

Formelsammlung Nachrichtentechnik

Stand Sommersemester 2022

Institut für Mikrowellentechnik und Photonik
Technische Universität Darmstadt

Hinweis:

Die mit # gekennzeichneten Formeln sind *nicht* Bestandteil der Formelsammlung in der Klausur und sollten daher auch ohne Formelsammlung beherrscht werden.

0 Allgemeine Beziehungen

0.1 Winkelbeziehungen

$$\begin{aligned}\cos^2(x) &= \frac{1}{2} [1 + \cos(2x)] \\ \cos^3(x) &= \frac{1}{4} [3 \cos(x) + \cos(3x)] \\ \sin^2(x) &= \frac{1}{2} [1 - \cos(2x)] \\ \sin^3(x) &= \frac{1}{4} [3 \sin(x) - \sin(3x)] \\ \cos(x) \cos(y) &= \frac{1}{2} [\cos(x-y) + \cos(x+y)] \\ \sin(x) \sin(y) &= \frac{1}{2} [\cos(x-y) - \cos(x+y)] \\ \sin(x) \cos(y) &= \frac{1}{2} [\sin(x-y) + \sin(x+y)]\end{aligned}$$

0.2 Konstanten

Boltzmannkonstante	$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$
Planck'sches Wirkungsq.	$h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{J s}$
Elektr. Feldkonstante	$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$
Magnet. Feldkonstante	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$
Lichtgeschwindigkeit	$c_0 \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
Freiraumimpedanz	$\eta_0 = 120\pi \Omega \approx 377 \Omega$

0.3 Logarithmen

Exponent	$\log(A^B) = B \cdot \log A$
Multiplikation	$\log(A \cdot B) = \log A + \log B$
Division	$\log\left(\frac{A}{B}\right) = \log A - \log B$
Umrechnung	$\log_N(A) = \frac{\log(A)}{\log(N)}$

0.4 SI-Einheitenpräfixe

$\text{p} \rightarrow 10^{-12}$	$\text{n} \rightarrow 10^{-9}$	$\mu \rightarrow 10^{-6}$
$\mu \rightarrow 10^{-3}$	$\text{k} \rightarrow 10^3$	$\text{M} \rightarrow 10^6$
$\text{G} \rightarrow 10^9$	$\text{T} \rightarrow 10^{12}$	

1 Pegel

Spannungsspegel [Np]	$L_U = \ln\left(\frac{U_2}{U_1}\right)$
Spannungsspegel [dB]	$L_U = 20 \log\left(\frac{U_2}{U_1}\right)$ #
Leistungspegel [dB]	$L_P = 10 \log\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$ #
Umrechnung (dB \leftrightarrow Np)	$1 \text{ Np} \approx 8,686 \text{ dB}$

2 Antennen

Fernfeldabstand	$r_{\text{ff}} = \frac{2D^2}{\lambda}$
Nahfeldabstand	$r_{\text{nf}} \approx \lambda$
Richtcharakteristik	$c(\theta, \Phi) = \frac{E(\theta, \Phi)}{E_{\text{max}}}$
Gewinn (Gain)	$G(\theta, \Phi) = \epsilon_{\text{rad}} \cdot D(\theta, \Phi)$
Effizienz	$\epsilon_{\text{rad}} = \frac{P_{\text{rad}}}{P_{\text{in}}}$
Empfangsleistung	$P_R = \frac{G_S \cdot A_e \cdot E}{4\pi \cdot d^2} P_T$
Effektive Apertur	$A_e = \frac{P_R}{S_i} = \frac{\lambda^2}{4\pi} \cdot G_0$
Freiraumdämpfung	$a_{\text{fs}} = 20 \log\left(4\pi \frac{d}{\lambda}\right)$ #

3 Signalverzerrungen

Klirrfaktor	$k = \sqrt{\left[\sum_{n=2}^{\infty} \hat{g}_n^2\right] \cdot \left[\sum_{n=1}^{\infty} \hat{g}_n^2\right]^{-1}}$
Teilkirrfaktor	$k_n = \frac{\hat{g}_n}{\hat{g}_1}$
IP3 (Eingang)	$L_{\text{IP3, in}} = L_{\text{in, IM3}} + \frac{\text{IML}_3}{2}$
IP3 (Ausgang)	$L_{\text{IP3, out}} = g_p + L_{\text{IP3, in}}$

4 Rauschen

Signal-Rauschabstand	$\text{SNR} = 10 \cdot \log\left(\frac{P_S}{P_N}\right)$ #
Mittelwertfrei	$\overline{U_N(t)} = 0$
Leistung	$\overline{U_N^2(t)} > 0$
Unkorreliert	$\overline{U_{N1}(t) \cdot U_{N2}(t)} = 0$

4.1 Rauschleistung

Äqui. Rauschbandbreite	$B_n = \frac{1}{H_0^2} \int H(f) ^2 \cdot df$ #
Rauschleistung	$P_n = \int H(f) ^2 \cdot N(f) \cdot df$
Rauschleistungsdichte	$N(f) \approx k \cdot T \quad (f \leq 600 \text{ GHz})$ #
Rauschleistung	$P_n = k \cdot T \cdot B_n$ #
Widerstand (Spannung)	$U_n = \sqrt{4kTB_nR}$
Widerstand (Strom)	$I_n = \sqrt{4kTB_nG}$

4.2 Rauschende Zweitore

Äqui. Rauschtemperatur	$T'_1 = T_1 + \frac{T_{\text{ni}}}{g_p}$
Rauschzahl	$F = \frac{g_p P_{\text{N1}} + P_{\text{Ni}}}{g_p P_{\text{N1}}}$
Rauschtemperatur	$T = (F - 1) \cdot T_0$ #
	$T = (\alpha - 1) \cdot T_{\text{phy}}$ #

4.3 Kaskadierung rauschender Zweitore

Rauschtemperatur	$T_\Sigma = T_{n1} + \sum_{n=2}^N \frac{T_{\text{ni}}}{\prod_{k=1}^{n-1} g_{Pk}}$
Rauschzahl	$F_\Sigma = F_1 + \sum_{n=2}^N \frac{F_n - 1}{\prod_{k=1}^{n-1} g_{Pk}}$

5 Informationstheorie

Informationsgehalt	$I(x_i) = -\log_2(p(x_i))$
Entropie	$H = \bar{I} = \sum_{n=1}^N p(x_i) I(x_i)$
Maximale Entropie	$H_0 = \max H = \log_2 n$
Redundanz	$R(X) = H_0 - H(X)$
Kanalkapazität	$C = B_C \cdot \log_2 \left(1 + \frac{P_s}{P_n}\right)$

6 Anpassung

Leistungsanpassung	$\underline{Z}_L = \underline{Z}_G^* \quad \#$
Widerstandsanpassung	$\underline{Z}_L = \underline{Z}_G \quad \#$
Reflektionsfaktor	$\underline{\Gamma} = r \cdot e^{j\Phi} = \frac{\underline{Z}_L - \underline{Z}_G}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_G}$
Welligkeitsfaktor (VSWR)	$s = \frac{1+ \underline{\Gamma} }{1- \underline{\Gamma} } = \frac{1+r}{1-r}$

7 Verfahren zur störungsarmen Signalübertragung

Analoge Entzerrung	$H_e(f) = \frac{A}{H_c(f)} e^{-j2\pi f \tau}$
Digitale Entzerrung	$H_e(z) = \frac{A}{H_c(z)} z^{-\tau/T}$

8 Digitale Modulation im Basisband

8.1 Abtastung

Nyquist-Kriterium	$f_p \geq f_{Ny} = 2f_{\max} \quad \#$
-------------------	--

8.2 Quantisierung

Auflösung	$\Delta s = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{N} = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{N-1}$
Bitzustände	$n = \log_2(N) \quad \#$
Quantisierungsfehler	$e(t) = x(t) - s_q(t)$
Dynamik	$D = 20 \log \left(\frac{x_{\max} - x_{\min}}{\Delta s} \right)$
Q.-Rauschleistung	$P_Q = \frac{\Delta s^2}{12R}$
Sig.-Q.-Rauschabstand	$\text{SNR}_q \approx 1.8 + 6n \text{ (in dB)} \quad \#$
Bitrate	$R_b = (k \cdot n + s) \cdot f_p \quad \#$

8.3 Nichtlineare Quantisierung

A-Law	$y = \text{sgn}(x) \frac{A x }{1 + \ln A} \quad 0 \leq x \leq A^{-1} \quad A = 87,6$
μ -Law	$y = \text{sgn}(x) \frac{\ln(1 + \mu x)}{\ln(1 + \mu)} \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \mu = 255$

9 Mischung

9.1 Gleichlagen-Mischung

Vorraussetzung	$f_s > f_{LO} \quad \#$
Signalfrequenz	$f_s = f_{LO} + f_{IF} \quad \#$
Spiegelfrequenz	$f_I = f_{LO} - f_{IF} \quad \#$

9.2 Kehlragen-Mischung

Vorraussetzung	$f_s < f_{LO} \quad \#$
Signalfrequenz	$f_s = f_{LO} - f_{IF} \quad \#$
Spiegelfrequenz	$f_I = f_{LO} + f_{IF} \quad \#$

10 Analoge Modulation

AM	$u_{AM} = [\hat{u}_c + u_s(t)] \cos(\omega_c t)$ $u_{AM} = \hat{u}_c [1 + m \cdot \cos(\omega_s t)] \cos(\omega_c t)$ $m = \hat{u}_s / \hat{u}_c$ (Modulationsgrad)
FM	$u_{FM} = \hat{u}_c \cos \left(\omega_c t + \int_0^t \alpha_\omega u_s(t) dt \right)$ $u_{FM} = \hat{u}_c \cos \left(\omega_c t + \int_0^t \alpha_\omega \hat{u}_s \cos(\omega_s t) dt \right)$ $\alpha_\omega = \frac{\Delta \omega}{1V}$ (Frequenzhub)
PM	$u_{PM} = \hat{u}_c \cos(\omega_c t + \alpha_\phi u_s(t))$ $u_{PM} = \hat{u}_c \cos(\omega_c t + \alpha_\phi \hat{u}_s \cos(\omega_s t))$ $\alpha_\phi = \frac{\Delta \phi}{1V}$ (Phasenhub)

11 Digitale Modulation eines harmonischen Trägers

Zustandsbits	$m = \log_2(M) \quad \#$
Bitrate [$\frac{1}{s}$]	$R_b = \frac{1}{T_b} \quad \#$
Symboldauer	$T_s = m \cdot T_b$
Symbolrate [baud]	$R_s = \frac{1}{T_s} = \frac{1}{m T_b} = \frac{R_b}{m}$
Einseitige BB-Bandbreite	$B_{\min, m} = \frac{1}{2T_s}$
Zweiseitige HF-Bandbreite	$B_{HF} = 2B_{\min, m}$

11.1 Realisierbare Impulsformfilter mit flacher Flanke (raise cosine Filter)

$$|H_{RC}(f)| = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq |f| \leq (1-r)f_{Ny} \\ \cos^2 \left[\frac{\pi}{4r} \left(\frac{f}{f_{Ny}} - (1-r) \right) \right] & \text{sonst} \\ 0 & \text{für } |f| \geq (1+r)f_{Ny} \end{cases}$$

Bandbreite rc-Filter	$B_{rc} = \frac{1+r}{2 \cdot T_s}$
Rauschbandbreite rc-Filter	$B_n = f_{Ny} = \frac{1}{2 \cdot T_s} = \frac{R_b}{2 \cdot m}$
HF-Bandbreite (zweiseitig)	$B_{HF} = 2 \cdot B_{rc}$
Spektrale Effizienz	$\varepsilon_b = \frac{R_b}{B_{rc}} = \frac{1}{T_b} \cdot \frac{2T_s}{1+r}$