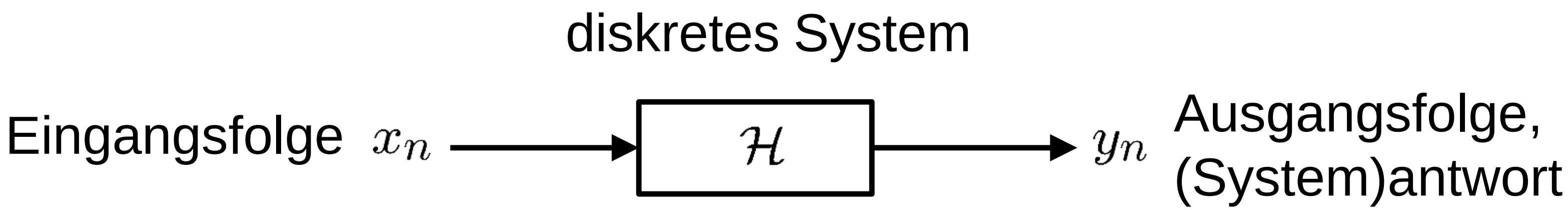
Diskrete Systeme

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Diskrete Systeme

- Ein (zeit-) diskretes System ist eine Abbildung $\mathcal{H}$, die einem zeitdiskreten Eingangssignal (einer Eingangsfolge) ein zeitdiskretes Ausgangsignal (eine Ausgangsfolge) zuordnet:

$$y_n = \mathcal{H}\{x_n\}.$$



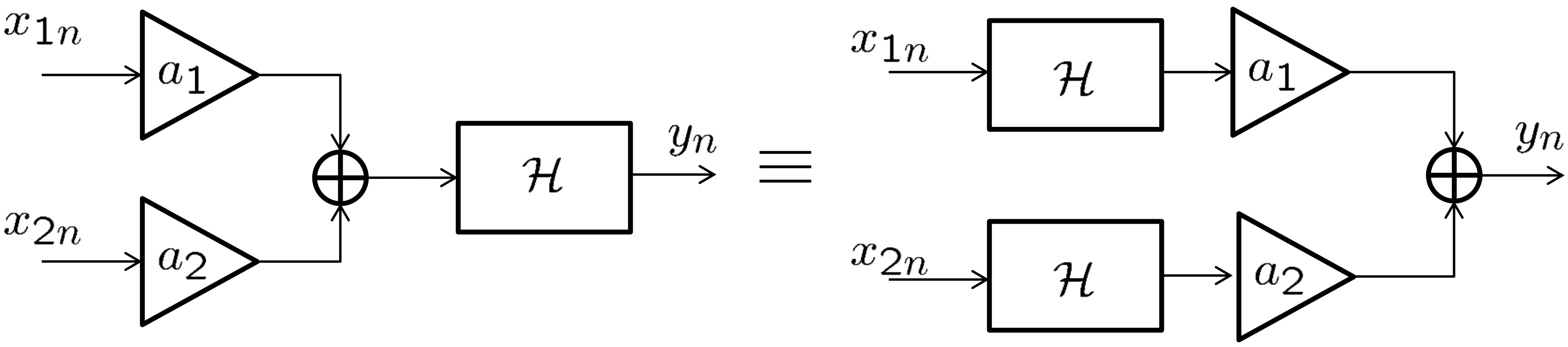
- Mathematische Beschreibung: Differenzengleichung.
- Beispiel: digitales Filter.
- Annahme im Folgenden: Das System hat keine Anfangsenergie, befindet sich in Ruhe.
- Analogie: zeitkontinuierliches System: Eingangsfunktion $x(t)$, Ausgangsfunktion $y(t) = \mathcal{H}\{x(t)\}$ und Differentialgleichung.

Lineares System

- Bei einem linearen diskreten System ist die Antwort auf jede beliebige Linearkombination von Eingangsfolgen gleich der entsprechenden Linearkombination der einzelnen Systemantworten:

$$\boxed{\mathcal{H}\{a_1 x_{1n} + a_2 x_{2n}\} = a_1 \mathcal{H}\{x_{1n}\} + a_2 \mathcal{H}\{x_{2n}\}; \quad a_1,\ a_2 \in \mathbb{C}}$$

Überlagerungssatz, Superpositionsprinzip



Zeitinvariantes System

- Reagiert ein diskretes System auf jede beliebige verzögerte Eingangsfolge mit einer entsprechend verzögerten Ausgangsfolge, so bezeichnet man das diskrete System als zeitinvariant.

$$\boxed{y_{n-n_0} = \mathcal{H}\{x_{n-n_0}\}}$$

- Die Antwort eines diskreten Systems auf eine bestimmte Eingangsfolge ist unabhängig vom Anregungszeitpunkt, d.h. die Systemeigenschaften ändern sich zeitlich nicht.

LTI - System

- Ein System, das sowohl linear als auch zeitinvariant ist, heißt LTI-System (Linear Time-Invariant System).
- LTI-Systeme spielen in der Systemtheorie die zentrale Rolle.
- Linearität und Zeitinvarianz sind die Voraussetzung zum Aufbau einer einfachen, aber mächtigen Systemtheorie, die wir in dieser Vorlesung behandeln.
- Bei praktischen Anwendungen, bei denen diese Voraussetzungen nicht oder nur teilweise zutreffen, versucht man, durch Einschränkungen oder Näherungen diese Eigenschaften so weit wie möglich zu erreichen, um dann die Theorie der LTI-Systeme anwenden zu können.
  - Z.B. Nichtlinearitäten in einem Regelkreis → Linearisierung um den Arbeitspunkt mittels Taylor-Entwicklung.
  - Z.B. zeitvariantes System des Mobilfunkkanals → Betrachten von Zeiträumen, in denen das System quasi zeitinvariant ist.

Impulsantwort eines LTI-Systems

- Bei einem diskreten LTI-System ist die Kenntnis der Impulsantwort vollständig ausreichend, um die Antwort des Systems auf jede beliebige Eingangsfolge zu bestimmen.
- Ausgangspunkt der Herleitung:
  Jede beliebige Eingangsfolge x_n kann durch eine Summe verschobener und gewichteter Deltaimpulse dargestellt werden (vgl. Kapitel „Diskrete Signale“):

$$x_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \delta_{n-k}$$

Antwort eines LTI-Systems auf eine beliebige Eingangsfolge x_n

$$\delta_n \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{LTI-System}\\ \mathcal{H}\end{array}} \longrightarrow h_n$$

Impulsantwort

Zeitinvarianz

$$\delta_{n-k} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{LTI-System}\\ \mathcal{H}\end{array}} \longrightarrow h_{n-k}$$

Linearität

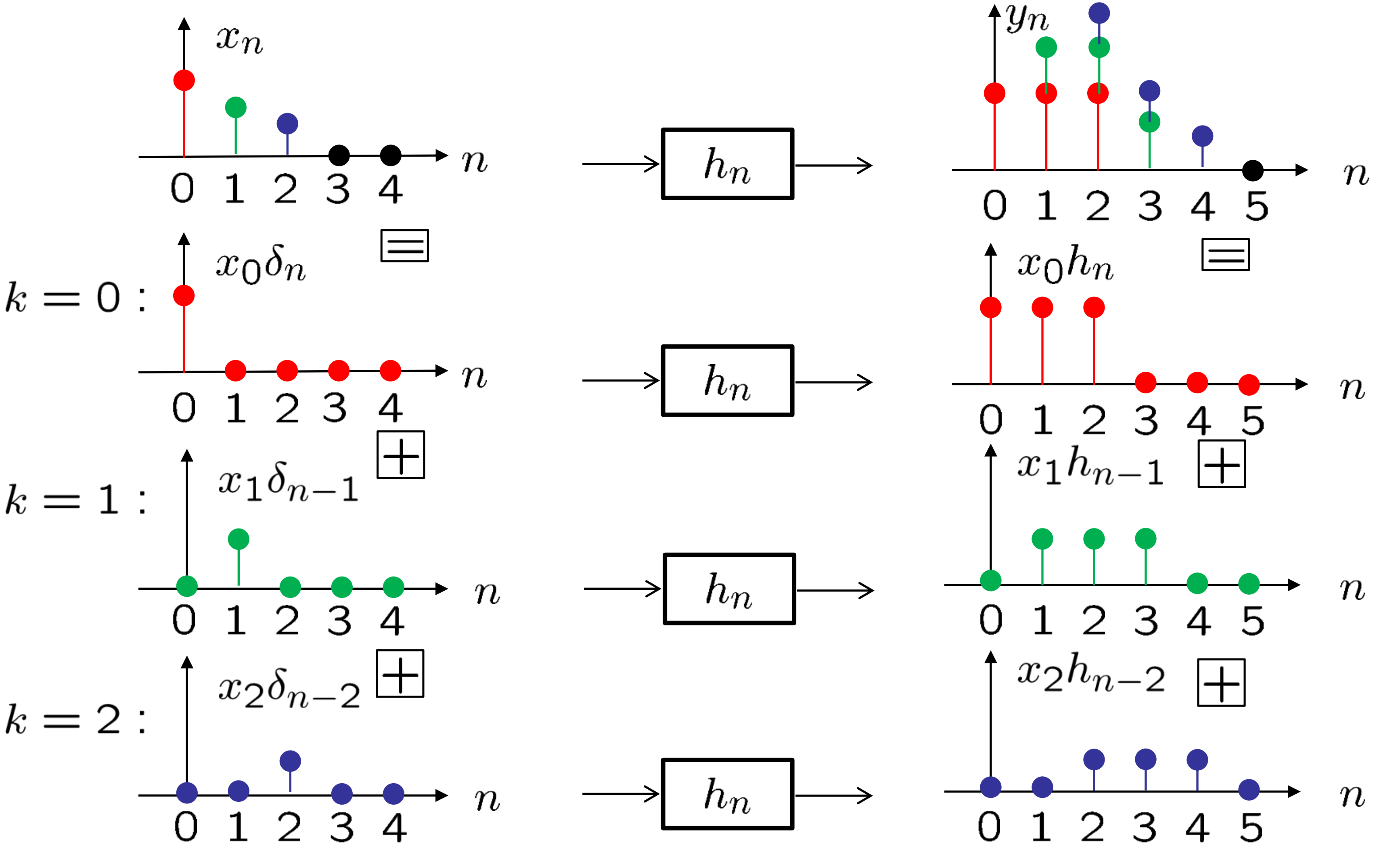
$$x_k\delta_{n-k} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{LTI-System}\\ \mathcal{H}\end{array}} \longrightarrow x_k h_{n-k}$$

Linearität

$$x_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k\delta_{n-k} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{LTI-System}\\ \mathcal{H}\end{array}} \longrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k h_{n-k} = y_n$$

$$\boxed{\begin{array}{c} y_n = x_n * h_n = h_n * x_n \\ \text{Diskrete Faltung, Faltungssumme}\end{array}}$$

Antwort eines LTI-Systems auf eine beliebige Eingangsfolge x_n (anschaulich)



Zusammenhang Impulsantwort und Sprungantwort

- Systemantwort auf einen Impuls:

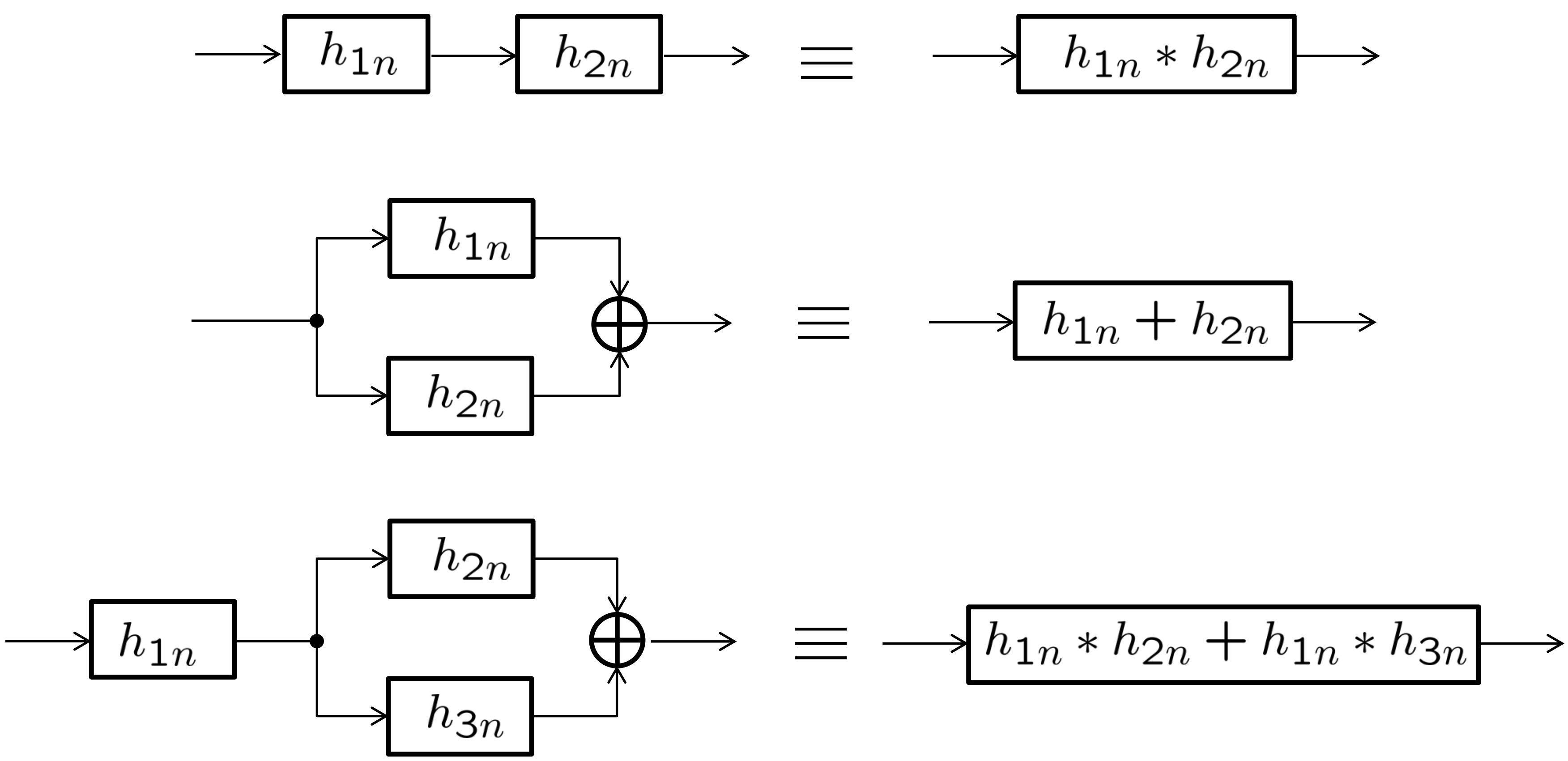
$$x_n = \delta_n \longrightarrow \boxed{h_n} \longrightarrow \quad y_n = \delta_n * h_n = h_n$$

- Systemantwort auf einen Sprung:

$$x_n = u_n \longrightarrow \boxed{h_n} \longrightarrow \quad y_n = u_n * h_n =: \bar{h}_n$$

Zusammenhang Impuls - Sprung (siehe Kapitel „Diskrete Signale“)	Zusammenhang Impulsantwort – Sprungantwort
$\delta_n = u_n - u_{n-1}$	$h_n = \bar{h}_n - \bar{h}_{n-1}$
$u_n = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta_k$	$\bar{h}_n = \sum_{k=-\infty}^{n} h_k$

Impulsantwort von Serien- und Parallelschaltungen von Systemen



Kausales System

- Hängt die Ausgangsfolge zu einem bestimmten diskreten Zeitpunkt n_0 für jede beliebige Eingangsfolge nur von dem Verlauf der Eingangsfolge bis einschließlich zu diesem Zeitpunkt ab, so bezeichnet man das System als kausal:

$$\boxed{y_{n_0} = \mathcal{H}\{x(n \leq n_0)\}}$$

- Alle realen Systeme gehorchen diesem Naturgesetz. Die Systemantwort erfolgt nicht vor der Anregung.
- Ein LTI-System ist kausal, wenn die Impulsantwort für alle negativen diskreten Zeiten verschwindet:

$$\boxed{h_n = 0 \quad \text{für alle } n < 0}$$

Stabiles System

- Reagiert ein diskretes System auf jede beliebige beschränkte Eingangsfolge mit einer beschränkten Ausgangsfolge, bezeichnet man das System als stabil:

$$\boxed{|x_n| < M_x < \infty \quad \Rightarrow \quad |\mathcal{H}\{x_n\}| < \infty}$$

BIBO – Stabilität: Bounded Input – Bounded Output

- Ein diskretes LTI-System ist stabil, wenn seine Impulsantwort absolut summierbar ist:

$$\boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h_n| < M_h < \infty}$$

Beweis der Stabilitätbedingung

- Aus der Beschränktheit der Eingangsfolge $|x_n| < M_x < \infty$ folgt mit der absoluten Summierbarkeit der Impulsantwort die Beschränktheit der Ausgangsfolge:

$$|y_n| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k x_{n-k} \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h_k||x_{n-k}|$$

$$< \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h_k| \cdot M_x < M_h \cdot M_x < \infty$$

Allgemeine Beschreibungsform diskreter LTI-Systeme: Lineare Differenzengleichung

$$x_n \longrightarrow \boxed{\text{LTI-System } \mathcal{H}} \longrightarrow y_n$$

- Lineare Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten:

$$\sum_{i=0}^{N} \tilde{a}_i y_{n-i} = \sum_{l=0}^{M} \tilde{b}_l x_{n-l}$$

$$y_n = \frac{1}{\tilde{a}_0}\left[-\sum_{i=1}^{N} \tilde{a}_i y_{n-i} + \sum_{l=0}^{M} \tilde{b}_l x_{n-l}\right] \quad \text{mit } \tilde{a}_0 \neq 0$$

- Ausgangswert y_n zum diskreten Zeitpunkt n hängt ab von
  - aktuellem Eingangswert x_n
  - vorhergehenden Eingangswerten $x_{n-l},\ l = 1, \ldots, M$
  - vorhergehenden Ausgangswerten $y_{n-i},\ i = 1, \ldots, N$
- Zeitinvarianz: konstante Koeffizienten $\tilde{a}_i,\ \tilde{b}_l$
- Kausalität: Laufindex l umfasst keine negativen Werte

Allgemeine Beschreibungsform diskreter LTI-Systeme: algebraische Gleichung im Bildbereich

$$\sum_{i=0}^{N} \tilde{a}_i y_{n-i} = \sum_{l=0}^{M} \tilde{b}_l x_{n-l}$$

Differenzengleichung

$$\sum_{i=0}^{N} \tilde{a}_i z^{-i} Y(z) = \sum_{l=0}^{M} \tilde{b}_l z^{-l} X(z)$$

Algebraische Gleichung

Erinnerung: Annahme: System befindet sich im Ruhezustand.

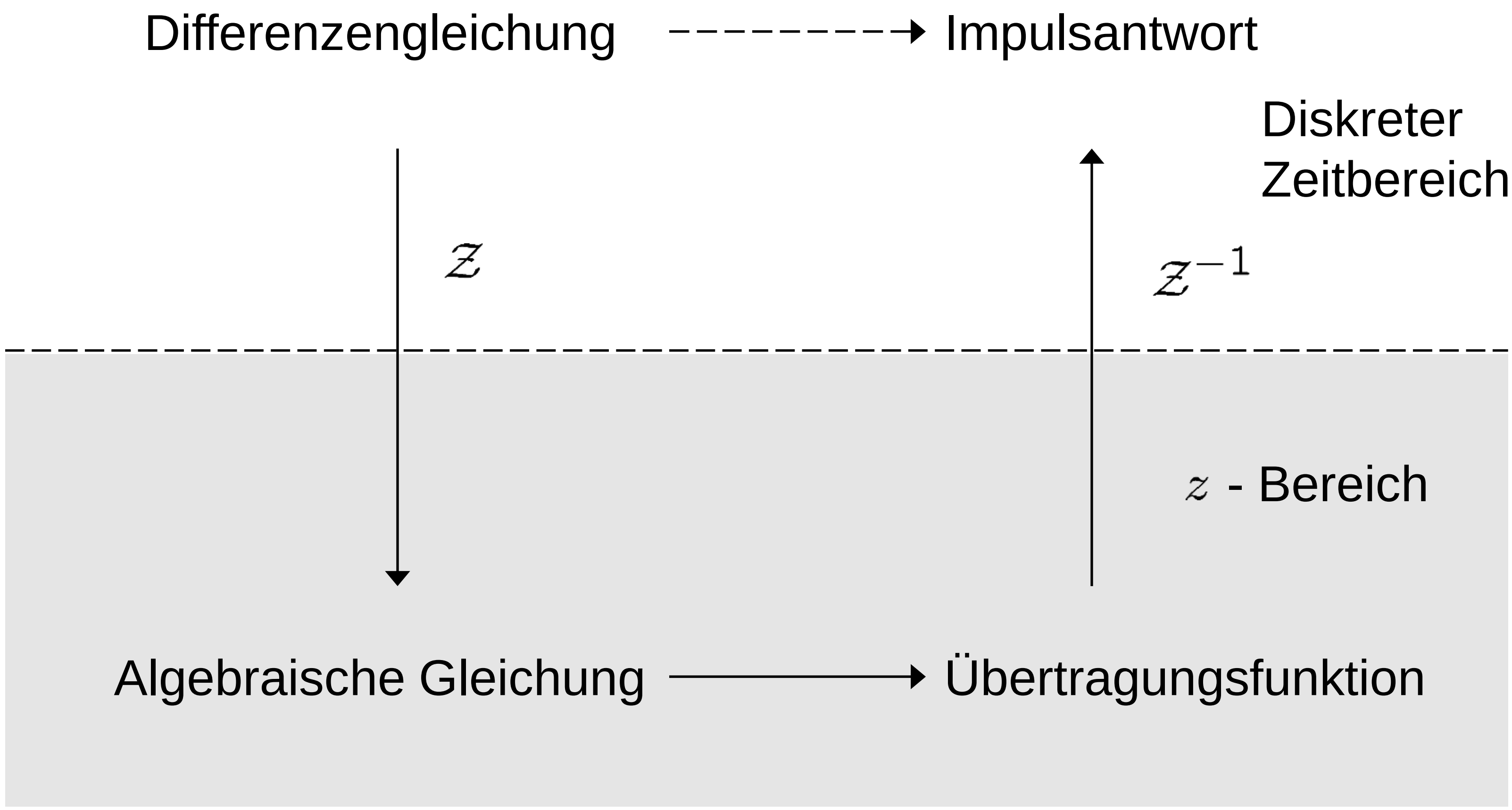
$$Y(z) = \frac{\sum_{l=0}^{M} \tilde{b}_l z^{-l}}{\sum_{i=0}^{N} \tilde{a}_i z^{-i}} \cdot X(z) = H(z) \cdot X(z)$$

- Übertragungsfunktion:

$$H(z) := \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{l=0}^{M} \tilde{b}_l z^{-l}}{\sum_{i=0}^{N} \tilde{a}_i z^{-i}} = \frac{\tilde{b}_0 + \tilde{b}_1 z^{-1} + \cdots + \tilde{b}_M z^{-M}}{\tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 z^{-1} + \cdots + \tilde{a}_N z^{-N}}$$

rationale Funktion in z^{-1}

Zusammenhang der Systembeschreibungen im diskreten Zeitbereich und im Bildbereich



Systembeschreibung im diskreten Zeitbereich und im Bildbereich

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$x_n \longrightarrow \boxed{h_n} \longrightarrow y_n = h_n * x_n$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$X(z) \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow Y(z) = H(z) \cdot X(z)$$

- Bei einem diskreten LTI-System ist die Kenntnis der Impulsantwort h_n oder der Übertragungsfunktion $H(z)$ vollständig ausreichend, um die Antwort des Systems auf jede beliebige Eingangsfolge zu bestimmen, d.h. das System ist eindeutig über h_n oder $H(z)$ beschrieben.

- Für $x_n = \delta_n$ folgt $y_n = h_n$, Impulsantwort

  $\circ\!\!-\!\!\bullet$

  Für $X(z) = 1$ folgt $Y(z) = H(z)$, Übertragungsfunktion

- Serien-(Reihen-) Schaltung zweier Systeme:

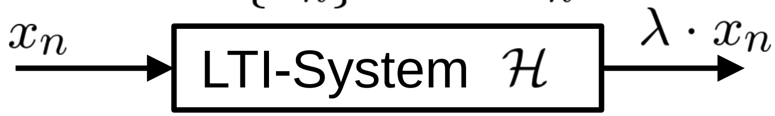
$$\longrightarrow \boxed{H_1(z)} \longrightarrow \boxed{H_2(z)} \longrightarrow \quad \equiv \quad \longrightarrow \boxed{H_1(z) \cdot H_2(z)} \longrightarrow$$

Eigenfolgen diskreter LTI-Systeme

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Eigenfolgen durchlaufen das System bis auf eine Skalierung unverändert:

$$\mathcal{H}\{x_n\} = \lambda \cdot x_n$$



- Bei diskreten LTI-Systemen sind dies Exponentialfolgen: $x_n = a^n$
- Beweis:

$$y_n = h_n * x_n = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i x_{n-i} =$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i a^{n-i} = a^n \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i a^{-i} =$$

$$= a^n \, H(z)\big|_{z=a} =$$

$$= H(a) \cdot x_n, \text{ d.h. } \lambda = H(a)$$

Annahme: Kausales System,
d.h. $h_i = 0$ für $i < 0$
(oder zweiseitige z-Transformation)

- Beachte: Gilt nur für zweiseitige Exponentialfolgen, nicht z.B. für kausale.

Verschiedene Darstellungsarten der Übertragungsfunktion: Polynomdarstellung

Annahme: $N \geq M$, d.h. $\tilde{b}_l = 0$ für $l = M+1, M+2, \ldots N$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{l=0}^{\cancel{M}N} \tilde{b}_l z^{-l}}{\sum_{i=0}^{N} \tilde{a}_i z^{-i}} = \frac{\tilde{b}_0 + \tilde{b}_1 z^{-1} + \cdots + \tilde{b}_N z^{-N}}{\tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 z^{-1} + \cdots + \tilde{a}_N z^{-N}}$$

rationale Funktion in z^{-1}

Erweitern um z^N

$$= \frac{z^N \cdot \sum_{l=0}^{N} \tilde{b}_l z^{-l}}{z^N \cdot \sum_{i=0}^{N} \tilde{a}_i z^{-i}} = \frac{\tilde{b}_0 z^N + \tilde{b}_1 z^{N-1} + \cdots + \tilde{b}_N}{\tilde{a}_0 z^N + \tilde{a}_1 z^{N-1} + \cdots + \tilde{a}_N}$$

mit $a_i = \tilde{a}_{N-i},\ a_N = \tilde{a}_0 \neq 0,\ b_l = \tilde{b}_{N-l}$

$$= \frac{\sum_{l=0}^{N} b_l z^l}{\sum_{i=0}^{N} a_i z^i} = \frac{b_0 + b_1 z^1 + \cdots + b_N z^N}{a_0 + a_1 z^1 + \cdots + a_N z^N}$$

rationale Funktion in z

Polynomdarstellung der Übertragungsfunktion

Verschiedene Darstellungsarten der Übertragungsfunktion: Produktdarstellung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$H(z) = \frac{\sum\limits_{l=0}^{N} b_l z^l}{\sum\limits_{i=0}^{N} a_i z^i} = K \cdot \frac{\prod\limits_{l=1}^{N} (z - \beta_l)}{\prod\limits_{i=1}^{N} (z - \alpha_i)}$$

$$= K \cdot \frac{(z-\beta_1)\cdot(z-\beta_2)\cdots(z-\beta_N)}{(z-\alpha_1)\cdot(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_N)}$$

Produktdarstellung der Übertragungsfunktion

Mit $K = \frac{b_N}{a_N}$, falls $b_N \neq 0$ und $a_N \neq 0$

Nullstellen β_l und Polstellen α_i der Übertragungsfunktion lassen sich direkt ablesen.

Verschiedene Darstellungsarten der Übertragungsfunktion: Partialbruchdarstellung

$$H(z) = \sum_i \frac{r_i z}{z - \alpha_i} + \sum_i \sum_{l=1}^{m_i} \frac{\tilde{r}_{i,l} \cdot z}{(z - \tilde{\alpha}_i)^l}$$

α_i einfache Pole

$\tilde{\alpha}_i$ mehrfache Pole, Vielfachheit m_i

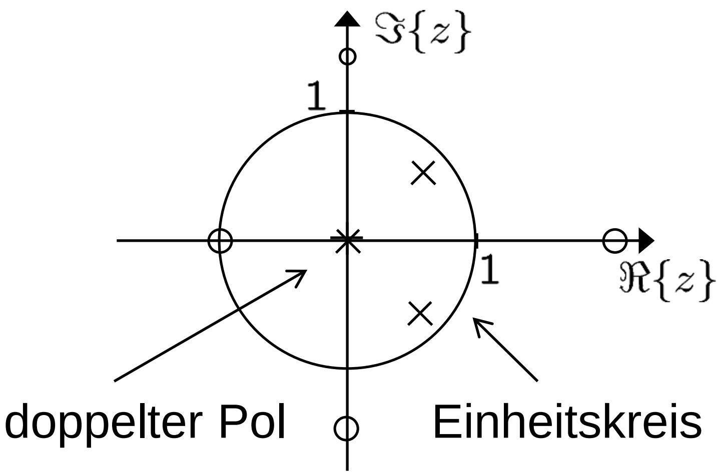
Partialbruchdarstellung der Übertragungsfunktion

Wird vor allem zur Rücktransformation in den diskreten Zeitbereich verwendet.

Pol-Nullstellen-Diagramm und Stabilität

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Aus der Produktdarstellung der Übertragungsfunktion lässt sich direkt das Pol-Nullstellen-Diagramm bestimmen.
- Beispiel: $$H(z) = \frac{(z+1)(z-2)(z+j\sqrt{2})(z-j\sqrt{2})}{z^2(z-0,5(1+j))(z-0,5(1-j))}$$



× Pol
○ Nullstelle

Pol-Nullstellen-Diagramm

- Ein diskretes LTI-System ist stabil, wenn *alle* Pole der Übertragungsfunktion *innerhalb* des Einheitskreises liegen. (oft einfacher anwendbar als das Zeitbereichskriterium).

Blockdiagramme

- Blockdiagramme: Grafische Darstellung diskreter LTI-Systeme, z.B. zur Darstellung digitaler Filter.
- Zwei prinzipielle Systemstrukturen:
  - Rekursive Struktur mit Rückkopplungen,
    Infinite Impulse Response Systeme,
    IIR-Systeme
  - Nichtrekursive oder transversale Struktur ohne Rückkopplungen,
    Finite Impulse Response Systeme,
    FIR-Systeme.

Rekursive (IIR-)Systeme: Differenzengleichung und Übertragungsfunktion

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$y_n = \frac{1}{\tilde{a}_0}\left[-\sum_{i=1}^{N}\tilde{a}_i y_{n-i} + \sum_{l=0}^{\cancel{M}\; N}\tilde{b}_l x_{n-l}\right]$$

$$= \frac{1}{a_N}\left[-\sum_{i=1}^{N} a_{N-i} y_{n-i} + \sum_{l=0}^{N} b_{N-l} x_{n-l}\right]$$

mit $a_i = \tilde{a}_{N-i},\ a_N = \tilde{a}_0 \neq 0$
und $b_l = \tilde{b}_{N-l}$
und unter der Annahme $N \geq M$
(d.h. $\tilde{b}_l = 0$
für $l = M+1, \ldots, N$)

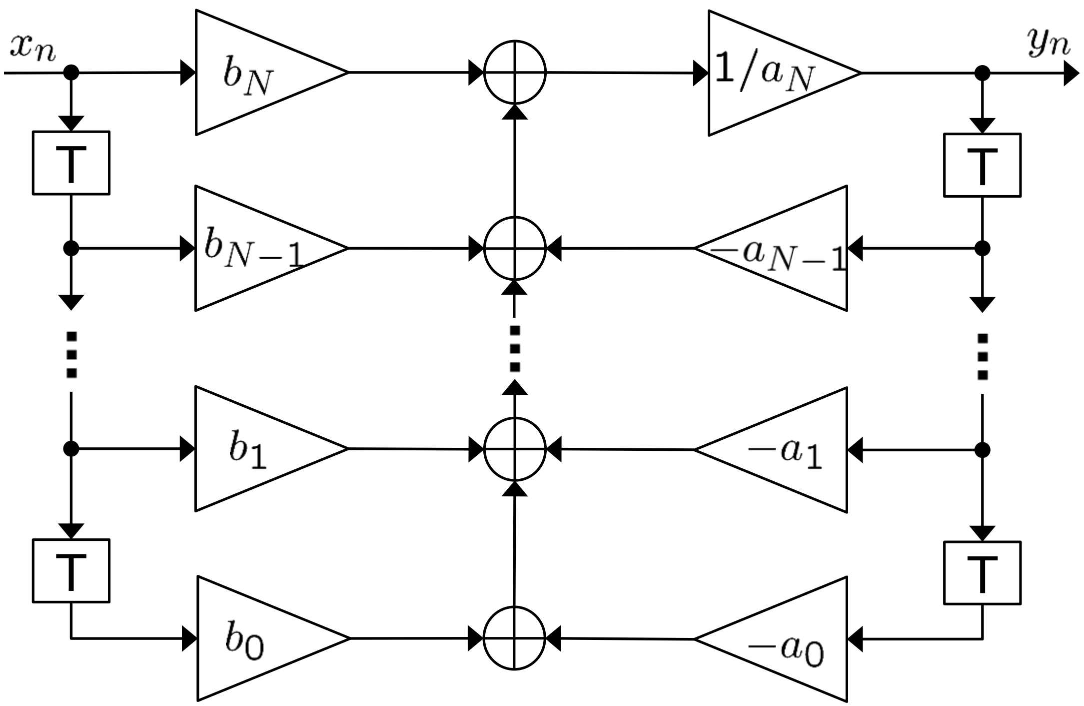
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum\limits_{l=0}^{N}\tilde{b}_l z^{-l}}{\sum\limits_{i=0}^{N}\tilde{a}_i z^{-i}} = \frac{\sum\limits_{l=0}^{N} b_{N-l} z^{-l}}{\sum\limits_{i=0}^{N} a_{N-i} z^{-i}}$$

$$Y(z) = \frac{1}{\tilde{a}_0}\left[-\sum_{i=1}^{N}\tilde{a}_i z^{-i} Y(z) + \sum_{l=0}^{N}\tilde{b}_l z^{-l} X(z)\right]$$

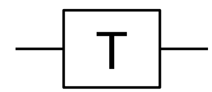
$$= \frac{1}{a_N}\left[-\sum_{i=1}^{N} a_{N-i} z^{-i} Y(z) + \sum_{l=0}^{N} b_{N-l} z^{-l} X(z)\right]$$

Rekursive (IIR-)Systeme: Erste Direktform

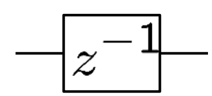
$$y_n = \frac{1}{a_N} \cdot \left[-\sum_{i=1}^{N} a_{N-i} y_{n-i} + \sum_{l=0}^{N} b_{N-l} x_{n-l} \right]$$



Diskretes IIR-System in erster Direktform
2N Speicherelemente

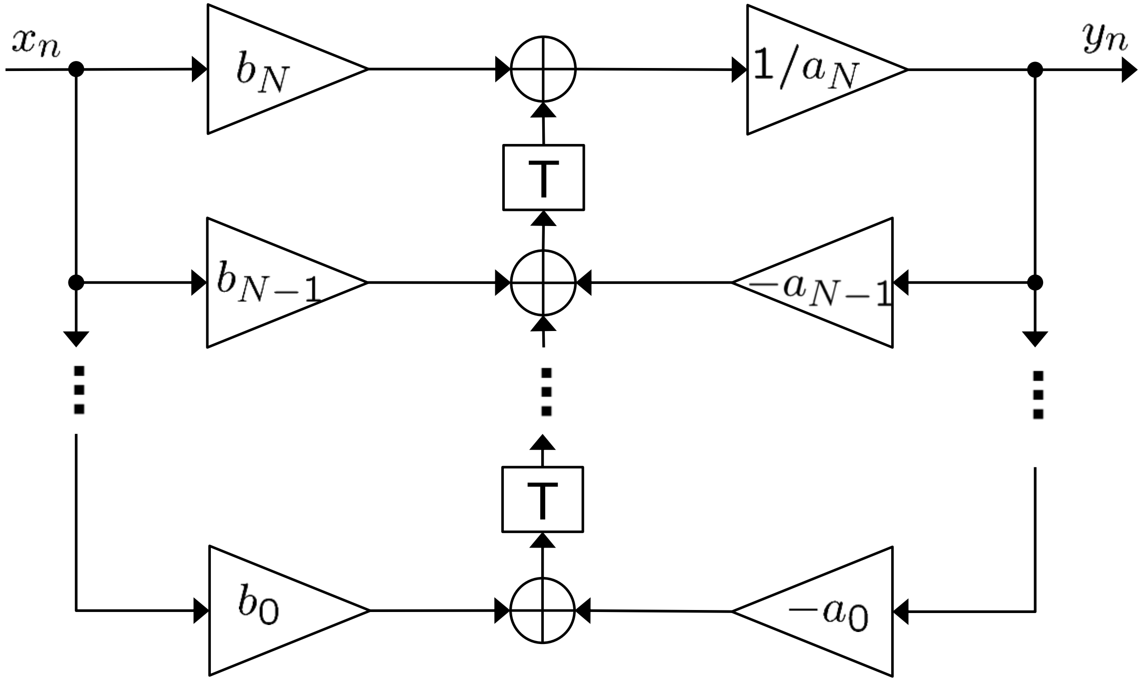


Verzögerungsglied
um einen Takt
(diskrete Zeiteinheit) ,
Speicherelement,
oft auch



Rekursive (IIR-)Systeme: Zweite Direktform, erste kanonische Struktur

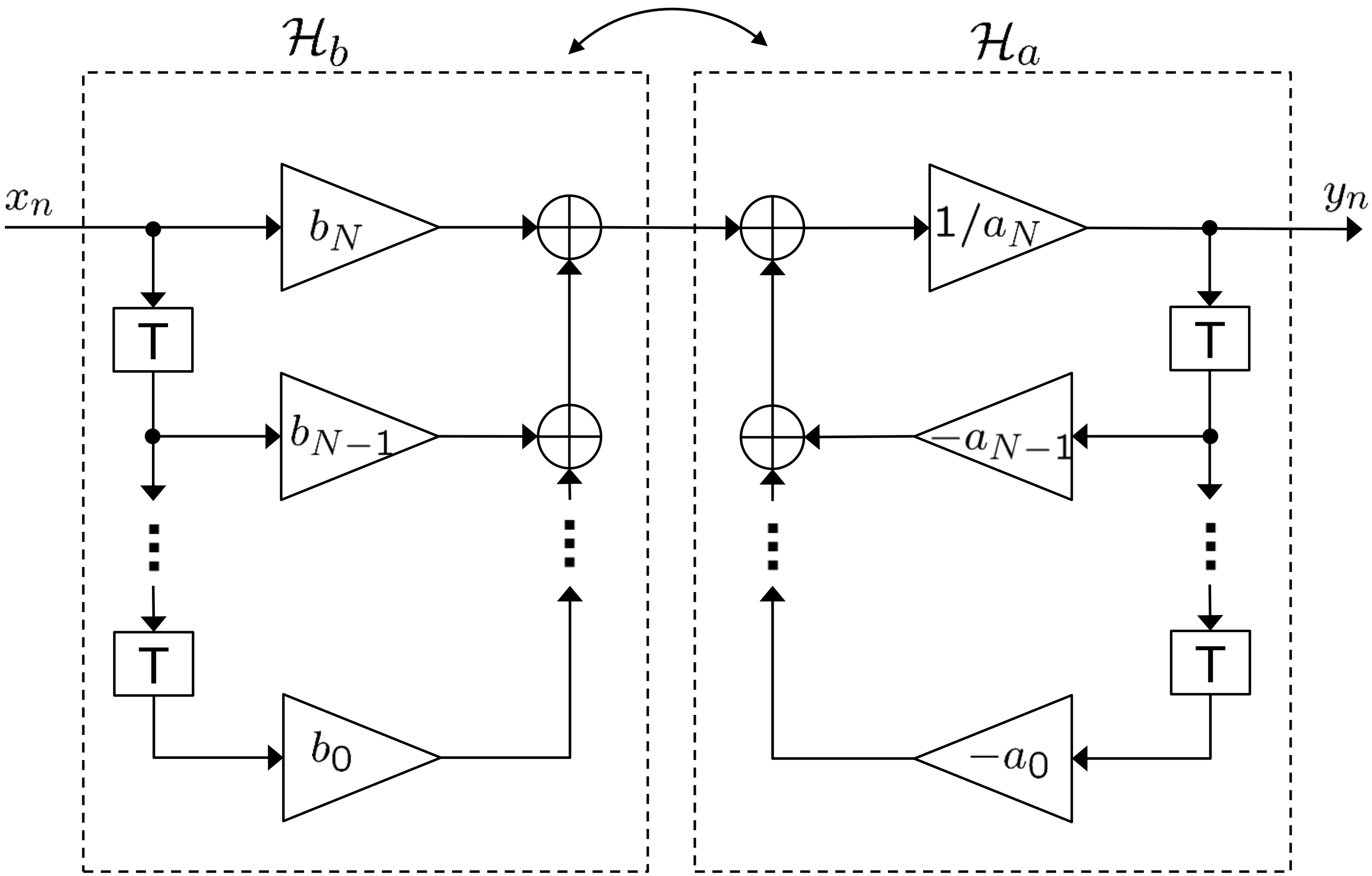
Ergibt sich aus erster Direktform durch Verlegen der Speicherelemente hinter die Multiplikatoren und Summationsglieder.



Diskretes IIR-System in transponierter zweiter Direktform (erste kanonische Struktur)

N Speicherelemente

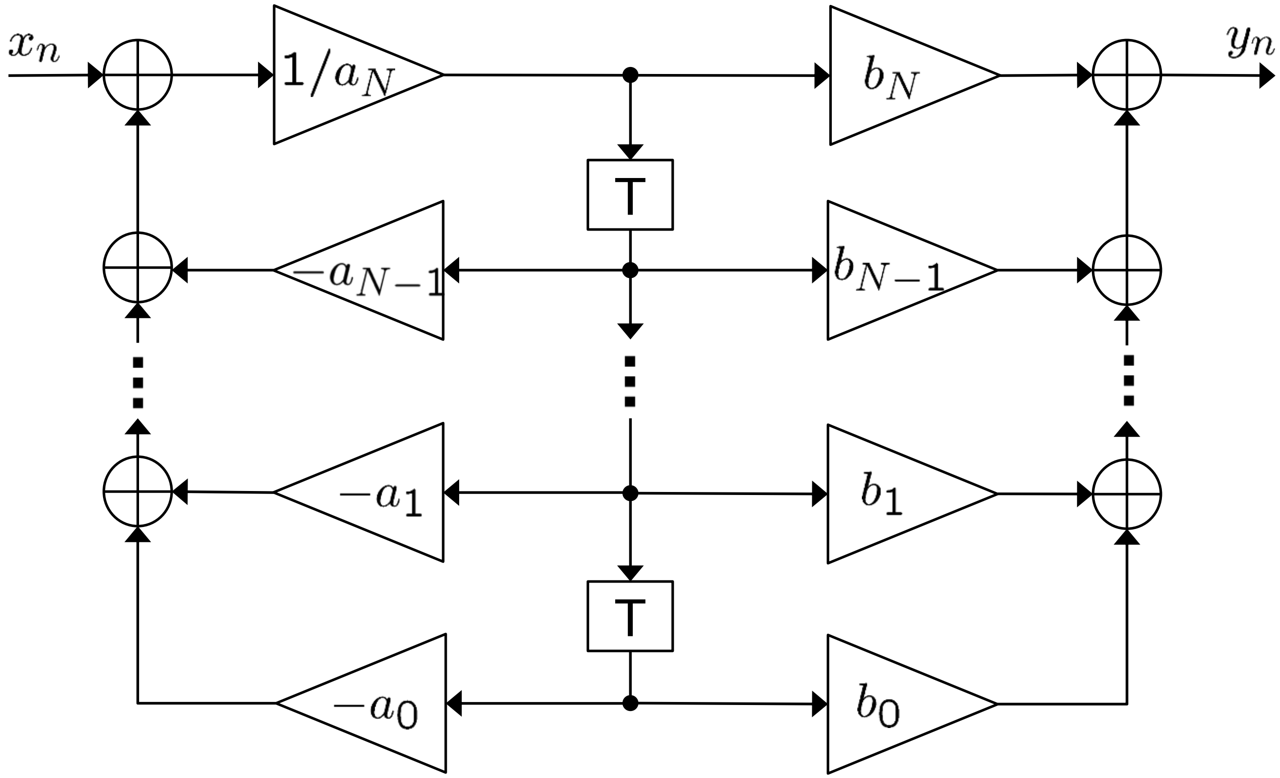
Rekursive (IIR-)Systeme: Überführung der ersten in die zweite Direktform, zweite kanonische Struktur



Feedforward-Teil,
Vorwärtszweig

Feedback-Teil,
Rückwärtszweig, Rückkoppelteil

Rekursive (IIR-)Systeme: zweite Direktform, zweite kanonische Struktur



Diskretes IIR-System in zweiter Direktform (zweite kanonische Struktur)
N Speicherelemente

Nichtrekursive (FIR-)Systeme: Differenzengleichung und Übertragungsfunktion

Keine Rückkopplung, nur Vorwärtszweig

$$y_n = \sum_{l=0}^{N} \tilde{b}_l x_{n-l} = \sum_{l=0}^{N} b_{N-l} x_{n-l} \qquad \text{mit } b_l = \tilde{b}_{N-l}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{l=0}^{N} \tilde{b}_l z^{-l} = \sum_{l=0}^{N} b_{N-l} z^{-l}$$

$$= \frac{\sum\limits_{l=0}^{N} b_{N-l} z^{N-l}}{z^N} = \frac{\sum\limits_{l=0}^{N} b_l z^l}{z^N}$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$h_n = \sum_{l=0}^{N} \tilde{b}_l \delta_{n-l}$$

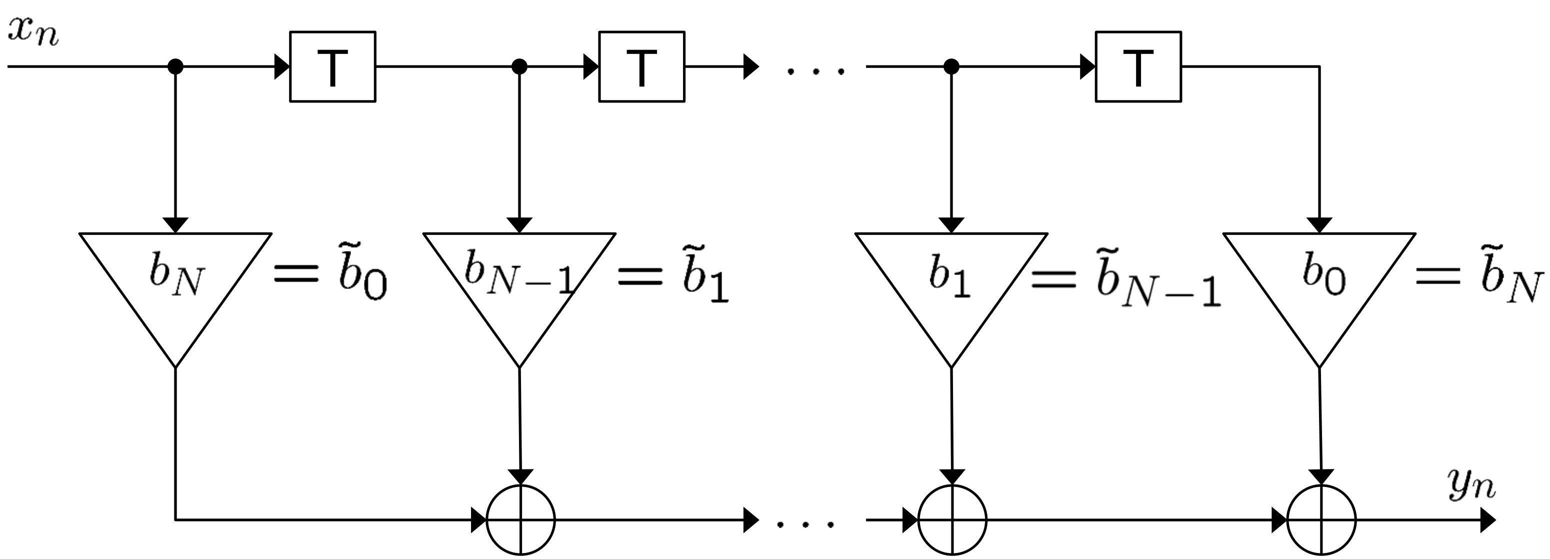
Nichtrekursive (FIR-)Systeme: Differenzengleichung und Übertragungsfunktion

- Impulsantwort: endliche Summe gewichteter Impulsfolgen, hat eine endliche Länge von $N + 1$ Werten (FIR System)
- FIR-Systeme sind immer stabil.
  - Impulsantwort ist absolut summierbar.
  - Nur Pole bei $z = 0$.

$\rightarrow$ große Bedeutung bei digitalen Filtern.

Nichtrekursive (FIR-)Systeme: Blockdiagramm

$$y_n = \sum_{l=0}^{N} \tilde{b}_l x_{n-l} = \sum_{l=0}^{N} b_{N-l} x_{n-l}$$



Diskretes FIR-System