Beispiel: Quantisierung in $N=256$ Qi's
 \rightarrow 8-Bit-Codierung $n=\text{lb}(N)$)

12 äußere Segmente (6 im positiven
 +6 im negativen x-Bereich):

Knickpunkte bei $x = 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32$
 $y=1/8$ für alle Segmente $\rightarrow \Delta s = \Delta x / N_{a1}$

Δs erhöht sich um Faktor 2 nach innen bei gl.
 Anzahl $N_{a1} = 16$ Qi's, da $y=1/8$ für alle Seg.

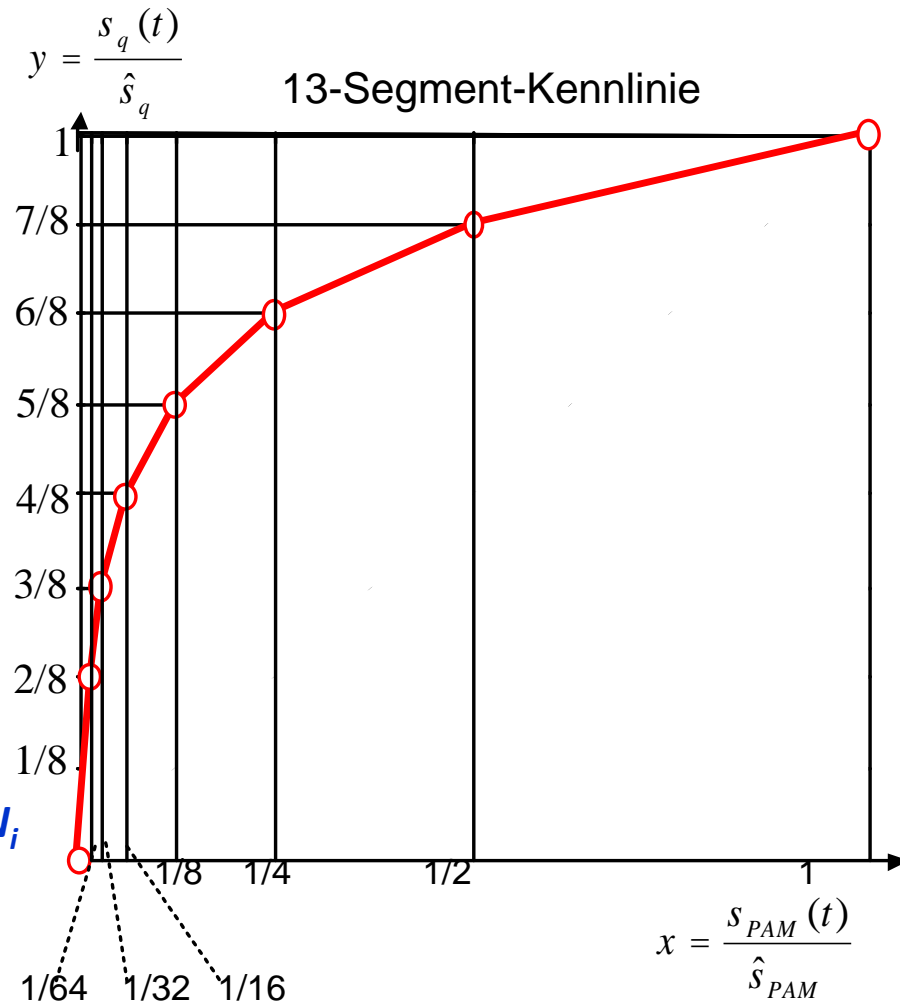
insg. 12 Segmente: $N_a = 12 \cdot 16$ Qi's = 192 Qi's

1 über Nullpunkt gehendes gemein. innere
 Segment: Knickpunkt bei $x = 1/64$; $y=2/8$

$\rightarrow N_i = 2 \cdot (2 \cdot N_{a1}) = 2 \cdot 32$ Qi's = 64 Qi's $\rightarrow \Delta s = \Delta x / N_i$

wegen neg. + pos. Bereich

$N_{tot} = N_a + N_i = (192 + 64)$ Qi's



Nichtgleichmäßige Quantisierung

A-Kennlinie für ISDN (Europa)

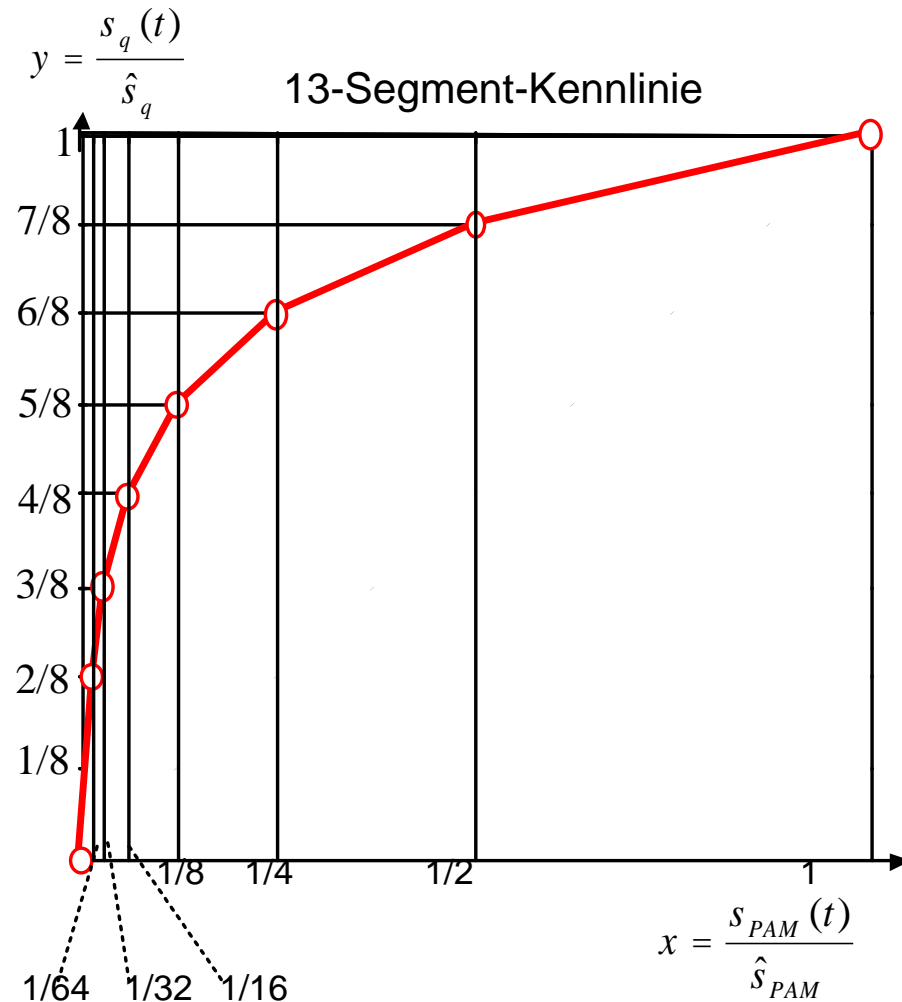
Ziel: Signal-Quantisierungs-
geräuschabstand von Segment
zu Segment jeweils konstant

Gleichmäßig angenommene Quanti-
sierung über den gesamten Q-bereich

a) wie im innersten Segment $N_i = 64 \text{ Qi's}$
auf $x = 1/64$) entspricht die
Unterteilung einer Anzahl von $N_{max} =$
 $64 \cdot 64 \text{ Qi's} = 4096 \text{ Qi's}$ über den
gesamten Q-bereich, d.h. es erfordert
mindestens einer **12-Bit-Codierung**
($\rightarrow n_{max} = 12$)

b) wie im äußeren Segment $N_{a1} = 16 \text{ Qi's}$
auf $x = 1/2$ von nur $N_{min} = 2 \cdot 2 \cdot 16 Q_i =$
 64 Qi's , d.h. es erfordert nur eine **6-**
Bit-Codierung ($\rightarrow n_{min} = 6$).

wegen neg. + pos. Bereich



Inhalt der Nachrichtentechnik

Teil 2: Digitale Basisband-Signalverarbeitung



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

6 Pulscodemodulation (A/D-Wandlung)

6.1 Erzeugung der Pulscodemodulation

6.2 Analog/Digital-Wandlung mit linearer Quantisierung

6.2.1 Erforderliche Bandbreite zur Übertragung von binären NRZ-Signalen

6.2.2 Verfahren zur Analog/Digital-Wandlung

6.2.3 Quantisierungsfehler und Quantisierungsrauschleistung

6.3 Nichtlineare Quantisierung

6.4 PCM-Übertragungssystem

6.4.1 Bitfehlerwahrscheinlichkeit

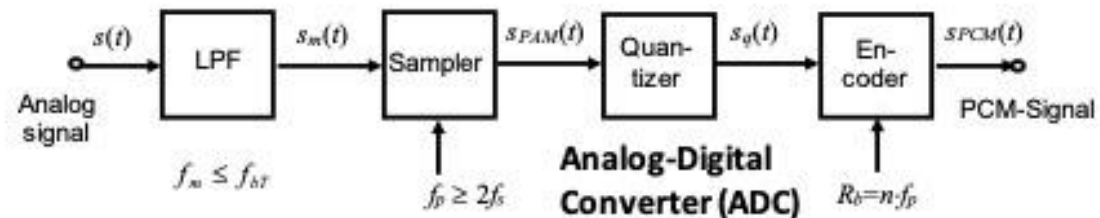
6.4.2 Fehlerwahrscheinlichkeit des PCM-Codewortes

6.5 PCM-Zeitmultiplex

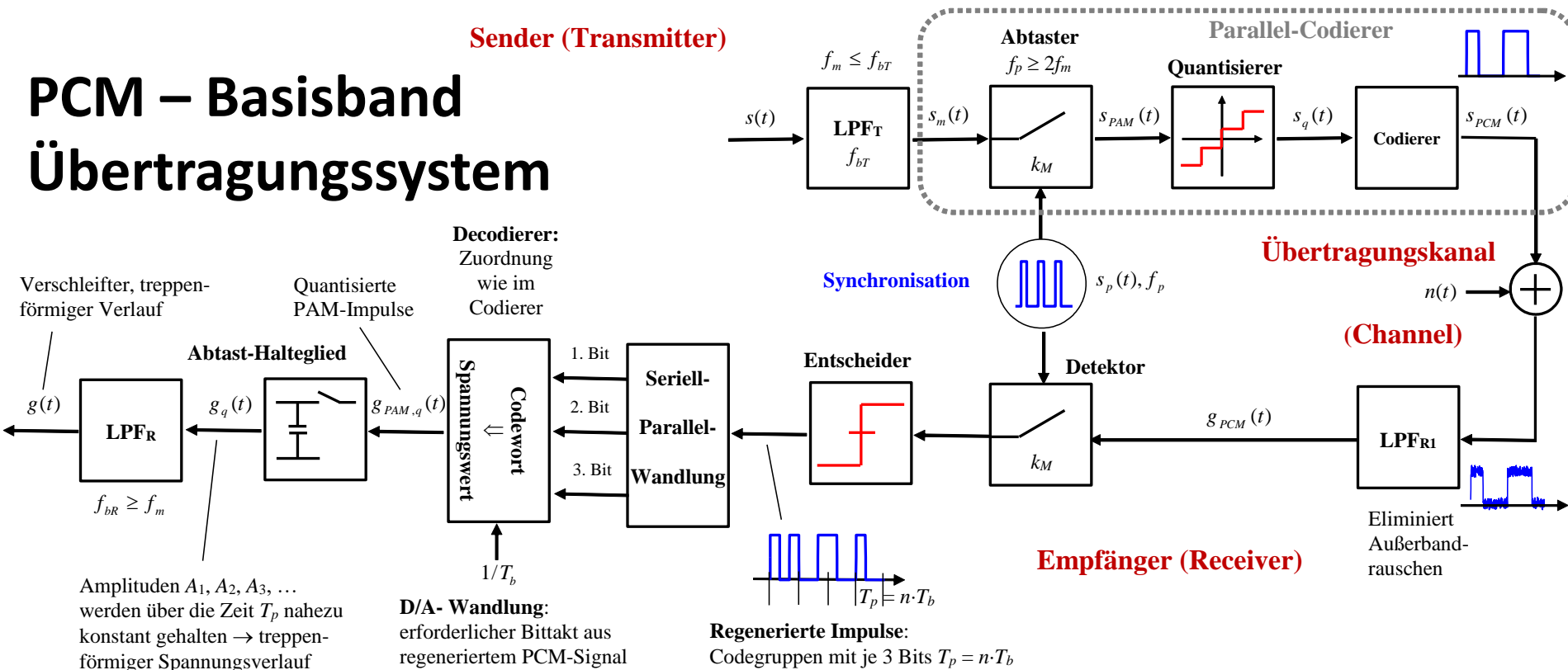
6.5.1 Getrennte Codierung

6.5.2 Zentrale Codierung

6.6 Beispiel: PCM30-Grundsystem (ISDN)



PCM – Basisband Übertragungssystem



Inhalt der Nachrichtentechnik



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Teil 2: Digitale Basisband-Signalverarbeitung

6 Pulscodemodulation (A/D-Wandlung)

6.1 Erzeugung der Pulscodemodulation

6.2 Analog/Digital-Wandlung mit linearer Quantisierung

6.2.1 Erforderliche Bandbreite zur Übertragung von binären NRZ-Signalen

6.2.2 Verfahren zur Analog/Digital-Wandlung

6.2.3 Quantisierungsfehler und Quantisierungsrauschleistung

6.3 Nichtlineare Quantisierung

6.4 PCM-Übertragungssystem

6.4.1 Bitfehlerwahrscheinlichkeit

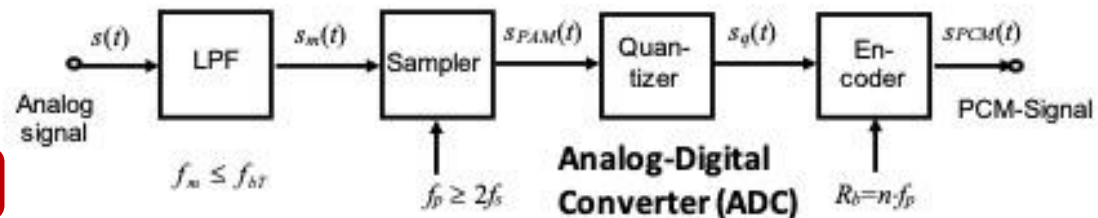
6.4.2 Fehlerwahrscheinlichkeit des PCM-Codewortes

6.5 PCM-Zeitmultiplex

6.5.1 Getrennte Codierung

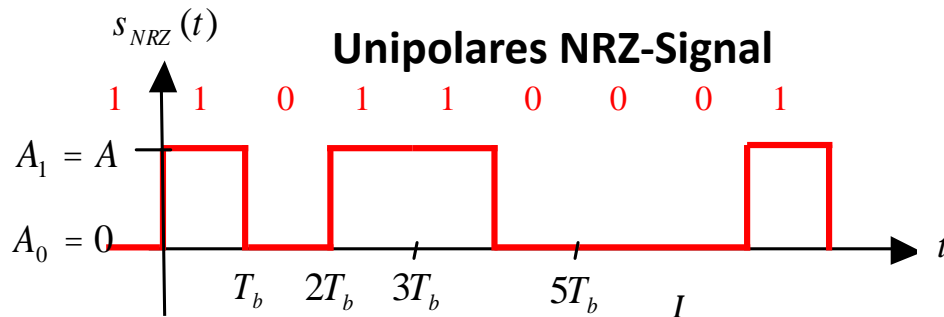
6.5.2 Zentrale Codierung

6.6 Beispiel: PCM30-Grundsystem (ISDN)



Mittlere Energie pro Bit der Uni- und Bipolaren NRZ-Signale

Zeitlich nicht begrenzte Zufallssignale:
Endliche mittlere Leistung
= mittlere Energie pro Zeitintervall (Lücke)



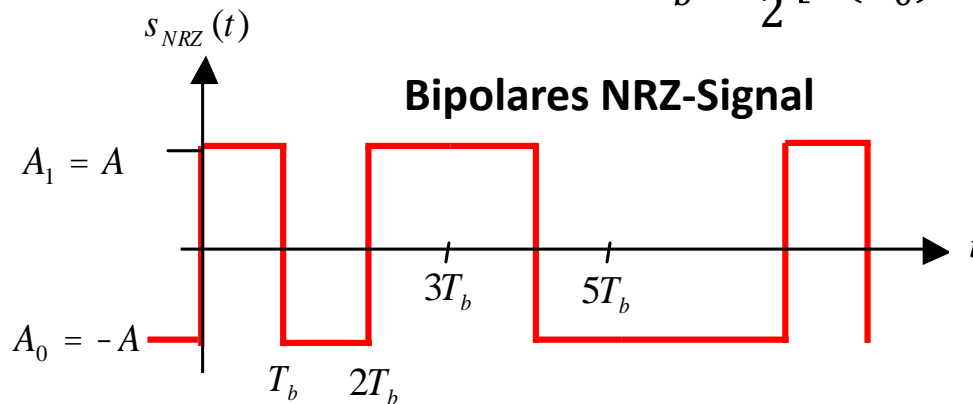
$$P_s = \bar{P} = \frac{1}{R} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} s_{NRZ}^2(t) dt$$

Mittlere Energie pro Bit

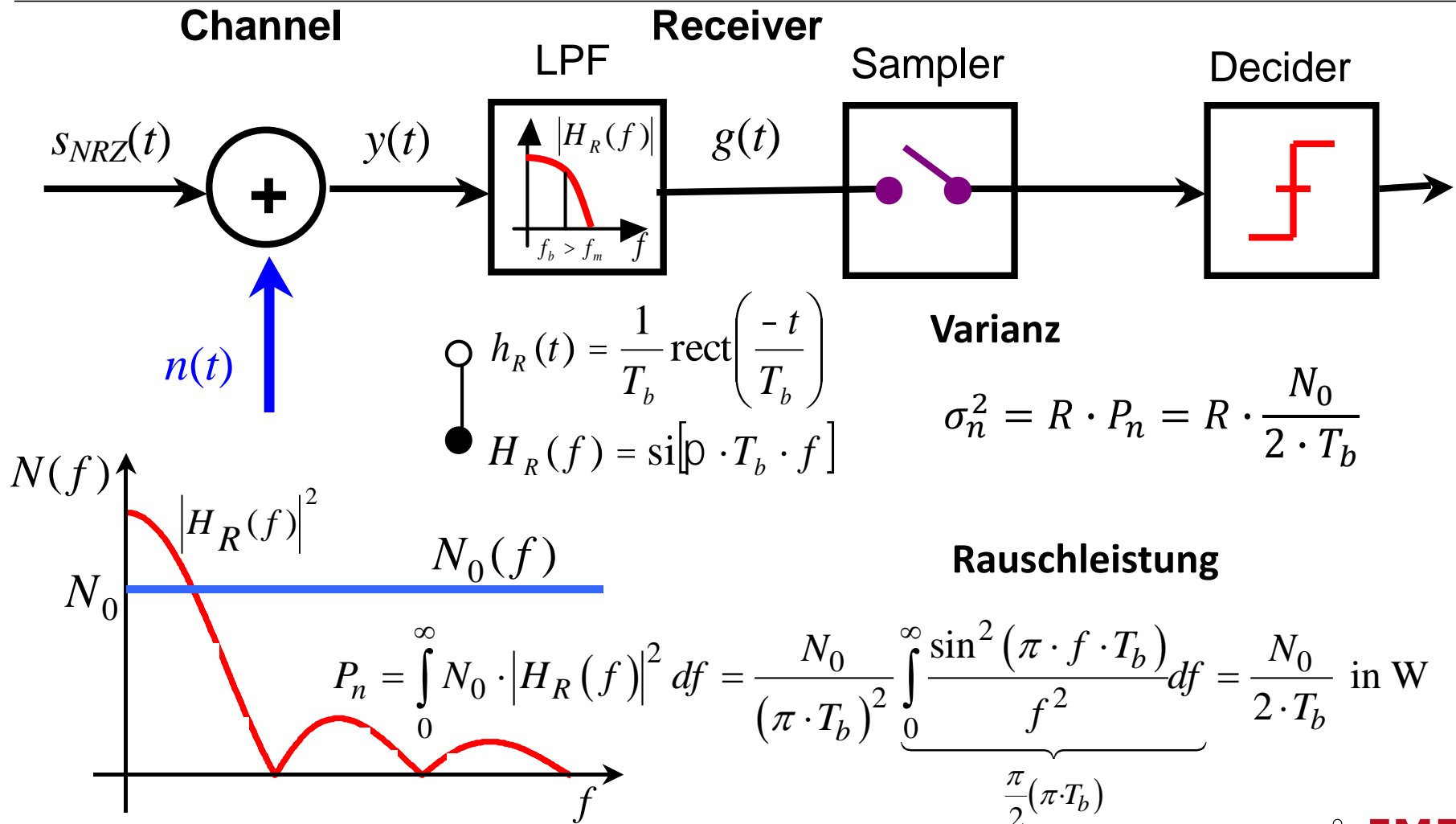
$$E_b = P_s \cdot T_b = \lim_{I \rightarrow \infty} \frac{1}{I} \sum_{i=0}^I E(i) = \frac{1}{2} [E(A_0) + E(A_1)] = \frac{1}{2} \left[0 + \frac{A^2}{R} \cdot T_b \right] = \frac{1}{2} \frac{A^2 \cdot T_b}{R}$$

Große Anzahl von „Bits“ $I \rightarrow \infty$
mit gleichvielen „0“ und „1“

$$E_b = \frac{1}{2} [E(A_0) + E(A_1)] = \frac{1}{2} \left[\frac{(-A)^2}{R} \cdot T_b + \frac{A^2}{R} \cdot T_b \right] = \frac{A^2 \cdot T_b}{R}$$



Varianz des Empfängerrauschens

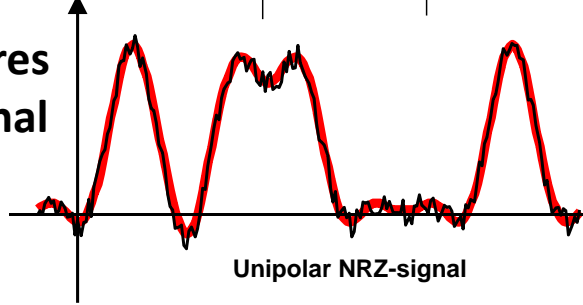


Bitfehlerwahrscheinlichkeit

Codeword of
3 Bits

1 0 1 1 0 0 0 1 ...

Unipolares
NRZ-Signal



$A_1 = +A$

$A_{th} = +\frac{A}{2}$

$A_0 = 0$

Probability density
function of AWGN

$$p(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} e^{-\frac{(a-A_1)^2}{2\sigma_n^2}}$$

1

Optimal
Decision
threshold

0

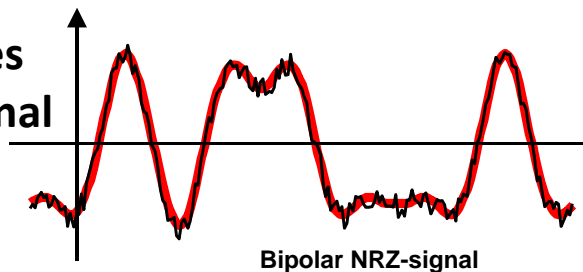
Fehler, wenn Amplitude a des AWGN-Signals den Entscheider-Schwellwert A_{th} überschreitet

Beispiel: gesendete logische „0“

$$p(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} e^{-\frac{(a-A_0)^2}{2\sigma_n^2}}$$

NRZ-Signale mit überlagertem weißem gaußförmigem Rauschen, das eine Wahrscheinlichkeitsdichte der Augenblicksamplituden gemäß der Gauß'schen Normalverteilung besitzt.

Bipolares
NRZ-Signal



$A_0 = +A$

$A_{th} = 0$

$A_0 = -A$

Optimal
Decision
threshold

Bitfehlerwahrscheinlichkeit p_b
= Integral über dem entsprechenden Teil der Gauß'schen Glockenkurve

$$p_b = \text{Prob}(a > A_{th})$$

$$= \int_{a=A_{th}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} e^{-\frac{(a-A_0)^2}{2\sigma_n^2}} da$$

Detektion der mit Rauschen überlagerten Eingangssignalen

$$BER = p_b = \text{Prob}(a > A_{th}) = \int_{a=A_{th}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} e^{-\frac{(a-A_0)^2}{2\sigma_n^2}} da$$

$I \rightarrow \infty$

**Bitfehlerhäufigkeit
(Bit Error Rate, BER)**

Substitution: $z = \frac{a - A_0}{\sqrt{2\sigma_n^2}} \Rightarrow \frac{dz}{da} = \frac{1}{\sqrt{2\sigma_n^2}}$

Grenzen: $z_2 = \infty$

$$z_1 = \frac{A_{th} - A_0}{\sqrt{2\sigma_n^2}}$$

Varianz $\sigma_n^2 = R \cdot P_n = R \cdot \frac{N_0}{2 \cdot T_b}$

$$p_b = \int_{z=z_1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} e^{-z^2} \cdot \sqrt{2\sigma_n^2} \cdot dz = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{z=z_1}^{+\infty} e^{-z^2} dz$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \text{erfc}(z_1)$$

Unipolares NRZ-Signal: $A_0=0; A_{th}=A/2$

Komplementäre Fehlerfunktion

$$E_b = P_s \cdot T_b = \frac{1}{2} \frac{A^2 \cdot T_b}{R} \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2R \cdot E_b}{T_b}} \xrightarrow{z_1 = \frac{A/2 - 0}{\sqrt{2 \cdot \frac{R \cdot N_0}{2 \cdot T_b}}}} \frac{A}{2} = \frac{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2R \cdot E_b}{T_b}}}{\sqrt{\frac{R \cdot N_0}{T_b}}} = \sqrt{\frac{E_b}{2N_0}}$$

Bipolares NRZ-Signal: $A_0=-A; A_{th}=0$

$$E_b = P_s \cdot T_b = \frac{A^2 \cdot T_b}{R} \Rightarrow A = \sqrt{\frac{R \cdot E_b}{T_b}} \xrightarrow{z_1 = \frac{0 - (-A)}{\sqrt{2 \cdot \frac{R \cdot N_0}{2 \cdot T_b}}}} \frac{A}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\frac{R \cdot E_b}{T_b}}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{E_b}{N_0}}$$

$$BER = p_b = \text{Prob}(a > A_{th}) = \int_{a=A_{th}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} e^{-\frac{(a-A_0)^2}{2\sigma_n^2}} da$$

$I \rightarrow \infty$

**Bitfehlerhäufigkeit
(Bit Error Rate, BER)**

$$BER_{unipolar} = \frac{1}{2} \text{erfc} \left[\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}} \right]$$

$$BER_{bipolar} = \frac{1}{2} \text{erfc} \left[\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right]$$

Grenzen: $z_2 = \infty$

$$z_1 = \frac{A_{th} - A_0}{\sqrt{2\sigma_n^2}}$$

$$\sigma_n^2 = R \cdot P_n = R \cdot \frac{N_0}{2 \cdot T_b}$$

$$BER = \frac{1}{2} \cdot \text{erfc}(z_1)$$

Unipolares NRZ-Signal: $A_0=0; A_{th}=A/2$

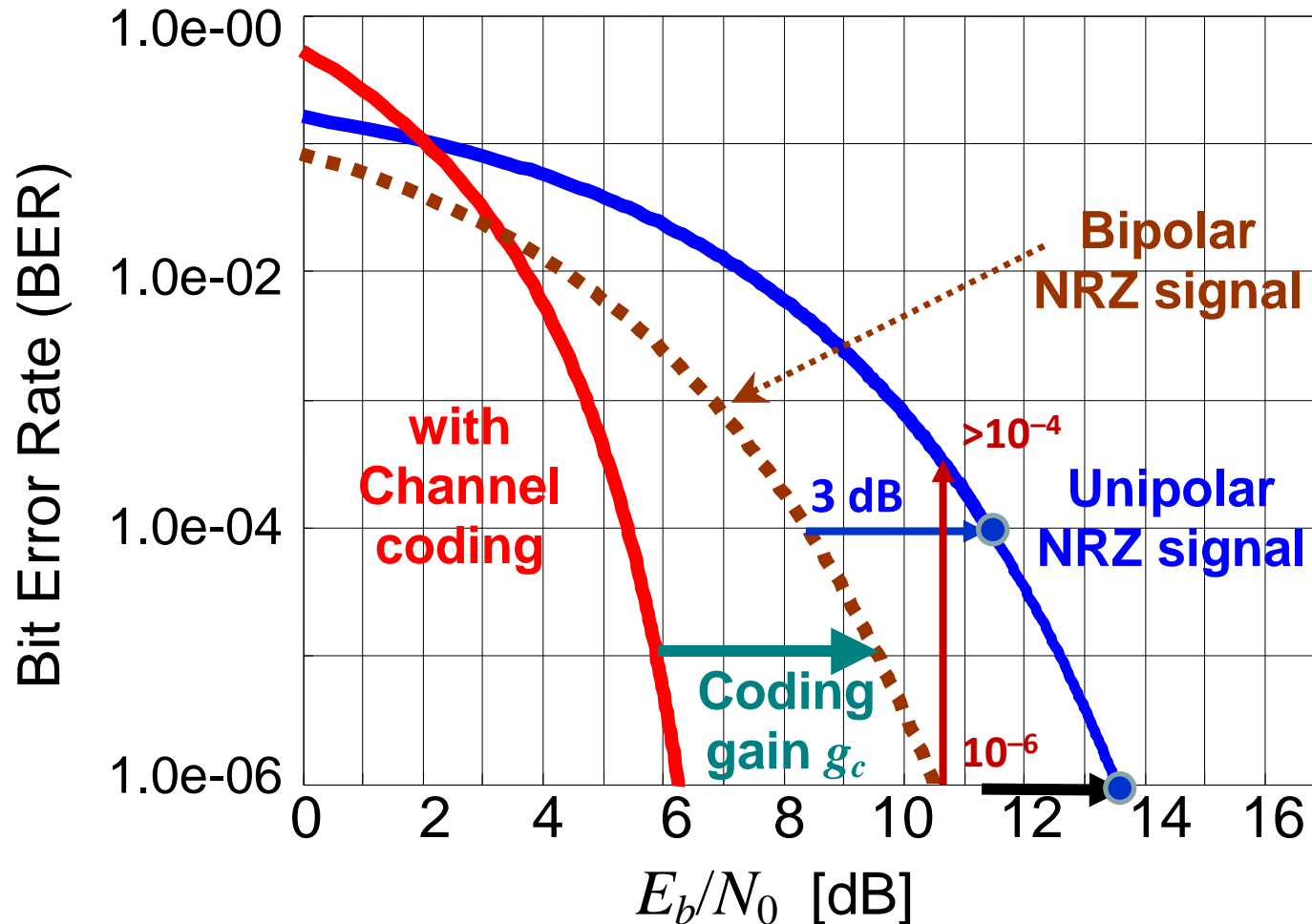
$$E_b = P_s \cdot T_b = \frac{1}{2} \frac{A^2 \cdot T_b}{R} \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2R \cdot E_b}{T_b}} \xrightarrow{z_1 = \frac{\frac{A}{2} - 0}{\sqrt{2 \cdot \frac{R \cdot N_0}{2 \cdot T_b}}}} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2R \cdot E_b}{T_b}} = \sqrt{\frac{E_b}{2N_0}}$$

Bipolares NRZ-Signal: $A_0=-A; A_{th}=0$

$$E_b = P_s \cdot T_b = \frac{A^2 \cdot T_b}{R} \Rightarrow A = \sqrt{\frac{R \cdot E_b}{T_b}} \xrightarrow{z_1 = \frac{0 - (-A)}{\sqrt{2 \cdot \frac{R \cdot N_0}{2 \cdot T_b}}}} \sqrt{\frac{R \cdot E_b}{T_b}} = \sqrt{\frac{E_b}{N_0}}$$



Bitfehlerwahrscheinlichkeit



1.) $BER \approx 10^{-4}$:

$E_b/N_0 \approx 8.3$ dB bipolar

$E_b/N_0 \approx 11.3$ dB unipolar

Bipolar 3 dB niedriger als unipolar → doppelte Empfangs-/Sendeleistung für gleiche BER

2.) $E_b/N_0 \approx 10.5$ dB:

$BER \approx 10^{-6}$ bipolar

$BER \approx 5 \cdot 10^{-4}$ unipolar

3.) Unipolares NRZ-Sig.

Erhöhung um 2.2 dB

$E_b/N \approx 11.3$ dB → 13.5 dB

$BER \approx 10^{-4} \rightarrow 10^{-6}$

→ BER verbessert sich um Faktor 100

Inhalt der Nachrichtentechnik



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Teil 2: Digitale Basisband-Signalverarbeitung

6 Pulscodemodulation (A/D-Wandlung)

6.1 Erzeugung der Pulscodemodulation

6.2 Analog/Digital-Wandlung mit linearer Quantisierung

6.2.1 Erforderliche Bandbreite zur Übertragung von binären NRZ-Signalen

6.2.2 Verfahren zur Analog/Digital-Wandlung

6.2.3 Quantisierungsfehler und Quantisierungsrauschleistung

6.3 Nichtlineare Quantisierung

6.4 PCM-Übertragungssystem

6.4.1 Bitfehlerwahrscheinlichkeit

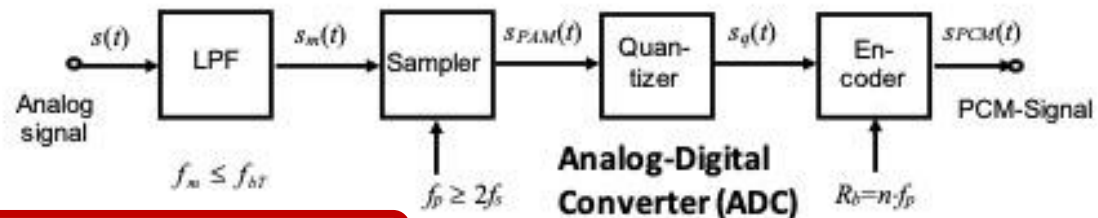
6.4.2 Fehlerwahrscheinlichkeit des PCM-Codewortes

6.5 PCM-Zeitmultiplex

6.5.1 Getrennte Codierung

6.5.2 Zentrale Codierung

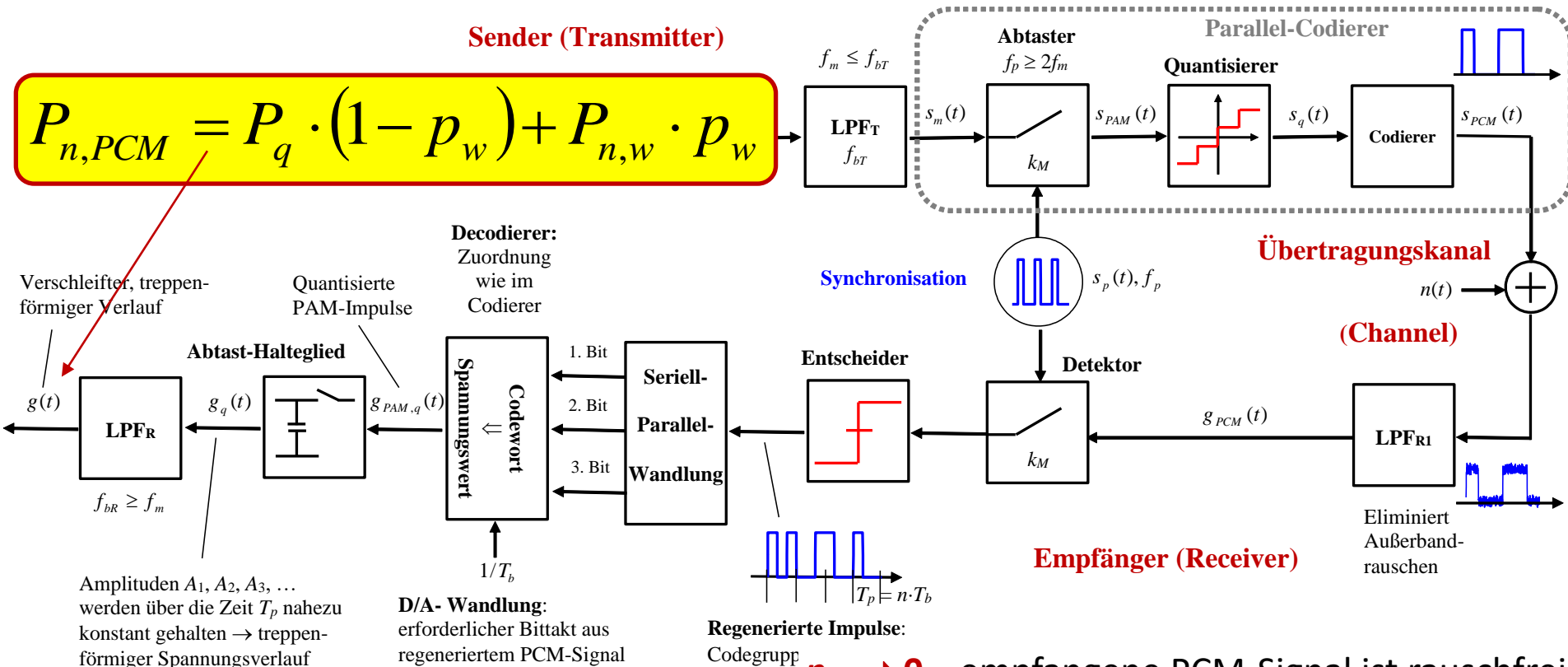
6.6 Beispiel: PCM30-Grundsystem (ISDN)



PCM – Übertragungssystem

Leistung des gesamten Fehlers (Quantisierung + Rauschen) am Empfängeroutput:

$$P_{n,PCM} = P_q \cdot (1 - p_w) + P_{n,w} \cdot p_w$$



p_w Fehlerwahr. des PCM-Codewortes aus n Bits

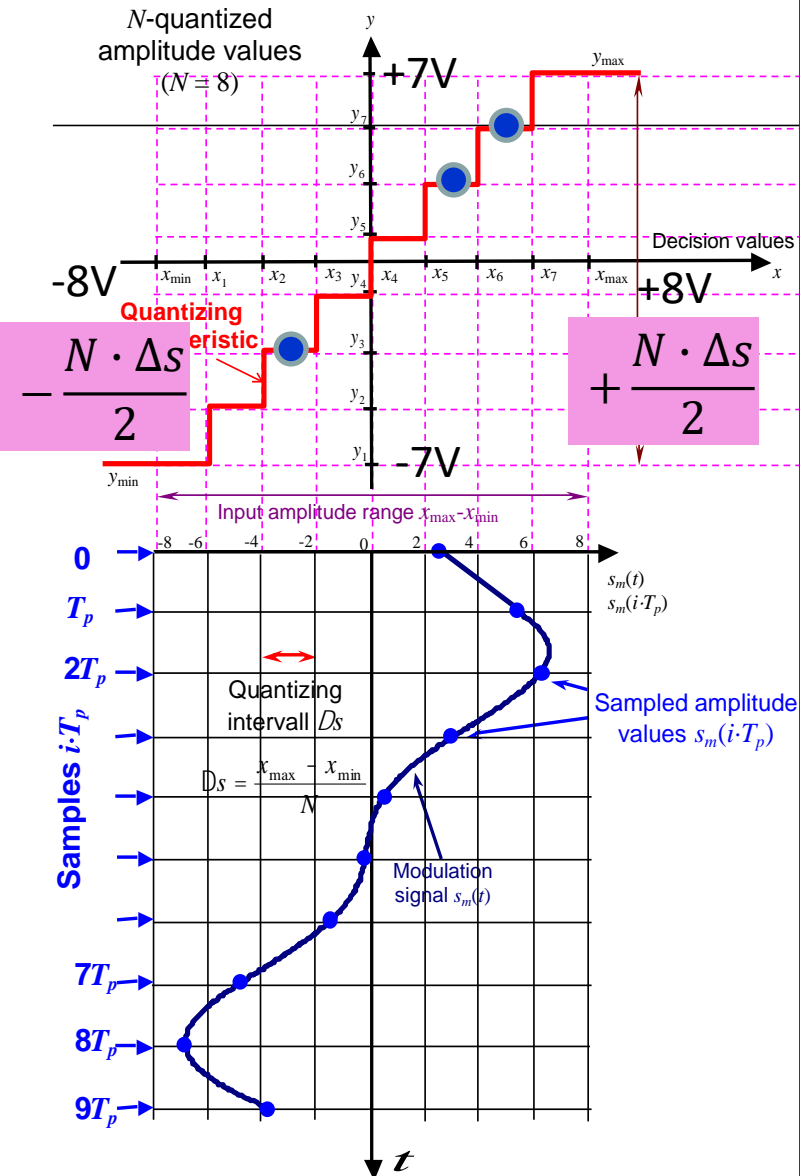
P_q die Quantisierungsrauschleistung und

$P_{n,w}$ die Codewortrauschleistung

empfangene PCM-Signal ist rauschfrei
 \rightarrow nur Quantisierungsfehler

In diesem Fall wird stets der richtige Zustand detektiert. Es treten somit keine Bitfehler auf.

b) Gleichmäßige Quantisierung



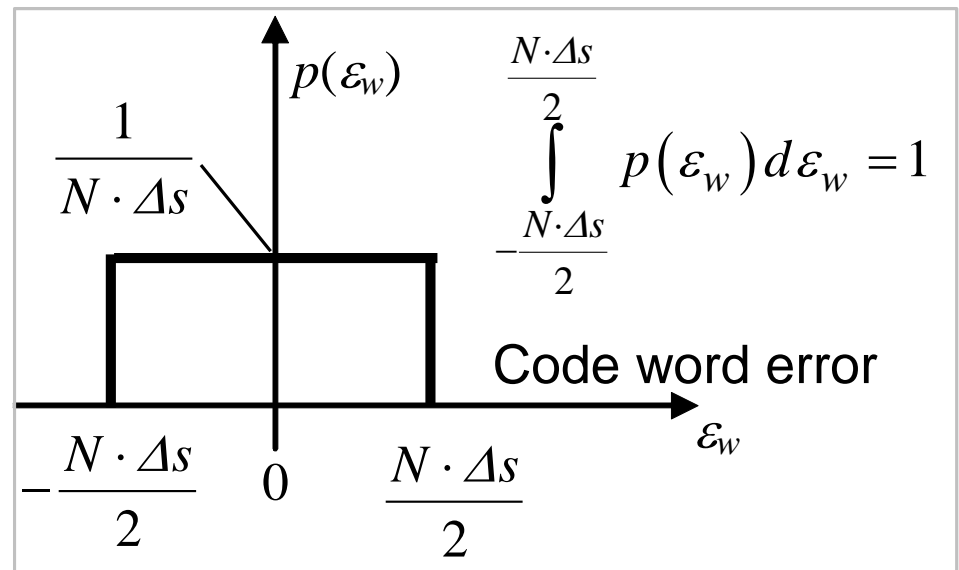
$N=8$ Amplitudenstufen von

$x_{\min} = -8V$ bis $x_{\max} = +8V$ Gleichmäßige Amplitudenverteilung

Eingangsamplitudenbereich:

$$-\frac{N \cdot \Delta s}{2} \text{ bis } +\frac{N \cdot \Delta s}{2} \quad x_{\max} - x_{\min} = N \cdot \Delta s$$

Quantisierte Werte und damit **Codewörter** bzw. **Codewortfehler** ε_w ist bei **Vollaussteuerung** über den Bereich $\pm N \cdot \Delta s / 2$ (**Worst-Case-Betrachtung**) gleichverteilt \rightarrow **Verteilungsdichtefunktion**



Fehlerwahrscheinlichkeit des PCM-Codewortes

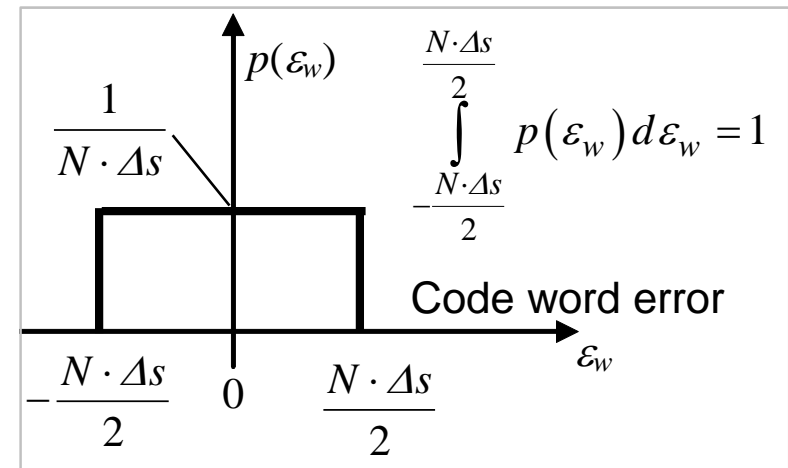
Codewortrauschleistung



Bei **Annahme einer Gleichverteilung (Vollaussteuerung)** von ε_w über den Bereich $\pm N \cdot \Delta s / 2$ ergibt sich der **quadr. Mittelwert des PCM-Codewortfehlers (Codewortrauschleistung)**:

$$\begin{aligned}
 P_{n,w} &= \frac{1}{R} \int_{-\infty}^{\infty} p(\varepsilon_w) \cdot \varepsilon_w^2 \cdot d\varepsilon_w \\
 &= \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{N \cdot \Delta s} \int_{-\frac{N \cdot \Delta s}{2}}^{\frac{N \cdot \Delta s}{2}} \varepsilon_w^2 d\varepsilon_w \\
 &= \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{N \cdot \Delta s} \cdot \frac{\varepsilon_w^3}{3} \bigg|_{-\frac{N \cdot \Delta s}{2}}^{\frac{N \cdot \Delta s}{2}} = \frac{1}{N \cdot \Delta s} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{(N \cdot \Delta s)^3}{8} - \left(-\frac{(N \cdot \Delta s)^3}{8} \right) \right] = \frac{(N \cdot \Delta s)^2}{12R}
 \end{aligned}$$

Gleichmäßige Amplitudenverteilung



Fehlerwahrscheinlichkeit des PCM-Codewortes

Signal-Rauschverhältnis SNR



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Das SNR am D/A-Converterausgang ist bei **Gleichverteilung (Vollaussteuerung)** des **Nutzsignals** $x(t_i)$ und des **PCM-Codewortfehlers** ε_w über den **Bereich $\pm N \cdot \Delta s / 2$** sowie des **Quantisierungsfehlers** $\varepsilon_q(t_i)$ über ein Quantisierungsintervall $\pm \Delta s / 2$:

$$\begin{aligned} \frac{P_s}{P_{n,PCM}} &= \frac{P_s}{P_q(1 - p_w) + P_{n,w} \cdot p_w} = \frac{\frac{(N \cdot \Delta s)^2}{8R}}{\frac{\Delta s^2}{12R}(1 - p_w) + \frac{(N \cdot \Delta s)^2}{12R} \cdot p_w} \\ &= \frac{12}{8} \frac{1}{\frac{1}{N^2}(1 - p_w) + p_w} = \frac{3}{2} \cdot \frac{N^2}{1 + (N^2 - 1) \cdot p_w} \end{aligned}$$

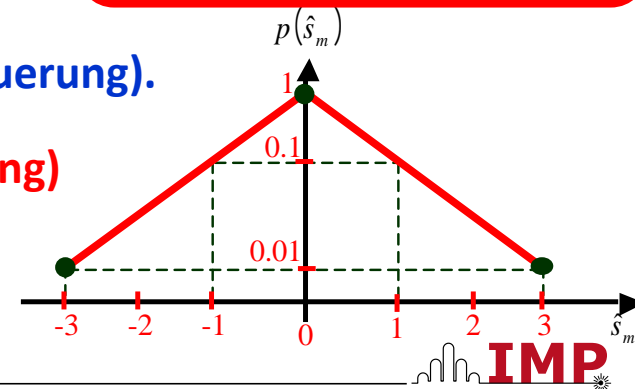
Bestimmung von p_w
= Fehlerwahr. des PCM-Codewortes aus n Bits

Gilt nur für **gleichmäßige Amplitudenverteilung (Vollaussteuerung)**.

Nicht-gleichmäßige Amplitudenverteilung (Laplace-Verteilung)

muss in der Herleitung berücksichtigt werden.

Resultierendes SNR kann durch entsprechende nicht gleichmäßige Quantisierung weiter verbessert werden.



Fehlerwahrscheinlichkeit des PCM-Codewortes

Bestimmung von p_w aus p_b



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Der empfangene Abtastwert (PCM-Codewort aus n Bits) ist

richtig detektiert $(1 - p_w)$,

wenn alle n Bits mit $(1 - p_b)$ am Entscheider richtig erkannt werden:

$$(1 - p_w) = (1 - p_b) \cdot (1 - p_b) \dots = (1 - p_b)^n$$

$$\Rightarrow p_w = 1 - (1 - p_b)^n$$

p_b = Bitfehlerwahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} \frac{P_s}{P_{n,PCM}} &= \frac{3}{2} \cdot \frac{N^2}{1 + (N^2 - 1) \cdot p_w} = \frac{3}{2} \cdot \frac{N^2}{1 + (N^2 - 1) \cdot [1 - (1 - p_b)^n]} \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{N^2}{1 + (N^2 - 1) - (N^2 - 1) \cdot (1 - p_b)^n} \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{N^2}{N^2 - (N^2 - 1) \cdot (1 - p_b)^n} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1 - (1 - 1/N^2) \cdot (1 - p_b)^n} \end{aligned}$$



Fehlerwahrscheinlichkeit des PCM-Codewortes

Signal-Rauschverhältnis SNR_{PCM}



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

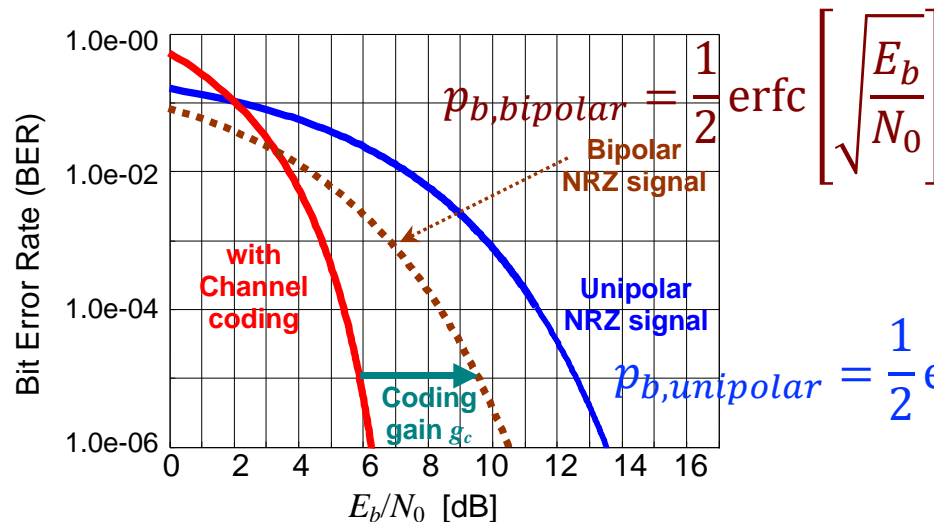
$$SNR_{PCM} = \underbrace{10\lg\left(\frac{3}{2}\right)}_{1.8 \text{ dB}} - 10\lg[1 - (1 - 2^{-2n}) \cdot (1 - p_b)^n]$$

p_b = Bitfehlerwahrscheinlichkeit

= Integral über dem entsprechenden Teil der Gauß'schen Glockenkurve

$$p_b = \text{Prob}(a > A_{th})$$

$$= \int_{a=A_{th}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} e^{-\frac{(a-A_0)^2}{2\sigma_n^2}} da$$



Kleine Bitfehlerwahr. $p_b \rightarrow 0$ (große E_b/N_0):

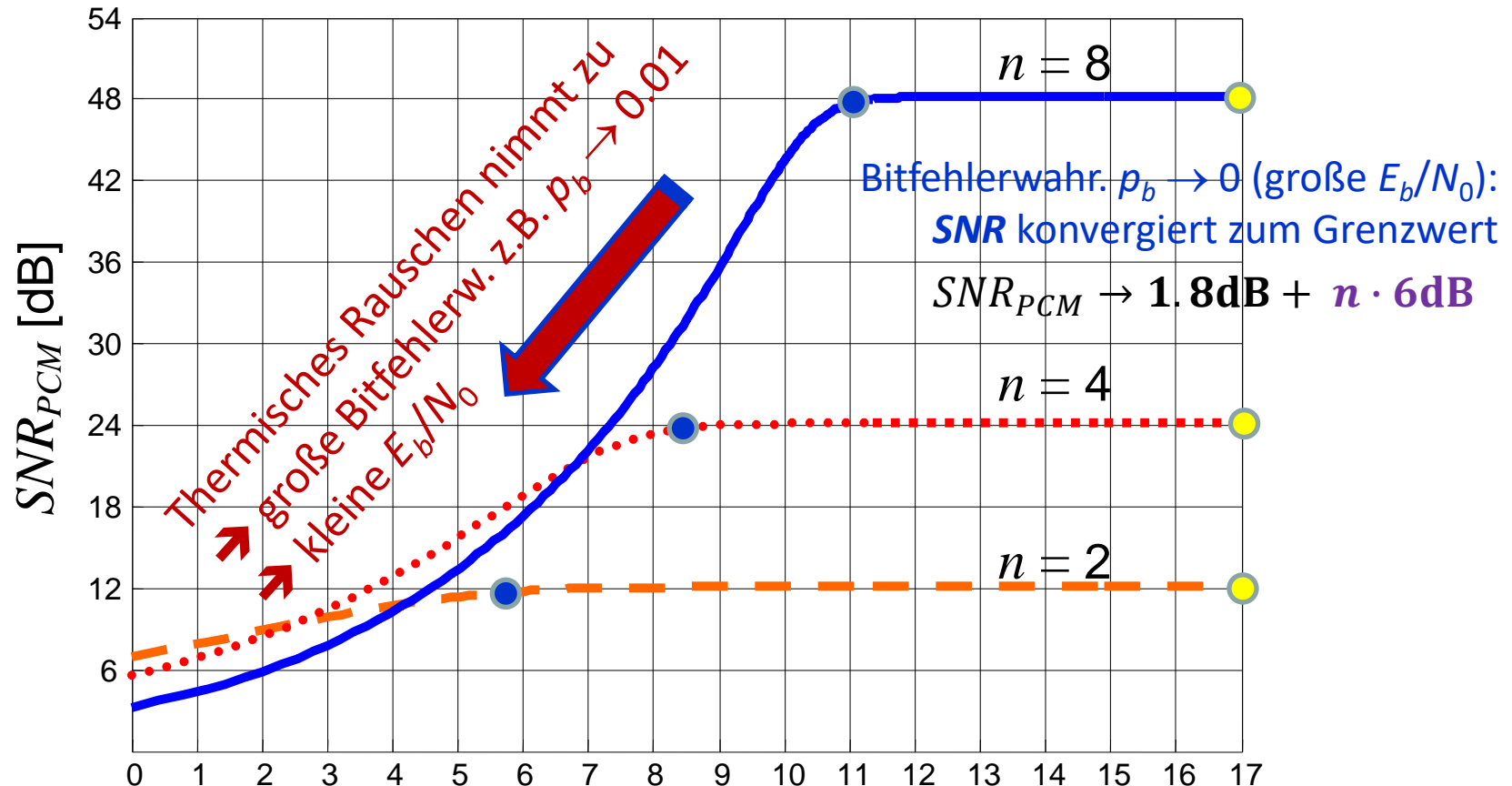
$$\begin{aligned} SNR_{PCM} &= 1.8 \text{ dB} - 10\lg[1 - (1 - 2^{-2n})] = 1.8 \text{ dB} - 10\lg[2^{-2n}] \\ &= 1.8 \text{ dB} + n \cdot 20\lg[2] = \mathbf{1.8 \text{ dB} + n \cdot 6\text{dB}} \end{aligned}$$

Fehlerwahrscheinlichkeit des PCM-Codewortes



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

$$SNR_{PCM} = 1.8 \text{ dB} - 10 \lg[1 - (1 - 2^{-2n}) \cdot (1 - p_b)^n]$$



Starkes thermisches Rauschen

→ dominiert SNR_{PCM}

E_b/N_0 [dB]

Geringes thermisches Rauschen

→ Quantisierungsrauschen dominant



Inhalt der Nachrichtentechnik



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Teil 2: Digitale Basisband-Signalverarbeitung

6 Pulscodemodulation (A/D-Wandlung)

6.1 Erzeugung der Pulscodemodulation

6.2 Analog/Digital-Wandlung mit linearer Quantisierung

6.2.1 Erforderliche Bandbreite zur Übertragung von binären NRZ-Signalen

6.2.2 Verfahren zur Analog/Digital-Wandlung

6.2.3 Quantisierungsfehler und Quantisierungsrauschleistung

6.3 Nichtlineare Quantisierung

6.4 PCM-Übertragungssystem

6.4.1 Bitfehlerwahrscheinlichkeit

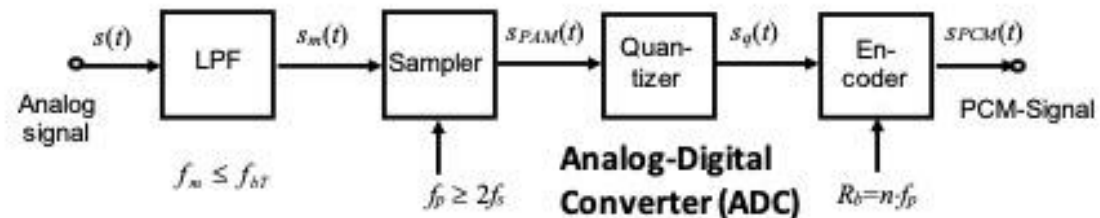
6.4.2 Fehlerwahrscheinlichkeit des PCM-Codewortes

6.5 PCM-Zeitmultiplex

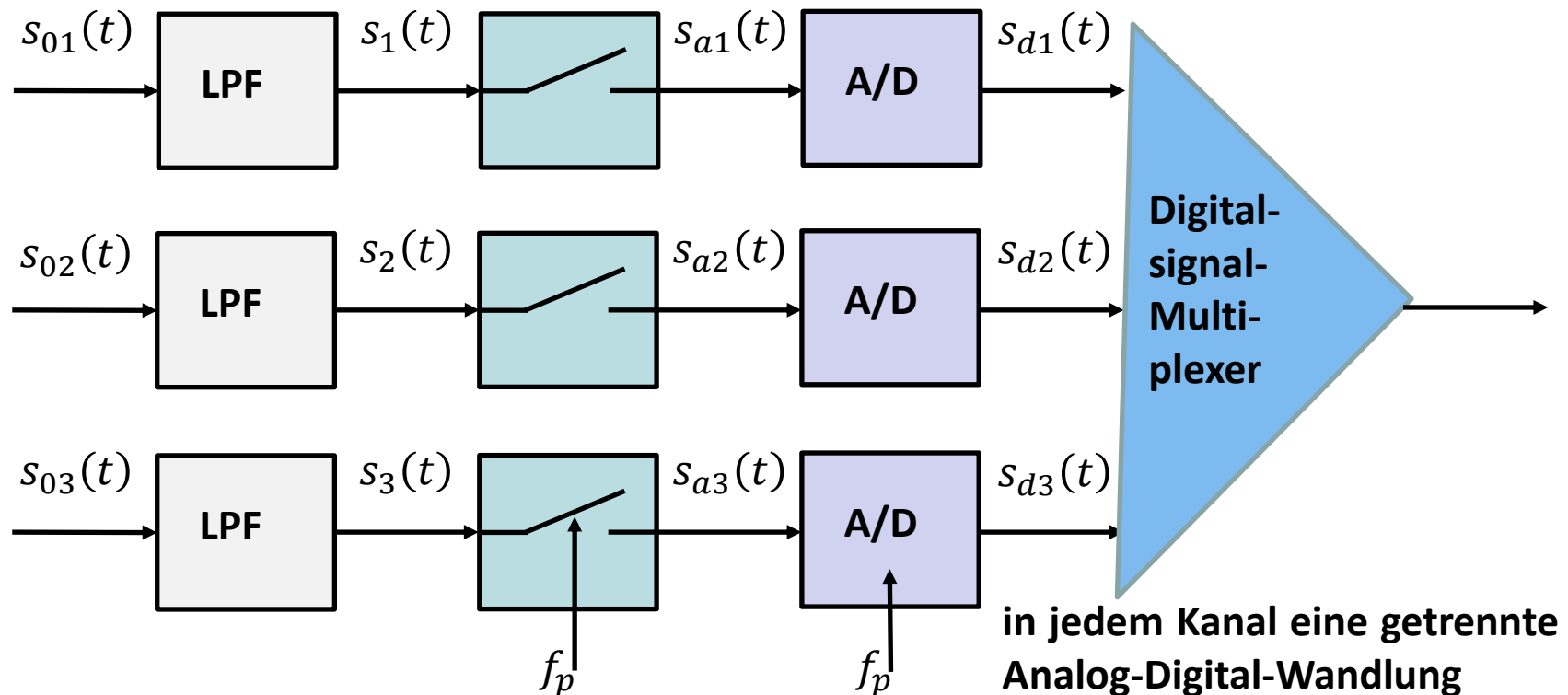
6.5.1 Getrennte Codierung

6.5.2 Zentrale Codierung

6.6 Beispiel: PCM30-Grundsystem (ISDN)



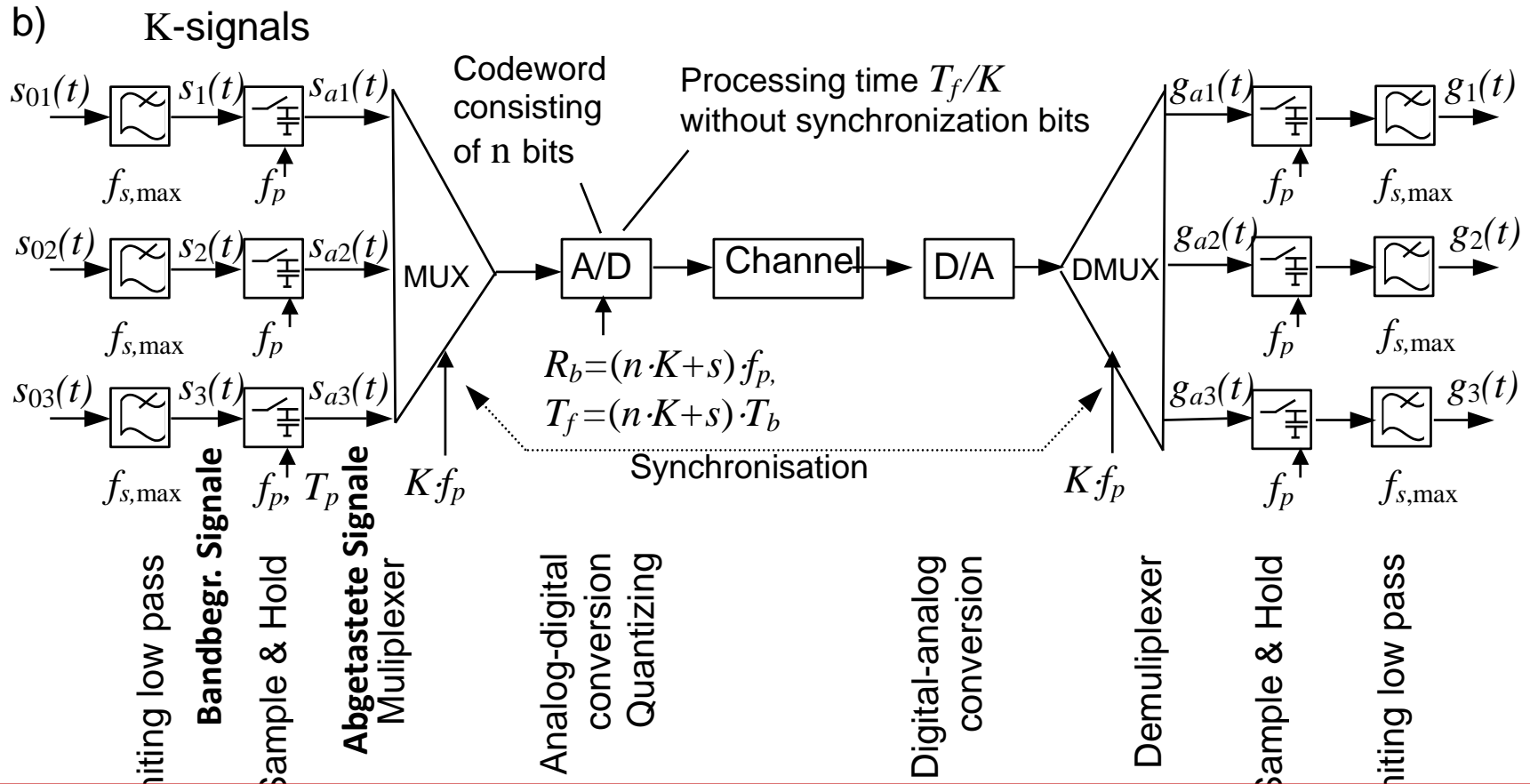
Getrennte Codierung (je Kanal): PCM-System mit $K=3$ Sprachkanälen



- n -Bit-Abtastwert wird zwischengespeichert, so dass den Codierern eine Zeit von T_p für die Verarbeitung eines Signalwertes bleibt ➔ **Vorteil: langsamer Codierer-Takt von $f_p=1/T_p$**
- **Nachteil: sehr hoher Aufwand** bezgl. Anzahl der A/D-Wandler und **entsprechend hoher Leistungsverbrauch** ➔ kritisch für große Multiplexsysteme

Zentrale Codierung: PCM-System mit $K=3$ Sprachkanälen

Funktionsweise:
Erläuterungen auf
den nächsten Folien

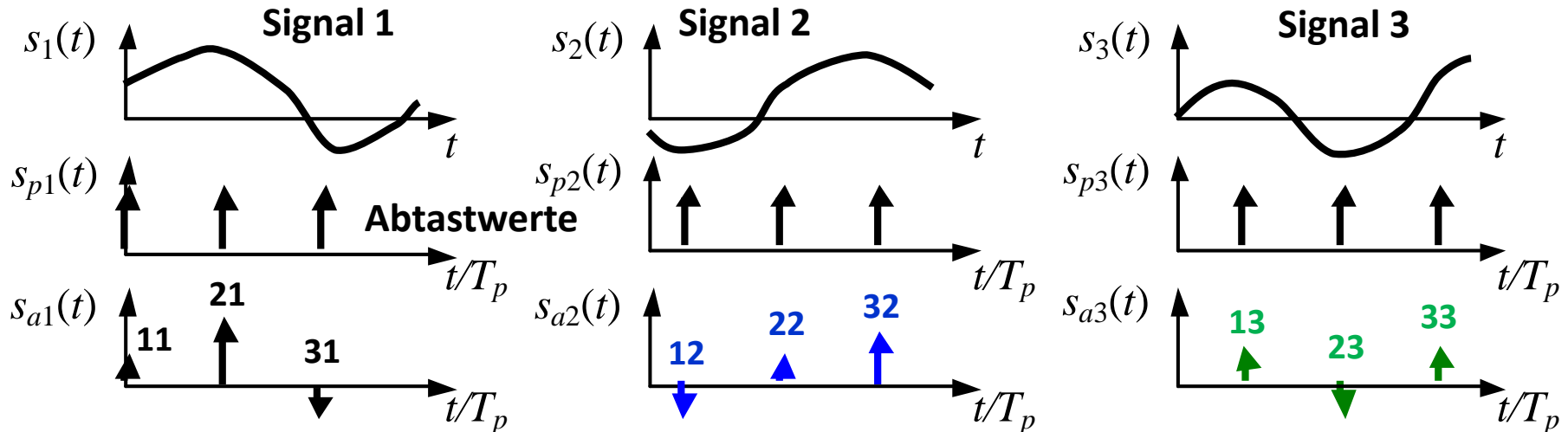


Vorteil: Aufwand/Leistungsverbrauch für die getrennte Codierung kann durch eine zentrale Codierung deutlich verringert werden, da nur ein A/D-Wandler

Nachteil: deutlich höhere Taktfrequenz des Codierers ($K = \text{Anz. Kanäle}$): $f_p = K/T_p$

Zentrale Codierung: PCM-System mit $K=3$ Sprachkanälen

Bandbegrenzte (Modulations-) Signale vor dem Abtaster



Abgetastete (PAM) Signale nach dem Abtaster

Beispiel: PCM-System mit $K = 3$ Sprachkanälen

maximale (obere) Signalfrequenz $f_{smax} = 3.4 \text{ kHz}$

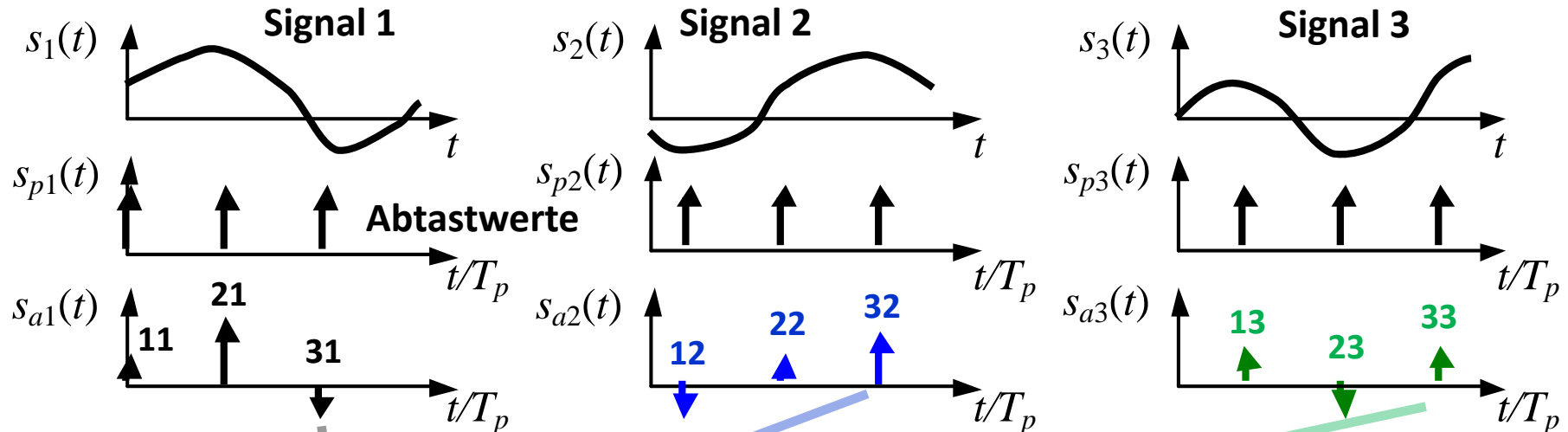
$N = 256$ Quantisierungsstufen $\Rightarrow n = \lg(N) = 8 \text{ bit/Codewort} \Rightarrow SNR_q = \frac{3N^2}{2} \rightarrow 49.8 \text{ dB}$

Abtastfrequenz $f_p = 8 \text{ kHz}$

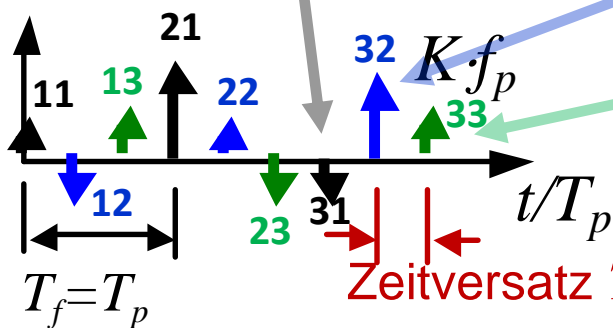
$s = 1$ Rahmensynchronisationsbit $\Rightarrow f_p \geq 2 \cdot f_{smax}$ Abtasttheorem erfüllt!

Zentrale Codierung: PCM-System mit $K=3$ Sprachkanälen

Bandbegrenzte (Modulations-) Signale vor dem Abtaster



Abgetastete (PAM) Signale nach dem Abtaster



Rahmendauer (frame duration) = Abtastperiode

$$T_f = \frac{1}{f_p} = 125 \mu\text{s} \quad \text{mit } f_p = 8\text{kHz}$$

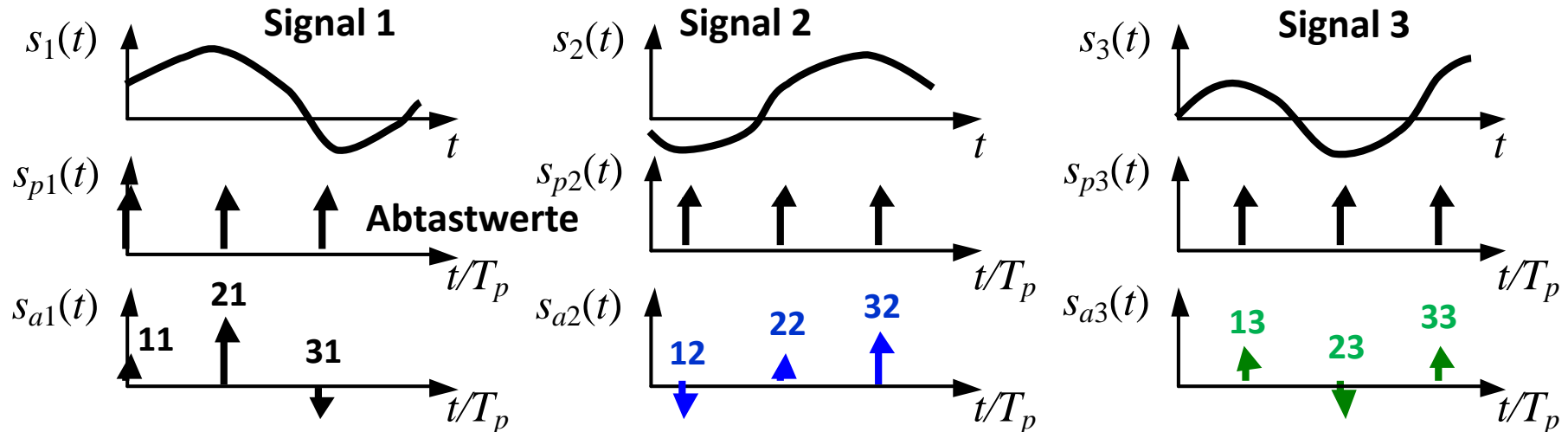
Zeitversatz zw. 2 Abtastwerten nach Multiplex:

$$T_p / K = 41.66 \mu\text{s} \quad (\text{ohne Synchronisationsbit})$$

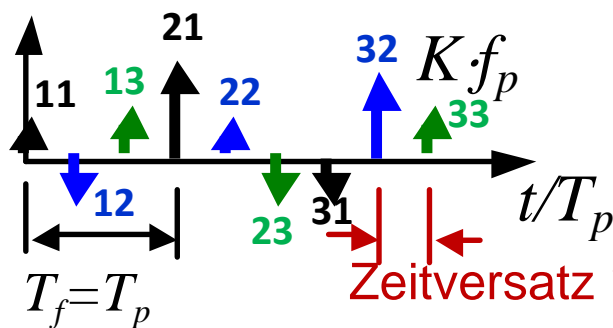
Multiplexing

Zentrale Codierung: PCM-System mit $K=3$ Sprachkanälen

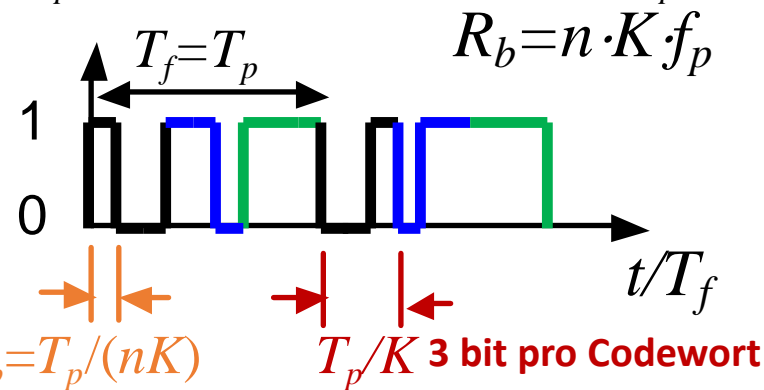
Bandbegrenzte (Modulations-) Signale vor dem Abtaster



Abgetastete (PAM) Signale nach dem Abtaster



Darstellung für $n=3$
ohne Synchronbit



Multiplexing

A/D: Quantisierung & Codierung

Zentrale Codierung: PCM-System mit **$K=3$ Sprachkanälen**

Beispiel: PCM-System mit **$K = 3$ Sprachkanälen**

maximale (obere) Signalfrequenz $f_{smax} = 3.4 \text{ kHz}$

$N = 256$ Quantisierungsstufen $\rightarrow n=8$

Abtastfrequenz $f_p = 8 \text{ kHz}$

$s = 1$ Rahmensynchronisationsbit

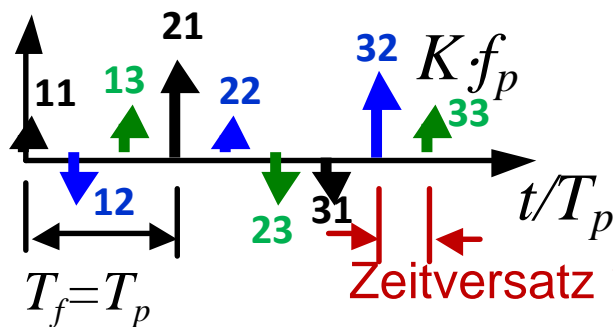
$$R_b = (n \cdot K + s) \cdot f_p = 25 \cdot 8 \text{ kHz} = 200 \text{ kbit/s}$$

Rahmendauer (frame duration)

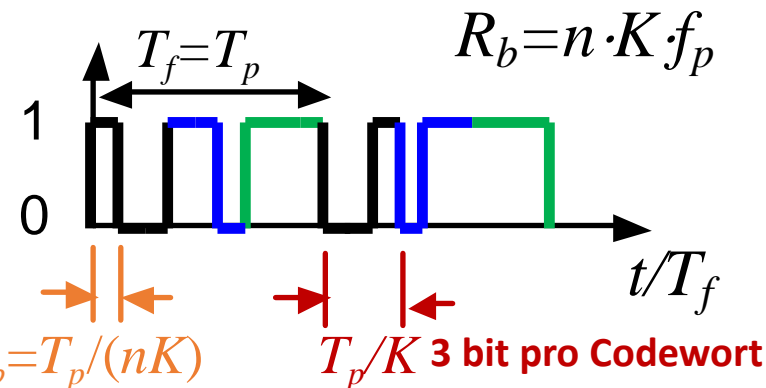
$$T_f = \frac{1}{f_p} = 125 \text{ } \mu\text{s} \quad \text{mit } f_p = 8 \text{ kHz}$$

$$T_f = \underbrace{(n \cdot K + s)}_{=25 \text{ mit } n=8; K=3, s=1} \cdot T_b \rightarrow T_b = 5 \text{ } \mu\text{s}$$

$$R_b = \frac{1}{T_b} = 200 \text{ kbit/s}$$



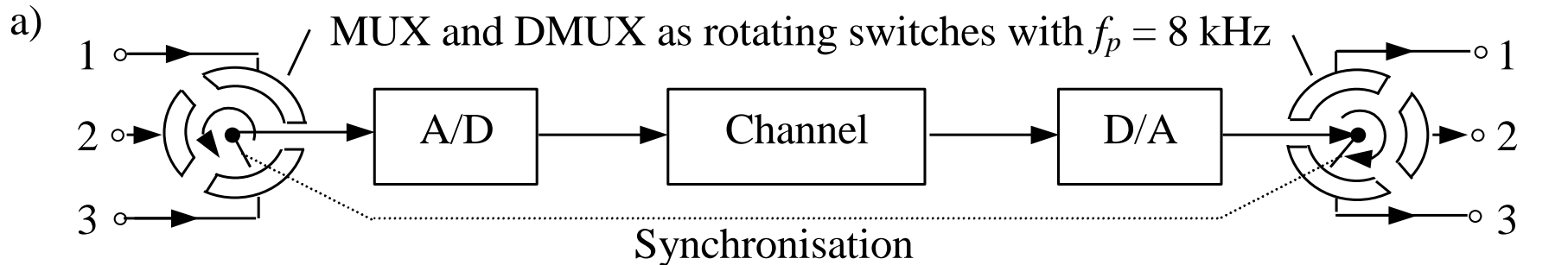
Darstellung für $n=3$
ohne Synchronbit



Multiplexing

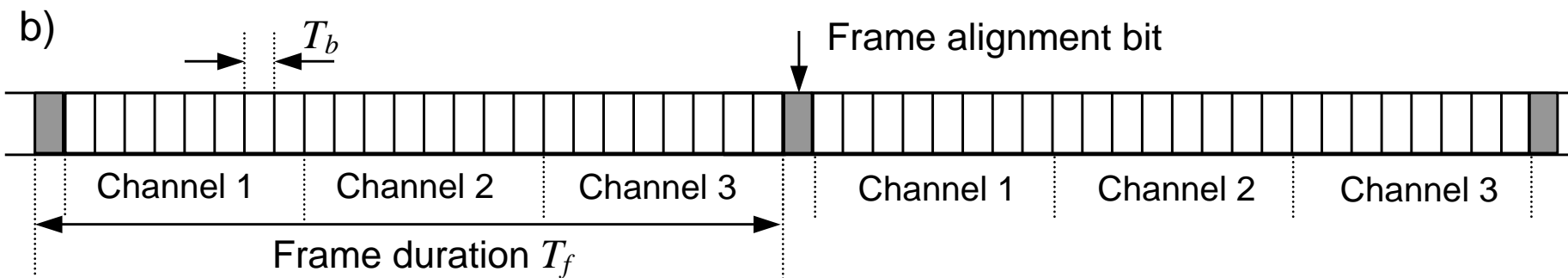
A/D: Quantisierung & Codierung

Zentrale Codierung: PCM-System mit $K=3$ Sprachkanälen



Multiplexing

A/D: Quantisierung & Codierung



Inhalt der Nachrichtentechnik

Teil 2: Digitale Basisband-Signalverarbeitung



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

6 Pulscodemodulation (A/D-Wandlung)

6.1 Erzeugung der Pulscodemodulation

6.2 Analog/Digital-Wandlung mit linearer Quantisierung

6.2.1 Erforderliche Bandbreite zur Übertragung von binären NRZ-Signalen

6.2.2 Verfahren zur Analog/Digital-Wandlung

6.2.3 Quantisierungsfehler und Quantisierungsrauschleistung

6.3 Nichtlineare Quantisierung

6.4 PCM-Übertragungssystem

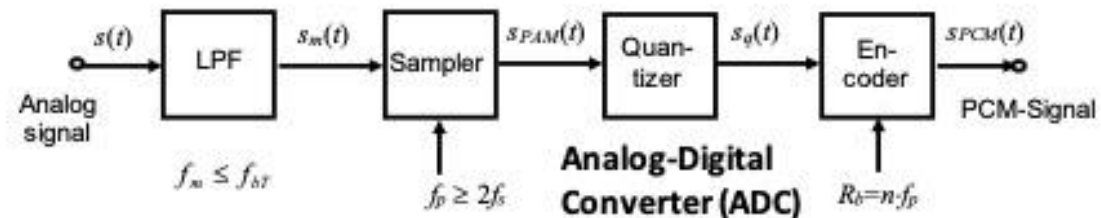
6.4.1 Bitfehlerwahrscheinlichkeit

6.4.2 Fehlerwahrscheinlichkeit des PCM-Codewortes

6.5 PCM-Zeitmultiplex

6.5.1 Getrennte Codierung

6.5.2 Zentrale Codierung



6.6 Beispiel: PCM30-Grundsystem (ISDN)

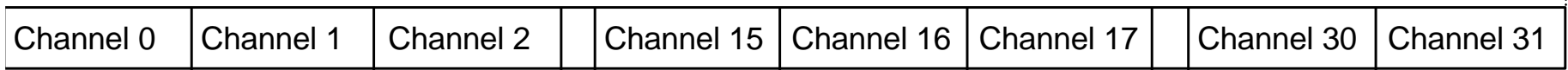
Beispiel: PCM30-Grundsystem (ISDN) Digitale Vermittlungstechnik Europas

32 Kanäle je 64 kbit/s
→ 2048 kbit/s

Prinzip auf moderne
KOMsysteme übertragen

a) 32 Byte großer Rahmen

One frame
Frame duration 125µs



Channel duration
 $3.9 \mu s = 125 \mu s / 32$

Signalling channel
für Signalisierung

32 Kanäle mit je 64 kbit/s
K0 Rahmenkennungswort
K16 Kennzeichen Sprechkanäle
30 Sprachkanäle

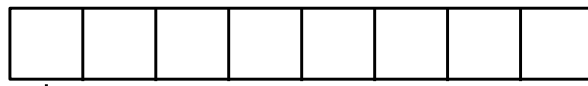
Frame marking in odd frames, specific signalling word in even frames

für Synchronisation

$$R_b = 1/T_b = 2048 \text{ kbit/s}$$

1 Byte (Kanal) = 8 bit

c) 1 2 3 4 5 6 7 8



Segment Step within segment

Sign, (1 = +, 0 = -)

Bitdauer: $T_b = 3.9 \mu s / 8 = 0.488 \mu s$

Each amplitude value represented by 8 bit

1st bit

sign

2nd-4th bit

defined segments (linear sections)

⇒ 2³ segments

5th-8th bit

defining quantizing steps within segment

⇒ 2⁴ quantizing steps / segments

Danke für die Aufmerksamkeit



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Technische Universität Darmstadt (TUD)

Mikrowellentechnik (MWT) • Microwave Engineering Lab

Institut für Mikrowellentechnik und Photonik (IMP)

Merckstrasse 25, 64283 Darmstadt, Tel.: +49 6151-16-28460, E-Mail: jakoby@imp.tu-darmstadt.de

