Nachrichtentechnik
Lösung 2

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Rauschen / Störungsarme Übertragung

1 Kurzfragen

Verstärkerkaskade

Gegeben ist ein Empfangssystem mit zwei Verstärkern und einem Kabel. Der Verstärker V1 hat eine Verstärkung von $g_1 = 10\,\mathrm{dB}$ und eine Rauschzahl von $F_1 = 4$. Die Verstärkung des Verstärkers V2 ist $20\,\mathrm{dB}$ mit der Rauschzahl $F_2 = 6$. Beide Rauschzahlen sind auf die Temperatur $T_0 = 300\,\mathrm{K}$ bezogen. Das Kabel ist $10\,\mathrm{m}$ lang mit einem Dämpfungsbelag von $4\,\mathrm{dB/m}$. Welche Reihenfolge der Verstärker und des Kabels ist bezüglich des SNR am Ausgang am sinnvollsten?

- ☑ Verstärker V1 → Verstärker V2 → Kabel
- ☐ Kabel → Verstärker V2 → Verstärker V1
- ☐ Verstärker V2 → Verstärker V1 → Kabel
- ☐ Verstärker V1 → Kabel → Verstärker V2
- ☐ Die Reihenfolge ist egal

Lösung

Die Regel für kaskadierte Elemente lautet: Zuerst den Verstärker mit der kleinsten Rauschzahl, bei gleicher Rauschzahl entscheidet die höhere Verstärkung. Kabel und verlustbehaftete Elemente werden, wenn möglich, möglichst weit hinten eingebaut. → Die Reihenfolge Verstärker V1, Verstärker V2, Kabel führt zum größten Signal-zu-Rauschabstand.

Systemrauschtemperatur

Welche Aussage über die Systemrauschtemperatur ist richtig?

- ☐ Sie beschreibt alle Rauschquellen eines Systems. Sie ist für alle Positionen innerhalb des Systems gleich.
- ☐ Sie ist die Summe der physikalisch bedingten Rauschtemperaturen.
- ☑ Sie ist eine nicht direkt messbare Größe, welche alle Rauschquellen im System an einer Position beschreibt.
- ☐ Sie dient der Analyse rauschender Baugruppen, welche durch ihre Verwendung aus dem System entfernt werden können.
- ☐ Sie beschreibt die Auswirkungen der über die Antenne eingefangener Störungen auf das Empfangssystem.

Lösung

Die Systemrauschtemperatur ist eine nicht messbare Größe, welche alle Rauschquellen im System an einer Position beschreibt. Die rauschenden Elemente werden durch die Beschreibung mit der Systemrauschtemperatur durch rauschfreie Elemente ersetzt, da ihre Rauschleistung bereits in der Systemrauschtemperatur berücksichtigt wurde.

Antennenrauschtemperatur

Welche der folgenden Aussagen trifft auf die äquivalente Antennenrauschtemperatur zu?

- ☐ Sie hängt ausschließlich von der Umgebungstemperatur der Antenne ab.
- ☑ Sie steigt, wenn die Antenne auf die Sonne ausgerichtet wird.
- ☐ Sie beträgt bei einer idealen Antenne 0 K.
- ☐ Sie kann für digitale Übertragungssysteme vernachlässigt werden.
- ☐ Für Antennen in Satelliten beträgt die äquivalente Antennenrauschtemperatur −10 K.

Lösung

Die äquivalente Antennenrauschtemperatur setzt sich aus den externen Rauschquellen z. B. durch die Hintergrundstrahlung oder Strahlung von anderen Körpern im Weltraum und die internen Rauschquellen der verlustbehafteten Elemente der Antenne zusammen. Sie hängt demnach von der Ausrichtung der Antenne ab, da die Strahlungdichte nicht gleichmäßig über alle Ausrichtungen verteilt ist.

2 Zusammenfassung Rauschen

Störungen in nachrichtentechnischen Systemen werden als „Rauschen“ bezeichnet. Man unterscheidet zwischen verschiedenen Klassen von Störungen. Dabei sind in der Regel statistische Störungen wie thermisches Rauschen wesentliche Störquellen. Rauschquellen treten dabei im gesamten Übertragungssystem auf, also im Sender, im Empfänger und auf dem Übertragungskanal. Rauschen entsteht in Widerständen, verlustbehafteten Komponenten (wie Leitungen), Halbleiterbauelementen und Elektronenröhren oder wird mit der Empfangsantenne aufgefangen. Man unterscheidet zwischen der von äußeren Rauschquellen (external noise sources) hervorgerufenen, bereits am Empfängereingang auftretenden Rauschleistung und der im Empfänger selbst von inneren Rauschquellen (internal noise sources) erzeugten Rauschleistung.

a) Wie groß ist die Leistungsdichte von thermischem Rauschen für die in der Nachrichtentechnik üblichen Funksysteme? Wie lässt sich die Rauschleistung aus der Rauschleistungsdichte bestimmen?

Lösung

Thermisches Rauschen hat die Rauschleistungsdichte

$$N(f) = \frac{h \cdot f}{e^{\frac{h \cdot f}{k \cdot T}} - 1}$$

wobei h durch das Plancksche Wirkungsquantum und k durch die Boltzmann-Konstante gegeben sind. Für Raumtemperatur ergibt sich der in Abb. 2.1 gegebene Verlauf der Rauschleistungsdichte. Für Frequenzen unterhalb von ca. 600 GHz lässt sich die Rauschleistungs-

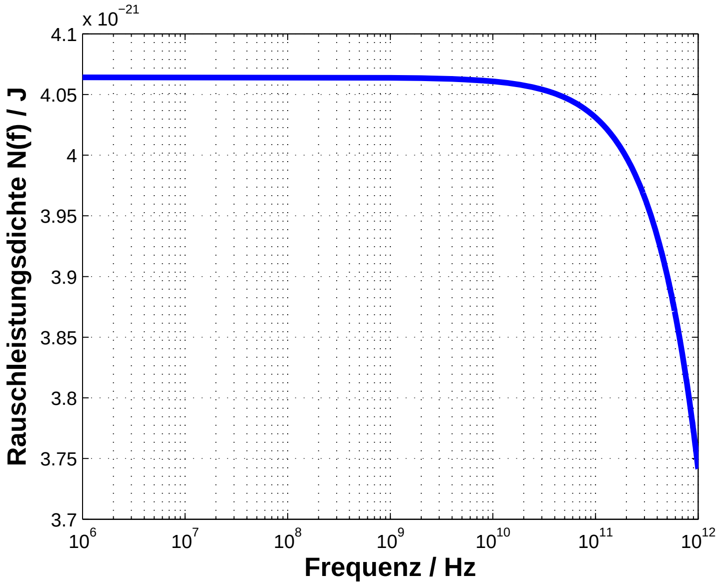


Abbildung 2.1: Rauschleistungsdichte (für $T = 294{,}5\,\mathrm{K}$)

dichte sehr gut durch eine konstante Rauschleistungsdichte beschreiben:

$$N(f) \approx k \cdot T \qquad \text{für} \quad 0 \leq f \leq 600\,\mathrm{GHz}$$

Die Rauschleistung lässt sich durch Integration der Rauschleistungsdichte berechnen

$$P_n = \int_{f_0}^{f_0+\Delta f} N(f) \cdot df$$

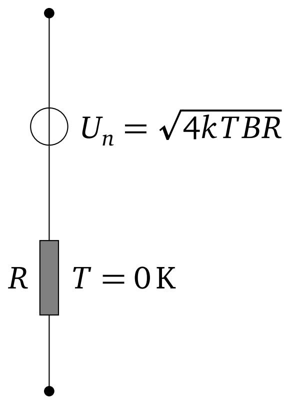
Unter Berücksichtigung der konstanten Rauschleistungsdichte ergibt sich

$$\begin{aligned} P_n &= \int_{f_0}^{f_0+\Delta f} k \cdot T \cdot df = k \cdot T \cdot \int_{f_0}^{f_0+\Delta f} 1 df = k \cdot T \cdot (f_0 + \Delta f - f_0) \\ &= k \cdot T \cdot \Delta f \end{aligned}$$

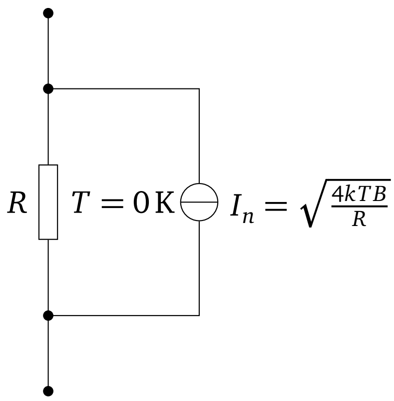
b) Zeichnen Sie die Ersatzschaltbilder eines rauschenden Widerstandes und geben Sie die charakteristischen Werte an.

Lösung

Die Ersatzschaltbilder von rauschenden Widerständen sind in Abb. 2.2 dargestellt. Dabei wird der rauschende Widerstand durch einen rauschfreien Widerstand und eine Rauschquelle (Spannungs- oder Stromquelle) ersetzt. Die Rauschspannung U_n bzw. der Rausch-



(a) Serienschaltung



(b) Reihenschaltung

Abbildung 2.2: Ersatzschaltbilder für rauschenden Widerständen

strom I_n sind gegeben durch:

$$U_n = \sqrt{4kTBR}$$

$$I_n = \sqrt{\frac{4kTB}{R}}$$

c) Welche Rauschleistung kann ein rauschender Widerstand maximal abgeben?

Lösung

Die maximale Leistung kann ein Bauelement bei Leistungsanpassung ($\underline{Z}_L = \underline{Z}_G^*$) abgeben. Bei rein reellen Widerständen vereinfacht sich dieser komplexe Zusammenhang zu $R_L = R_G$. Die an der Last abfallende Spannung U_L ist dann gerade halb so groß wie die Spannung der Spannungsquelle.

$$U_L = \frac{1}{2} \cdot U_n = \sqrt{kTBR}$$

Die Rauschleistung berechnet sich zu

$$P_n = \frac{U_L^2}{R} = \frac{kTBR}{R} = kTB$$

d) In der Nachrichtentechnik ist die Angabe der Rauschleistung bei Raumtemperatur ($T = 20\,°\mathrm{C} \approx 293{,}5\,\mathrm{K}$) bezogen auf die Bandbreite $\Delta f = B = 1\,\mathrm{Hz}$ üblich, wie groß ist diese in dBm[1]? Geben Sie die Formel an, mit der man aus der auf 1 Hz normierten Rauschleistung die Rauschleistung für eine (fast) beliebige Bandbreite berechnen kann.

Lösung

Die Rauschleistung für ein Hertz ergibt sich aus

$$\begin{aligned} L_n|_{1\mathrm{Hz}} &= 10 \cdot \log\left(\frac{kTB}{1\,\mathrm{mW}}\right) = 10 \cdot \log\left(\frac{1{,}38 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J/K} \cdot 293{,}5\,\mathrm{K} \cdot 1\,\mathrm{Hz}}{1\,\mathrm{mW}}\right) \\ &\approx -174\,\mathrm{dBm/Hz} \end{aligned}$$

Die Rauschleistung einer beliebigen Bandbreite ergibt sich folglich zu

$$\begin{aligned} L_n &= 10 \cdot \log\left(\frac{kT \cdot 1\,\mathrm{Hz} \cdot \frac{B}{1\,\mathrm{Hz}}}{1\,\mathrm{mW}}\right) = 10 \cdot \log\left(\frac{kT \cdot 1\,\mathrm{Hz}}{1\,\mathrm{mW}}\right) + 10 \cdot \log\left(\frac{B}{1\,\mathrm{Hz}}\right) \\ &= L_n|_{1\mathrm{Hz}} + 10 \cdot \log\left(\frac{B}{1\,\mathrm{Hz}}\right) = -174\,\mathrm{dBm} + 10 \cdot \log\left(\frac{B}{1\,\mathrm{Hz}}\right) \end{aligned}$$

e) Wie groß ist die Rauschleistung in dBm für die Bandbreiten 1 MHz, 1 GHz und 100 GHz bei Raumtemperatur?

[1] Üblicherweise wird für diese Leistung die Pseudo-Dimension dBm/Hz verwendet, um anzuzeigen, dass es sich um die auf 1 Hz normierte Rauschleistung handelt.

Lösung

Mit der oben gegebenen Formel lässt sich die Rauschleistung bei einer gegebenen Bandbreite sehr einfach berechnen.

$$\begin{aligned}
L_n(B = 1\,\mathrm{MHz}) &= -174\,\mathrm{dBm} + 10 \cdot \log\left(\frac{1\,\mathrm{MHz}}{1\,\mathrm{Hz}}\right) \\
&= -174\mathrm{dBm} + 10 \cdot \log\left(\frac{1 \cdot 10^6\,\mathrm{Hz}}{1\,\mathrm{Hz}}\right) = -174\,\mathrm{dBm} + 60\,\mathrm{dB} \\
&= -114\,\mathrm{dBm} \\
L_n(B = 1\,\mathrm{GHz}) &= -174\,\mathrm{dBm} + 10 \cdot \log\left(\frac{1\,\mathrm{GHz}}{1\,\mathrm{Hz}}\right) \\
&= -174\mathrm{dBm} + 10 \cdot \log\left(\frac{1 \cdot 10^9\,\mathrm{Hz}}{1\,\mathrm{Hz}}\right) = -174\,\mathrm{dBm} + 90\,\mathrm{dB} \\
&= -84\,\mathrm{dBm} \\
L_n(B = 100\,\mathrm{GHz}) &= -174\,\mathrm{dBm} + 10 \cdot \log\left(\frac{100\,\mathrm{GHz}}{1\,\mathrm{Hz}}\right) \\
&= -174\mathrm{dBm} + 10 \cdot \log\left(\frac{100 \cdot 10^9\,\mathrm{Hz}}{1\,\mathrm{Hz}}\right) = -174\,\mathrm{dBm} + 110\,\mathrm{dB} \\
&= -64\,\mathrm{dBm}
\end{aligned}$$

f) Zeichnen Sie das Ersatzschaltbild eines rauschenden Verstärkers. Die Rauschzahl des Verstärkers F ist dabei definiert als das Verhältnis der (linearen) Signal-zu-Rauschabstände vor und nach dem Verstärker. Stellen Sie die Formel zur Berechnung der Rauschzahl aus den Signal- und Rauschleistungen auf.

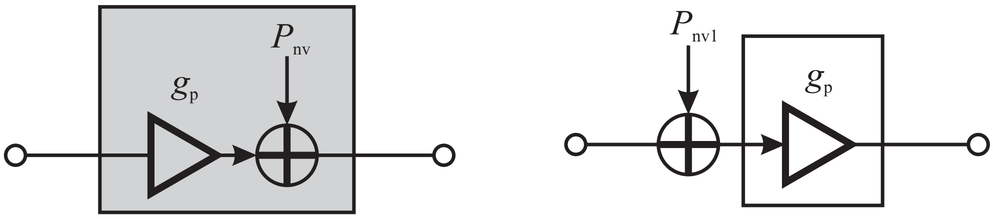
Lösung

Das Ersatzschaltbild eines rauschenden Verstärkers ist in Abb. 2.3a gezeigt. Die Rauschquelle P_{nv} beschreibt die durch den Verstärker eingeführte zusätzlich verfügbare Rauschleistung. Auch das in Abb. 2.3b dargestellte Ersatzschaltbild ist gültig. Hier bei bezeichnet man $P_{\mathrm{nv1}} = kT_{\mathrm{äq}}\Delta f$ jedoch als äquivalente Rauschleistung bzw. die Temperatur $T_{\mathrm{äq}}$ als äquivalente Rauschtemperatur. Mit der Definition der Rauschzahl folgt direkt aus Abb. 2.3a:

$$F = \frac{\mathrm{SNR}_1|_{\mathrm{lin}}}{\mathrm{SNR}_2|_{\mathrm{lin}}} = \frac{\frac{P_s}{P_n}}{\frac{gP_s}{gP_n + P_{nv}}} = \frac{gP_n + P_{nv}}{gP_n}$$

Fordert man, dass die Rauschleistung am Ausgang des Verstärkers (P_{nv}) gleich der verstärkten äquivalenten Rauschleistung (Abb. 2.3b) ist, so ergibt sich

$$P_{nv} = g \cdot P_{nv1} = g \cdot kT_{\mathrm{äq}}B$$



(a) Variante A

(b) Variante B

Abbildung 2.3: Ersatzschaltbilder eines rauschenden Verstärkers. *Hinweis:* Beide Schaltungen sind Modelle und im Grunde absolut gleichwertig. Variante A beschreibt die messtechnisch bestimmbare zusätzliche Rauschleistung P_{nv}, während Variante B genutzt wird, um die *äquivalente Rauschtemperatur* des Verstärkers zu berechnen.

und es folgt

$$F = \frac{gP_n + g \cdot kT_{\text{äq}}B}{gP_n} = \frac{P_n + kT_{\text{äq}}B}{P_n} = 1 + \frac{kT_{\text{äq}}B}{P_n}$$

Zusammenfassung: Beide Schaltbilder sind gleichwertig. Die physikalisch messbare, zusätzliche (vom Verstärker zugeführte) Rauschleistung P_{nv} wird besser mit der Schaltung in Abb. 2.3a beschrieben. Über sie wird auch die Rauschzahl F (*noise figure*) beschrieben. Die äquivalente Rauschtemperatur $T_{\text{äq}}$ oder oft auch einfach T_V wird jedoch durch das Schaltbild in Abb. 2.3b beschrieben (vgl. auch Kapitel 6 in *S. Haykin – Communication Systems, John Wiley & Sons, 3rd edition*).

g) Wie groß ist die Rauschtemperatur eines Verstärkers und einer verlustbehafteten Leitung?

Lösung

Die äquivalente Rauschtemperatur eines Verstärkers T_V lässt sich aus der Rauschzahl F und der Bezugstemperatur T_0 für die Rauschzahl berechnen. Dabei müssen immer *lineare* Größen eingesetzt werden.

$$T_V = (F-1)T_0$$

Die äquivalente Rauschtemperatur T_L eines verlustbehafteten Elements z.B. einer Leitung lässt sich aus der Dämpfung α und der physikalischen Temperatur des Elements T_{phy} berechnen. Dabei müssen auch hier immer *lineare* Größen eingesetzt werden.

$$T_L = (\alpha - 1)T_{\text{phy}}$$

Electrical Specifications [1]

T_A = 25°C, Zo = 50 Ω, V_{CC} = 5 V, R_{bias} = 22 Ω, P_{in} = -15 dBm (unless specified otherwise)

Symbol	Parameter and Test Condition	Frequency	Units	Min.	Typ.	Max.
I_d	Device Current		mA	44.0	47.6	51.0
Gp	Power Gain	900 MHz 2000 MHz	dB	 18.0	21.8 19.5	 21.0
OIP3 [2]	Output 3rd Intercept Point	900 MHz 2000 MHz	dBm	 25.0	28.9 26.5	
S11	Input Return Loss, 50Ω source	900 MHz 2000 MHz	dB		-16.5 -12.0	
S22	Output Return Loss, 50Ω load	900MHz 2000 MHz	dB		-17.3 -13.4	
S12	Reverse Isolation	900 MHz 2000 MHz	dB		-24.3 -24.7	
P1dB	Output Power at 1dB Gain Compression	900 MHz 2000 MHz	dBm		16.0 15.1	
NF	Noise Figure	900 MHz 2000 MHz	dB		2.9 3.2	

Notes:
1. Measurements obtained on CPWG line with reference plane at the ends of DUT leads (as shown in Figure 1).
2. OIP3 test condition: $F_{RF1} - F_{RF2}$ = 10MHz with input power of -23 dBm per tone measured at worse side band.

Abbildung 2.4: Auszug aus einem Datenblatt eines Verstärkers. Quelle: Avago Technologies

h) Ein Verstärker (Verstärkungsfaktor $G = 30\,\mathrm{dB}$) soll bei der Temperatur $T = 290\,\mathrm{K}$ ein Signal verstärken, dem weißes Rauschen überlagert ist. Am Eingang des Verstärkers beträgt die Rauschleistung $P_{\mathrm{n1}} = 1\,\mathrm{pW}$, der Verstärker selbst erzeugt zusätzlich eine Rauschleistung $P_{\mathrm{nv}} = 3\,\mathrm{nW}$. Wie groß ist die Rauschzahl des Verstärkers in dB?

Lösung

Wird die Anordnung Abb. 2.3a.) verwendet ergibt sich die Rauschzahlt zu

$$F = \frac{g \cdot P_{n1} + P_{\mathrm{nv}}}{g \cdot P_{n1}} = \frac{10^{\frac{30}{10}} \cdot 1\,\mathrm{pW} + 3\,\mathrm{nW}}{10^{\frac{30}{10}} \cdot 1\,\mathrm{pW}} = \frac{4\,\mathrm{nW}}{1\,\mathrm{nW}} = 4$$
$$\rightarrow F = 10 \cdot \log(4) = 6\,\mathrm{dB}$$

Mit der zusätzlichen Rauschleistung P_{nv}, die man messtechnisch bestimmen kann, lässt sich nun z.B. die Rauschzahl bestimmen. Hierbei muss das Schaltbild aus Abb. 2.3a verwendet werden. Üblicherweise wird im Datenblatt eines Verstärkers eine Rauschzahl (NF, von engl. *noise figure*) angegeben. Vergleiche Abbildung 2.4 oder ein beliebiges Verstärker-Datenblatt (hier: `http://www.avagotech.com/docs/AV02-2359EN`).

3 Pegelrauschen

Ein Sender besteht aus einer Spannungsquelle $U_{S,\text{eff}} = 1\,\text{V}$ mit dem rauschenden Innenwiderstand $R_i = 50\,\Omega$, bei der Temperatur $T_1 = 300\,\text{K}$, wie in Abbildung 3.1 dargestellt. Der Sender arbeitet in einem Frequenzbereich $\Delta f = 1\,\text{GHz}$. An allen Punkten herrsche Leistungsanpassung.

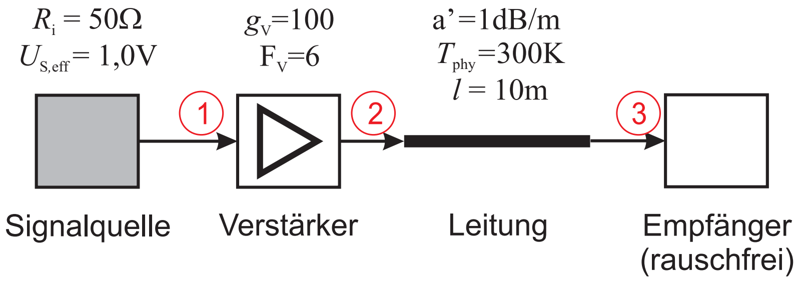


Abbildung 3.1: Übertragungsstrecke

a) Was ist Leistungsanpassung? Erklären Sie kurz den Unterschied zur Impedanzanpassung. Kann man Leistungs- und Impedanzanpassung gleichzeitig erreichen? Wenn ja, unter welchen Bedingungen?

Lösung

Für die Anpassung gibt es in der Nachrichtentechnik zwei verschiedene Ziele:

Leistungsanpassung $\underline{Z}_L = \underline{Z}_G^* \Rightarrow$ Maximale Leistungsabgabe an die Last. Allgemein jedoch kommt es zu Reflektionen an der Last, die zu Überlagerung des Signals führen.

Widerstandsanpassung $\underline{Z}_L = \underline{Z}_G \Rightarrow$ Keine Reflexion an der Last, was eine verzerrungsfreie Signalübertragung ermöglicht. Allgemein ist jedoch eine optimale Leistungsabgabe in diesem Fall nicht möglich.

Ersetzt man die Darstellung der komplexen Zahlen durch ihre Addition aus Real- und Imaginärteil

$$\underline{Z}_G = R_G + j \cdot X_G \qquad \text{und} \qquad \underline{Z}_L = R_L + j \cdot X_L$$

folgt aus den oben genannten Bedingungen

$$\underline{Z}_L = \underline{Z}_G^* \rightarrow R_L + j \cdot X_L = R_G - j \cdot X_G$$
$$\underline{Z}_L = \underline{Z}_G \rightarrow R_L + j \cdot X_L = R_G + j \cdot X_G$$

Sollen beide Ziele gleichzeitig erreicht werden, so muss gelten:

$$\underline{Z}_G^* = \underline{Z}_G \rightarrow R_G - j \cdot X_G = R_G + j \cdot X_G$$

Ein einfacher Koeffizientenvergleich führt zu der Bedingung

$$-j \cdot X_G = +j \cdot X_G$$

Diese kann jedoch nur erfüllt werden, wenn $X_G = 0$ gilt. Anschaulich kann eine reflektionsfreie Anpassung bei gleichzeitig maximaler Leistungsübertragung nur für rein reelle Generator- bzw. Lastwiderstände erreicht werden. Aus diesem Grund haben alle üblichen Systeme, einen reellen Wellenwiderstand von 50 Ω (z.B. bei Funkgeräten) bzw. 75 Ω (z.B. bei Fernsehsystemen).

b) Zeichnen Sie das Ersatzschaltbild der Signalquelle.

Lösung

Das Ersatzschaltbild der rauschenden Signalquelle ist in Abb. 3.2 dargestellt. Da an allen

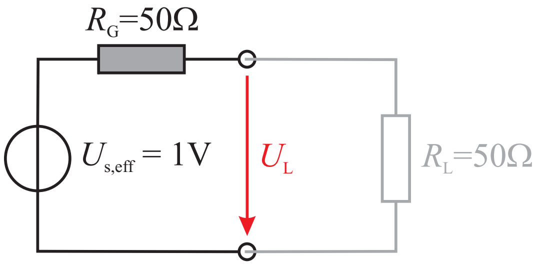


Abbildung 3.2: Ersatzschaltbild der rauschenden Signalquelle

Punkten gemäß der Aufgabenstellung Leistungsanpassung herrschen soll, ist die Größe des Lastwiderstandes automatisch festgelegt ($R_L = R_G$).

c) Berechnen Sie die von der Signalquelle an die Last abgegebenen Leistung P_{s1}. Wie groß ist der Signalleistungspegel L_{s1} in dBm?

Lösung

Die abgegebene Signalleistung P_{s1} ergibt sich zu:

$$P_{s1} = \frac{U_{\mathrm{L,eff}}^2}{R_L}$$

Aufgrund der Leistungsanpassung gilt $U_L = \frac{1}{2}U_S$, womit folgt:

$$P_{s1} = \frac{\left(\frac{1}{2}U_{\mathrm{S,eff}}\right)^2}{R_L} = \frac{U_{\mathrm{S,eff}}^2}{4R_L} = \frac{(1\,\mathrm{V})^2}{4 \cdot 50\,\Omega} = 5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{W} = 5\,\mathrm{mW}$$

$$\rightarrow L_{s1} = 10 \cdot \log\left(\frac{5\,\mathrm{mW}}{1\,\mathrm{mW}}\right) \approx 7\,\mathrm{dBm}$$

d) Berechnen Sie die Rauschspannung, die abgegebene Rauschleistung und den zugehörigen Rauschleistungspegel der Signalquelle.

Lösung

Die Rauschspannung U_n der Signalquelle berechnet sich zu

$$U_n = \sqrt{4kTR\Delta f} = \sqrt{4 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J/K} \cdot 300\,\mathrm{K} \cdot 50\,\Omega \cdot 1 \cdot 10^9\,\mathrm{Hz}} = 28{,}8\,\mu\mathrm{V}$$

Für die Rauschleistung (unter der gegebenen Bedingung der Leistungsanpassung) gilt:

$$P_n = kT\Delta f = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J/K} \cdot 300\,\mathrm{K} \cdot 1 \cdot 10^9\,\mathrm{Hz} = 4{,}14\,\mathrm{pW}$$
$$\rightarrow L_{n1} = 10 \cdot \log\left(\frac{4{,}14\,\mathrm{pW}}{1\,\mathrm{mW}}\right) \approx -83{,}8\,\mathrm{dBm}$$

e) Wie groß ist der Signal-zu-Rauschabstand SNR_1 an Punkt 1?

Lösung

Der Signal-zu-Rauschabstand an Punkt 1 ist gegeben durch

$$\mathrm{SNR}_1 = \frac{P_s}{P_n},$$

was in logarithmischer Darstellung einer Subtraktion entspricht. Damit berechnet sich der Signal-zu-Rauschabstand zu

$$\mathrm{SNR}_1 = L_{s1} - L_{n1} = 7\,\mathrm{dBm} - (-83{,}8\,\mathrm{dBm}) = 90{,}8\,\mathrm{dB}$$

An die Klemmen an Punkt 1 werden nun ein Verstärker, mit der Rauschzahl $F_V = 6$ (Bezugstemperatur $T_0 = 300\,\mathrm{K}$) und dem Verstärkungsfaktor $g_v = 100$, eine Leitung der Länge $l = 10\,\mathrm{m}$ und dem Dämpfungsbelag $a' = 1\,\mathrm{dB/m}$ (Umgebungstemperatur der Leitung $T_{\mathrm{phy}} = 300\,\mathrm{K}$) sowie ein rauschfreier Empfänger angeschlossen.

f) Welche Rauschtemperatur T_E hat der Empfänger?

Lösung

Da der Empfänger rauschfrei angenommen wird, beträgt seine Rauschtemperatur

$$T_E = 0\,\mathrm{K}$$

g) Berechnen Sie den Signal-zu-Rauschabstand SNR_3 an Punkt 3.

Lösung

Der Signal-zu-Rauschabstand an Punkt 3 ergibt sich aus dem Signalleistungspegel $L_{\mathrm{s}3}$ und dem Rauschleistungspegel $L_{\mathrm{n}3}$. Der Signalleistungspegel berechnet sich zu

$$L_{\mathrm{s}3} = L_{\mathrm{s}1} + g_v - a_l$$

Mit

$$g_v = 10 \cdot \log\left(\frac{100}{1}\right) = 20\,\mathrm{dB}$$
$$a_l = a' \cdot l = 1\,\mathrm{dB/m} \cdot 10\,\mathrm{m} = 10\,\mathrm{dB}$$

folgt:

$$L_{\mathrm{s3}} = 7\,\mathrm{dBm} + 20\,\mathrm{dB} - 10\,\mathrm{dB} = 17\,\mathrm{dBm}$$

Die Rauschleistung an Punkt 3 setzt sich aus folgenden Komponenten zusammen:

- Rauschleistung der Signalquelle:

$$P_{\mathrm{n3,1}} = P_{\mathrm{n1}} \cdot g_v \cdot \frac{1}{\alpha_l} = \frac{k \cdot T_1 \cdot \Delta f \cdot g_v}{\alpha_l}$$

- Rauschleistung des Verstärkers

$$T_v = (F_v - 1) \cdot T_0$$
$$P_{\mathrm{nv1}} = k \cdot T_v \cdot \Delta f = k \cdot (F_v - 1) \cdot T_0 \cdot \Delta f$$
$$P_{\mathrm{n3,2}} = P_{nv} \cdot g_v \cdot \frac{1}{\alpha_l} = \frac{k \cdot (F_v - 1) \cdot T_0 \cdot \Delta f \cdot g_v}{\alpha_l}$$

- Rauschleistung der Leitung

$$T_L = (\alpha_l - 1) \cdot T_{\mathrm{phy}}$$
$$P_{\mathrm{nL}} = k \cdot T_L \cdot \Delta f = k \cdot (\alpha_l - 1) \cdot T_{\mathrm{phy}} \cdot \Delta f$$
$$P_{\mathrm{n3,3}} = P_{nL} \cdot \frac{1}{\alpha_l} = \frac{k \cdot (\alpha_l - 1) \cdot T_{\mathrm{phy}} \cdot \Delta f}{\alpha_l}$$

Diese Rauschleistungen addieren sich zu

$$\begin{aligned}
P_{\mathrm{n3}} &= \frac{k \cdot T_1 \cdot \Delta f \cdot g_v}{\alpha_l} + \frac{k \cdot (F_v - 1) \cdot T_0 \Delta f\, g_v}{\alpha_l} + \frac{k \cdot (\alpha_l - 1) \cdot T_{\mathrm{phy}} \cdot \Delta f}{\alpha_l} \\
&= k \cdot \Delta f \cdot \left[\frac{T_1 \cdot g_v}{\alpha_l} + \frac{(F_v - 1) \cdot T_0 \cdot g_v}{\alpha_l} + \frac{(\alpha_l - 1) \cdot T_{\mathrm{phy}}}{\alpha_l}\right] \\
&= 1{,}38 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J/K} \cdot 1\mathrm{GHz} \cdot \left[\frac{300\mathrm{K} \cdot 100}{10} + \cdots\right. \\
&\quad \left. \cdots + \frac{(6-1) \cdot 300\,\mathrm{K} \cdot 100}{10} + \frac{(10-1) \cdot 300\,\mathrm{K}}{10}\right] = 252{,}13\,\mathrm{pW} \\
\rightarrow L_{\mathrm{n3}} &= 10 \cdot \log\left(\frac{P_{n3}}{1\,\mathrm{mW}}\right) = 10 \cdot \log\left(\frac{252{,}13\,\mathrm{pW}}{1\,\mathrm{mW}}\right) \approx -66\,\mathrm{dBm}
\end{aligned}$$

Damit folgt für den Signal-zu-Rauschabstand

$$\mathrm{SNR}_3 = L_{\mathrm{s3}} - L_{\mathrm{n3}} \approx 17\,\mathrm{dBm} - (-66\,\mathrm{dBm}) = 83\,\mathrm{dB}$$

h) Berechnen Sie die Systemrauschtemperatur T_{sys1} an Punkt 1.

Lösung

Da die Berechnung der Rauschleistung innerhalb der Schaltung sehr aufwendig ist (siehe letzter Aufgabenteil) und diese ohnehin messtechnisch nicht erfasst werden kann, wird einer Schaltung in der Regel eine äquivalente Rauschtemperatur an dessen Eingang zugewiesen. Diese äquivalente Rauschtemperatur wird als Systemrauschtemperatur bezeichnet und berechnet sich nach folgender Formel aus der Rauschtemperatur vorhergehender Elemente (wie Antennen) T_{links} und den nachfolgenden Elementen

$$T_{\text{sys1}} = T_{\text{links}} + \sum_{k=2}^{K} \frac{T_{\text{n,k}}}{\prod_{m=1}^{k-1} g_m}$$

wobei $T_{\text{n,k}}$ die Rauschtemperatur des k-ten Elements und g_m den linearen Verstärkungsfaktor des m-ten Elements darstellt.
Bei dieser Wahl der Indizierung wird *von links nach rechts*, d.h. von der Antenne zum Empfänger gezählt. Der Verstärker erhält den Index $k = 1$, die Leitung $k = 2$ als Index[2].

Die Systemrauschtemperatur an Punkt 1 berechnet sich für das gegebene Beispiel also zu:

$$T_{\text{sys1}} = T_1 + T_v + \frac{T_L}{g_v},$$

wobei T_1 hier die Rauschtemperatur der Signalquelle ist. Mit den Werten

$$T_v = (F_v - 1) \cdot T_0 = (6 - 1) \cdot 300\,\text{K} = 1500\,\text{K}$$
$$T_L = (a_l - 1) \cdot T_{\text{phy}} = (10 - 1) \cdot 300\,\text{K} = 2700\,\text{K}$$

folgt

$$T_{\text{sys1}} = 300\,\text{K} + 1500\,\text{K} + \frac{2700\,\text{K}}{100} = 1827\,\text{K}$$

Diese Ergebnis bedeutet, dass alle Rauschquellen in der Schaltung durch eine einzelne Rauschquelle an Punkt 1 mit der Rauschtemperatur 1827 K ersetzt werden können. Die nachfolgende Schaltung (hier die Leitung und der Verstärker) können so als rauschfrei angenommen werden.

i) Berechnen Sie aus der Systemrauschtemperatur T_{Sys1} den Signal-zu-Rauschabstand SNR_3 an Punkt 3.

[2] In der Übung wurde bei der gezeigten Bechnungsformel eine andere Indizierung gewählt. Aus Gründen der Einheitlichkeit wird in diesem Lösungsvorschlag die Formel aus der Formelsammlung verwendet.

Lösung

Der Signal-zu-Rauschabstand an Punkt 3 lässt sich aus der Systemrauschtemperatur und der Signalleistung an Punkt 1 berechnen, da beide (Signal und Rauschen) die gleichen (jetzt rauschfreien) Elemente durchlaufen müssen.

$$\begin{aligned}
\mathrm{SNR}_3 &= \mathrm{SNR}_1|_{\mathrm{T_{sys}}} = L_{\mathrm{s1}} - L_{\mathrm{n1}}|_{\mathrm{T_{sys}}} \\
L_{\mathrm{n1}}|_{\mathrm{T_{sys}}} &= 10 \cdot \log\left(\frac{k \cdot T_{\mathrm{sys}} \cdot \Delta f}{1\,\mathrm{mW}}\right) \\
&= 10 \cdot \log\left(\frac{1{,}38 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J/K} \cdot 1827\,\mathrm{K} \cdot 1\,\mathrm{GHz}}{1\,\mathrm{mW}}\right) = -75{,}98\,\mathrm{dBm} \\
\rightarrow \mathrm{SNR}_3 &= 7\,\mathrm{dBm} - (-75{,}98\,\mathrm{dBm}) \approx 83\,\mathrm{dB}
\end{aligned}$$

Wie zu erwarten führen beide Rechenwege zum gleichen Ergebnis. Aufgrund der Einfachheit ist dem zweiten Rechenweg gerade bei vielen Elementen der Vorzug zu geben.

4 Übertragungsstrecke

Betrachtet wird die in Abb. 4.1 dargestellte Übertragungsstrecke bestehend aus einem Mikrofon, einem Vorverstärker V, einem Kabel der Länge l mit dem Dämpfungsbelag a', einer Verstärkerkaskade sowie einem rauschfreien Receiver. Das Mikrofon kann als Spannungsquelle (Amplitude $\hat{U}_0$) mit rauschendem Innenwiderstand R_i aufgefasst werden. Alle Elemente besitzen eine Übertragungsbandbreite $B = 20\,\text{kHz}$. An allen Punkten herrscht Leistungsanpassung.

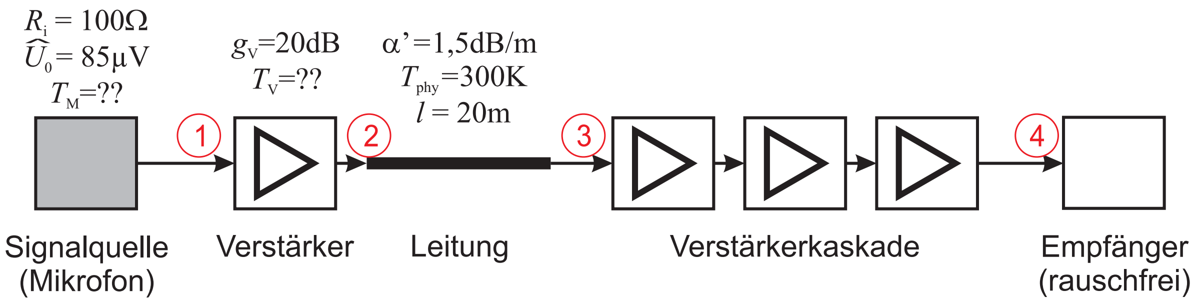


Abbildung 4.1: Übertragungsstrecke

a) Bei welcher maximalen Temperatur T_M darf das Mikrofon betrieben werden, wenn ein Signal-Rauschabstand SNR_1 von 50 dB an Punkt 1 nicht unterschritten werden darf?

Lösung

Der Signal-zu-Rauschabstand an Punkt 1 ist gegeben durch

$$\text{SNR}_1 = 10 \cdot \log\left(\frac{P_s}{P_n}\right) = 50\,\text{dB}$$

Die Signalleistung berechnet sich durch die Leistungsanpassung und den Effektivwert zu:

$$P_S = \frac{(\frac{U_\text{eff}}{2})^2}{R_i} = \frac{U_\text{eff}^2}{4R_i} = \frac{\hat{U}_0^2}{8R_i}$$

Die Rauschleistung ist durch $P_n = kT_MB$ gegeben.

$$\text{SNR}_1 = 10 \cdot \log\left(\frac{\frac{\hat{U}_0^2}{8R_i}}{kT_MB}\right) = 10 \cdot \log\left(\frac{\hat{U}_0^2}{8R_ikT_MB}\right) = 50\,\text{dB}$$

$$\rightarrow 10^5 = \frac{\hat{U}_0^2}{8R_ikT_MB}$$

$$\rightarrow T_M = \frac{\hat{U}_0^2}{8R_ikB \cdot 10^5}$$

$$= \frac{(85\,\mu\text{V})^2}{8 \cdot 100\,\Omega \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23}\,\text{J/K} \cdot 20\,\text{kHz} \cdot 10^5} = 327{,}22\,\text{K}$$

b) Bestimmen Sie die Rauschtemperatur T_v des Vorverstärkers V, wenn sich das Mikrofon auf der in Aufgabenteil (a) berechneten Temperatur T_M befindet und der Signal-Rauschabstand am Punkt 2 $\mathrm{SNR}_2 = 44\,\mathrm{dB}$ beträgt. Nehmen Sie für den rauschenden Verstärker einen idealen Verstärker mit dahinter geschalteter Rauschquelle an.

Lösung

Die Signal-zu-Rauschabstände an den beiden Punkten 1 und 2 sind gegeben durch

$$\mathrm{SNR}_1 = 10 \cdot \log\left(\frac{P_S}{P_n}\right) = 50\mathrm{dB} \rightarrow 10^5 = \frac{P_S}{P_n}$$
$$\mathrm{SNR}_2 = 10 \cdot \log\left(\frac{g_p \cdot P_S}{g_p \cdot P_n + P_{n,v}}\right) = 44\mathrm{dB} \rightarrow 10^{4,4} = \frac{g_p \cdot P_S}{g_p \cdot P_n + P_{n,v}}$$

Wenn man nun beide Funktionen dividiert folgt:

$$\frac{10^5}{10^{4,4}} = \frac{\frac{P_S}{P_n}}{\frac{g_p \cdot P_S}{g_p \cdot P_n + P_{n,v}}} \rightarrow 10^{0,6} = \frac{g_p \cdot P_n + P_{n,v}}{g_p \cdot P_n}$$

Mit $P_n = kT_M B$ und $P_{n,v} = g_p k T_v B$ folgt:

$$10^{0,6} = \frac{T_M + T_v}{T_M} \rightarrow T_V = 975{,}47\,\mathrm{K}$$

Alternativ kann die Rauschtemperatur der Verstärkers über die Rauschzahl berechnet werden. Nach der Definition ist die Rauschzahl definiert als das Verhältnis der Signal-zu-Rauschabstände.

$$F = \mathrm{SNR}_i - \mathrm{SNR}_o = 50\,\mathrm{dB} - 44\,\mathrm{dB} = 6\,\mathrm{dB} \rightarrow F|_{\mathrm{lin}} = 3,98$$

Die Rauschtemperatur der Verstärkers ergibt sich aus der Rauschzahl und der Rauschtemperatur bei der diese Rauschzahl „gemessen“ wurde, was hier T_M entspricht.

$$T_V = (F-1) \cdot T_M = 2,98 \cdot 327{,}22\,\mathrm{K} = 975{,}47\,\mathrm{K}$$

c) Für die Verstärkerkaskade stehen 3 Verstärker (A, B und C) mit den folgenden Daten zur Verfügung:

Verstärker A: $F_{\mathrm{pA}} = 10\,\mathrm{dB}$; $g_{pA} = 30\,\mathrm{dB}$

Verstärker B: $F_{\mathrm{pB}} = 6\,\mathrm{dB}$; $g_{pB} = 20\,\mathrm{dB}$

Verstärker C: $F_{\mathrm{pC}} = 6\,\mathrm{dB}$; $g_{pC} = 10\,\mathrm{dB}$

Dabei sind die Rauschzahlen auf die Temperatur $T_0 = 300\,\mathrm{K}$ bezogen. Bestimmen Sie die in Bezug auf den Signal-zu-Rauschabstand optimale Verstärkerreihenfolge. Wie groß ist die Gesamtverstärkung g_{VK} und die Rauschzahl F_{VK} im optimalen Fall?

Lösung

Die Regel für kaskadierte Elemente mit optimierten Rauscheigenschaften lautet: Zuerst den Verstärker mit der kleinsten Rauschzahl, bei gleicher Rauschzahl entscheidet die höhere Verstärkung. Kabel und verlustbehaftete Elemente werden (wenn möglich) möglichst weit hinten eingebaut.
Daraus ergibt sich im vorliegenden Fall die Reihenfolge der Verstärker $B \rightarrow C \rightarrow A$. Die Gesamtrauschzahl einer Verstärkerkaskade berechnet sich zu

$$F_{\mathrm{VK}} = F_1 + \sum_{n=2}^{N} \frac{F_n - 1}{\prod\limits_{k=1}^{n-1} g_k}$$

Dabei ist F_n die Rauschzahl und g_n die lineare Verstärkung des n-ten Verstärkers.
Umrechnung der gegebenen Werte aus dB in linearem Bereich:

Verstärker A $F_A = 10\,;\ G_A = 1000$

Verstärker B $F_B = 4\,;\ G_B = 100$

Verstärker C $F_C = 4\,;\ G_C = 10$

Die Gesamtrauschzahl ergibt sich damit zu

$$F_{\mathrm{VK}} = F_B + \frac{F_C - 1}{G_B} + \frac{F_A - 1}{G_B G_C} = 4 + \frac{4-1}{100} + \frac{10-1}{100 \cdot 10} = 4{,}039$$

Die Gesamtverstärkung g_{VK} berechnet sich einfach aus der Addition der logarithmischen Verstärkungsfaktoren g_n der einzelnen Verstärker:

$$g_{\mathrm{VK}} = \sum_{n=1}^{N} g_n = g_B + g_C + g_A = 20\,\mathrm{dB} + 10\,\mathrm{dB} + 30\,\mathrm{dB} = 60\,\mathrm{dB}$$

d) Bestimmen Sie die Systemrauschtemperatur T_{sys} an Punkt 1. Berechnen Sie aus dieser den Signal-zu-Rauschabstand SNR_4 am Ausgang der Verstärkerkaskade?

Lösung

Die Systemrauschtemperatur ergibt sich nach der bekannten Formel zu

$$T_{\mathrm{sys}} = T_M + T_V + \frac{T_L}{G_v} + \frac{T_{VK} \cdot \alpha_L}{G_v}$$

Mit der Umrechnung der logarithmischen Größen in lineare und der Berechnung der Rauschtemperatur der Elemente

$$a_L = a_L' \cdot l = 1{,}5\,\mathrm{dB/m} \cdot 20\,\mathrm{m} = 30\,\mathrm{dB}$$
$$\alpha_L = 10^{\frac{a_L}{10}} = 10^3 = 1000$$
$$T_L = (\alpha_L - 1) \cdot T_{\mathrm{phy}} = 999 \cdot 300\,\mathrm{K} = 299\,700\,\mathrm{K}$$
$$G_v = 10^{\frac{g_v}{10}} = 10^2 = 100$$
$$T_{\mathrm{VK}} = (F_{\mathrm{VK}} - 1) \cdot T_0 = 3{,}039 \cdot 300\,\mathrm{K} = 911{,}7\,\mathrm{K}$$

Mit diesen Werten folgt:

$$T_{\mathrm{sys}} = 327{,}22\,\mathrm{K} + 975{,}47\,\mathrm{K} + \frac{299\,700\,\mathrm{K}}{100} + \frac{911{,}7\,\mathrm{K} \cdot 1000}{100} = 13\,416{,}69\,\mathrm{K}$$

Der Signal-zu-Rauschabstand lässt sich aus der Systemrauschtemperatur und der Signalleistung an Punkt 1 berechnen.

$$\begin{aligned}
\mathrm{SNR}_4 = \mathrm{SNR}_1|_{\mathrm{Tsys}} &= 10 \cdot \log\left(\frac{P_S}{1\,\mathrm{mW}}\right) - 10 \cdot \log\left(\frac{P_N|_{\mathrm{Tsys}}}{1\,\mathrm{mW}}\right) \\
&= 10 \cdot \log\left(\frac{\frac{\hat{U}_0^2}{8R_i}}{1\,\mathrm{mW}}\right) - 10 \cdot \log\left(\frac{kT_{\mathrm{sys}}B}{1\,\mathrm{mW}}\right) \\
&= 10 \cdot \log\left(\frac{\frac{(85\,\mu\mathrm{V})^2}{800\,\Omega}}{1\,\mathrm{mW}}\right) - 10 \cdot \log\left(\frac{1{,}38 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J/K} \cdot 13\,416{,}69\,\mathrm{K} \cdot 20\,\mathrm{kHz}}{1\,\mathrm{mW}}\right) \\
&= -80{,}44\,\mathrm{dBm} - (-114{,}31\,\mathrm{dBm}) = 33{,}87\,\mathrm{dB}
\end{aligned}$$

e) Wie groß ist der Signal-Rauschabstand SNR_4, wenn das Mikrofon eine Leistungsübertragungsfunktion $|H(f)|^2$ gemäß Abb. 4.2 besitzt? (Signalfrequenz $\leq 14\,\mathrm{kHz}$ vorausgesetzt.)

Lösung

Die äquivalente Rauschbandbreite berechnet sich nach der Formel

$$B_n = \int_0^\infty \frac{|H(f)|^2}{|H_{\max}|^2} df$$

Für den voliegenden Fall gilt $|H_{\max}| = 1$, so dass sich folgendes Ergebnis ergibt.

$$\begin{aligned}
B_n &= \int_0^\infty |H(f)|^2\, df \\
&= \int_0^{14\,\mathrm{kHz}} 1\, df + \int_{14\,\mathrm{kHz}}^{16\,\mathrm{kHz}} 8 - \frac{f}{2}\, df = \Big[f\Big]_0^{14\,\mathrm{kHz}} + \left[8f - \frac{f^2}{4\,\mathrm{kHz}}\right]_{14\,\mathrm{kHz}}^{16\,\mathrm{kHz}} \\
&= (14\,\mathrm{kHz} - 0\,\mathrm{kHz}) + (64\,\mathrm{kHz} - 63\,\mathrm{kHz}) = 15\,\mathrm{kHz}
\end{aligned}$$

Alternativ kann man auch die Fläche unter der Funktion anschaulich berechnen:

$$B_n = \underbrace{1 \cdot 14\,\mathrm{kHz}}_{\text{Rechteck}} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2\,\mathrm{kHz}}_{\text{Dreieck}} = 15\,\mathrm{kHz}$$

Mit der neuen äquivalenten Rauschbandbreite ergibt sich der Signal-zu-Rauschabstand zu

$$\begin{aligned}
\mathrm{SNR}_4 = \mathrm{SNR}_1|_{\mathrm{Tsys}} &= 10 \cdot \log\left(\frac{P_S}{1\,\mathrm{mW}}\right) - 10 \cdot \log\left(\frac{P_N}{1\,\mathrm{mW}}\right) \\
&= 10 \cdot \log\left(\frac{\frac{\hat{U}_0^2}{8R_i}}{1\,\mathrm{mW}}\right) - 10 \cdot \log\left(\frac{kT_{\mathrm{sys}}B_n}{1\,\mathrm{mW}}\right) \\
&= 10 \cdot \log\left(\frac{\frac{(85\,\mu\mathrm{V})^2}{800\,\Omega}}{1\,\mathrm{mW}}\right) - 10 \cdot \log\left(\frac{1{,}38 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J/K} \cdot 13\,416{,}69\,\mathrm{K} \cdot 15\,\mathrm{kHz}}{1\,\mathrm{mW}}\right) \\
&= -80{,}44\,\mathrm{dBm} - (-115{,}56\,\mathrm{dBm}) = 35{,}12\,\mathrm{dB}
\end{aligned}$$

Wie erwartet ist der Signal-zu-Rauschabstand bei einer kleineren äquivalenten Rauschbandbreite größer, da die Rauschleistung abnimmt.

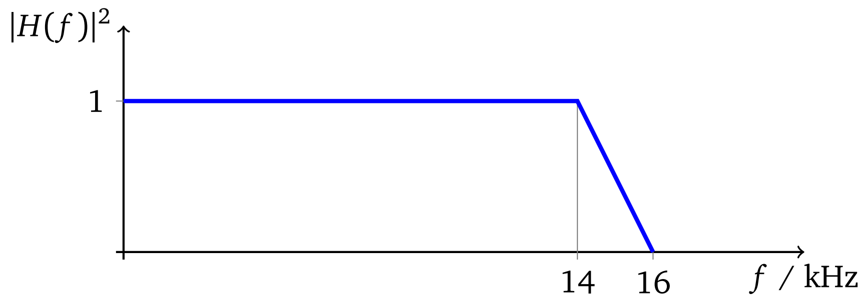


Abbildung 4.2: Leistungsübertragungsfunktion des Mikrofons

5 Serienschaltung rauschender Widerständer

Gegeben ist das in Abb. 5.1 angegebene Widerstandsnetzwerk mit den rauschenden Widerständen R_1, R_2 und R_3. Berechnen Sie die Rauschspannung U_n sowie die maximal verfügbare Rauschleistung P_n allgemein, so dass die Widerstände unterschiedliche Temperaturen haben können.

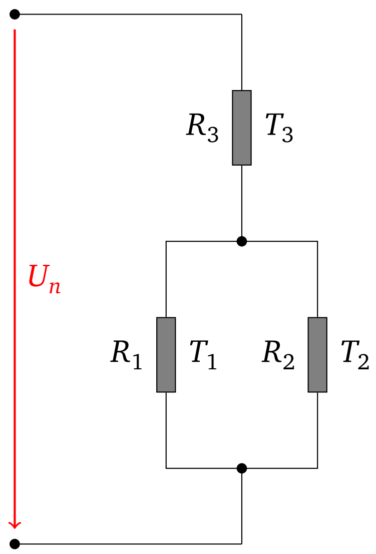


Abbildung 5.1: Widerstandsnetzwerk mit rauschenden Widerständen

Lösung

Betrachtet man zu Beginn nur die Parallelschaltung R_1 und R_2 lässt sich die effektive Rauschtemperatur berechnen:

$$T_{1|2} = \frac{\sum_{k=1}^{K} \frac{T_k}{R_k}}{\sum_{k=1}^{K} \frac{1}{R_k}} = \frac{\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_2 T_1 + R_1 T_2}{R_1 + R_2}$$

Der Gesamtwiderstand der Parallelschaltung berechnet sich zu

$$R_{1|2} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Betrachtet man nun die Reihenschaltung von R_3 und $R_{1|2}$ ergibt sich die effektive Rauschtemperatur zu

$$T_\Sigma = \frac{\sum_{k=1}^{K} T_k R_k}{\sum_{k=1}^{K} R_k} = \frac{T_{1|2} R_{1|2} + T_3 R_3}{R_{1|2} + R_3} = \frac{\frac{R_2 T_1 + R_1 T_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + T_3 R_3}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3}$$

Der Gesamtwiderstand berechnet sich zu

$$R_\Sigma = R_{1|2} + R_3 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3$$

Die Rauschspannung errechnet sich folglich zu

$$U_n = \sqrt{4kT_\Sigma B R_\Sigma} = \sqrt{4kB \cdot \frac{\frac{R_2T_1+R_1T_2}{R_1+R_2} \cdot \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} + T_3R_3}{\frac{R_1R_2}{R_1+R_2} + R_3} \cdot \left(\frac{R_1R_2}{R_1+R_2} + R_3\right)}$$
$$= \sqrt{4kB \cdot \left(\frac{R_2T_1 + R_1T_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} + T_3R_3\right)}$$

Die maximal verfügbare Rauschleistung (Leistungsanpassung) ergibt sich zu

$$P_n = kT_\Sigma B = kB \cdot \frac{\frac{R_2T_1+R_1T_2}{R_1+R_2} \cdot \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} + T_3R_3}{\frac{R_1R_2}{R_1+R_2} + R_3}$$

Gegeben ist die in Abbildung 6.1 dargestellte Richtfunkstrecke mit einer Bandbreite von $\Delta f = 1\,\text{GHz}$. Das System arbeitet mit der Trägerfrequenz $f = 40\,\text{GHz}$. Das zu übertragende Signal wird auf der Sendeseite durch einen Verstärker mit der Verstärkung $V_S = 10\,\text{dB}$ verstärkt und über ein 4 m langes Kabel mit dem Dämpfungsbelag $a'_S = 1\,\text{dB/m}$ an die rauschfreie Sendeantenne mit einem Gewinn von $G_S = 50\,\text{dB}$ angeschlossen. Es hat an Punkt 1 die Leistung $P_G = 1\,\text{mW}$. Das Signal wird nun über eine 10 km lange Richtfunkstrecke übertragen.

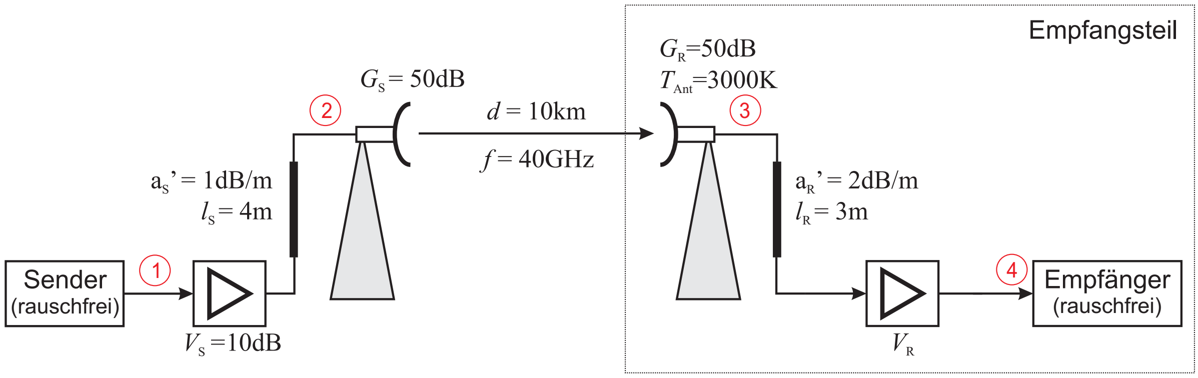


Abbildung 6.1: Übertragungssystem

a) Berechnen Sie die Signalleistungspegel L_S in dBm am Punkt 2. Geben Sie auch die Signalleistung P_S in W an.

Lösung

Die Signalleistung an Punkt 2 ergibt sich aus

$$L_S = L_G + V_S - a_S$$

Mit

$$a_S = a'_S \cdot l_S = 1\,\text{dB/m} \cdot 4\,\text{m} = 4\,\text{dB}$$
$$L_G = 10 \cdot \log\left(\frac{1\,\text{mW}}{1\,\text{mW}}\right) = 0\,\text{dBm}$$

folgt

$$L_S = 0\,\text{dBm} + 10\,\text{dB} - 4\,\text{dB} = 6\,\text{dBm}$$
$$\rightarrow P_S = 10^{0,6} \cdot 1\,\text{mW} = 3{,}98\,\text{mW} \approx 4\,\text{mW}$$

b) Geben Sie die Freiraumdämpfung a_{fs} der Richtfunkstrecke in dB an.

Lösung

Die Freiraumdämpfung ist definiert als

$$a_{\mathrm{fs}} = 20 \cdot \log\left(\frac{4\pi d}{\lambda}\right)$$

Mit

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}}{40\,\mathrm{GHz}} = 7{,}5\,\mathrm{mm}$$

folgt

$$a_{\mathrm{fs}} = 20 \cdot \log\left(\frac{4\pi \cdot 10\,\mathrm{km}}{7{,}5\,\mathrm{mm}}\right) = 144{,}5\,\mathrm{dB}$$

c) Geben Sie den an Punkt 3 empfangenen Signalleistungspegel L_3 in dBm an.

Lösung

Die Signalleistung an Punkt 3 ergibt sich aus dem Sendepegel, dem Gewinn der Sende- und der Empfangsantenne und der Freiraumdämpfung:

$$\begin{aligned} L_3 &= L_S + G_S - a_{\mathrm{fs}} + G_E \\ &= 6\,\mathrm{dBm} + 50\,\mathrm{dB} - 144{,}5\,\mathrm{dB} + 50\,\mathrm{dB} = -38{,}5\,\mathrm{dBm} \end{aligned}$$

Der Empfänger besteht aus einer Antenne mit einem Gewinn $G_R = 50\,\mathrm{dB}$, die über ein 3 m langes Kabel mit dem Dämpfungsbelag $a'_R = 2\,\mathrm{dB/m}$ an einen Verstärker mit der Verstärkung $V_R = 30\,\mathrm{dB}$ angeschlossen ist. Die Rauschzahl des Verstärkers auf der Sendeseite ist $F_S = 4$, die des Verstärkers auf der Empfangsseite ist $F_R = 6$. Die Umgebungstemperatur T_0 beträgt 300 K. Die Rauschzahlen sind auf die Temperatur T_0 normiert.

d) Berechnen Sie die Systemrauschtemperatur T_{sys} für den *Empfangsteil* (ohne Sender und ohne Funkstrecke) am Punkt 3.

Lösung

Die Systemrauschtemperatur der Empfängers berechnet sich zu[3]:

$$T_{\mathrm{sys}} = T_{\mathrm{Ant}} + T_{\mathrm{LR}} + T_{\mathrm{VR}} \cdot \alpha_R$$

[3] Indiziere die Elemente von Punkt 3 zum Empfänger aufsteigend durch und verwende als „Gewinn" des Kabels $g = 1/\alpha$ sowie die Formel aus der Formelsammlung $T_{\mathrm{sys}} = T_{\mathrm{n1}} + \sum_{n=2}^{N} \frac{T_{\mathrm{ni}}}{\prod_{k=1}^{n-1} g_{Pk}}$

Die Dämpfung α_R und die Rauschtemperatur T_{LR} des Kabels sowie die Rauschtemperatur des Verstärkers T_{VR} im Empfänger berechnen sich zu

$$
\begin{aligned}
a_R &= a_R' \cdot l_R = 2\,\mathrm{dB/m} \cdot 3\,\mathrm{m} = 6\,\mathrm{dB} \\
\alpha_R &= 10^{\frac{a_R}{10}} = 10^{0,6} = 3,98 \\
T_{\mathrm{LR}} &= (\alpha_R - 1)\,T_0 = \left(10^{0,6} - 1\right) \cdot 300\,\mathrm{K} = 894{,}32\,\mathrm{K} \\
T_{\mathrm{VR}} &= (F_R - 1)\,T_0 = (6-1) \cdot 300\,\mathrm{K} = 1500\,\mathrm{K}
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich die Systemrauschtemperatur zu

$$T_{\mathrm{sys}} = 3000\,\mathrm{K} + 894{,}32\,\mathrm{K} + 1500\,\mathrm{K} \cdot 3,98 = 9864{,}32\,\mathrm{K}$$

e) Geben Sie das Signal-zu-Rausch Verhältnis SNR_4 am Ausgangspunkt des Empfängers (Punkt 4) an.

Lösung

Der Signal-zu-Rauschabstand berechnet sich aus

$$\mathrm{SNR}_4 = \mathrm{SNR}_3|_{\mathrm{T_{sys}}} = L_3 - L_n|_{\mathrm{T_{sys}}}$$

Mit der Rauschleistung

$$
\begin{aligned}
L_n|_{\mathrm{T_{sys}}} &= 10 \cdot \log\left(\frac{k T_{\mathrm{sys}} \Delta f}{1\,\mathrm{mW}}\right) \\
&= 10 \cdot \log\left(\frac{1{,}38 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J/K} \cdot 9864{,}32\,\mathrm{K} \cdot 1\,\mathrm{GHz}}{1\,\mathrm{mW}}\right) = -68{,}66\,\mathrm{dBm}
\end{aligned}
$$

folgt

$$\mathrm{SNR}_4 = -38{,}5\,\mathrm{dBm} - (-68{,}66\,\mathrm{dBm}) = 30{,}16\,\mathrm{dB}$$

f) Die Half-Power-Beamwidth (HPBW) der Empfangsantenne beträgt 3°. Durch starken Wind wird die Empfangsantenne um 1,5° aus der Hauptstrahlrichtung verdreht. Geben Sie das resultierende SNR_4' am Ausgangspunkt (Punkt 4) an.

Lösung

Die HPBW gibt an, bei welchem Winkel die Richtcharakterisk der Antenne eine auf die Hälfte geschrumpfte Empfangsleitung verursacht. Ein Abfall auf die Hälfte bedeutet einen Abfall des Signals um 3 dB, wohingegen die Rauschtemperatur der Antenne als konstant angenommen werden kann.

$$\mathrm{SNR}_4' = (L_3 - 3\,\mathrm{dB}) - L_{\mathrm{n3}} = \mathrm{SNR}_4 - 3\,\mathrm{dB} = 27{,}16\,\mathrm{dB}$$

7 Kaskade rauschender Zweitore (Klausuraufgabe SS2007)

Ein Signal soll über eine lange Leitung übertragen werden. Damit die Signalamplitude nicht zu klein wird, werden in unterschiedlichen Abständen Zwischenverstärker eingesetzt (siehe Abbildung 7.1). Die Signalquelle wird als Spannungsquelle mit rauschendem Innenwiderstand R_i und der *Ausgangsamplitude* $\hat{U}_0$ (an Punkt 1) aufgefasst. Alle Elemente besitzen eine Übertragungsbandbreite B von 300 MHz. Außerdem herrscht an allen Punkten Leistungsanpassung. Die angegebenen Rauschzahlen sind auf eine Temperatur von $T_0 = 300\,\mathrm{K}$ genormt.

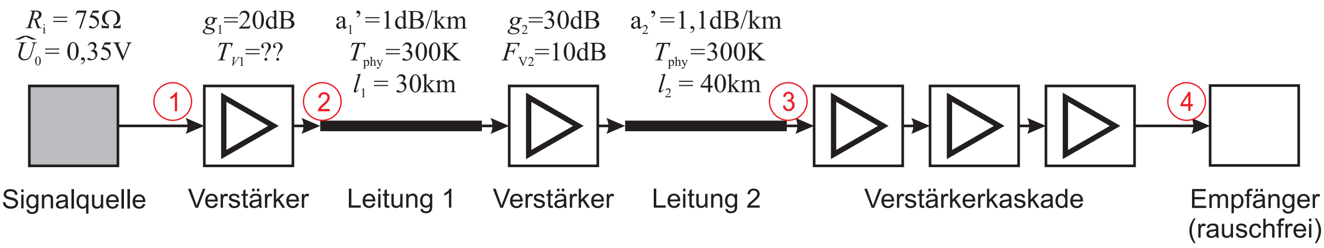


Abbildung 7.1: Übertragungsstrecke

a) Skizzieren Sie das Pegeldiagramm des Signals in dBm für die Übertragungsstrecke zwischen den Punkten 1 und 3.

Lösung

Um das Pegeldiagramm zeichnen zu können, muss der Signalleistungspegel ausgerechnet werden.

$$P_S = \frac{U_{0,\mathrm{eff}}^2}{R} = \frac{\hat{U}_0^2}{2R} = \frac{(0{,}35\,\mathrm{V})^2}{2 \cdot 75\,\Omega} = 0{,}817\,\mathrm{mW}$$

$$\rightarrow L_S = 10 \cdot \log\left(\frac{P_S}{1\,\mathrm{mW}}\right) = 10 \cdot \log\left(\frac{0{,}817\,\mathrm{mW}}{1\,\mathrm{mW}}\right) = -0{,}88\,\mathrm{dBm}$$

Weiterhin werden die Dämpfung der Leitungen benötigt:

$$a_1 = a_1' \cdot l_1 = 1\,\mathrm{dB/km} \cdot 30\,\mathrm{km} = 30\,\mathrm{dB}$$

$$a_2 = a_2' \cdot l_2 = 1{,}1\,\mathrm{dB/km} \cdot 40\,\mathrm{km} = 44\,\mathrm{dB}$$

Das fertige Pegeldiagramm ist in Abb. 7.2 dargestellt.

b) Bei welcher maximalen Temperatur T_S darf die Signalquelle betrieben werden, wenn ein Signal-Rauschabstand SNR_1 von 80 dB an Punkt 1 nicht unterschritten werden darf und alle anderen Rauschquellen vernachlässigt werden?

Lösung

Aus der Anforderung an den Signal-zu-Rauschabstand folgt:

$$\mathrm{SNR}_1 = L_s - L_n \geq 80\,\mathrm{dB}$$

$$80\,\mathrm{dB} \leq -0{,}88\,\mathrm{dBm} - L_n$$

$$\rightarrow L_n \leq -0{,}88\,\mathrm{dBm} - 80\,\mathrm{dB} = -80{,}88\,\mathrm{dBm}$$

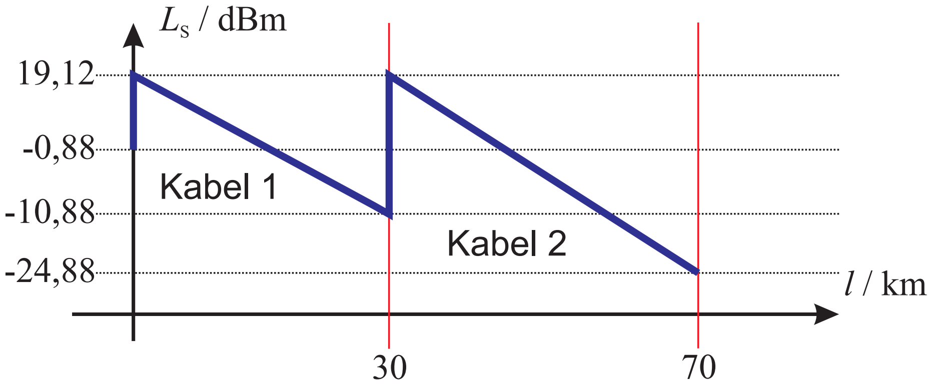


Abbildung 7.2: Pegeldiagramm

Aus der Rauschleistung kann die Rauschtemperatur berechnet werden:

$$P_n = kT_S B \leq 10^{-8{,}088} \cdot 1\,\mathrm{mW}$$
$$\rightarrow T_S \leq \frac{P_n}{kB} = \frac{10^{-8{,}088} \cdot 1\,\mathrm{mW}}{1{,}38 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J/K} \cdot 300\,\mathrm{MHz}} = 1972{,}4\,\mathrm{K}$$

c) Bestimmen Sie die äquivalente Rauschtemperatur T_1 des ersten Verstärkers V1, wenn sich die Signalquelle auf der Temperatur $T = 1500\,\mathrm{K}$ befindet und der Signal-Rauschabstand am Punkt 2 $\mathrm{SNR}_2 = 76\,\mathrm{dB}$ beträgt.

Lösung

Die Rauschtemperatur des Verstärkers kann über die Rauschzahl berechnet werden. Dabei muss jedoch die Rauschleistung der Signalquelle auf die neue Rauschtemperatur $T_S = 1500\,\mathrm{K}$ angepasst werden.

$$P_n = kT_S B = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J/K} \cdot 1500\,\mathrm{K} \cdot 300\,\mathrm{MHz} = 6{,}21\,\mathrm{pW}$$
$$\rightarrow L_n = 10 \cdot \log\left(\frac{P_n}{1\,\mathrm{mW}}\right) = 10 \cdot \log\left(\frac{6{,}21\,\mathrm{pW}}{1\,\mathrm{mW}}\right) = -82{,}07\,\mathrm{dBm}$$

Mit dieser Rauschleistung berechnet sich der Signal-zu-Rauschabstand zu

$$\mathrm{SNR}_1 = L_s - L_n = -0{,}88\,\mathrm{dBm} - (-82{,}07\,\mathrm{dBm}) = 81{,}19\,\mathrm{dB}$$

Mit diesem folgt für die Rauschzahl

$$F_{\mathrm{V1}} = \mathrm{SNR}_1 - \mathrm{SNR}_2 = 81{,}19\,\mathrm{dB} - 76\,\mathrm{dB} = 5{,}19\,\mathrm{dB}$$

Diese Rauschzahl wurde wie in der Aufgabe angegeben mit einer Eingangsrauschtemperatur von 1500 K ermittelt. Daraus folgt die Rauschtemperatur des Verstärkers:

$$T_{\mathrm{V1}} = (F_1 - 1) \cdot T = (10^{0{,}519} - 1) \cdot 1500\,\mathrm{K} = 3455{,}5\,\mathrm{K}$$

d) Für die Verstärkerkaskade stehen fünf Verstärker (A, B, C, D und E) mit den folgenden Daten zur Verfügung:

Verstärker A: $F_{\mathrm{pA}} = 10\,\mathrm{dB}$; $g_{\mathrm{pA}} = 30\,\mathrm{dB}$

Verstärker B: $F_{\mathrm{pB}} = 10\,\mathrm{dB}$; $g_{\mathrm{pB}} = 20\,\mathrm{dB}$

Verstärker C: $F_{\mathrm{pC}} = 6\,\mathrm{dB}$; $g_{\mathrm{pC}} = 20\,\mathrm{dB}$

Verstärker D: $F_{\mathrm{pD}} = 6\,\mathrm{dB}$; $g_{\mathrm{pD}} = 10\,\mathrm{dB}$

Verstärker E: $F_{\mathrm{pE}} = 3\,\mathrm{dB}$; $g_{\mathrm{pE}} = 5\,\mathrm{dB}$

Wählen Sie aus den gegebenen Verstärkern drei Verstärker aus, die zu einer minimalen Rauschzahl führen. Beschreiben Sie das verwendete Auswahlverfahren. Bestimmen Sie die gesamte Rauschzahl F_{Kask} der Verstärkerkaskade für die optimale Verstärkerreihenfolge.

Lösung

Die Regel für kaskadierte Elemente mit optimierten Rauscheigenschaften lautet: Zuerst den Verstärker mit der kleinsten Rauschzahl, bei gleicher Rauschzahl entscheidet die höhere Verstärkung. Kabel und verlustbehaftete Elemente werden (wenn möglich) möglichst weit hinten eingebaut.
Daraus ergibt sich im vorliegenden Fall die Reihenfolge der Verstärker $E \to C \to D$. Die Gesamtrauschzahl der Verstärkerkaskade berechnet sich zu

$$F_{\mathrm{Kask}} = F_{\mathrm{pE}} + \frac{F_{\mathrm{pC}} - 1}{G_{\mathrm{pE}}} + \frac{F_{\mathrm{pD}} - 1}{G_{\mathrm{pE}} G_{\mathrm{pC}}} = 10^{0,3} + \frac{10^{0,6} - 1}{10^{0,5}} + \frac{10^{0,6} - 1}{10^{0,5} \cdot 10^{2}} = 2,95$$

e) Bestimmen Sie die Systemrauschtemperatur T_{sys} an Punkt 1.

Lösung

Die Systemrauschtemperatur ergibt sich zu:

$$T_{\mathrm{sys}} = T_S + T_{\mathrm{V1}} + \frac{T_{\mathrm{L1}}}{G_1} + \frac{T_{\mathrm{V2}}\alpha_1}{G_1} + \frac{T_{\mathrm{L2}}\alpha_1}{G_1 G_2} + \frac{T_{\mathrm{Kask}}\alpha_1\alpha_2}{G_1 G_2}$$

Mit den Werten

$$\begin{aligned}
G_1 &= 10^2 = 100 \\
\alpha_1 &= 10^3 = 1000 \\
T_{\mathrm{L1}} &= (\alpha_1 - 1)T_{\mathrm{phy}} = (1000 - 1) \cdot 300\,\mathrm{K} = 299\,700\,\mathrm{K} \\
G_2 &= 10^3 = 1000 \\
T_{\mathrm{V2}} &= (F_{\mathrm{V2}} - 1) \cdot T_0 = (10^1 - 1) \cdot 300\,\mathrm{K} = 2700\,\mathrm{K} \\
\alpha_2 &= 10^{4,4} = 25118,9 \\
T_{\mathrm{L2}} &= (\alpha_2 - 1)T_{\mathrm{phy}} = (25118,9 - 1) \cdot 300\,\mathrm{K} = 7\,535\,359{,}3\,\mathrm{K} \\
T_{\mathrm{Kask}} &= (F_{\mathrm{Kask}} - 1)T_0 = (2,95 - 1) \cdot 300\,\mathrm{K} = 585\,\mathrm{K}
\end{aligned}$$

folgt:

$$\begin{aligned}
T_{\mathrm{sys}} = {} & 1500\,\mathrm{K} + 3455{,}5\,\mathrm{K} + \frac{299\,700\,\mathrm{K}}{100} + \frac{2700\,\mathrm{K}\cdot 1000}{100} + \cdots \\
& \cdots + \frac{7\,535\,359{,}3\,\mathrm{K}\cdot 1000}{100\cdot 1000} + \frac{585\,\mathrm{K}\cdot 1000\cdot 25118{,}9}{100\cdot 1000} \\
= {} & 257\,251{,}7\,\mathrm{K}
\end{aligned}$$

f) Wie groß ist der Signal-Rauschabstand SNR_4 am Ausgang der Verstärkerkaskade?

Lösung

Der Signal-zu-Rauschabstand berechnet sich aus

$$\mathrm{SNR}_4 = \mathrm{SNR}_1|_{\mathrm{T_{sys}}} = L_{\mathrm{s1}} - L_{\mathrm{n1}}|_{\mathrm{T_{sys}}}$$

Mit der Rauschleistung

$$\begin{aligned}
L_{\mathrm{n1}}|_{\mathrm{T_{sys}}} &= 10\cdot\log\left(\frac{kT_{\mathrm{sys}}B}{1\,\mathrm{mW}}\right) \\
&= 10\cdot\log\left(\frac{1{,}38\cdot 10^{-23}\,\mathrm{J/K}\cdot 257\,251{,}7\,\mathrm{K}\cdot 300\,\mathrm{MHz}}{1\,\mathrm{mW}}\right) = -59{,}73\,\mathrm{dBm}
\end{aligned}$$

folgt

$$\mathrm{SNR}_4 = -0{,}88\,\mathrm{dBm} - (-59{,}73\,\mathrm{dBm}) = 58{,}85\,\mathrm{dB}$$