Vorlesung
Deterministische Signale und Systeme

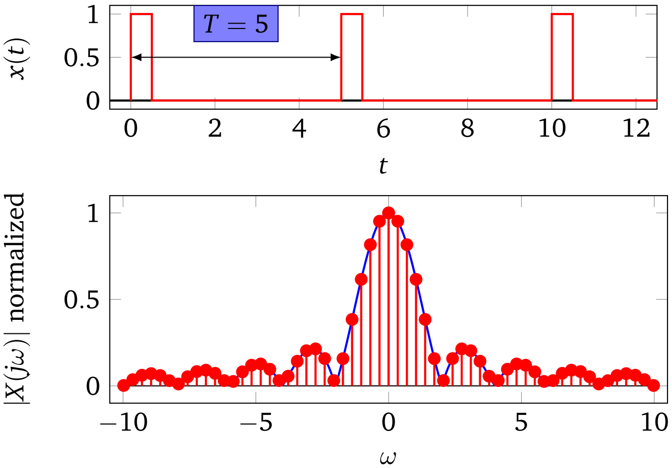
Marius Pesavento

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Copyright

Zusammenfassung WP 3 – Lerneinheit 7

Fourier-Transformation ./fig-06-anim1-fouriertr.pdf



Fouriertransformation

Herleitung der Fouriertransformation als Grenzfall der Fourierreihendarstellung eines periodischen Signals mit unendlicher Periodendauer

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 n t} c_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 n t} \left[\frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(\tau) e^{-j\omega_0 n \tau} \, \mathrm{d}\tau \right]$$

Wir lassen $T_0 \to \infty$, so dass $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \to \mathrm{d}\omega$ und $n\omega_0 \to \omega$. Dann wird aus der **Summe** in der Gleichung oben ein **Riemannsches Integral** :

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} \, \mathrm{d}\tau \right]}_{X(j\omega)} \mathrm{d}\omega$$

Fourier-Transformation

Transformationspaar

$$x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet X(j\omega)$$

Transformation in den Frequenzbereich:

$$X(j\omega) \quad = \quad \mathcal{F}\left\{x(t)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} \mathrm{d}t$$

Rücktransformation in den Zeitbereich:

$$x(t) \quad = \quad \mathcal{F}^{-1}\left\{X(j\omega)\right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} \mathrm{d}\omega$$

Konvergenz der Fourier-Transformation

Dirichlet Bedingungen:

1. Das Signal $x(t)$ ist **absolut integrierbar**.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| \mathrm{d}t < \infty$$

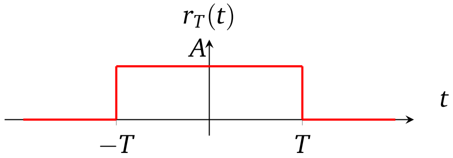
2. Signal $x(t)$ muss bestimmte **Regularitätsbedingungen** erfüllen:
   - $x(t)$ stückweise stetig
   - Anzahl aller Sprungstellen, Unstetigkeiten, Maxima und Minima von $x(t)$ endlich

- Dirichlet Bedingungen schließen die per se wichtige Klasse der **sinusförmigen Signale** aus, da **nicht absolut integrierbar**.
- Signale dieser Art lassen sich mithilfe **verallgemeinerter Funktionen** transformieren (z.B. der Impulsfunktion).

Fourier-Transformation
Beispiel: Rechtecksimpuls

Rechtecksimpuls:

$$A\,r_T\,(t) = \begin{cases} A, & |t| \leq T \\ 0, & |t| > T \end{cases}$$



Fourier Transformierte

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t = A\int_{-T}^{T} e^{-j\omega t}\mathrm{d}t = \frac{jA}{\omega}\left(e^{-j\omega T} - e^{j\omega T}\right) \\ &= \frac{2A}{\omega}\sin\left(\omega T\right) = 2AT\mathrm{si}\left(\omega T\right) = 2AT\mathrm{sinc}(\omega T/\pi) \end{aligned}$$

Fourier-Transformation des Einheitsimpulses: Beispiel

Mit der Definition des Einheitsimpulses (Dirac-Delta-Funktion) ergibt sich dessen Fourier-Transformierte zu

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} \mathrm{d}t = 1$$

Die Rücktransformation in den Zeitbereich berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
\delta(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} \mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \lim_{\alpha \to \infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{j\omega t} \mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{\pi} \lim_{\alpha \to \infty} \frac{\sin(\alpha t)}{t} = \lim_{\alpha \to \infty} \frac{\alpha}{\pi} \mathrm{sinc} \frac{\alpha \mathrm{t}}{\pi}
\end{aligned}$$

$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} \mathrm{d}\omega$ verhält sich wie der Einheitsimpuls $\delta(t)$.

Fourier-Transformierte wichtiger Funktionen

$$\delta(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ 1$$