Hilfsblätter

zur Vorlesung

Deterministische Signale und Systeme

Technische Universität Darmstadt

Institut für Nachrichtentechnik

int

1 Fourier-Reihe

Definition

Voraussetzung: $x(t)$ muss periodisch in t sein

$$x(t+T_0) = x(t)$$

Trigonometrische Fourier-Reihe

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)) \\
a_k &= \frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\cos(k\omega_0 t)\mathrm{d}t \\
b_k &= \frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\sin(k\omega_0 t)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Komplexe Fourier-Reihe

$$\begin{aligned}
x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \\
c_k &= \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Harmonische Fourier-Reihe

$$x(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos(k\omega_0 t - \theta_k), \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

Beziehungen zwischen verschiedenen Fourierkoeffizienten

$$\begin{aligned}
&\frac{a_0}{2} = c_0, \qquad a_k = c_k + c_{-k}, \qquad b_k = j(c_k - c_{-k}) \\
&c_k = \frac{1}{2}(a_k - jb_k), \qquad c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + jb_k) \\
&C_0 = \frac{a_0}{2}, \qquad C_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \qquad \theta_k = \arg(a_k + jb_k)
\end{aligned}$$

Parsevalsche Gleichung

$$\frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|^2 \mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

2 Fourier-Transformation

Definition

$$x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet X(j\omega) \qquad X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} \qquad x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(j\omega)\}$$

Fourier-Transformation

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} \mathrm{d}t$$

Inverse Fourier-Transformation

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} \mathrm{d}\omega$$

Eigenschaften

Linearität:	$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet$	$a_1 X_1(j\omega) + a_2 X_2(j\omega)$
Zeitverschiebung:	$x(t - t_0) \circ\!\!-\!\!\bullet$	$X(j\omega) e^{-j\omega t_0}$
Frequenzverschiebung:	$x(t) e^{j\omega_0 t} \circ\!\!-\!\!\bullet$	$X(j(\omega - \omega_0))$
Zeitskalierung:	$x(at) \circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{\lvert a \rvert} X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$
Zeitumkehr:	$x(-t) \circ\!\!-\!\!\bullet$	$X(-j\omega)$
Ableitung im Zeitbereich:	$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet$	$(j\omega)^n X(j\omega)$
Ableitung im Frequenzbereich:	$(-jt)^n x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\omega^n} X(j\omega)$
Integration:	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau) \mathrm{d}\tau \circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0) \delta(\omega)$
Symmetrie/ Dualität:	$X(jt) \circ\!\!-\!\!\bullet$	$2\pi x(-\omega)$
Multiplikation:	$x_1(t) x_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{2\pi} X_1(j\omega) * X_2(j\omega)$
Faltung:	$x_1(t) * x_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet$	$X_1(j\omega) X_2(j\omega)$
mit dem Faltungsintegral:	$x_1(t) * x_2(t) =$	$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t - \tau) \mathrm{d}\tau$
Parsevalsche Gleichung:	$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert x(t) \rvert^2 \mathrm{d}t =$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lvert X(j\omega) \rvert^2 \mathrm{d}\omega$

Symmetrien:

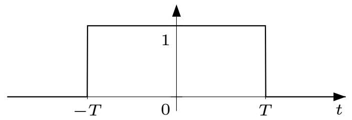
$x(t)$ gerade, d.h. $x(-t) = x(t)$	$\Leftrightarrow$	$X(j\omega)$ gerade
$x(t)$ ungerade, d.h. $x(-t) = -x(t)$	$\Leftrightarrow$	$X(j\omega)$ ungerade
$x(t)$ reell	$\Leftrightarrow$	$X(-j\omega) = X^*(j\omega)$
$x(t)$ reell und gerade	$\Leftrightarrow$	$X(j\omega)$ reell und gerade
$x(t)$ reell und ungerade	$\Leftrightarrow$	$X(j\omega)$ imaginär und ungerade
$x(t)$ reell, gerade	$\Leftrightarrow$	$X(j\omega) = 2 \int_0^{\infty} x(t) \cos(\omega t) \mathrm{d}t$
$x(t)$ reell, ungerade	$\Leftrightarrow$	$X(j\omega) = -2j \int_0^{\infty} x(t) \sin(\omega t) \mathrm{d}t$
$X(j\omega)$ reell, gerade	$\Leftrightarrow$	$x(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} X(j\omega) \cos(\omega t) \mathrm{d}\omega$
$X(j\omega)$ reell, ungerade	$\Leftrightarrow$	$x(t) = \frac{j}{\pi} \int_0^{\infty} X(j\omega) \sin(\omega t) \mathrm{d}\omega$

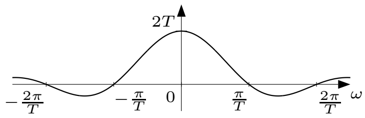
Gebräuchliche Korrespondenzen der Fourier-Transformation

Im Folgenden ist $u(t)$ die Sprungfunktion mit $u(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$

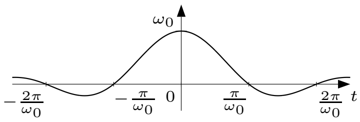
$$\begin{aligned}
e^{-at}u(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet \tfrac{1}{a+j\omega}, && a>0 \\
e^{at}u(-t) &\circ\!\!-\!\!\bullet \tfrac{1}{a-j\omega}, && a>0 \\
te^{-at}u(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet \tfrac{1}{(a+j\omega)^2}, && a>0 \\
t^n e^{-at}u(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet \tfrac{n!}{(a+j\omega)^{n+1}}, && a>0 \\
|t| &\circ\!\!-\!\!\bullet -\tfrac{2}{\omega^2} \\
\delta(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet 1 \\
1 &\circ\!\!-\!\!\bullet 2\pi\delta(\omega) \\
e^{j\omega_0 t} &\circ\!\!-\!\!\bullet 2\pi\delta(\omega-\omega_0) \\
\cos(\omega_0 t) &\circ\!\!-\!\!\bullet \pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)] \\
\sin(\omega_0 t) &\circ\!\!-\!\!\bullet j\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)] \\
\cos(\omega_0 t)u(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet \tfrac{\pi}{2}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]+\tfrac{j\omega}{\omega_0^2-\omega^2} \\
\sin(\omega_0 t)u(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet \tfrac{\pi}{2j}[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]+\tfrac{\omega_0}{\omega_0^2-\omega^2} \\
e^{-at}\sin(\omega_0 t)u(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet \tfrac{\omega_0}{(a+j\omega)^2+\omega_0^2}, && a>0 \\
e^{-at}\cos(\omega_0 t)u(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet \tfrac{a+j\omega}{(a+j\omega)^2+\omega_0^2}, && a>0 \\
\textstyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT) &\circ\!\!-\!\!\bullet \omega_0\textstyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_0), \quad \omega_0=\tfrac{2\pi}{T} \\
e^{-at^2} &\circ\!\!-\!\!\bullet \sqrt{\tfrac{\pi}{a}}e^{-\frac{\omega^2}{4a}}, && a>0
\end{aligned}$$

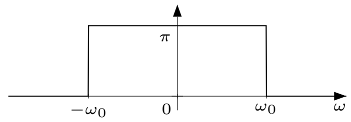
$$r_T(t) = \Pi\left(\frac{t}{2T}\right) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad {}^{2}/_{\omega} \sin(\omega T) = 2T\mathrm{si}(\omega T) = 2T\mathrm{sinc}({}^{\omega T}/_{\pi})$$



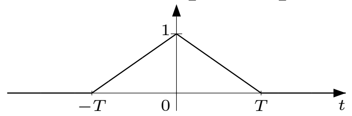


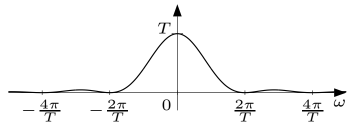
$$\frac{\sin(\omega_0 t)}{t} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \pi r_{\omega_0}(\omega)$$

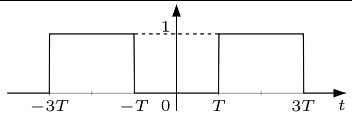




$$d_T(t) = \left[1 - \frac{|t|}{T}\right] r_T(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad T\mathrm{si}^2({}^{T\omega}/_{2})$$

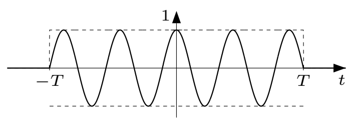




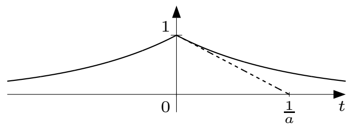


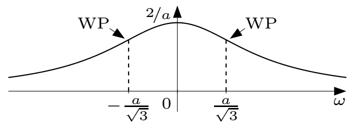
$$\circ\!\!-\!\!\bullet \quad 4T\mathrm{si}(T\omega)\cos(2T\omega)$$

$$r_T(t)\cos(\omega_0 t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{\sin(T(\omega+\omega_0))}{\omega+\omega_0} + \frac{\sin(T(\omega-\omega_0))}{\omega-\omega_0}$$

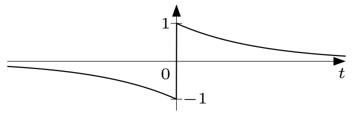


$$e^{-a|t|}, a > 0 \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

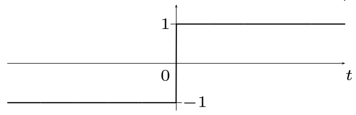




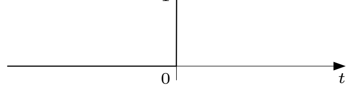
$$e^{-a|t|}\mathrm{sgn}(t),\ a > 0 \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad -j\frac{2\omega}{a^2+\omega^2}$$



$$\mathrm{sgn}(t) = \frac{t}{|t|} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{2}{j\omega}$$



$$u(t) = \sigma(t) = 1(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$



Anmerkung: Die verschiedenen Bezeichnungen $u(t)$, $\sigma(t)$ und $1(t)$ für die Sprungfunktion im Zeitbereich sind äquivalent. In den Vorlesungsunterlagen wird aber hauptsächlich die Bezeichnung $u(t)$ verwendet.

3 Laplace-Transformation

Man unterscheidet zwischen ein- und zweiseitiger Laplace-Transformation.

Definition

$$x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, X(p) \qquad X(p) = \mathcal{L}\{x(t)\} \qquad x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(p)\} \qquad \text{mit } p = \sigma + j\omega$$

Einseitige Laplace-Transformation

$$X(p) = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-pt}\mathrm{d}t \qquad \text{mit } 0^- = \lim_{\varepsilon\to 0}(0-\varepsilon)$$

Zweiseitige Laplace-Transformation

$$X(p) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-pt}\mathrm{d}t$$

Inverse Laplace-Transformation (für ein- & zweiseitige Transformation)

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(p)e^{pt}\mathrm{d}p$$

Eigenschaften

Es gelte: $x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, X(p)$, $x_1(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, X_1(p)$, $x_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, X_2(p)$

R, R_1, R_2 bezeichne jeweils das Konvergenzgebiet von $X(p)$, $X_1(p)$, $X_2(p)$. R' bezeichne das Konvergenzgebiet nach der Umformung.

Linearität:		$a_1 \cdot x_1(t) + a_2 \cdot x_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, a_1 \cdot X_1(p) + a_2 \cdot X_2(p)$,	$R' \supseteq R_1 \cap R_2$
Zeitverschiebung	einseitig:	$x(t-t_0) \circ\!\!-\!\!\bullet\, e^{-t_0 p}\left[X(p) + \underbrace{\int_{-t_0}^{0} x(t)e^{-pt}\mathrm{d}t}_{=0 \text{ für kausale Funktionen}}\right]$,	$t_0 > 0$
		$x(t+t_0) \circ\!\!-\!\!\bullet\, e^{t_0 p}\left[X(p) - \int_0^{t_0} x(t)e^{-pt}\mathrm{d}t\right]$,	$t_0 > 0$
	zweiseitig:	$x(t-t_0) \circ\!\!-\!\!\bullet\, e^{-pt_0} \cdot X(p)$,	$R' = R$
Verschiebung in p:		$e^{p_0 t} \cdot x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, X(p-p_0)$,	$R' = R + \mathrm{Re}\{p_0\}$
Zeitskalierung:		$x(at) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{p}{a}\right)$,	$R' = aR$
Zeitumkehr:		$x(-t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, X(-p)$,	$R' = -R$
Integration	einseitig:	$\int_{0^-}^{t} x(\tau)\mathrm{d}\tau \circ\!\!-\!\!\bullet\, \frac{X(p)}{p}$	
		$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\mathrm{d}\tau \circ\!\!-\!\!\bullet\, \frac{X(p)}{p} + \frac{1}{p}\int_{-\infty}^{0^-} x(\tau)\mathrm{d}\tau$	
	zweiseitig:	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\mathrm{d}\tau \circ\!\!-\!\!\bullet\, \frac{X(p)}{p}$,	$R' \supseteq R \cap (\mathrm{Re}\{p\} > 0)$
Ableitung in t	einseitig:	$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, p^n X(p) - p^{n-1}x(0^-) - p^{n-2}x'(0^-) - \ldots - x^{(n-1)}(0^-)$	
	zweiseitig:	$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \circ\!\!-\!\!\bullet\, pX(p)$,	$R' \supseteq R$
Ableitung in p:		$-tx(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \frac{\mathrm{d}X(p)}{\mathrm{d}p}$,	$R' = R$
Faltung:		$x_1(t) * x_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, X_1(p) \cdot X_2(p)$,	$R' \supseteq R_1 \cap R_2$
Anfangswertsatz (nur einseitig):		$x(0^+) = \lim_{\varepsilon\to 0} x(0+\varepsilon) = \lim_{p\to\infty} pX(p)$,	falls $x(0^+)$ existiert
Endwertsatz (nur einseitig):		$x(\infty) = \lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{p\to 0} pX(p)$,	falls $\lim_{t\to\infty} x(t)$ existiert

Gebräuchliche Korrespondenzen der Laplace-Transformation

Für alle Funktionen gelte $x(t) = 0$ für $t < 0$, gekennzeichnet durch die Sprungfunktion

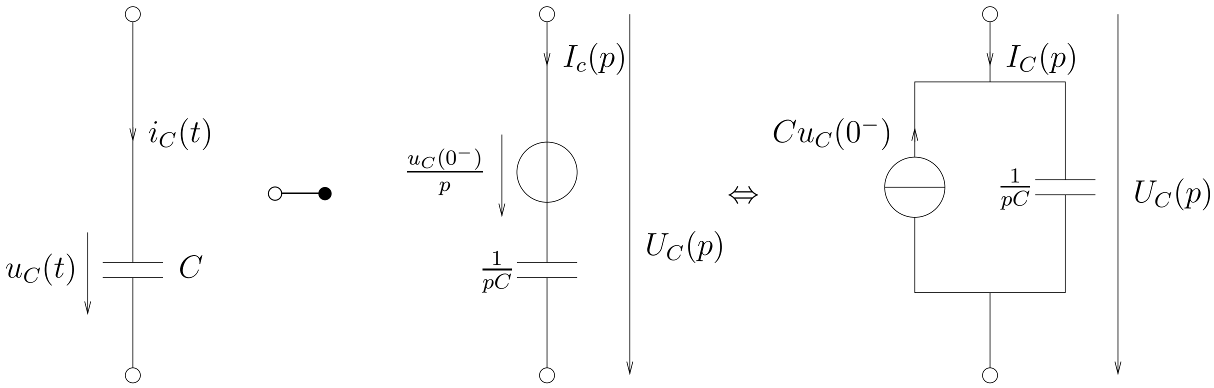
$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

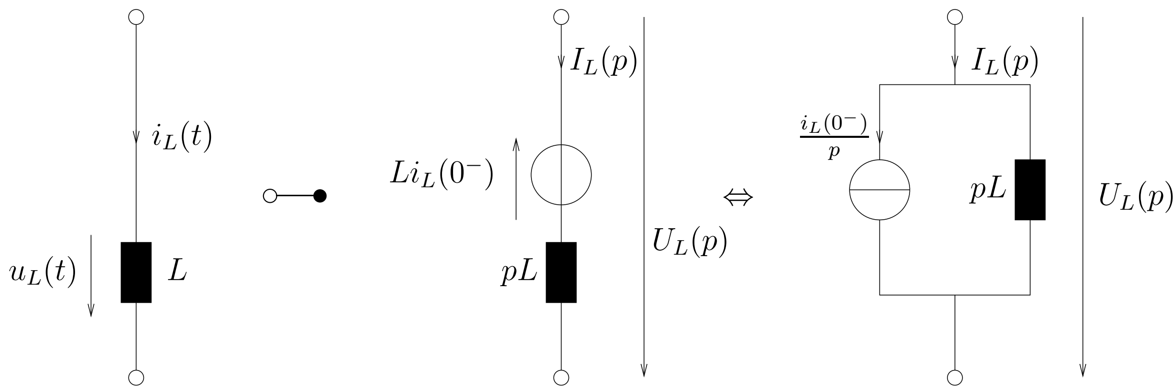
Außerdem gelte $\beta = \sqrt{\alpha^2 + \omega_0^2}$.

$$\begin{aligned}
\delta(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ 1, \qquad R : \text{alle } p \\
u(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ \tfrac{1}{p}, \qquad \mathrm{Re}\{p\} > 0 \\
\tfrac{t^n}{n!} u(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ \tfrac{1}{p^{n+1}} \\
e^{-\alpha t} u(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ \tfrac{1}{p+\alpha}, \qquad \mathrm{Re}\{p\} > -\mathrm{Re}\{\alpha\} \\
\sin(\omega_0 t) u(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ \tfrac{\omega_0}{p^2+\omega_0^2} \\
\cos(\omega_0 t) u(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ \tfrac{p}{p^2+\omega_0^2} \\
\sinh(\alpha t) u(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ \tfrac{\alpha}{p^2-\alpha^2} \\
\cosh(\alpha t) u(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ \tfrac{p}{p^2-\alpha^2} \\
\tfrac{t^n}{n!} e^{\alpha t} u(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ \tfrac{1}{(p-\alpha)^{n+1}} \\
\tfrac{1}{\alpha-\gamma}(e^{-\gamma t} - e^{-\alpha t}) u(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ \tfrac{1}{(p+\alpha)(p+\gamma)} \\
e^{-\alpha t} \cdot \sin(\omega_0 t) u(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ \tfrac{\omega_0}{(p+\alpha)^2+\omega_0^2} \\
e^{-\alpha t} \cdot \cos(\omega_0 t) u(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ \tfrac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega_0^2} \\
t \sin(\omega_0 t) u(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ \tfrac{2\omega_0 \cdot p}{(p^2+\omega_0^2)^2} \\
t \cos(\omega_0 t) u(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ \tfrac{p^2-\omega_0^2}{(p^2+\omega_0^2)^2} \\
\tfrac{1}{\alpha^2}(\alpha t + e^{-\alpha t} - 1) u(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ \tfrac{1}{p^2(p+\alpha)} \\
\tfrac{1}{\omega_0^2}(1 - \cos(\omega_0 t)) u(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ \tfrac{1}{p(p^2+\omega_0^2)} \\
\tfrac{1}{\alpha^2+\omega_0^2}\left(e^{-\alpha t} - \cos(\omega_0 t) + \tfrac{\alpha}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\right) u(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ \tfrac{1}{(p+\alpha)(p^2+\omega_0^2)} \\
\tfrac{1}{\omega_0} e^{-\alpha t} \cdot \sin(\omega_0 t) u(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ \tfrac{1}{p^2+2\alpha p+\beta^2} \\
e^{-\alpha t}\left(\cos(\omega_0 t) - \tfrac{\alpha}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\right) u(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ \tfrac{p}{p^2+2\alpha p+\beta^2} \\
\left(1 - \left(\cos(\omega_0 t) + \tfrac{\alpha}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\right) e^{-\alpha t}\right) u(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ \tfrac{\beta^2}{p(p^2+2\alpha p+\beta^2)}
\end{aligned}$$

Ersatzschaltbilder

Zeitbereich	○—●	Laplace-Bereich mit Spannungsquelle	$\Leftrightarrow$	Laplace-Bereich mit Stromquelle





Die Schaltung sei zum Zeitpunkt $t < 0$ im eingeschwungenen Zustand und zum Zeitpunkt $t = 0$ trete eine Veränderung der Spannungsverhältnisse ein. Dann gilt:

Kondensator

$$u_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i_C(\tau)\mathrm{d}\tau + u_C(0^-)$$

$$i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}$$

Spule

$$u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_0^t u_L(\tau)\mathrm{d}\tau + i_L(0^-)$$

Einspeichernetzwerkformel

$$x(t) = x(t_1^+)e^{-\frac{t-t_1}{T}} + x(\infty)\left(1 - e^{-\frac{t-t_1}{T}}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} T = CR_i \\ T = L/R_i \end{array}\right\} \text{Zeitkonstante}$$

R_i	Innenwiderstand
$x(t_1^+)$	Anfangswert zum Schaltzeitpunkt $t = t_1$
$x(\infty)$	Endwert

4 z-Transformation

Man unterscheidet zwischen ein- und zweiseitiger z-Transformation.
Definition

$$f_n \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(z) \qquad F(z) = \mathcal{Z}\{f_n\} \qquad f_n = \mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\} \qquad \text{mit } z = e^{pT},\ T\text{: Abtastintervall}$$

Einseitige z-Transformation

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}$$

Zweiseitige z-Transformation

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n z^{-n}$$

Inverse z-Transformation (für ein- und zweiseitige Transformation)

$$f_n = \frac{1}{2\pi j} \oint_C F(z) z^{n-1} \mathrm{d}z$$

Dabei ist die Kurve C so zu wählen, dass sie im Konvergenzgebiet den Koordinatenursprung der komplexen z-Ebene einmal im mathematisch positiven Sinne umrundet.

Eigenschaften
Es gelte: $f_n \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(z)$, $g_n \circ\!\!-\!\!\bullet\ G(z)$
R_f, R_g bezeichne jeweils das Konvergenzgebiet von $F(z)$, $G(z)$. R' bezeichne das Konvergenzgebiet nach der Umformung.

Linearität:		$af_n + bg_n \circ\!\!-\!\!\bullet\ aF(z) + bG(z),$	$R' \supseteq R_f \cap R_g$
Verschiebung	einseitig:	$f_{n-k} \circ\!\!-\!\!\bullet\ z^{-k}F(z) + \sum_{m=1}^{k} f_{-m} z^{m-k}$ $= z^{-k}\left[F(z) + \sum_{m=1}^{k} f_{-m} z^{m}\right],$	$k > 0$
		$f_{n+k} \circ\!\!-\!\!\bullet\ z^{k}F(z) - \sum_{m=0}^{k-1} f_m z^{k-m}$ $= z^{k}\left[F(z) - \sum_{m=0}^{k-1} f_m z^{-m}\right],$	$k > 0$
	zweiseitig:	$f_{n-k} \circ\!\!-\!\!\bullet\ z^{-k}F(z),$	$R' \supseteq R_f \cap$ $\{0 < \lvert z\rvert < \infty\}$
Multiplikation mit z_0^n:		$z_0^n f_n \circ\!\!-\!\!\bullet\ F\left(\frac{z}{z_0}\right),$	$R' = \lvert z_0\rvert R_f$
Zeitumkehr:		$f_{-n} \circ\!\!-\!\!\bullet\ F\left(\frac{1}{z}\right),$	$R' = \frac{1}{R_f}$
Multiplikation mit n:		$n \cdot f_n \circ\!\!-\!\!\bullet\ -z\frac{dF(z)}{dz},$	$R' = R_f$
Summation:		$\sum_{n=-\infty}^{k} f_n \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{1-z^{-1}}F(z),$	$R' \supseteq R_f \cap$ $\{\lvert z\rvert > 1\}$
Faltung:		$f_n * g_n \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(z) \cdot G(z),$	$R' \supseteq R_f \cap R_g$
mit der Faltungssumme:		$f_n * g_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k\ g_{n-k}$	
Anfangswertsatz (nur einseitig):		$f_0 = \lim_{z\to\infty} F(z),$	falls Grenzwert existiert
Endwertsatz (nur einseitig):		$\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{z\to 1}(z-1)F(z),$	falls $F(z)$ nur Pole mit $\lvert z\rvert < 1$ und höchstens einen einfachen Pol bei $z = 1$ besitzt

Gebräuchliche Korrespondenzen der z-Transformation

Für alle Folgen gelte: $f_n = 0$ für $n < 0$, gekennzeichnet durch eine Multiplikation mit der "Einschaltfolge" $u_n = \begin{cases} 1 & \text{für } n \geq 0 \\ 0 & \text{für } n < 0 \end{cases}$

$$\delta(n) \circ\!\!-\!\!\bullet\ 1$$

$$u_n \circ\!\!-\!\!\bullet\ \tfrac{z}{z-1}, \qquad |z| > 1$$

$$a^n u_n \circ\!\!-\!\!\bullet\ \tfrac{z}{z-a}, \qquad |z| > |a|$$

$$e^{-an} u_n \circ\!\!-\!\!\bullet\ \tfrac{z}{z-e^{-a}}$$

$$a^n e^{-bn} u_n \circ\!\!-\!\!\bullet\ \tfrac{z}{z-ae^{-b}}$$

$$n e^{-an} u_n \circ\!\!-\!\!\bullet\ \tfrac{e^{-a} z}{(z-e^{-a})^2}$$

$$n^2 e^{-an} u_n \circ\!\!-\!\!\bullet\ \tfrac{e^{-a} z (z+e^{-a})}{(z-e^{-a})^3}$$

$$n u_n \circ\!\!-\!\!\bullet\ \tfrac{z}{(z-1)^2}$$

$$n^2 u_n \circ\!\!-\!\!\bullet\ \tfrac{z(z+1)}{(z-1)^3}$$

$$n^3 u_n \circ\!\!-\!\!\bullet\ \tfrac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$$

$$n^4 u_n \circ\!\!-\!\!\bullet\ \tfrac{z(z^3+11z^2+11z+1)}{(z-1)^5}$$

$$n a^n u_n \circ\!\!-\!\!\bullet\ \tfrac{az}{(z-a)^2}$$

$$n^2 a^n u_n \circ\!\!-\!\!\bullet\ \tfrac{az(z+a)}{(z-a)^3}$$

$$(n+1) a^n u_n \circ\!\!-\!\!\bullet\ \tfrac{z^2}{(z-a)^2}$$

$$\tfrac{(n+1)(n+2)a^n}{2!} u_n \circ\!\!-\!\!\bullet\ \tfrac{z^3}{(z-a)^3}$$

$$\tfrac{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)a^n}{m!} u_n \circ\!\!-\!\!\bullet\ \tfrac{z^{m+1}}{(z-a)^{m+1}}$$

$$\tfrac{n(n-1)}{2!} u_n \circ\!\!-\!\!\bullet\ \tfrac{z}{(z-1)^3}$$

$$\tfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!} a^{n-m} u_n \circ\!\!-\!\!\bullet\ \tfrac{z}{(z-a)^{m+1}}$$

$$\cos(n\omega) u_n \circ\!\!-\!\!\bullet\ \tfrac{z(z-\cos(\omega))}{z^2-2z\cos(\omega)+1}$$

$$\sin(n\omega) u_n \circ\!\!-\!\!\bullet\ \tfrac{z\sin(\omega)}{z^2-2z\cos(\omega)+1}$$

$$e^{-\beta n}\cos(n\omega) u_n \circ\!\!-\!\!\bullet\ \tfrac{z(z-e^{-\beta}\cos(\omega))}{z^2-2e^{-\beta}z\cos(\omega)+e^{-2\beta}}$$

$$e^{-\beta n}\sin(n\omega) u_n \circ\!\!-\!\!\bullet\ \tfrac{ze^{-\beta}\sin(\omega)}{z^2-2e^{-\beta}z\cos(\omega)+e^{-2\beta}}$$

$$\cosh(\beta n) u_n \circ\!\!-\!\!\bullet\ \tfrac{z(z-\cosh(\beta))}{z^2-2z\cosh(\beta)+1}$$

$$\sinh(\beta n) u_n \circ\!\!-\!\!\bullet\ \tfrac{z\sinh(\beta))}{z^2-2z\cosh(\beta)+1}$$

$$\tfrac{1}{n!} u_n \circ\!\!-\!\!\bullet\ e^{\frac{1}{z}}$$

$$\begin{cases} a^n & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \circ\!\!-\!\!\bullet\ \tfrac{1-a^N z^{-N}}{1-az^{-1}}$$

5 Diskrete Fourier-Transformation (DFT)

Definition

$$x(n) \circ\!\!-\!\!\bullet X_{DFT}(k)$$

$$\Delta\Omega = \frac{2\pi}{N} \qquad W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_{DFT}(k)e^{j\Delta\Omega\, k\cdot n} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_{DFT}(k)W_N^{-kn} \quad \text{nur für } n = 0,1,...,N-1 \text{ definiert}$$

$$X_{DFT}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\Delta\Omega\, k\cdot n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn} \quad \text{nur für } k = 0,1,...,N-1 \text{ definiert}$$

Periodizität

$$(n)_{mod\,N} = n\,\text{modulo}\,N$$

$$(k)_{mod\,N} = k\,\text{modulo}\,N$$

$$x(n) = x(n + i\cdot N) = x(n)_{mod\,N} \qquad i\in\mathbb{Z}$$

$$X_{DFT}(k) = X_{DFT}(k + i\cdot N) = X_{DFT}(k)_{mod\,N} \qquad i\in\mathbb{Z}$$

Eigenschaften

wenn $x_1(n) \circ\!\!-\!\!\bullet X_{DFT,1}(k)$

$x_2(n) \circ\!\!-\!\!\bullet X_{DFT,2}(k)$ bei gleichem N

dann gilt:

Zeitumkehr:	$x(-n)_{mod\,N}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X_{DFT}(-k)_{mod\,N}$
Konjugation:	$x^*(n)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X^*_{DFT}(-k)_{mod\,N}$ $\quad ^*$ konj. komplex
Linearität:	$a_1x_1(n) + a_2x_2(n)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$a_1X_{DFT,1}(k) + a_2X_{DFT,2}(k)$
Dualität:	$X_{DFT}(n)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$N\,x(-k)_{mod\,N}$
Zeitverschiebung:	$x(n-i)_{mod\,N}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X_{DFT}(k)e^{-j\frac{2\pi}{N}k\cdot i} = X_{DFT}(k)W_N^{ki}$
Frequenzverschiebung:	$x(n)e^{j\frac{2\pi}{N}n\cdot i} = x(n)W_N^{-ni}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X_{DFT}(k-i)_{mod\,N}$
Multiplikation:	$x_1(n)x_2(n)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{N}X_{DFT,1}(k)\otimes X_{DFT,2}(k)$
mit:	$X_{DFT,1}(k)\otimes X_{DFT,2}(k)$	$=$	$\sum_{i=0}^{N-1} X_{DFT,1}(i)X_{DFT,2}(k-i)_{mod\,N}$
Zyklische Faltung:	$x_1(n)\otimes x_2(n)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X_{DFT,1}(k)X_{DFT,2}(k)$
mit:	$x_1(n)\otimes x_2(n)$	$=$	$\sum_{i=0}^{N-1} x_1(i)x_2(n-i)_{mod\,N}$
Parsevalsche Gleichung:	$\sum_{n=0}^{N-1} \lvert x(n)\rvert^2$	$=$	$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \lvert X_{DFT}(k)\rvert^2$

6 Zeitdiskrete Fourier-Transformation (DTFT)

Definition

$$x(n) \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; X(j\Omega) \qquad X(j\Omega) = \mathcal{F}\{x(n)\} \qquad x(n) = \mathcal{F}^{-1}\{X(j\Omega)\}$$

Zeitdiskrete Fourier-Transformation

$$X(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n} \qquad \Omega = \omega T$$

Inverse zeitdiskrete Fourier-Transformation

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(j\Omega) e^{j\Omega n} \mathrm{d}\Omega$$

Eigenschaften

Es gelte: $x(n) \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; X(j\Omega)$, $x_1(n) \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; X_1(j\Omega)$, $x_2(n) \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; X_2(j\Omega)$

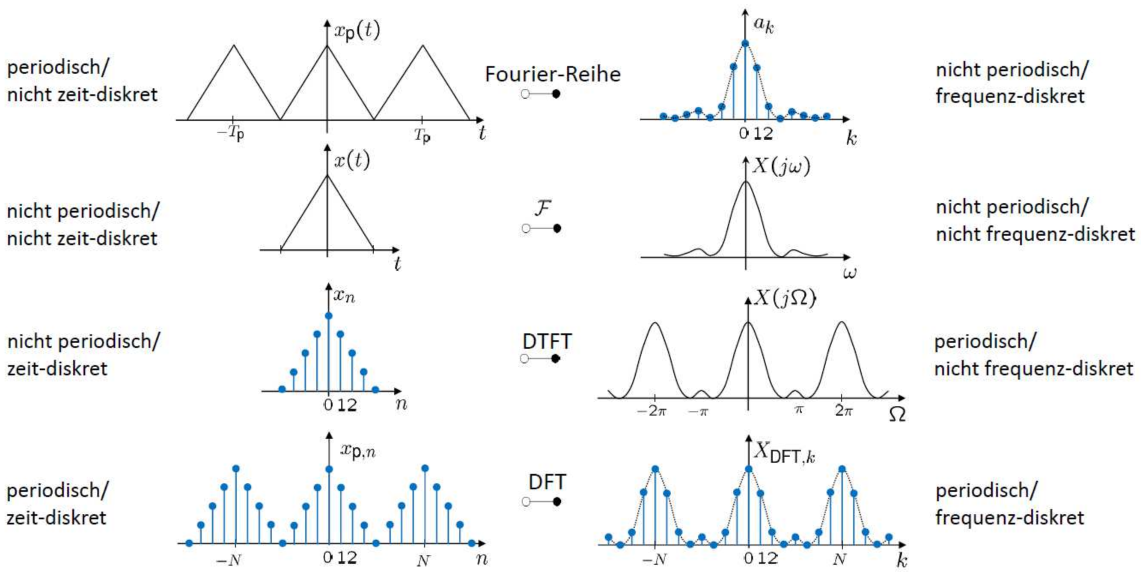
Periodizität:	$X(j\Omega) = X(j(\Omega + k \cdot 2\pi)), \qquad k \in \mathbb{Z}$
Linearität:	$a \cdot x_1(n) + b \cdot x_2(n) \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; a \cdot X_1(j\Omega) + b \cdot X_2(j\Omega)$
Zeitverschiebung:	$x(n - n_0) \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; e^{-j\Omega n_0} \cdot X(j\Omega)$
Frequenzverschiebung:	$e^{j\Omega_0 n} \cdot x(n) \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; X(j(\Omega - \Omega_0))$
Konjugation:	$x^*(n) \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; X^*(-j\Omega), \qquad {}^*$ konj. komplex
Zeitskalierung:	$x_{(m)}(n) \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; X(jm\Omega), \qquad m \in \mathbb{Z}^+$
mit:	$x_{(m)}(n) = \begin{cases} x(n/m) & \text{für } n = km \\ 0 & \text{für } n \neq km \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$
Zeitumkehr:	$x(-n) \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; X(-j\Omega)$
Ableitung im Frequenzbereich:	$n \cdot x(n) \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; j \frac{\mathrm{d}X(j\Omega)}{\mathrm{d}\Omega}$
Summation:	$\sum_{n=-\infty}^{k} x(n) \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \frac{X(j\Omega)}{1 - e^{-j\Omega}} + \pi X(j0) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi k)$
Faltung:	$x_1(n) * x_2(n) \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; X_1(j\Omega) \cdot X_2(j\Omega)$
mit der Faltungssumme:	$x_1(n) * x_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)\ x_2(n-k)$
Multiplikation:	$x_1(n) \cdot x_2(n) \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{2\pi} X_1(j\Omega) \otimes X_2(j\Omega)$
mit der zyklischen Faltung:	$X_1(j\Omega) \otimes X_2(j\Omega) = \int_{2\pi} X_1(j\theta)\ X_2(j(\Omega - \theta)) \mathrm{d}\theta$
Parsevalsche Gleichung:	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lvert x(n) \rvert^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} \lvert X(j\Omega) \rvert^2 \mathrm{d}\Omega$

Gebräuchliche Korrespondenzen der zeitdiskreten Fourier-Transformation
Die Funktion $u(n)$ kennzeichnet die zeitdiskrete Sprungfunktion mit

$$u(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } n \geq 0 \\ 0 & \text{für } n < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\delta(n) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ 1 \\
1 &\circ\!\!-\!\!\bullet\ 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi k) \\
e^{j\Omega_0 n} &\circ\!\!-\!\!\bullet\ 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi k) \\
\cos(\Omega_0 n) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi k) + \delta(\Omega + \Omega_0 - 2\pi k)] \\
\sin(\Omega_0 n) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ -j\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi k) - \delta(\Omega + \Omega_0 - 2\pi k)] \\
u(n) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ \tfrac{1}{1-e^{-j\Omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi k) \\
-u(-n-1) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ \tfrac{1}{1-e^{-j\Omega}} - \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi k) \\
a^n u(n) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ \tfrac{1}{1-ae^{-j\Omega}}, \qquad |a| < 1 \\
-a^n u(-n-1) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ \tfrac{1}{1-ae^{-j\Omega}}, \qquad |a| > 1 \\
(n+1)a^n u(n) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ \tfrac{1}{(1-ae^{-j\Omega})^2}, \qquad |a| < 1 \\
\begin{cases} 1 & |n| \leq N_1 \\ 0 & |n| > N_1 \end{cases} &\circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{\sin\left[\Omega(N_1+\frac{1}{2})\right]}{\sin(\Omega/2)} \\
\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n - kN_0) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ \tfrac{2\pi}{N_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \tfrac{2\pi k}{N_0})
\end{aligned}$$

7 Grafische Zusammenhänge zwischen den Transf.



8 Mathematische Zusammenhänge

8.1 Trigonometrische Funktionen

Verschiebung

$$\begin{aligned}\sin\left(a+\tfrac{\pi}{2}\right) &= \cos(a)\\ \cos\left(a-\tfrac{\pi}{2}\right) &= \sin(a)\end{aligned}$$

Periodizität

Es gilt $n \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}\sin(n\pi) &= 0\\ \cos(n\pi) &= (-1)^n\\ \sin(n\tfrac{\pi}{2}) &= \begin{cases}0 & \text{für gerade } n\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} & \text{für ungerade } n\end{cases}\\ \cos(n\tfrac{\pi}{2}) &= \begin{cases}0 & \text{für ungerade } n\\ (-1)^{\frac{n}{2}} & \text{für gerade } n\end{cases}\end{aligned}$$

Additionstheoreme

$$\begin{aligned}\sin(a)\cos(b) &= \tfrac{1}{2}[\sin(a-b)+\sin(a+b)]\\ \sin(a)\sin(b) &= \tfrac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)]\\ \cos(a)\cos(b) &= \tfrac{1}{2}[\cos(a-b)+\cos(a+b)]\\ \sin(a\pm b) &= \sin(a)\cos(b)\pm\cos(a)\sin(b)\\ \cos(a\pm b) &= \cos(a)\cos(b)\mp\sin(a)\sin(b)\\ \cos(2a) &= \cos^2(a)-\sin^2(a)\\ \sin(2a) &= 2\sin(a)\cos(a)\\ \cos^2(a) &= \tfrac{1}{2}(1+\cos(2a))\\ \sin^2(a) &= \tfrac{1}{2}(1-\cos(2a))\end{aligned}$$

Trigonometrischer Pythargoras

$$\sin^2(a)+\cos^2(a)=1$$

8.2 Komplexe Zahlen

Eulersche Formel

$$\begin{aligned}e^{ja} &= \cos(a)+j\sin(a)\\ \cos(a) &= \tfrac{1}{2}\left(e^{ja}+e^{-ja}\right)\\ \sin(a) &= \tfrac{1}{2j}\left(e^{ja}-e^{-ja}\right)\end{aligned}$$

Moivre-Formel

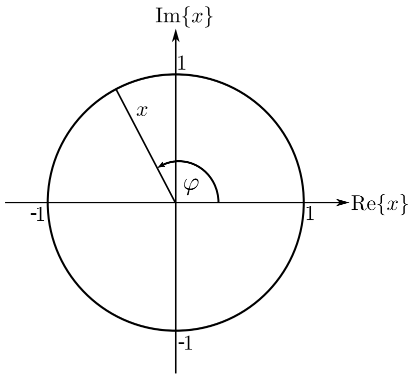
$$\begin{aligned}x^n &= a_0 e^{j\alpha}\\ \Rightarrow x_k &= \sqrt[n]{a_0}\cdot e^{j\frac{\alpha+k2\pi}{n}}\\ & \quad \text{mit } k=\{0,\dots,n-1\}\end{aligned}$$

Betragsquadrat einer komplexen Zahl x

$$|x|^2 = x\cdot x^* = (\mathrm{Re}\{x\})^2+(\mathrm{Im}\{x\})^2$$

Komplexer Zeiger

φ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$x=e^{j\varphi}$	1	j	-1	$-j$	1



Winkel $\arg(x)$ einer komplexen Zahl x

	$\mathrm{Re}\{x\}=0$	$\mathrm{Re}\{x\}<0$	$\mathrm{Re}\{x\}>0$
$\mathrm{Im}\{x\}=0$	nicht definiert	π	0
$\mathrm{Im}\{x\}<0$	$-\frac{\pi}{2}$	$\arctan\left\{\frac{\mathrm{Im}\{x\}}{\mathrm{Re}\{x\}}\right\}-\pi$	$\arctan\left\{\frac{\mathrm{Im}\{x\}}{\mathrm{Re}\{x\}}\right\}$
$\mathrm{Im}\{x\}>0$	$\frac{\pi}{2}$	$\arctan\left\{\frac{\mathrm{Im}\{x\}}{\mathrm{Re}\{x\}}\right\}+\pi$	$\arctan\left\{\frac{\mathrm{Im}\{x\}}{\mathrm{Re}\{x\}}\right\}$

Winkel des Quotienten zweier komplexer Zahlen x, y

$$\arg\left(\frac{x}{y}\right) = \arg(x)-\arg(y)+2k\pi \quad \text{mit } k\in\{-1,0,1\}\text{, sodass } \arg\left(\frac{x}{y}\right)\in(-\pi,\pi]$$

8.3 Dirac-Funktion

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$$

$g(t)$ sei eine beliebige Funktion

$$\begin{aligned} g(t)\delta(t-t_0) &= g(t_0)\delta(t-t_0) \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t &= g(t_0) \\ g(t) * \delta(t-t_0) &= g(t-t_0) \end{aligned}$$

8.4 Quadratische Gleichung

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= 0 \\ x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2+px+q &= 0, \qquad \text{für } p = \frac{b}{a}, \quad q = \frac{c}{a} \\ x_{1,2} &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \end{aligned}$$

8.5 Partialbruchzerlegung

Eine gebrochen-rationale Funktion

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_px^p}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_qx^q}, \quad b_q \neq 0$$

kann in Partialbrüche zerlegt werden, wenn $p < q$ gilt; es existieren q Polstellen $\{x_1, \ldots, x_q\}$.

Nur einfache Polstellen:

$$f(x) = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \cdots + \frac{A_q}{x-x_q}$$

Eine doppelte Polstelle $x_2 = x_1$:

$$f(x) = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \frac{A_3}{x-x_3} + \cdots + \frac{A_q}{x-x_q}$$

Ein konjugiert komplexes Polstellenpaar $x_{2,3} = a \pm jb$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2x + A_3}{(x-x_2)(x-x_3)} + \cdots + \frac{A_q}{x-x_q} \\ &= \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2x + A_3}{x^2 - 2ax + a^2 + b^2} + \cdots + \frac{A_q}{x-x_q} \end{aligned}$$

Sonderfall: Konjugiert komplexes Polstellenpaar bei der z-Transformation

Wenn die Zählernullstellen bei $z = 0$ und $z = a$ liegen, kann man die Funktion zerlegen in:

$$\frac{z(z-a)}{z^2+bz+c} = \frac{Az(z - e^{-\beta}\cos\omega)}{z^2 - 2ze^{-\beta}\cos\omega + e^{-2\beta}} + \frac{Bze^{-\beta}\sin\omega}{z^2 - 2ze^{-\beta}\cos\omega + e^{-2\beta}}$$

8.6 Regel von l'Hospital

Falls die Grenzwertberechnung einen Term der Form $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ oder $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$ liefert, gilt:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

8.7 Differentiationsregeln

Produktregel:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u(x)v(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

Quotientenregel:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

8.8 Geometrische Reihe

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} q^n &= \begin{cases} \frac{1-q^N}{1-q} & \text{für } q \neq 1 \\ N & \text{für } q = 1 \end{cases} \\ \sum_{n=0}^{\infty} q^n &= \frac{1}{1-q} \qquad \text{für } |q| < 1 \end{aligned}$$

8.9 Integrale

$$
\begin{aligned}
\int \cos(ax)\cos(bx)dx &= \frac{\sin((a-b)x)}{2(a-b)} + \frac{\sin((a+b)x)}{2(a+b)} + C \qquad \text{für } a \neq b \\
\int \sin(ax)\sin(bx)dx &= \frac{\sin((a-b)x)}{2(a-b)} - \frac{\sin((a+b)x)}{2(a+b)} + C \qquad \text{für } a \neq b \\
\int \sin(ax)\cos(bx)dx &= -\frac{\cos((a+b)x)}{2(a+b)} - \frac{\cos((a-b)x)}{2(a-b)} + C \qquad \text{für } a \neq b \\
\int \sin(ax)\cos(ax)dx &= \frac{1}{2a}\sin^2(ax) + C \qquad \text{für } a \neq 0 \\
\int e^{ax}\sin(bx)dx &= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin(bx) - b\cos(bx)) + C \qquad \text{für } a^2+b^2 \neq 0 \\
\int e^{ax}\cos(bx)dx &= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos(bx) + b\sin(bx)) + C \qquad \text{für } a^2+b^2 \neq 0 \\
\int x\cos(ax)dx &= \frac{\cos(ax)}{a^2} + \frac{x\sin(ax)}{a} + C \qquad \text{für } a \neq 0 \\
\int x\sin(ax)dx &= \frac{\sin(ax)}{a^2} - \frac{x\cos(ax)}{a} + C \qquad \text{für } a \neq 0 \\
\int x^2\cos(ax)dx &= \frac{2x}{a^2}\cos(ax) + \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3}\right)\sin(ax) + C \qquad \text{für } a \neq 0 \\
\int x^2\sin(ax)dx &= \frac{2x}{a^2}\sin(ax) - \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3}\right)\cos(ax) + C \qquad \text{für } a \neq 0 \\
\int \sin^2(ax)dx &= \frac{x}{2} - \frac{1}{4a}\sin(2ax) + C \qquad \text{für } a \neq 0 \\
\int \cos^2(ax)dx &= \frac{x}{2} + \frac{1}{4a}\sin(2ax) + C \qquad \text{für } a \neq 0 \\
\int xe^{ax}dx &= \frac{ax-1}{a^2}e^{ax} + C \qquad \text{für } a \neq 0 \\
\int x^2e^{ax}dx &= e^{ax}\left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right) + C \qquad \text{für } a \neq 0
\end{aligned}
$$

8.10 Winkeltabelle

x in Grad	0	15	30	45	60	75	90	120	135	150	180
x in rad	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{8}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{8}}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan(x)$	0	$2-\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0