Die beidseitige Laplace-Transfomation

Lernziel der 11. Lerneinheit: WP 4 – Die beidseitige Laplace-Transformation

In der 11. Lerneinheit erweitern wir die Frequenzbereichsanalyse von Signale und Systemen auf nicht-transiente Signale für die die Fourier-Transformation prinzipiell nicht existiert (d.h. nicht konvergiert).

- Wir lernen die ein- und die beidseitige Laplace-Transformation kennen, bei der die Fourier-Transformation (mit der zugehörigen Basisfunktion $e^{j\omega t}$ bei der Frequenz ω) um einen exponentiellen Dämpfungsterm $e^{-\sigma t}$ erweitert wird.
- Abhängig von der Wahl des Dämpfungsfaktors σ konvergiert die Laplace-Transformation. Der Bereich von $p = \sigma + j\omega$ für den die Laplace-Transformatierte existiert nennt sich Konvergenzbereich.
- Ähnlich wie bei der Fourier-Transformation leiten wir Korrespondenz-Paare und allgemeine Eigenschaften her, die neben den jeweiligen algebraischen Ausdrücken immer auch den Konvergenzbereich beinhalten.

Laplace Transformation

- Wir haben die Fourier-Transformation als Instrument für die Analyse von LTI-Systemen kennengelernt.
- Die Fourieranalyse von Systemen mit periodischen Eingängen lässt sich nur mithilfe der verallgemeinerten Funktionen (z.B. der Impulsfunktion $\delta(t)$) durchführen.
- Bei der Analyse von instabilen Systemen stößt die Fourieranalyse an ihre Grenzen, da die Impulsantwort nicht absolut integrierbar ist.
- In diesem Fall kann die Frequenzbereichsanalyse mithilfe der Laplace Transformation (LT) durchgeführt werden.
- Die Laplace-Transformation kann als Verallgemeinerung der Fourier-Transformation aufgefasst werden bei der $j\omega$ durch $p = \sigma + j\omega$ ersetzt wird.
- Die Berechnung der Laplace-Transformation ist auch in Fällen möglich, in denen die Fourier-Transformation nicht existiert.

Laplace Transformation
Motivation

Wir betrachten die ansteigende Exponentialfunktion

$$x(t) = e^{at}u(t), \qquad a > 0.$$

$x(t)$ ist nicht absolut integrierbar!

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| \, \mathrm{d}t = \int_{0}^{\infty} e^{at} \, \mathrm{d}t = \infty,$$

Die zugehörige Fouiertransformierte existiert nicht. Die Frequenzbereichsanalyse eines LTI-Systems mit dem Eingang $x(t)$ ist daher nicht ohne Weiteres möglich.

Laplace Transformation
Motivation

Alternativ betrachten wir das Signal:

$$y(t;\sigma) = e^{-\sigma t}x(t) = e^{-(\sigma - a)t}u(t),$$

wobei wir annehmen, dass $\sigma > a$.

- $y(t;\sigma)$ klingt exponentiell ab und ist absolut integrierbar.
- Die Fouier-Transformierte

  $$Y(\omega;\sigma) = \mathcal{F}\{y(t;\sigma)\}$$

  existiert.
- Die Frequenzbereichsanalyse kann durchgeführt werden.

Beidseitige Laplace-Transformation

Die beidseitige Laplace-Transformation ist als Fourier-Transformation darstellbar, wenn $y(t;\sigma) = x(t)e^{-\sigma t}$ gewählt wird und $Y(\omega;\sigma) = \mathcal{F}\{y(t;\sigma)\}$ gilt.

$$Y(\omega;\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t;\sigma)e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t\bigg|_{p=\sigma+j\omega} = X(p)$$

Die **beidseitige Laplace-Transformation** $X(p)$ eines Signals $x(t)$ ist als

$$X(p) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t$$

definiert, wobei $p = \sigma + j\omega$ ist.

Die beidseitige Laplace-Transformierte $X(p)|_{p=\sigma+j\omega}$ des Signals $x(t)$ entspricht der Fourier-Transformierten des Signals $x(t)e^{-\sigma t}$.

Andererseits erhält man das Signal $X(\omega)$ aus der Laplace-Transformation für $\mathrm{Re}\{p\} = \sigma = 0$.

Konvergenz der beidseitigen Laplace-Transformation

Aus den Konvergenzbedingungen der Fourier-Transformation ergibt sich für die beidseitige Laplace-Transformation:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma t} \, \mathrm{d}t < \infty,$$

für einen beliebigen endlichen Wert von σ.

Die beidseitige Laplace-Transformierte konvergiert somit lediglich für bestimmte Werte von $\sigma = \mathrm{Re}\{p\}$.

Der Bereich der Werte in der komplexen Ebene, für die $X(p)$ konvergiert, wird Konvergenzbereich (KB) genannt.

Konvergenz der beidseitigen Laplace-Transformation

Bei dem zuvor betrachteten Signal

$$x(t) = e^{-at}u(t), \qquad a \in \mathbb{R}.$$

variieren wir a über den Bereich der positiven und negativen reellen Zahlen.

Die Laplace-Transformierte ergibt sich zu

$$\begin{aligned} X(p) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{0}^{\infty} e^{-(p+a)t}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{p+a}\left[e^{-(p+a)t}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{p+a} \end{aligned}$$

Konvergenz der beidseitigen Laplace-Transformation

Die beidseitige Laplace-Transformation konvergiert wenn $\mathrm{Re}\{p\} = \sigma$ die Bedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma t} \, \mathrm{d}t < \infty,$$

erfüllt.

Das erfordert:

$$\int_{0}^{\infty} e^{-(\sigma + a)t} \, \mathrm{d}t < \infty,$$

und somit $\sigma + a > 0$ bzw. $\sigma > -a$.

Die beidseitige Laplace-Transformation $X(p)$ des Signals $x(t) = e^{-at} u(t)$ konvergiert für $\mathrm{Re}\{p\} = \sigma > -a$.

Der zugehörige Konvergenzbereich (KB) ist in der folgenden Abbildung für $a > 0$ und $a < 0$ gezeigt.

Konvergenz der beidseitigen Laplace-Transformation

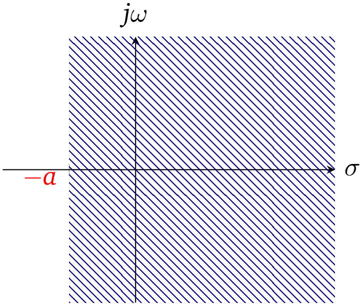


Abbildung: Konvergenzbereich a) $a > 0$ und b) $a < 0$.

Konvergenz der beidseitigen Laplace-Transformation

Für $a > 0$ ist $x(t) = e^{-at}u(t)$ exponentiell abfallend und absolut integrierbar.

- Der Konvergenzbereich der beidseitigen Laplace-Transformation beinhaltet daher Werte von p mit $\sigma = 0$.
- Die Fourier-Transformation von $x(t)$ existiert für $a > 0$.

Für $a < 0$ ist $x(t) = e^{-at}u(t)$ nicht absolut integrierbar

- Der Konvergenz-Bereich beinhaltet keine Werte von p mit $\sigma = 0$.
- Die Fourier-Transformation von $x(t)$ existiert für $a < 0$ nicht.
- Die beidseitige Laplace-Transformation für $\sigma > -a$ existiert.

Konvergenz der beidseitigen Laplace-Transformation

Die beidseitige Laplace-Transformation ist eindeutig durch den algebraischen Ausdruck und den zugehörigen Konvergenzbereich definiert.

Zwei Signale können zwar dieselbe Laplacetransformierte haben, jedoch unterschiedliche Konvergenzbereiche besitzen.

Bei der Berechnung der inversen beidseitigen Laplace-Transformation ist es daher notwendig den Konvergenzbereich genau zu berücksichtigen.

Konvergenz beidseitige Laplace-Transformation
Beispiel: Identischer Algebraischer Ausdruck

Beipiel: 1. Signal

$$x(t) = e^{-at}u(t) \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-pt}\mathrm{d}t = \frac{1}{p+a}; \qquad \mathrm{Re}\{p\} > -a$$

Beipiel: 2. Signal

$$\begin{aligned} x(t) &= -e^{-at}u(-t) \\ \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-pt}\mathrm{d}t &= -\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(p+a)t}u(-t)\mathrm{d}t \\ &= -\int_{-\infty}^{0} e^{-(p+a)t} \\ &= \frac{1}{p+a}; \qquad \mathrm{Re}\{p\} < -a \end{aligned}$$

Einseitige Laplace-Transfomation

Einseitige Laplace-Transformation

Die einseitige Laplace-Transformation $X(p)$ eines Signals $x(t)$ ist für $p = \sigma + j\omega$ als

$$X(p) = \int_0^\infty x(t) e^{-pt} \, \mathrm{d}t.$$

definiert.

Diese Transformation wird häufig in Kurzform als $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(p)$ geschrieben.

Die einseitige Laplace-Transformation eines Signals $x(t)$ entspricht der Fourier-Transformatierten des als kausal und abklingend modifizierten Signals

$$\begin{aligned} z(t;\sigma) = u(t) e^{-\sigma t} x(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad Z(t;\sigma) &= \int_{-\infty}^{\infty} z(t;\sigma) e^{-j\omega t} \, \mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} \, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty x(t) e^{-(\sigma + j\omega) t} \, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Einseitige Laplace-Transformation

Die einseitige Laplace-Transformation hat starke Ähnlichkeiten zu der beidseitigen Laplace-Transformation.

Praktische Signale haben ohnehin einen Startpunkt.

Die einseitige Laplace-Transformation hat ähnliche Konvergenzeigenschaften wie die beidseitige Laplace-Transformation.

Die einseitige Laplace-Transformation konvergiert wenn $\mathrm{Re}\{p\} = \sigma$ die Bedingung

$$\int_0^\infty |x(t)| e^{-\sigma t} \, \mathrm{d}t < \infty,$$

erfüllt.

Die einseitige Laplace-Transformierte eines kausalen Signals ist identisch zur beidseitigen Laplace-Transformierten.

Im Folgenden bezeichnet wir die einseitige Laplace-Transformation kurz als Laplace-Transformation!

Laplace-Transformation
Ausgewählte Korrespondenz-Paare 1

$$
\begin{aligned}
\delta(t) \quad &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad 1, \qquad p \in \mathbb{C} \\
u(t) \quad &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \tfrac{1}{p}, \qquad \mathrm{Re}\{p\} > 0 \\
\tfrac{t^n}{n!}u(t) \quad &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \tfrac{1}{p^{n+1}}, \qquad \mathrm{Re}\{p\} > 0 \\
e^{-\alpha t}u(t) \quad &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \tfrac{1}{p+\alpha}, \qquad \mathrm{Re}\{p\} > -\mathrm{Re}\{\alpha\} \\
\sin(\omega_0 t)u(t) \quad &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \tfrac{\omega_0}{p^2+\omega_0^2} \qquad \mathrm{Re}\{p\} > 0 \\
\cos(\omega_0 t)u(t) \quad &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \tfrac{p}{p^2+\omega_0^2} \qquad \mathrm{Re}\{p\} > 0 \\
\sinh(\alpha t)u(t) \quad &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \tfrac{\alpha}{p^2-\alpha^2} \qquad \mathrm{Re}\{p\} > |\alpha| \\
\cosh(\alpha t)u(t) \quad &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \tfrac{p}{p^2-\alpha^2} \qquad \mathrm{Re}\{p\} > |\alpha| \\
\tfrac{t^n}{n!}e^{\alpha t}u(t) \quad &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \tfrac{1}{(p-\alpha)^{n+1}} \qquad \mathrm{Re}\{p\} > \alpha \\
\tfrac{1}{\alpha-\gamma}(e^{-\gamma t} - e^{-\alpha t})u(t) \quad &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \tfrac{1}{(p+\alpha)(p+\gamma)} \\
e^{-\alpha t} \cdot \sin(\omega_0 t)u(t) \quad &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \tfrac{\omega_0}{(p+\alpha)^2+\omega_0^2} \\
e^{-\alpha t} \cdot \cos(\omega_0 t)u(t) \quad &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \tfrac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega_0^2} \\
t\sin(\omega_0 t)u(t) \quad &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \tfrac{2\omega_0 \cdot p}{(p^2+\omega_0^2)^2} \\
t\cos(\omega_0 t)u(t) \quad &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \tfrac{p^2-\omega_0^2}{(p^2+\omega_0^2)^2}
\end{aligned}
$$

Laplace-Transformation
Ausgewählte Korrespondenz-Paare 2

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\alpha^2}(\alpha t + e^{-\alpha t} - 1)u(t) &\quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{p^2(p+\alpha)} \\
\frac{1}{\omega_0^2}(1 - \cos(\omega_0 t))u(t) &\quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{p(p^2+\omega_0^2)} \\
\frac{1}{\alpha^2+\omega_0^2}\left(e^{-\alpha t} - \cos(\omega_0 t) + \frac{\alpha}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\right)u(t) &\quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{(p+\alpha)(p^2+\omega_0^2)} \\
\frac{1}{\omega_0}e^{-\alpha t}\cdot\sin(\omega_0 t)u(t) &\quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{p^2+2\alpha p+\beta^2} \\
e^{-\alpha t}\left(\cos(\omega_0 t) - \frac{\alpha}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\right)u(t) &\quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{p}{p^2+2\alpha p+\beta^2} \\
\left(1 - \left(\cos(\omega_0 t) + \frac{\alpha}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\right)e^{-\alpha t}\right)u(t) &\quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{\beta^2}{p(p^2+2\alpha p+\beta^2)}
\end{aligned}
$$

Zum Vergleich: Korrespondenz-Paare der Fourier-Transformation

	$x(t)$	$X(j\omega)$	
1.	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{a+j\omega}$,	$a > 0$
2.	$e^{at}u(-t)$	$\frac{1}{a-j\omega}$,	$a > 0$
3.	$te^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(a+j\omega)^2}$,	$a > 0$
4.	$t^n e^{-at}u(t)$	$\frac{n!}{(a+j\omega)^{n+1}}$,	$a > 0$
5.	$\|t\|$	$-\frac{2}{\omega^2}$	
6.	$\delta(t)$	1	
7.	1	$2\pi\delta(\omega)$	
8.	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$	
9.	$\cos(\omega_0 t)$	$\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$	
10.	$\sin(\omega_0 t)$	$j\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$	
11.	$\cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\pi}{2}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]+\frac{j\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$	
12.	$\sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\pi}{2j}[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]+\frac{\omega_0}{\omega_0^2-\omega^2}$	
13.	$e^{-at}\sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\omega_0}{(a+j\omega)^2+\omega_0^2}$,	$a > 0$
14.	$e^{-at}\cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{a+j\omega}{(a+j\omega)^2+\omega_0^2}$,	$a > 0$
15.	$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$	$\omega_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_0)$,	$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$
16.	$e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}}$	$\sigma\sqrt{2\pi}e^{\frac{-\sigma^2\omega^2}{2}}$	

Laplace-Transformation
Grenzwertssätze

Aus dem Differentiationssatz:

$$\mathcal{L}\{\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\} = \int_0^\infty x^{'}(t)e^{-pt}\mathrm{d}t = pX(p) - x(0^-)$$

leitet sich der Anfangswertsatz ab:

$$x(0^-) = \lim_{p\to\infty} pX(p)$$

wenn $x(0^-) = \lim_{\epsilon\to 0} x(0-\epsilon)$ existiert (d.h. endlich ist).

Ebenso leitet sich der Endwertsatz: ab

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{p\to 0} pX(p)$$

wenn $\lim_{t\to\infty} x(t)$ existiert (d.h. endlich ist bzw. konvergiert).

Grenzwertssätze

Die Grenzwertsätze sind, z.B., in der Regelungstechnik (beim Berechnen des Systemausgangs im eingeschwungenen Zustand ohne Lösen der Systemgleichungen), praktisch relevant.

Wichtig ist es jedoch zunächst zu untersuchen, ob die Grenzwerte überhaupt existieren!

Beispiel:

- $x(t) = \cos(\omega_0 t)$ (das Signal oszilliert, d.h., es konvergiert für große t nicht.)
- $X(p) = \mathrm{L}\{x(t)\} = \frac{p}{p^2+\omega_0^2} = \lim_{p\to 0} pX(p) = \lim_{p\to 0} \frac{p^2}{p^2+\omega_0^2} = 0$

Das Problem besteht darin, dass das Signal $x(t)$ keinen Grenzwert besitzt ($\lim_{t\to\infty} x(t) \neq 0$!!!), da $p = 0$ nicht im Konvergenzbereich liegt.

Inverse Laplace-Transformation
Rücktransformation

Definition: Die Rücktransformation der Laplacetransformierten aus dem komplexen Bildbereich $X(p)$ in den Zeitbereich berechnet sich über das Kurvenintegral:

$$x(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(p) e^{pt} \, \mathrm{d}p.$$

wobei σ so gewählt wird, dass der Integrationsweg im Konvergenzbereich liegt ($\mathrm{Re}\{p\} = \sigma$).

Die Berechnung der inversen Laplace-Transformation erfordert die Auswertung eines komplexen Wegintegrales.

Für praktische LTI-Systeme ergibt sich eine alternative Berechnungsmethode aus bekannten Korrespondenzen mittels Partialbruchzerlegung.

Inverse Laplace-Transformation
Rücktransformation

In LTI-Systemen ist die Laplace-Transformierte der Impulsantwort häufig eine gebrochen-rationale Funktion (siehe spätere Beispiele).

$$X(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{b_0 + b_1 p + \ldots + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + \ldots + a_n p^n}.$$

Die Polynome $N(p)$ und $D(p)$ im Zähler und Nenner lassen sich faktorisieren:

$$X(p) = \frac{\prod_{k=1}^{m} (p - z_k)}{\prod_{k=1}^{n} (p - p_k)}, \qquad p_k \neq z_q \text{ for } 1 \leq k \leq n \text{ and } 1 \leq q \leq m.$$

Inverse Laplace-Transformation
Rücktransformation

$\{z_k\}_{k=1}^{m}$ bezeichnet die Nullstellen von $X(p)$ (d.h. die Nullstellen des Zählers), für die $X(p)|_{p=z_k} = 0$.

$\{p_k\}_{k=1}^{n}$ bezeichnet die Polstellen von $X(p)$ (d.h. die Nullstellen des Nenners), für die $X(p)|_{p=p_k} = \infty$ gilt.

- $X(p)$ ist eine echt gebrochen-rationale Funktion, wenn $n > m$.
- Dann lässt sich $X(p)$ mittels Partialbruchzerlegung aufspalten.
- $\Rightarrow$ Die Inverse Laplace-Transformierte zu $X(p)$ ist aufgrund der Linearitätsbeziehung leicht zu berechnen.
- $X(p)$ ist eine unecht gebrochen-rationale Funktion, wenn $n \leq m$ gilt.

  In dem Fall ist eine Polynomdivision vor der Partialbruchzerlegung durchzuführen.

Beispiel 1: Inverse Laplace-Transformation einer echt gebrochen-rationaler Funktion (EGRF)

Wir interessieren uns für die inverse Laplace-Transformation einer echt gebrochen rationalen Funktion

Wir berechnen die Impulsantwort $h(t)$ eines Systems mit der Übertragungsfunktion:

$$H(p) = \frac{5p + 13}{p^2 + 6p + 5}$$

Die Nullstellen des Nenners sind $p_1 = -1$ and $p_2 = -5$.

$$H(p) = \frac{5p + 13}{(p + 1)(p + 5)}.$$

Wir zerlegen $H(p)$ in

$$H(p) = \frac{c_1}{p + 1} + \frac{c_2}{p + 5}$$

Beispiel 1: Inverse Laplace-Transformation einer echt gebrochen-rationaler Funktion (EGRF)

Die Koeffizienten c_1 und c_2 berechnen sich wie folgt.

$\Rightarrow$ Wir multiplizieren beide Seiten der Gleichung mit dem Nenner.

$$\begin{aligned} 5p+13 &= \frac{c_1}{p+1}(p+1)(p+5)+\frac{c_2}{p+5}(p+1)(p+5) \\ &= c_1(p+5)+c_2(p+1) \end{aligned}$$

Für $p=-5$ gilt:

$$5(-5)+13 = c_1(5-5)+c_2(-5+1).$$

Lösen nach c_2 ergibt $c_2 = 3$.
Für $p=-1$ gilt

$$5(-1)+13 = c_1(-1+5)+c_2(-1+1),$$

sodass sich $c_1 = 2$ ergibt.

Beispiel 1: Inverse Laplace-Transformation einer echt gebrochen-rationaler Funktion (EGRF)

Die Partialbruchzerlegung von $H(p)$:

$$H(p) = \frac{2}{p+1} + \frac{3}{p+5}.$$

wird wie folgt durchgeführt.
Wir kennen das Laplace-Transformationspaar aus der Korrespondenztabelle

$$\mathcal{L}\{e^{-at}u(t)\} = \frac{1}{p+a}$$

Über die Linearitätsbeziehung der Laplace-Transformation erhalten wir, dass

$$h(t) = (2e^{-t} + 3e^{-5t})u(t)$$

gilt.

Beispiel 2: Inverse Laplace-Transformation einer unecht gebrochen-rationaler Funktion (UGRF)

Wir wollen die Impulsantwort $h(t)$ eines LTI-Systems mit der unecht gebrochen-rationalen Übertragungsfunktion berechnen

$$H(p) = \frac{p^4 + 8p^3 + 23p^2 + 34p + 19}{p^3 + 7p^2 + 15p + 9}$$

Wir bemerken, dass der Grad des Zählerpolynoms den des Nennerpolynoms übersteigt.

Beispiel 2: Inverse Laplace-Transformation einer unecht gebrochen-rationaler Funktion (UGRF)

Wir führen daher eine Polynomdivision durch.

$$
\begin{array}{r|l}
 & p + 1 \\
\hline
p^3 + 7p^2 + 15p + 9 & p^4 + 8p^3 + 23p^2 + 34p + 19 \\
 & \underline{-p^4 - 7p^3 - 15p^2 - 9p} \\
 & \qquad p^3 + 8p^2 + 25p + 19 \\
 & \qquad \underline{-p^3 - 7p^2 - 15p - 9} \\
 & \qquad\qquad p^2 + 10p + 10
\end{array}
$$

Beispiel 2: Inverse Laplace-Transformation einer unecht gebrochen-rationaler Funktion (UGRF)

$$H(p) = p + 1 + \frac{p^2 + 10p + 10}{p^3 + 7p^2 + 15p + 9} = p + 1 + G(p)$$

Zunächst betrachten wir die echt gebrochen rationale Funktion $G(p)$.

$\Rightarrow$ Wir führen hierzu ebenfalle eine Partialbruchzerlegung durch.

Durch ausprobieren finden wir die Polstelle $p_1 = -1$.

Beispiel 2: Inverse Laplace-Transformation einer unecht gebrochen-rationaler Funktion (UGRF)

Die übrige Nullstellen erhalten wir durch Polynomdivision:

$$
\begin{array}{rrrrrrrr}
 & & p^2 & + & 6p & + & 9 & \\
p + 1 & \big| & p^3 & + & 7p^2 & + & 15p & + 9 \\
 & & -p^3 & - & p^2 & & & \\
\hline
 & & & & 6p^2 & + & 15p & + 9 \\
 & & & & -6p^2 & - & 6p & \\
\hline
 & & & & & & 9p & + 9 \\
 & & & & & & -9p & - 9 \\
\hline
 & & & & & & & 0
\end{array}
$$

Beispiel 2: Inverse Laplace-Transformation einer unecht gebrochen-rationaler Funktion (UGRF)

$$G(p) = \frac{p^2 + 10p + 10}{(p+1)(p^2 + 6p + 9)} = \frac{p^2 + 10p + 10}{(p+1)(p+3)^2}$$

Die Partialbruchzerlegung von $G(p)$ ergibt sich zu:

$$G(p) = \frac{c_1}{p+1} + \frac{c_2}{p+3} + \frac{c_3}{(p+3)^2}$$

Wir bestimmen die Koeffizienten c_k $(k = 1, \ldots, 3)$ durch Ausmultilizieren und Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} p^2 + 10p + 10 &= \left[\frac{c_1}{p+1} + \frac{c_2}{p+3} + \frac{c_3}{(p+3)^2}\right](p+1)(p+3)^2 \\ &= c_1(p+3)^2 + c_2(p+1)(p+3) + c_3(p+1) \end{aligned}$$

Beispiel 2: Inverse Laplace-Transformation einer unecht gebrochen-rationaler Funktion (UGRF)

Mit $p = -1$ ergibt sich:

$$(-1)^2 + 10(-1) + 10 = c_1(-1+3)^2 + c_2(-1+1)(-1+3) + c_3(-1+1),$$

sodass $c_1 = \frac{1}{4}$. Mit $p = -3$ haben wir

$$(-3)^2 + 10(-3) + 10 = c_1(-3+3)^2 + c_2(-3+1)(-3+3) + c_3(-3+1)$$

sodass $c_3 = \frac{11}{2}$. Um c_2 zu bestimmen wählen wir $p = 1$,

$$\begin{aligned} (1)^2 + 10(1) + 10 &= c_1(1+3)^2 + c_2(1+1)(1+3) + c_3(1+1) \\ 21 &= 16c_1 + 8c_2 + 2c_3 \end{aligned}$$

Mit den Werten für c_1 und c_3 können wir bezüglich c_2 auflösen und erhalten $c_2 = \frac{3}{4}$.

Beispiel 2: Inverse Laplace-Transformation einer unecht gebrochen-rationaler Funktion (UGRF)

$$G(p) = \frac{1}{4}\frac{1}{p+1} + \frac{3}{4}\frac{1}{p+3} + \frac{11}{2}\frac{1}{(p+3)^2}$$

Wir verwenden bekannte Korrespondenzen der Laplace-Transformation um $g(t)$ aus $G(p)$ zu bestimmen.

$$g(t) = \left(\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{3}{4}e^{-3t} + \frac{11}{2}te^{-3t}\right)u(t)$$

Beispiel 2: Inverse Laplace-Transformation einer unecht gebrochen-rationaler Funktion (UGRF)

Die Impulsantwort $h(t)$ berechnet sich zu

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{p+1\} + g(t) \\ &= \frac{\mathrm{d}\delta(t)}{\mathrm{d}t} + \delta(t) + \left(\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{3}{4}e^{-3t} + \frac{11}{2}te^{-3t}\right)u(t) \end{aligned}$$

Die Korrespondenztabelle der Laplace-Transformation kann genutzt werden um die Inverse der Laplace-Transformation für $p+1$ zu finden.

BIBO Stabiltität eines LTI-Systems in Laplace-Bereich

Lernziel der 12. Lerneinheit: WP 4 – BIBO Stabilität eines LTI-Systems

In der 12. Lerneinheit betrachten wir die Stabilität von realen LTI-Systemen (insbesondere von RLC-Netzwerken) im Laplace-Bereich.

- Wir stellen fest, dass in realen RLC-Netzwerken die Übertrangungsfunktionen (echte oder unechte) gebrochen-rationale Funktionen in p sind.
- Wir widmen uns der wichtigen Fragestellungen unter welchen Bedingungen RLC-Netzwerke BIBO stabil sind.
- Wir beantworten die Frage wie die Nullstellen und die Polstellen der gebrochen-rationalen Übertragungsfunktion in der Laplace-Ebene angeordnet sein müssen damit ein endliches Eingangssignal garantiert zu einem endlichen Ausgangssignal führt - der Ausgang also nicht beliebig (d.h. ohne Begrenzung) verstärkt wird.

Stabilität eines LTI-Systems mittels Laplace-Transformation

Mithilfe der Laplace-Transformation lässt sich auch die Stabilität eines LTI-Systems untersuchen.

Die Fragestellung der Stabilität spielt in Regelungstechnik eine große Rolle. Ziel ist es Systeme so zu entwerfen, dass der Systemausgang innerhalb einer vorgegebenen Zeit gegen einen gewünschten Wert konvergiert bzw. einen gewünschten Verlauf annimmt.

Dieser Entwurf erfordert bestimmte Bedingungen an die Stabilität eines Systems.

Wir betrachten ein System mit der Impulsantwort $h(t)$ und der Übertragungsfunktion $H(p) = \mathcal{L}\{h(t)\}$.

Stabilität eines LTI Systems mittels Laplace-Transformation

Rückblick: Ein LTI-System ist BIBO stabil, wenn die Impulsantwort absolut integrierbar ist (hinreichend).

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| \, \mathrm{d}t \leq \infty$$

Aus $|x(t)| \leq \infty$ folgt dann, dass $|y(t)| \leq \infty$. Ein begrenzter Eingang führt zu einem begrenzten Ausgang (bounded-input bounded-output).

Für BIBO stabile Systeme existiert die Fourier-Transformierte, d.h., $|H(j\omega)| < \infty$.

Eine notwendige Bedingung für die Stabilität eines Systems mit der Impulsantwort $h(t)$ ist, dass der Konvergenzbereich der Übertragungsfunktion $H(p) = \mathcal{L}\{h(t)\}$ die imaginäre Achse ($p = j\omega$) beinhaltet.

Stabilität eines LTI-Systems mittels Laplace-Transformation

Rückblick: Wir untersuchen ein System mit einer zugehörigen Übertragungsfunktion mit einfacher Polstelle

$$H(p) = \frac{1}{p - p_1}$$

und einem Konvergenzbereich $\mathrm{Re}\{p\} > \mathrm{Re}\{p_1\}$.
Das System hat gemäß der Korrespondenztabelle eine Impulsantwort der Form

$$h(t) = e^{p_1 t} u(t).$$

Stabilität eines LTI-Systems mittels Laplace-Transformation

$$h(t) = e^{p_1 t} u(t)$$

Die absolute Integrierbarkeit der Impulsantwort ist somit gegeben (und das System BIBO-stabil) wenn:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| \, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} |e^{p_1 t} u(t)| \, \mathrm{d}t = \int_{0}^{\infty} e^{\sigma_1 t} \, \mathrm{d}t < \infty$$

$\Rightarrow$ BIBO Stabilität gilt wenn $\sigma_1 = \mathrm{Re}\{p_1\} < 0$.

Für $\sigma_1 = \mathrm{Re}\{p_1\} \leq 0$ ist das System grenz-stabil.

Stabilität eines LTI-Systems mittels Laplace-Transformation

Wir untersuchen als nächstes ein System mit einer zugehörigen Übertragungsfunktion mit l_1-facher Polstelle

$$H(p) = \frac{1}{(p - p_1)^{l_1}}$$

und einem Konvergenzbereich $\mathrm{Re}\{p\} > \mathrm{Re}\{p_1\}$.
Die Impulsantwort hat dann die Form

$$h(t) = t^{l_1 - 1} e^{p_1 t} u(t)$$

Stabilität eines LTI-Systems mittels Laplace-Transformation

Die absolute Integrierbarkeit der Impulsantwort ist somit gegeben (und das System BIBO-stabil) wenn:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| \, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} |t^{l_1} e^{p_1 t} u(t)| \, \mathrm{d}t = \int_{0}^{\infty} t^{l_1} e^{\sigma_1 t} \, \mathrm{d}t < \infty.$$

$\Rightarrow$ Für die BIBO Stabilität muss $\sigma_1 = \mathrm{Re}\{p_1\} < 0$ gelten.

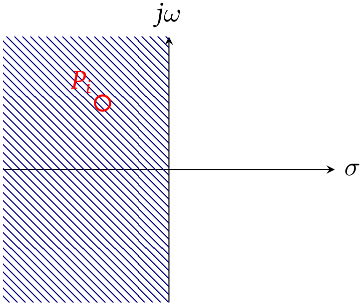
Stabilität eines LTI-Systems mittels Laplace-Transformation

Fallunterscheidung folgender Szenarien:

1. Alle Pollstellen p_i sind strikt in der linken Halbebene $(\mathrm{Re}\{p_i\} < 0\ \forall i)$.
   $\Rightarrow$ Das LTI-System ist stabil.
2. Alle Pollstellen sind in der linken Halbebene $(\mathrm{Re}\{p_i\} \leq 0\ \forall i)$ aber einige Polstellen sind auf der imaginären Achse $\mathrm{Re}\{p_i\} \leq 0\ \forall i$ jedoch $\exists\,\mathrm{Re}\{p_i\} = 0$ für einige i. $\Rightarrow$ Wir unterscheiden zwei Fälle:
   2.1 Wenn alle Polstellen p_i auf der imaginären Achse einfach (1. Ordnung) sind $(\mathrm{Re}\{p_i\} = 0 \Rightarrow l_i = 1)$,
      - dann ist das System grenzstabil
      - Die Impulsantwort lässt sich dann mithilfe der inversen Fourier-Transformation berechnen $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{p-p_0}\} = \mathcal{F}^{-1}\{\frac{1}{j\omega - j\omega_i}\}$

   2.2 Wenn auf der imaginären Achse $(\mathrm{Re}\{p_i\} = 0)$ Polstellen p_i höherer Ordnung $(l_i > 1)$ existieren, dann ist das System instabil.
3. Es existieren Polstellen p_i in der rechten Halbebene $(\exists\,\mathrm{Re}\{p_i\} > 0)$.
   $\Rightarrow$ Das System ist instabil.

Stabilität von LTI-Systemen



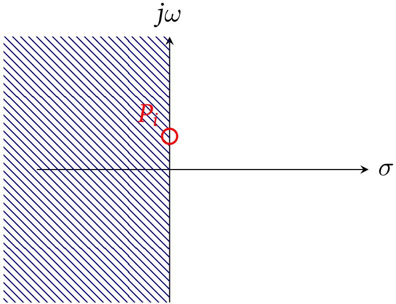


Abbildung: a) stabiles System b) grenzstabiles System (wenn p_i einfache Polstelle).

Stabilität eines LTI-Systems mittels LT

Die oben genannten Kriterien für die Stabilität von LTI Systemen-basieren auf den Konvergenzeigenschaften der Laplace-Transformation.

Stabilitätskriterien für den Entwurf, den Betrieb und die Optimierung von LTI-Systemen werden in praktischen Anwendungen intensiv genutzt.