

Vorlesung

Deterministische Signale und Systeme

Marius Pesavento



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Copyright

- The presented material is part of a lecture taught at Technische Universität Darmstadt.
- The lecture material is only intended for the students of the class.
- All lecture material, figures and content is used under the legal framework of §60a UrhG.
- Dissemination or disclosure of material of this course (pdf documents, videos, animations, and others) in part or as a whole is **not permitted**.



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Übergang zur Einseitige Laplace Transformation

- FT als Instrument für Analyse von LTI Systemen kennengelernt.
- Fourieranalyse von Systemen mit periodischen Eingängen nur mithilfe verallgemeinerten Funktionen.
- Bei Analyse von **instabilen Systemen** stößt FT an ihre Grenzen, da **Impulsantwort nicht absolut integrierbar**.
- In diesem Fall kann die Frequenzbereichsanalyse mithilfe der **Laplace Transformation** (LT) durchgeführt werden.
- Die LT kann als Verallgemeinerung der FT aufgefasst werden, bei der $j\omega$ durch $p = \sigma + j\omega$ ersetzt wird.
- Berechnung der LT auch in Fällen möglich, in denen die FT nicht existiert.

Beidseitige LT

Beidseitige LT $X(p)$ eines Signals $x(t)$ definiert als

$$X(p) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-pt} dt$$

wobei $p = \sigma + j\omega$.

Beidseitige LT als FT, wenn $y(t; \sigma) = x(t)e^{-\sigma t}$ gewählt wird und

$Y(\omega; \sigma) = \mathcal{F}\{y(t; \sigma)\}$.

$$X(p) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-pt} dt \Big|_{p=\sigma+j\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} y(t; \sigma)e^{-j\omega t} dt = Y(\omega; \sigma)$$

Beidseitige LT $X(p)|_{p=\sigma+j\omega}$ des Signals $x(t)$ entspricht FT des Signals $x(t)e^{-\sigma t}$.

Andererseits erhält man das Signal $X(\omega)$ aus der LT für $\text{Re}\{p\} = \sigma = 0$.

Konvergenz der beidseitigen LT

Aus den **Konvergenzbedingungen** der FT ergibt sich für beidseitige LT:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma t} dt < \infty,$$

für ein beliebiges endliches σ .

Beidseitige LT konvergiert somit lediglich für bestimmte Werte von $\sigma = \operatorname{Re}\{p\}$.

Der Bereich der Werte in der komplexen Ebene, für die $X(p)$ konvergiert, wird **Konvergenzbereich** (KB) genannt.

Konvergenz der LT

Beispiel: $x(t) = e^{-at}u(t)$

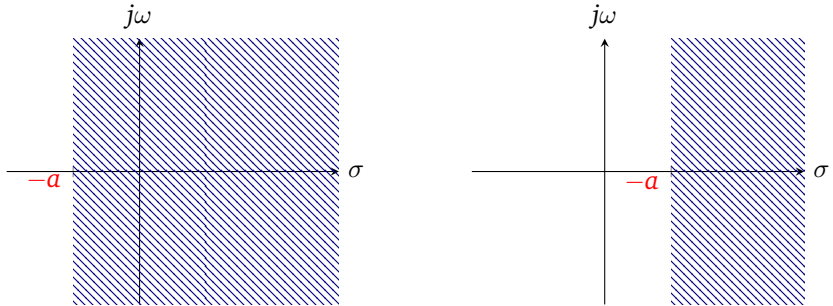


Abbildung: Konvergenzbereich a) $a > 0$ und b) $a < 0$.