Vorlesung
Deterministische Signale und Systeme

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Marius Pesavento

Copyright

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Lernziel der 1. Einheit:
WP1 – Signale und Systeme

Signale und Systeme

WP1 – Signale und Systeme

In der ersten Lerneinheit führen wir die grundlegenden Begriffe zur Beschreibung und Einordnung von Signalen und Systemen ein.

- Wir definieren den Begriff des „Signals“ und unterscheiden zwischen verschiedenen Beschreibungen von Signalen.
- Wir führen den Begriff des „Systems“ ein und beschreiben verschiedene Eigenschaften von Systemen wie, z.B., die Linearität, die Zeitinvarianz und die Kausalität von Systemen.
- Wir lernen das Superpositionsprinzip als wichtige Eigenschaft linearer Systeme kennen.
- Wir untersuchen für verschiedene Systeme die Eingangs-/Ausgangsbeziehung, welche durch eine allgemeine Transformation $y(t) = \mathcal{T}\big(x(t)\big)$ beschrieben ist.

Signale

Deterministische Signale und Systeme

Signale sind veränderliche Größen (meist Zeitfunktionen) die Informationen darstellen (meist eine interessierende physikalische Größe).

Beispiele:

- Spannungen und Ströme in elektrischen Systemen,
- Kräfte, Auslenkungen und Geschwindigkeiten in mechanischen Systemen
- Drücke und Durchflüsse in akustischen und hydraulischen Systemen
- Lichtintensitäten in optischen Systemen
- Temperaturverläufe in thermischen Systemen.

Deterministische Signale und Systeme

Systeme sind abstrakte Beschreibungen von Funktionseinheiten (Prozessen) die Eingangs- in Ausgangssignale umwandelt.

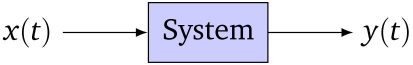


Abbildung: Allgemeine Darstellung eines Systems

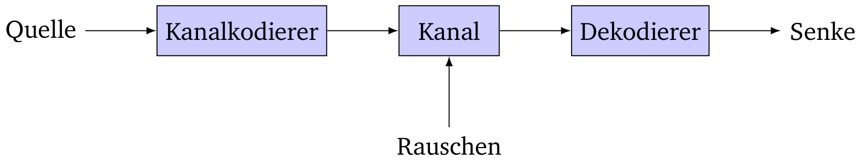
- Komplexe Systeme lassen sich in einfache Teilsysteme und Komponenten zerlegen, deren Analyse einfacher ist.

Wichtige Anwendungsbeispiele

Datenübertragung: Mobilfunk, Rundfunk, GPS-Navigation,...

Ziel:

- Ein Informationssignal über ein physikalisches Medium (Mobilfunkkanal, Telefonleitung) fehlerfrei zu übermitteln.
- Am Empfänger werden Rauscheinflüsse, Störungen und Verzerrung korrigiert. Die Informationen werden dekodiert.



Wichtige Anwendungsbeispiele

Regelung von Systemen: Temperaturregelung Heizung, Drehzahlregelung, Niveauregelung in Flüssigkeitsbehältern, Geschwindigkeitsregelung im Auto (Tempomat)

Ziel:

- Das System soll eine gewünschte Reaktion (Antwort) zeigen. Das Ausgangssignal soll einem vorgegebenen Referenzsignal folgen. Gewünscht ist ebenfalls, dass sich das System robust gegenüber äußeren Störsignalen (wie z.B. Schankungen durch das Wetter) verhält. Bei der Regelung ist meinst eine Rückkoppelung erforderlich.

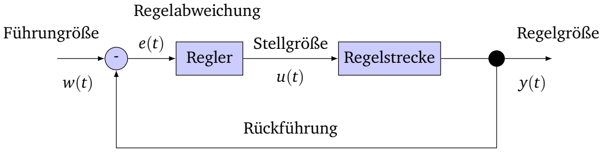


Abbildung: Regelungstechnisches System

Prädiktion, Prognose

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{System}} \longrightarrow y(t)$$

- Eingang und System bekannt – Ausgang unbekannt
- Frage: Wie entwickelt sich der Systemausgang?
- Anwendungen: die Zustandsüberwachung von Prozessen und Maschinen, die modellbasierte Wettervorhersage, Börsenkurse,...

System Identifikation

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{System}} \longrightarrow y(t)$$

- Eingang und Ausgang bekannt – System unbekannt
- Frage: Wie lässt sich das System beschreiben?
- Anwendungen: die allgemeine Systemmodellierung, die Zustandsüberwachung nicht beobachtbarer interner Prozesse, Kanalschätzung im Mobilfunk, Echo-Unterdrückung beim Freisprechanlagen,...

Signal Rekonstruktion

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{System}} \longrightarrow y(t)$$

- System und Ausgang bekannt – Eingang unbekannt
- Frage: Welches Signal liegt am Eingang vor?
- Anwendungen: Datenübertragung, Kommunikation, Messungen aller Art,...

Einführung Signale und Systeme

- Signale und Systeme lassen sich auf verschiedene Arten darstellen und analysieren. Wir werden die Zeitbereichs- und die Frequenzbereichsverarbeitung kennen lernen.
- Komplexe Systeme lassen sich häufig als Kombination einfacher Teilsystemen darstellen, deren Analyse leichter ist.
- Fokus Vorlesung: lineare, zeitinvariante (engl. linear time-invariant LTI) Systeme.
- Unter gestimmten Voraussetzungen lässt sich das Gesamtsystem vollständig durch die Systemantworten (Impulsantworten) seiner Teilsysteme beschreiben.

Deterministische Signale

- Bei deterministischen Signalen ist der Wert $x(t)$, den das Signal zu Zeitpunkt t annimmt, für alle Zeitpunkte t genau bestimmt.

  Beispiel:

  $$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi), \quad -\infty < t < \infty,$$

  mit Konstanten A, ω_0 und ϕ.
- Zu jedem Zeitpunkt t lässt sich der Wert von $x(t)$ exakt angeben.

Nicht-deterministische (zufällige) Signale

- Nicht-deterministische (stochastische) Signale sind durch den Zufall bestimmt.
- Diese Signale sind nicht Gegenstand dieser Vorlesung.
- $\Rightarrow$ Grundlagen der Signalverarbeitung (Prof. Zoubir, 4. Semester)

Systeme

Ausblick

Zeitbereichsanalyse: In linearen-zeitinvarianten Systemen (LTI-Systeme) ist die Eingangs-/Ausgangsbeziehung vollständig durch die Impulsantwort $h(t)$ des Systems im Zeitbereich beschrieben.

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{System}, h(t)} \longrightarrow y(t) = x(t) * h(t)$$

Abbildung: Zeitbereichsverarbeitung in einem LTI System.

Die Signale $x(t)$, $h(t)$ and $y(t)$ sind über das Faltungsintegral miteinander verknüpft.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau = x(t) * h(t).$$

Systemmodelle

- Physikalische Systeme transformieren Eingangs- in Ausgangsignale.
- Die Transformation beschreibt die Interaktion des Signals mit dem System (die z.B. physikalischen Gesetzmäßigkeiten folgt).
- Das Ziel der Ingenieure ist es ein Systemmodell in Form einer mathematischen Beschreibung zu finden, das den Zusammenhang zwischen dem Eingang und dem Ausgang des Systems korrekt beschreibt.

Systembeschreibungen

Die Eingangs-/Ausgangsbeziehung eines Systems lässt sich allgemein mithilfe eines Operators (bzw. einer Transformation) $\mathcal{T}$ beschreiben:

$$y(t) = \mathcal{T}[x(t)]$$

$y(t)$ ist die Antwort des Systems T auf das Eingangssignal $x(t)$.

- Durch den Operator $\mathcal{T}$ ist das System eindeutig bestimmt. Der Operator berschreibt die Transformation die auf $x(t)$ angewendet wird um $y(t)$ zu erzeugen.
- Die Ein- und Ausgänge können entweder skalare oder vektorwertige Größen sein.

Single Input Single Output (SISO) System

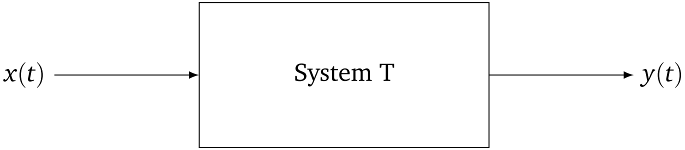
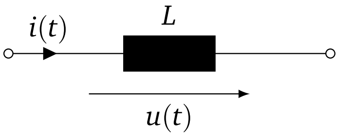


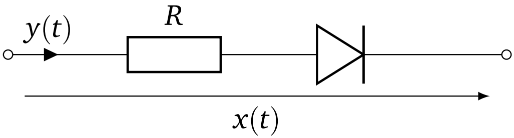
Abbildung: SISO System mit einem Eingang $x(t)$ und einem Ausgang $y(t)$

SISO Systeme
Beispiele

- Integrator ($L = T$): $y(t) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \mathrm{d}t$

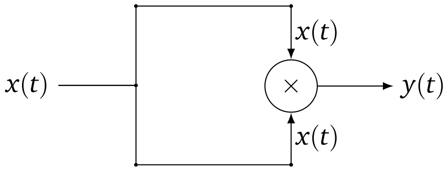


- Diodenschaltung ($R = 1$): $y(t) = \begin{cases} x(t) & x(t) \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

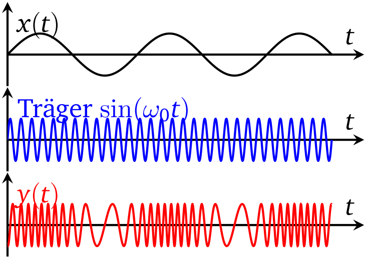


SISO Systeme
Beispiele

- Quadrierer: $y(t) = x^2(t)$



- Frequenzmodulator: $y(t) = \sin\left(\omega_0 t + 2\pi x(t)\right)$



Ausblick
Lineare zeitinvariante (LTI) Systeme

Die Eingangs-/Augangsbeziehung eines LTI-Systems ist über Faltungsintegral

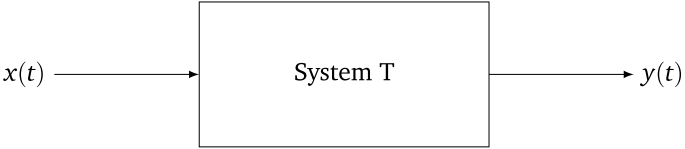
$$y(t) = \mathcal{T}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau,$$

gegeben. Die Impulsantwort des Systems wird mit $h(t)$ bezeichnet.

Impulsantwort: Die Ipulsantwort $h(t)$ ist die Antwort des Systems auf einen Einheitsimpuls $\delta(t)$ (später genauer definiert) am Eingang, d.h.,

$$h(t) = \mathcal{T}\left[\delta(t)\right].$$

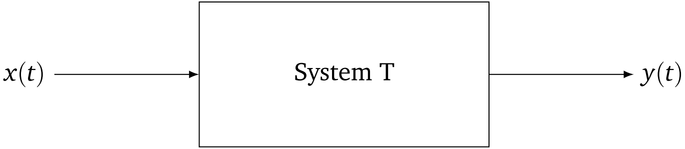
Klassifizierung von Systemen



- Zeitkontinuierliche Systeme haben zeitkontinuierliche Systemausgänge $y(t)$.
- Zeitdiskrete Systeme haben zeitdiskrete Systemausgänge (nicht notwendigerweise zu gleichmäßigen Abtastzeitpunkten), z.B.

$$y[t_1], y[t_2], y[t_3], \ldots$$

Klassifizierung von Systemen



- Quantisierte Systeme haben Systemausgänge, die auf eine endliche Anzahl von Werten beschränkt (bzw. quantisiert) ist, z.B.

$$y(t) \in \{-5, -4, -3, \ldots, 3, 4, 5\}$$

.

- Digitale Systeme sind zeitdiskrete und quantisierte System.

Klassifizierung von Systemen: Zeitinvariante und Zeitvariante Systeme

Ein System ist zeitinvariant, zeitunabhängig, bzw. verschiebungs-invariant, wenn die Eingang-/Ausgangsbeziehung nicht von der Wahl des Zeitpunktes abhängt.

$\Rightarrow$ ansonsten ist das System zeitvariant.

Zeitinvarianz:

$$\text{aus} \quad y(t) = \mathcal{T}[x(t)] \quad \text{folgt} \quad y(t-\tau) = \mathcal{T}[x(t-\tau)] \quad \forall x(t), \tau$$

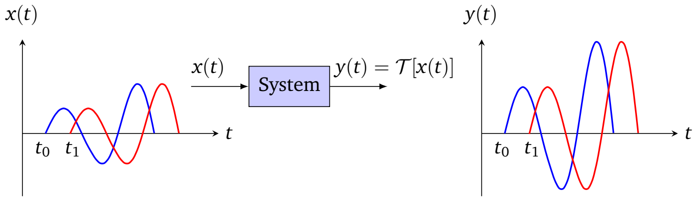


Abbildung: Eingangs-/ und Ausgangsbeziehung eines zeitinvarianten Systems.

Eineare Systeme:
Superpositionsprinzip

In linearen Systemen gilt das Superpositionsprinzip. D.h., lineare Systeme erfüllen die folgenden beiden Eigenschaften.

1. Homogenität:

$$\mathcal{T}[\alpha x(t)] = \alpha \mathcal{T}[x(t)],$$

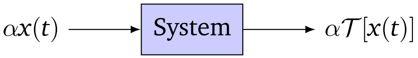


Abbildung: Lineares System.

Eigenschaften linearer Systeme: Superpositionsprinzip

In linearen Systemen gilt das Superpositionsprinzip. D.h. lineare Systeme erfüllen die folgenden beiden Eigenschaften.

2. Additivität:

$$\mathcal{T}[x_1(t) + x_2(t)] = \mathcal{T}[x_1(t)] + \mathcal{T}[x_2(t)].$$

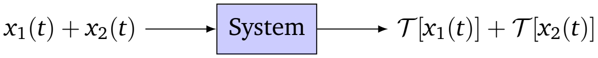


Abbildung: Lineares System.

Lineare und nichtlineare Systeme

Linearität: In linearen Systemen gilt das Superpositionsprinzip.

Superpositionsprinzip: Für Eingänge $x_1(t)$ und $x_2(t)$ und beliebige Konstanten α_1 und α_2 gilt zu jedem Zeitpunkt t:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}[\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)] &= \alpha_1 \mathcal{T}[x_1(t)] + \alpha_2 \mathcal{T}[x_2(t)] \\ &= \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t).\end{aligned}$$

Lineare Systeme

D.h., das im linearen System aus

$$x_i(t) \longrightarrow \boxed{\text{System}} \longrightarrow \mathcal{T}[x_i(t)] = y_i(t)$$

unmittelbar

$$\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) \longrightarrow \boxed{\text{System}} \longrightarrow \alpha_1 \mathcal{T}[x_1(t)] + \alpha_2 \mathcal{T}[x_2(t)]$$

folgt.

Beispiel: Impedanz

Das Ausgangssignal des Systems beschreibt den Spannungsabfall $u(t)$ an einem Widerstand R, an dessen Eingang der Strom $i(t)$ eingeleitet wird.

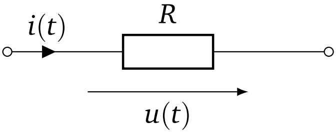


Abbildung: Spannungsabfall an Impedanz

$$u(t) = R \cdot i(t)$$

Beispiel: Impedanz
Linearität

Gegeben seien zwei Eingangsströme $i_1(t)$ und $i_2(t)$.

- Der Ausgang $u_1(t)$ des Systems für Eingangssignal $i_1(t)$ ist gleich

$$u_1(t) = R\, i_1(t).$$

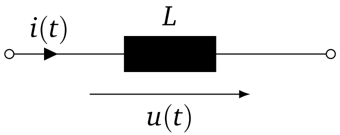
- Der Ausgang $u_2(t)$ des Systems für Eingangssignal $i_2(t)$ ist gleich

$$u_2(t) = R\, i_2(t).$$

- Dann gilt, dass sich für die Superposition der Eingangsignale, d.h. $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$, am Ausgang $u(t)$ die Superposition der jeweiligen Ausgangssignale ergibt:

$$\begin{aligned} u(t) &= R\, i(t) = R\left(i_1(t) + i_2(t)\right) \\ &= R\, i_1(t) + R\, i_2(t) = u_1(t) + u_2(t). \end{aligned}$$

Beispiel: Induktivität



$$i(t) = \frac{1}{L} \cdot \int_{-\infty}^{t} u(\tau) \mathrm{d}\tau.$$

- Eingang des Systems liegt die Spannung $u(t)$ an der Induktivität L an.
- Ausgang des Systems ist der Strom $i(t)$.

Beispiel: Induktivität
Linearität

Gegeben seien zwei Eingangsspannungen $u_1(t)$ und $u_2(t)$.

- Der Ausgang $i_1(t)$ des Systems für Eingangssignal $u_1(t)$ ist gleich

$$i_1(t) = \frac{1}{L} \cdot \int_{-\infty}^{t} u_1(\tau) \mathrm{d}\tau.$$

- Der Ausgang $i_2(t)$ des Systems für Eingangssignal $u_2(t)$ ist gleich

$$i_2(t) = \frac{1}{L} \cdot \int_{-\infty}^{t} u_2(\tau) \mathrm{d}\tau.$$

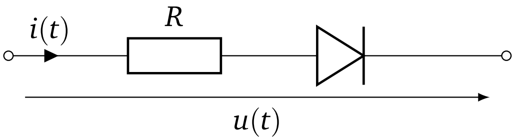
Beispiel: Induktivität
Linearität

- Dann gilt, dass sich für die Superposition der Eingangssignale, d.h. Eingangssignal $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$, am Ausgang $i(t)$ die Superposition der jeweiligen Ausgangssignale ergibt:

$$
\begin{aligned}
i(t) &= \frac{1}{L} \cdot \int_{-\infty}^{t} u(\tau) \mathrm{d}\tau = \frac{1}{L} \cdot \int_{-\infty}^{t} \big(u_1(\tau) + u_2(\tau)\big) \mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{L} \cdot \int_{-\infty}^{t} u_1(\tau) \mathrm{d}\tau + \frac{1}{L} \cdot \int_{-\infty}^{t} u_2(\tau) \mathrm{d}\tau = i_1(t) + i_2(t)
\end{aligned}
$$

Beispiel: Einfache Diodenschaltung

Das Ausgangssignal des Systems ist der Strom $i(t)$, der durch den Widerstand R der in Reihe mit einer idealen Diode geschaltet ist, fließt. Das Eingangsignal ist die angelegt Spannung $u(t)$.



$$i(t) = \frac{1}{R} \cdot \mathrm{u}\big(u(t)\big)$$

wobei

$$\mathrm{u}(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Einheitssprungfunktion darstellt.

Beispiel: Einfache Diodenschaltung
Linearität

Gegeben seien zwei Eingangsspannungen $u_1(t)$ und $u_2(t)$.

- Der Ausgang $i_1(t)$ des Systems für Eingangssignal $u_1(t)$ ist gleich

$$i_1(t) = \frac{1}{R}\mathrm{u}\big(u_1(t)\big).$$

- Der Ausgang $i_2(t)$ des Systems für Eingangssignal $u_2(t)$ ist gleich

$$i_2(t) = \frac{1}{R}\mathrm{u}\big(u_2(t)\big).$$

- Dann gilt allgemein jedoch **nicht**, dass sich für die Superposition der Eingangsignale, d.h. Eingangssignal $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$, am Ausgang $i(t)$ auch die Superposition der jeweiligen Ausgangssignale ergibt:

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{1}{R}\mathrm{u}\big(u(t)\big) = \frac{1}{R}\mathrm{u}\big(u_1(t) + u_2(t)\big) \\ &\neq \frac{1}{R}\mathrm{u}\big(u_1(t)\big) + \frac{1}{R}\mathrm{u}\big(u_2(t)\big) = i_1(t) + i_2(t) \end{aligned}$$

Beispiel: Einfache Diodenschaltung
Linearität (nicht erfüllt)

Spezielles Beispiel: $u_1(t) = \sin(\pi t)$, $u_2(t) = 2$ und $R = 1$.
Es ergeben sich die Ausgänge:

$$
\begin{aligned}
i_1(t) &= \frac{1}{R}\mathrm{u}\big(\sin(\pi t)\big) = \begin{cases} \sin(\pi t) & \text{für } \mathrm{mod}(t,2) \in [0,\ 1). \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
i_2(t) &= \frac{1}{R}\mathrm{u}(2) = 2 \\
i(t) &= \frac{1}{R}\mathrm{u}\big(u(t)\big) = \frac{1}{R}\mathrm{u}\big(u_1(t) + u_2(t)\big) \\
&= \mathrm{u}\big(\sin(\pi t) + 2\big) \\
&= \sin(\pi t) + 2 \\
&\neq i_1(t) + i_2(t) = \begin{cases} \sin(\pi t) + 2 & \text{für } \mathrm{mod}(t,2) \in [0,\ 1). \\ 2 & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Klassifizierung von Systemen: Kausale und nicht kausale Systeme

Kausales System: Die Antwort $y(t)$ eines kausalen Systems zum Zeitpunkt $t = t_0$ hängt lediglich von den Eingängen $x(t)$ zum Zeitpunkt $t = t_0$ und vergangenen Zeitpunkten $(t < t_0)$ ab, aber nicht von Eingängen $x(t)$ zu zukünftigen Zeitpunkten $(t > t_0)$. Das System verhält sich damit **nicht antizipatorisch**.

D.h. in linearen kausalen Systemen in denen der Eingang zu Zeiten $t \leq t_0$ identisch Null ist ($x(t) = 0$ für $t < t_0$), muss auch der Ausgang zu Zeiten $t \leq t_0$ identisch Null sein (d.h. $y(t) = 0$ für $t < t_0$).

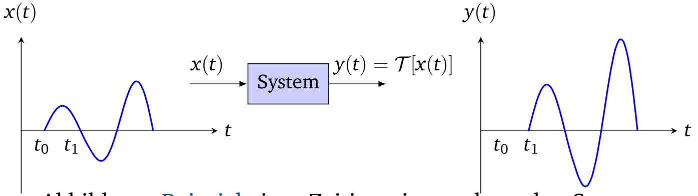
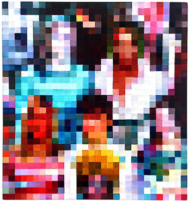


Abbildung: Beispiel eines Zeitinvarianten kausalen Systems.

Klassifizierung von Systemen:
Kausale und nicht kausale Systeme

- Viele physikalische Systeme sind kausal.

  Gegenbeispiel: in der Bildverarbeitung spielt Kausalität meist keine große Rolle.



$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{System}} \longrightarrow \mathcal{T}[x(t)] = y(t)$$

Abbildung: Beispiel eines Zeitinvarianten kausalen Systems.

Klassifizierung von Systemen: Gedächtnislose und dynamische Systeme

Gedächtnisloses System: Der Ausgang $y(t)$ des Systems zu einem gegebenen Zeitpunkt $t = t_0$ hängt nur von dem Eingangsignal zum Zeitpunkt $t = t_0$ ab – aber nicht von dem Eingangsignal $x(t)$ zu vergangenen Zeitpunkten ($t < t_0$).
D.h., $y(t_0) = \mathcal{T}[x(t_0)]$.

Dynamisches System: Das Ausgangssignal $y(t)$ hängt neben dem aktuellen Eingangssignal auch von vergangenen (gegebenenfalls auch von zukünftigen) Eingangswerten $x(t)$ ab.

Beispiel eines gedächtnislosen Systems

Das Ausgangssignal des Systems ist der Spannungsabfall $u(t)$ an einem Widerstand R, an dessen Eingang Strom $i(t)$ eingeleitet wird.

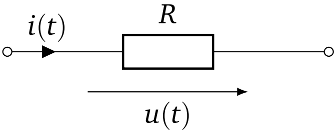
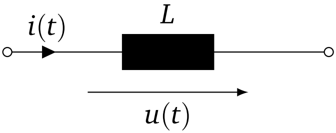


Abbildung: Zeitinvariantes kausales System

$$u(t) = R \cdot i(t)$$

Beispiel eines dynamischen Systems: Induktivität



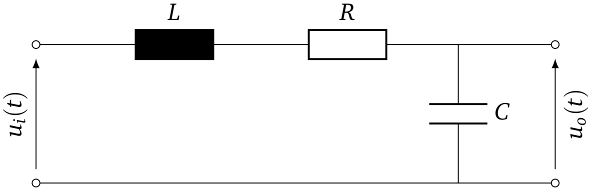
$$i(t) = \frac{1}{L} \cdot \int_{-\infty}^{t} u(\varepsilon) \mathrm{d}\varepsilon.$$

- Der Eingang des Systems ist die Spannung $u(t)$ an der Induktivität L.
- Der Ausgang des Systems ist der Strom $i(t)$, der von den Eingängen zu vergangenen Zeitpunkten abhängt.

$\Rightarrow$ Es handelt sich um ein dynamisches (und kausales – nicht von zukünftigen Eingangswerten abhängendes) System.

Beispiel: LTI-System 2. Ordnung
Systemkomposition aus Teilsystemen

Eingang $u_i(t)$ und Ausgänge $u_o(t)$.



Differentialgleichung:

$$u_i(t) = RC\frac{\mathrm{d}u_o(t)}{\mathrm{d}t} + LC\frac{\mathrm{d}^2u_o(t)}{\mathrm{d}t^2} + u_o(t)$$

Ist das System linear und zeitinvariant, d.h., ist das System ein LTI-System?

Beispiel: LTI-System 2. Ordnung
Systemkomposition aus Teilsystemen

Die Eingangs-/Ausgangsbeziehung, d.h. die Transformation $u_0(t) = \mathcal{T}\big(u_i(t)\big)$ des Systems ist implizit über die Differentialgleichung gegeben:

$$u_i(t) = RC\frac{\mathrm{d}u_o(t)}{\mathrm{d}t} + LC\frac{\mathrm{d}^2u_o(t)}{\mathrm{d}t^2} + u_o(t),$$

Das System ist linear und zeitinvariant (LTI), da:

- es aus linearen zeitinvarianten Teilsystemen aufgebaut ist (Impedanz, Induktivität, Kapazität).
- Zeitinvarianz: Durch die Substitution $t \to t - \tau$ lässt sich die Differentialgleichung in der Zeit um τ verschieben.

$$u_i(t-\tau) = RC\frac{\mathrm{d}u_o(t-\tau)}{\mathrm{d}t} + LC\frac{\mathrm{d}^2u_o(t-\tau)}{\mathrm{d}t^2} + u_o(t-\tau)$$

- Wenn $u_0(t)$ die Lösung der unverschobenen Differentialgleichung (oben) ist, dann ist $u_0(t-\tau)$ die Lösung der um τ verschobenen Differentialgleichung (unten).

Beispiel: LTI-System 2. Ordnung Systemkomposition aus Teilsystemen

Die Eingangs-/Ausgangsbeziehung, d.h. die Transformation $u_0(t) = \mathcal{T}\big(u_i(t)\big)$, des Systems ist implizit über die Differentialgleichung gegeben:

$$u_i(t) = RC\frac{\mathrm{d}u_o(t)}{\mathrm{d}t} + LC\frac{\mathrm{d}^2u_o(t)}{\mathrm{d}t^2} + u_o(t),$$

Das System ist zeitinvariant:

- Eine Zeitverschiebung des Eingangssignals um τ bewirkt eine Zeitverschiebung am Ausgang um τ.

Idealisierte Signale und verallgemeinerten Funktionen

Lernziel der 2. Lerneinheit: WP 1 – Idealisierte Signale

In der zweiten Lerneinheit führen wir die Klasse der verallgemeinerten Funktionen zur Beschreibung spezieller idealisierter Signale ein.

- Wir lernen den Einheitsimpuls (die Dirac'sche Impulsfunktion) $\delta(t)$ zur Beschreibung transienter impulsartiger Vorgänge kennen.
- Wir lernen die Einheitssprungfunktion zur Bescheibung von Ein- und Umschaltvorgängen kennen.
- Wir lernen verallgemeinerte Funktionen kennen, die sich als Grenzwert konvergenter Funktionsfolgen beschreiben lassen.

Die Impulsfunktion

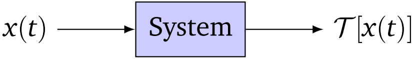


Abbildung: Lineares System.

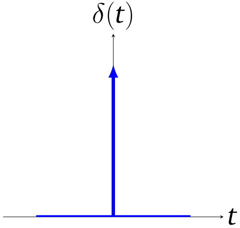
Wir werden feststellen, dass sich die Eingangs-/Ausgangsbeziehung in LTI-Systemen, d.h. die Transformation $y(t) = \mathcal{T}\big(x(t)\big)$, eindeutig mithilfe der Impulsfunktion beschreiben lässt.

Daher benötigen wir eine geeignete Definition der Impulsfunktion.

Idealisierte Signale und verallgemeinerte Funktionen

Der Einheitsimpuls $\delta(t)$ ist **keine** (analytische) Funktion im klassischen Sinne.

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0, \\ \text{undefiniert („}\infty\text{“)}, & t = 0. \end{cases}$$



- $\delta(t)$ hat eine Singularität an der Stelle $t = 0$.
- Das heißt, dass nicht für jeden Zeitpunkt ein definierter Funktionswert existiert.

Die Impulsfunktion

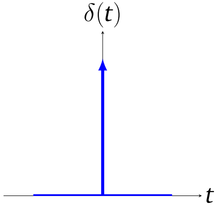


Abbildung: Die Impulsfunktion.

- Mit der Impulsfunktion lassen sich Phänomenen, die sich in extrem kurzen Zeiträumen abspielen, modellieren.
- Die Impulsfunktion bildet nahezu augenblickliche (instantane) Änderungen der Messgröße ab.

Eigenschaften der Impulsfunktion – Definition und Normierung

- Impuls-Character: $\delta(t - t_0) = 0$ für $t \neq t_0$.

- Normierung: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)\,\mathrm{d}t = 1$, bzw.

$$\int_a^b \delta(t - t_0)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 1, & \text{falls } a < t_0 < b; \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

  Das heißt, das Integral über die Impulsfunktion ist immer Eins.

- Die Normierung der Impulsfunktion ermöglicht es uns mit der Impulsfunktion zu rechnen (auch wenn die Impulsfunktion nicht zu allen Zeitpunkten definiert ist).

Normierung

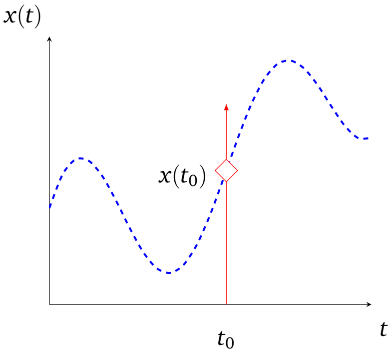
- Frage: Wenn $x(t) = \delta(t - t_0)$ an der Stelle $t = t_0$ „Unendlich“ ist, was ist dann $5\,x(t)$?
- Was bedeutet es, dass die Funktion $5\,x(t)$ an der Stelle $t = t_0$ den Wert „fünf mal Unendlich“ annimmt?
- Die Normierungseigenschaft liefert die Antwort:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\mathrm{d}t = 1 \quad \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} 5\,x(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} 5\,\delta(t-t_0)\mathrm{d}t = 5.$$

Ausblendeigenschaft der Impulsfunktion

Ausblendung: $$x(t)\,\delta(t-t_0) = x(t_0)\,\delta(t-t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\delta(t-t_0)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} x(t_0)\,\delta(t-t_0)\,\mathrm{d}t = x(t_0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\,\mathrm{d}t = x(t_0)$$



Funktionsschar und verallgemeinerte Funktion

Die Einheitsimpulsfunktion $\delta(t)$ ist eine verallgemeinerte Funktion.

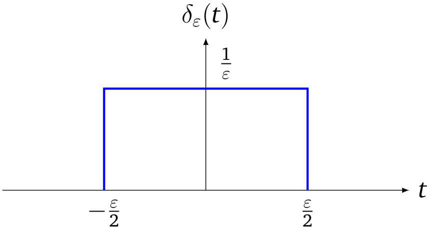
Sie wird in der Regel als Grenzwert einer in ε parameterisierten Folge (Funktionsschar) klassischer Funktionen definiert.

Beispiele der in ε parameterisierten Funktionsfolge $\{\delta_\varepsilon(t)\}$ folgenden auf den nächsten Folien.

Der Grenzwert wird bzgl. des Parameters ε gebildet wird.

Impulsfunktion
Beispiel 1: Rechteckfunktionen

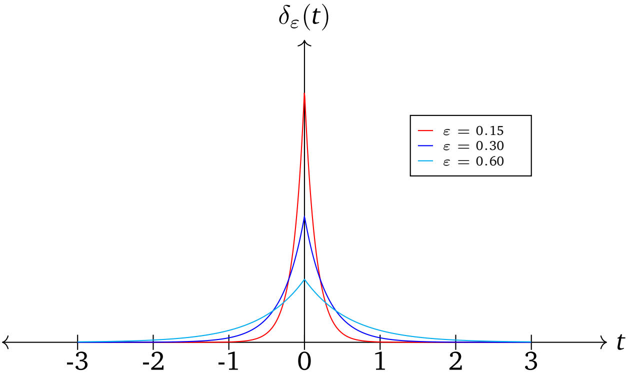
$$\delta_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} \cdot r_{\frac{\varepsilon}{2}}(t) = \begin{cases} 1/\varepsilon, & |t| \leq \varepsilon/2 \\ 0, & |t| > \varepsilon/2 \end{cases},$$



Für $\varepsilon \to 0$, bleibt die Fläche $\delta_\varepsilon(t)$ konstant gleich Eins, während $\delta_\varepsilon(t)$ an $t = 0$ gegen „Unendlich“ läuft.

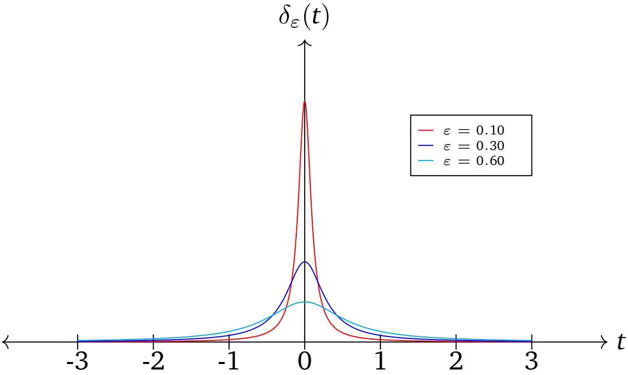
Impulsfunktion
Beispiel 2: abfallende e-Funktion

$$\delta_\varepsilon(t) = \frac{1}{2\varepsilon} e^{-\frac{|t|}{\varepsilon}}$$



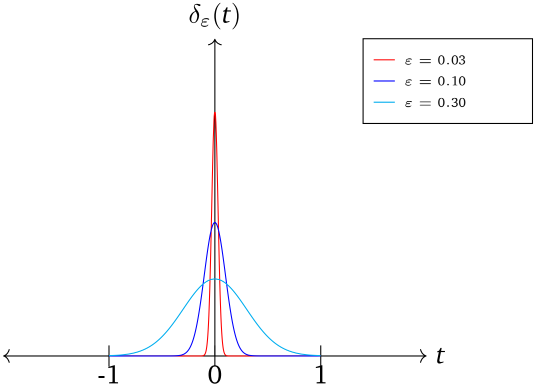
Impulsfunktion
Beispiel 3: Lorentzkurve

$$\delta_\varepsilon(t) = \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{t^2+\varepsilon^2}$$



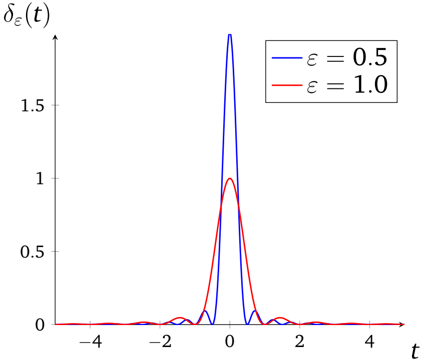
Impulsfunktion
Beispiel 4: Gaußkurve

$$\delta_\varepsilon(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} e^{-\frac{t^2}{2\varepsilon^2}}$$



Impulsfunktion
Beispiel 5: Sinc-Quadrat Funktion

$$\delta_\varepsilon(t) = \varepsilon \cdot \left(\frac{1}{\pi t} \sin \frac{\pi t}{\varepsilon} \right)^2$$



Impulsfunktion
Beispiel 6: Summe komplexer *e*-Funktionen

$$\delta_\varepsilon(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon}} e^{j\omega t} \mathrm{d}\omega$$

Animation

Impulsfunktion

Die Funktionsschar $\{\delta_\varepsilon(t)\}$ soll folgende Eigenschaften erfüllten:

- Impuls-Character: $\delta_\varepsilon(t - t_0) \to 0$ für $t \neq t_0$ und $\varepsilon \to 0$.
- Normierung: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(t - t_0)\,\mathrm{d}t = 1$, bzw.
- Symmetrie: $\delta_\varepsilon(t - t_0) = \delta_\varepsilon(t_0 - t)$.
- Skalierung: $\delta_\varepsilon(at) = \dfrac{1}{|a|}\delta_\varepsilon(t)$.
- Ausblendung: $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\delta_\varepsilon(t - t_0)\,\mathrm{d}t = x(t_0)$.

Ausblendeigenschaft der Funktionsschar
Beispiel: Gaußkurve

Die Gaußkurve $\delta_\varepsilon(t-t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\varepsilon} e^{-\frac{(t-t_0)^2}{2\varepsilon^2}}$ ist eine Verteilungsfunktion mit einem Maximum an $t = t_0$.
ε ist die Streuung (Öffnung der Kurve).

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta_\varepsilon(t-t_0)\,\mathrm{d}t \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\frac{(t-t_0)^2}{2\varepsilon^2}}\,\mathrm{d}t$$

Mit der Substitution $\tau = \frac{t-t_0}{\sqrt{2}\varepsilon}$ und $\mathrm{d}\tau = \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2}\varepsilon}$ gilt:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\frac{(t-t_0)^2}{2\varepsilon^2}}\,\mathrm{d}t \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\sqrt{2}\varepsilon\tau + t_0) e^{-\tau^2}\,\mathrm{d}\tau$$

Differentiation der Impulsfunktion nach der Zeit

Die zeitliche Ableitung $\delta'(t) = \frac{d\delta(t)}{dt}$ an Stelle t_0 mit $t_1 < t_0 < t_2$ ist implizit definiert über das Integral

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)\delta'(t - t_0)\,\mathrm{d}t = -x'(t_0); \qquad t_1 < t_0 < t_2.$$

Voraussetzung: die Ableitung $x'(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ an Stelle $t = t_0$ existiert.
Die Eigenschaft ergibt sich anschaulich aus partiellen Integrationsregel:

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} x(t)\delta'(t - t_0)\,\mathrm{d}t &= x(t)\delta(t - t_0)\,\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} x'(t)\delta(t - t_0)\,\mathrm{d}t \\ &= 0 - 0 - x'(t_0) \\ &= -x'(t_0).\end{aligned}$$

Idealisierte Funktionen
Beispiel: Einheitssprung

$$\mathrm{u}(t) = \sigma(t) = 1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

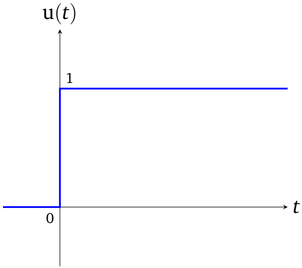
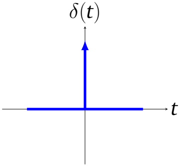


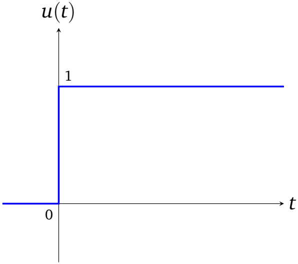
Abbildung: Einheitssprung.

Einheitssprung – Zusammenhang zwischen Einheitssprung und Impulsfunktion

Es esistiert eine Unstetigkeit an der Stelle $t = 0$. Dort wird die Funktion häufig mit dem Wert $u(0) = 1/2$ definiert (den Grund dafür sehen wir später im Zusammenhang mit der Konvergenz der Fourier-Transformation).

$$\mathrm{u}(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

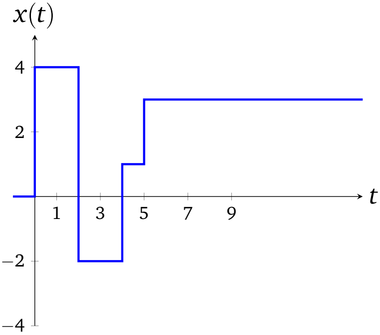




Zusammengesetzte Signale
Beispiel: Stückweise konstante Funktion

Eine Stufenfunktionen kann als lineare Überlagerungen zeitverschobener Einheitssprungfunktion definiert werden:

$$x(t) = 4\mathrm{u}(t) - 6\mathrm{u}(t-2) + 3\mathrm{u}(t-4) + 2\mathrm{u}(t-5)$$



Energie- und Leistung

Energie- und Leistungssignale

Gesamtenergie E (normiert, z.B. auf einen Widerstand 1 Ohm) eines Signals $x(t)$:

$$E = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 \mathrm{d}t \quad [\mathit{Joule}]$$

Mittlere Gesamtleistung P (normiert, z.B. auf einen Widerstand 1 Ohm) eines Signals $x(t)$:

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 \mathrm{d}t \quad [\mathit{Watt}]$$

Energie- und Leistungssignale

1. $x(t)$ wird Energiesignal (oder auch Signal mit endlicher Energie) genannt, wenn:

$$0 < E < \infty \qquad \text{und damit} \qquad P = 0.$$

$\Rightarrow$ Signal $x(t)$ ist transient.

2. $x(t)$ wird Leistungssignal (oder auch Signal mit endlicher Leistung) genannt, wenn:

$$0 < P < \infty \qquad \text{und damit} \qquad E = \infty$$

Beispiel: Energiesignal
Entladung eines Kondensators

$$x_1(t) = A\,e^{-\alpha t}\mathrm{u}(t), \qquad \alpha > 0, \quad A \in \mathbb{R}.$$

Energie

$$E = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} |A\,e^{-\alpha t}\mathrm{u}(t)|^2 \mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty} \int_{0}^{T} |A|^2\, e^{-2\alpha t} \mathrm{d}t$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{|A|^2}{-2\alpha} \left[e^{-2\alpha T} - 1\right] = \frac{|A|^2}{2\alpha}$$

$\Rightarrow x_1(t)$ ist ein Energiesignal (d.h. wenn A endlich ist).

Beispiel: Leistungssignal
Einschaltvorgang an Gleichspannungsquelle

$$x_2(t) = A\,\mathrm{u}(t).$$

Leistung

$$\begin{aligned} P &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |A\,\mathrm{u}(t)|^2 \mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{0}^{T} |A|^2 \mathrm{d}t \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} |A|^2\, T = \frac{|A|^2}{2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow x_2(t)$ ist ein Leistungssignal (d.h. wenn A endlich ist).

Mittlere Leistung eines periodischen Signals
Beispiel: Wechselspannung

Ein periodisches Signal $x(t)$ mit Periodendauer T_0 hat die mittlere Leistung:

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} |x(t)|^2 \mathrm{d}t.$$

Beispiel: Leistung des Signals $x(t) = A\,\cos(\omega_0 t + \theta)$ mit $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} A^2 \cos^2(\omega_0 t + \theta) \mathrm{d}t = \frac{A^2}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} \frac{1}{2} \left(1 + \cos 2(\omega_0 t + \theta)\right) \mathrm{d}t \\ &= \frac{A^2}{2T_0} t \,\Big|_{t_0}^{t_0+T_0} + \frac{A^2}{2T_0} \underbrace{\int_{t_0}^{t_0+T_0} \cos 2(\omega_0 t + \theta) \mathrm{d}t}_{=0} = \frac{A^2}{2} \end{aligned}$$

Systemanalyse im Zeitbereich

Lernziel der 3. Lerneinheit: WP 1 – Systemanalyse im Zeitbereich

In der dritten Lerneinheit untersuchen wir die Eingang-/Ausgangsbeziehung in linearen-zeitinvarianten Systemen (LTI-Systemen).

- Wir lernen, dass in LTI-Systemen der Ausgang des Systems vollständig durch das Eingangssignal und die Antwort des Systemes auf einen Impuls am Eingang beschrieben ist.
- Wir lernen die Faltung als wichtige Eingang-/Ausgangs Transformation in LTI-Systemen kennen.
- Wir lernen die (bounded-input-bounded-output) BIBO-Stabilität als ein Maß für die Robustheit eines Systems kennen. In BIBO-stabilien Systemen führt ein endliches Eingangsignal garantiert zu einem endlichen Ausgang.
- Wir lernen das Kriterium der absoluten Integrierbarkeit der Impulsantwort für die BIBO-Stabilität in LTI-Systemen kennen.

Analyse linearer zeitinvarianter Systemen

- LTI-Systeme sind eine wichtige und gut erforschte Systemklasse.
- Viele praktische Systeme lassen sich gut als LTI-Systeme modellieren.
- Der Fokus dieser Vorlesung liegt daher auf der Untersuchung von Signalen in LTI-Systemen

Analyse von LTI Systemen
Drei alternative Ansätze

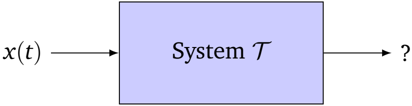


Abbildung: Lineares zeitinvariantes System.

Wie lässt sich der Zusammenhang zwischen Eingangs- und Ausgangssignal in einem LTI-System geeignet beschreiben?

1. mittels Diffentialgleichungen (meist sehr kompliziert).

2. mittles Analyse im Zeitbereich: Faltungsintegral berechnen.

3. mittels Analyse im Frequenzbereich: Fourier-Transformation bzw. Laplace-Transformation.

Fokus der Vorlesung: die letzte beiden Ansätze.

Analyse von LTI-Systemen

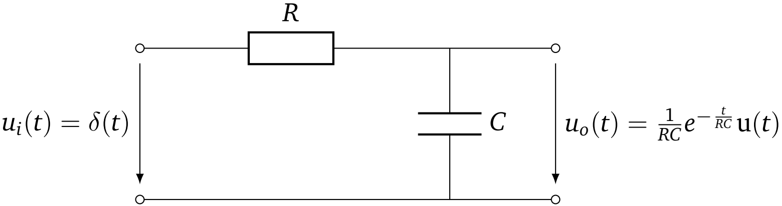
Die Impulsantwort eines Systems ist die Antwort des Systems auf einen Einheitsimpuls zum Zeitpunkt $t = 0$ (vorausgesetzt alle Anfangsbedingungen des Systems sind auf Null gesetzt, d.h. interne Speicher, wie z.B. Kapazitäten sind entladen).

Faltungsintegral:

$$
\begin{aligned}
h(t) &= \mathcal{T}[\delta(t)], && \text{per Definition} \\
h(t-\tau) &= \mathcal{T}[\delta(t-\tau)], \quad \forall \tau \in \mathbb{R} && \text{Zeitinvarianz} \\
x(\tau)h(t-\tau) &= \mathcal{T}[x(\tau)\delta(t-\tau)], \quad \forall x(\tau), \tau \in \mathbb{R} && \text{Homogenität} \\
\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau &= \mathcal{T}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right], && \text{Additivität} \\
\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau &= \mathcal{T}[x(t)] = y(t), && \text{Ausblendung}
\end{aligned}
$$

Analyse von LTI-Systemen:
Beispiel: RC-Schwingkreis

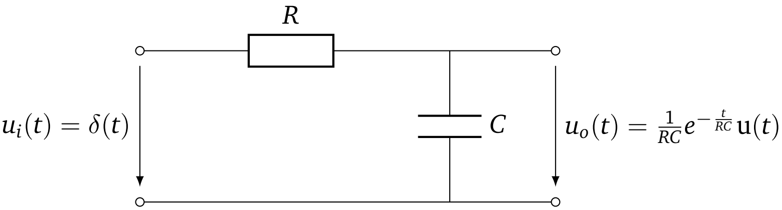
$$h(t) = \mathcal{T}[\delta(t)]$$



- Wir werden später sehen, dass das Ausgangssignal $u_0(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \mathrm{u}(t)$ die Antwort des RC-Schwingkreises auf einen Einheitsimpuls am Eingang darstellt (hier ist $\mathrm{u}(t)$ die Einheitssprungfunktion).
- Die Impulsantwort bezeichnen wir als $h(t)$, d.h., $h(t) = u_0(t)$.

Analyse von LTI-Systemen:
Beispiel: RC-Schwingkreis

$$h(t) = \mathcal{T}[\delta(t)]$$



- Bei bekannter Impulsantwort $h(t)$ des LTI-Systems, lässt sich aus der zuvor hergeleiteten Beziehung, das Ausgangssignal für beliebige Eingangssignale berechnen.

Die Faltung

Systemanalyse im Zeitbereich (ZB): Faltungsintegral

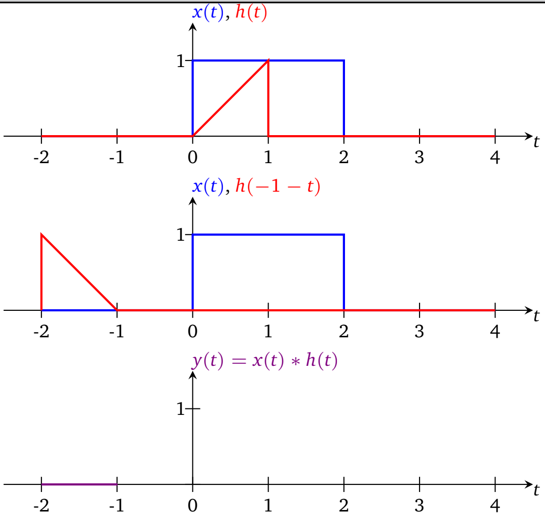
Die Eingangs-/Ausgangsbeziehung von LTI-Systemen ist im ZB durch das Faltungsintegral definiert.

Faltungsintegral: Die Faltung von $x(t)$ mit $h(t)$ ergibt das Signal $y(t)$:

$$y(t) = \mathcal{T}[x(t)] = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau, \qquad -\infty < t < \infty$$

(häufig auch $(x * h)(t)$ geschrieben).

Systemanalyse im Zeitbereich: Faltungsintegral



Berechnung Faltungsintegral

Für Signale und Impulsantworten die abschnittsweise definiert sind (z.B., stückweise konstante oder stückweise lineare Funktionen) berechnet sich die Faltung durch folgende Schritte:

- Den Integrationsbereich in geeignete Teilstücke segmentieren.
- Die Teilstück $[t_{i-1}, t_i]$ so wählen, dass das Produkt $x(\tau)h(t-\tau)$ über dem jeweiligen Intervall dieselbe analytische Form als Funktion von τ besitzt.
- Die folgenden Schritte für alle Teilintervalle ausführen.

Berechnung Faltungsintegral: Erster Schritt

Für alle Werte von t im Intervall $[t_{i-1}, t_i]$ die Signale

- Signal $x(\tau)$,
- Signal $h(t-\tau)$,
- Produkt $x(\tau)h(t-\tau)$ als Funktion von τ

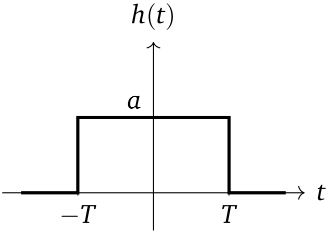
bestimmen (und gegebenenfalls skizzieren). Hierbei ist $h(t-\tau)$ die am Ursprung ($\tau = 0$) gespiegelte und um t verschobene Version von $h(-\tau)$.

Berechnung des Faltungsintegrals: Zweiter Schritt

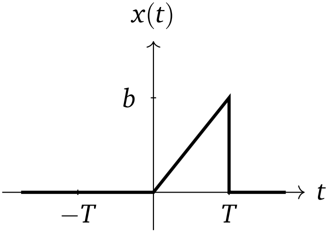
- Das Produkt $x(\tau)h(t-\tau)$ bezüglich τ aufintegrieren.
- Der Integrand hängt von t und τ ab.
- Die Integrationsvariable τ verschwindet nach der Integration (Integralgrenzen einsetzen).
- Das Integral entspricht der Fläche unter der Produktfunktion $x(\tau)h(t-\tau)$.

Faltungsintegral:
Beispiel: (aus Klausur WS14/15)

$$h(t) = \begin{cases} a & \text{für} \quad |t| \leq T \\ 0 & \text{für} \quad |t| > T\,. \end{cases}$$



$$x(t) = \begin{cases} \frac{b}{T}t & \text{für} \quad 0 < t \leq T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Faltungsintegral:
Beispiel: (aus Klausur WS14/15)

Das Ausgangssignal $y(t)$ kann mit Hilfe des Faltungsintegrals berechnet werden:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$t < -T$:

$$y(t) = 0$$

$-T \leq t < 0$:

$$y(t) = \int_0^{t+T} \frac{ab}{T}\tau d\tau = \frac{ab}{2T}\left[\tau^2\right]_0^{t+T} = \frac{ab}{2T}(t+T)^2$$

Faltungsintegral:
Beispiel: (aus Klausur WS14/15)

Das Ausgangssignal $y(t)$ kann mit Hilfe des Faltungsintegrals berechnet werden:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$0 \leq t < T$:

$$y(t) = \int_{0}^{T} \frac{ab}{T}\tau d\tau = \frac{ab}{2T}\left[\tau^2\right]_0^T = \frac{abT}{2}$$

$T \leq t < 2T$:

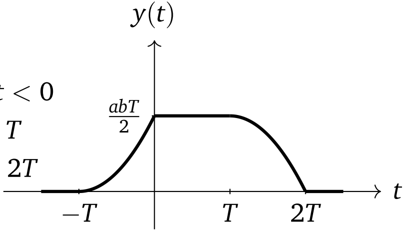
$$y(t) = \int_{t-T}^{T} \frac{ab}{T}\tau d\tau = \frac{ab}{2T}\left[\tau^2\right]_{t-T}^{T} = \frac{abT}{2} - \frac{ab}{2T}(t-T)^2$$

$t \geq 2T$:

$$y(t) = 0$$

Faltungsintegral:
Beispiel: (aus Klausur WS14/15)

$$
y(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad t < -T \\ \frac{ab}{2T}(t+T)^2 & \text{für} \quad -T \leq t < 0 \\ \frac{abT}{2} & \text{für} \quad 0 \leq t < T \\ \frac{abT}{2} - \frac{ab}{2T}(t-T)^2 & \text{für} \quad T \leq t < 2T \\ 0 & \text{für} \quad t \geq 2T \end{cases}
$$



Eigenschaften des Faltungsintegrals: Kommutativität

Die Faltung

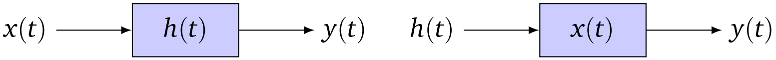
$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

hat folgenden Eigenschaft:

Kommutativität: $\quad x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$

$\Rightarrow$ Die Rolle des Eingangssignals und der Impulsantwort lässt sich vertauschen.

Der Beweis ergibt sich aus der Variablensubstitution $\tau' = t - \tau$.

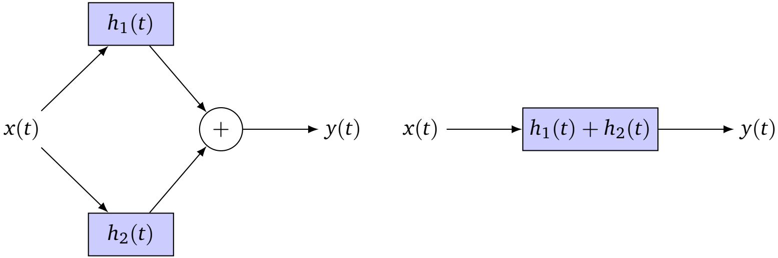


Eigenschaften des Faltungsintegrals: Distributivität

Distributivität: $$x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t) = x(t) * [h_1(t) + h_2(t)]$$

Die Eigenschaft folgt direkt aus der Linearität der Systeme.

Die Parallelkombination zweier LTI-Systeme ergibt ein LTI-System, dessen Impulsantwort der Summe der Impulsantworten der Teilsysteme entspricht.

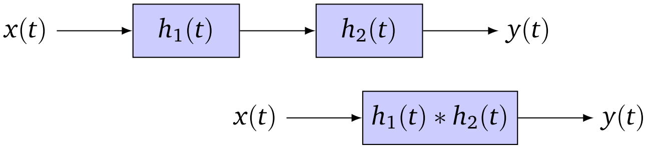


Eigenschaften des Faltungsintegrals: Assoziativität

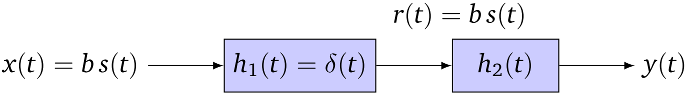
Assoziativität:
$$
\begin{aligned}
x(t) * [h_1(t) * h_2(t)] &= x(t) * h_1(t) * h_2(t) \\
&= [x(t) * h_1(t)] * h_2(t)
\end{aligned}
$$

Die Reihenschaltung von zwei LTI-Systemen ergibt ein LTI-System, dessen Impulsantwort der Faltung der Impulsantworten der Teilsysteme entspricht.

Der Beweis ergibt sich durch den Austausch der Integrationsreihenfolge (siehe Kommutativität der Faltung).

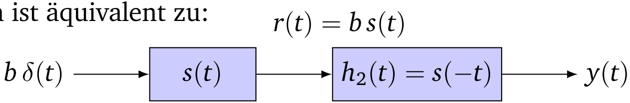


Eigenschaften des Faltungsintegrals:
Beispiel: Optimalfilter



- In einem Kommunikationssystem wird am Sender die binäre Nachricht $b = 1$ oder $b = -1$ zur Übermittlung gewählt.
- Die binäre Nachricht b wird auf ein Trägersignal $s(t)$ moduliert.
- Das modulierte Sendesignal ist $x(t) = b\,s(t)$.
- Der Übertragungskanal ist charakterisiert durch den konstanten Dämpfungsfaktor 1, d.h. der Übertragungskanal hat die idealisierte Impulsantwort $h_1(t) = \delta(t)$.

Das System ist äquivalent zu:

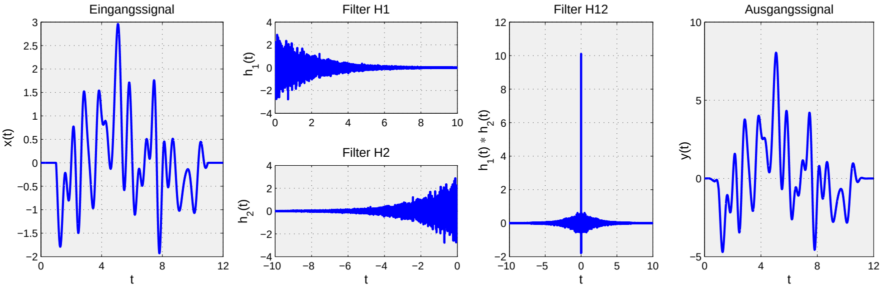


Bei einem Optimalfilter („matched filter”) besteht der Empfänger aus einem LTI-System, dessen Impulsantwort dem zeitinvertierten Sendesignal entspricht, d.h. $h_2(t) = s(-t)$.

Eigenschaften des Faltungsintegrals:
Beispiel: Optimalfilter

Die Impulsantwort des Gesamtsystems hat, ähnlich wie der Einheitsimpuls, ein dominantes Maximum bei $t = 0$.

$$b\delta(t) \longrightarrow \boxed{s(t)} \longrightarrow \boxed{s(-t)} \longrightarrow y(t) = bs(t) * s(-t)$$



Eigenschaften des Faltungsintegral
Beispiel: Integrator

- Integrator: $$x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)u(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\mathrm{d}\tau$$

Weitere Eigenschaften des Faltungsintegral
Differentiation

- Es gelte $y(t) = x(t) * h(t)$.
- Unter gewissen Regularitätsbedingungen folgt:
  (... wenn die Differentiation unter dem Faltungsintegral durchführbar ist, d.h. insbesondere wenn $x(\tau)h(t-\tau)$ über Integrationsbereich stetig und stetig differenzierbar ist.)

$$y'(t) = \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(x(t) * h(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \frac{\mathrm{d}\, h(t-\tau)}{\mathrm{d}t}\, \mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h'(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau = x(t) * h'(t) = x'(t) * h(t)$$

wobei $x'(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$ und $h'(t) = \frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t}$ gilt.

Sprungantwort eines LTI-Systems

- In praktischen Anwendungen lassen sich die Impulsantworten von Systemen manchmal schwer messen.
- Stattdessen wird die Sprungantwort (d.h. die Antwort des Systems auf eine Sprungfunktion am Eingang) gemessen
- Die Impulsantwort $h(t)$ des Systems kann man dann aus der Ableitung der Sprungantwort $a(t)$ des Systems bestimmen.

$$u(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow a(t) = u(t) * h(t)$$

Abbildung: LTI-System.

Sprungantwort eines LTI-Systems

Gegeben sei die Sprungantwort $a(t)$ eines LTI-Systems

$$a(t) \quad = \quad u(t) * h(t)$$

Die Impulsantwort $h(t)$ des Systems ergibt sich dann aus der ersten Ableitung der Sprungantwort nach der Zeit.

$$\frac{\mathrm{d}a(t)}{\mathrm{d}t} \quad = \quad \frac{\mathrm{d}\big(u(t) * h(t)\big)}{\mathrm{d}t} = u'(t) * h(t) = \delta(t) * h(t) = h(t)$$

wobei $u'(t) = \frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = \delta(t)$ ist.

BIBO Stabilität

Stabilität eines LTI-Systems

Die Stabilität eines LTI-Systems ist eine wichtige Eigenschaft für den praktischen Betrieb.

BIBO Stabilität: (engl. bounded-input, bounded-output) Ein System is BIBO stabil wenn jedes begrenzte Eingangsignal zu einem begrenzten Ausgangssignal führt.

Eine hinreichende Bedingung für die BIBO Stabilität eines LTI-Systems ist, dass die zugehörige Impulsantwort $h(t)$ absolut integrierbar ist, d.h.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| \mathrm{d}t < \infty,$$

Stabilität eines LTI-Systems: Beweis Hinreichende Bedingung

Ausgang eines LTI-Systems:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

Aus Dreiecks-Ungleichung folgt

$$|y(t)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)h(t-\tau)|\,\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)|\,|h(t-\tau)|\,\mathrm{d}\tau$$

Stabilität eines LTI-Systems: Beweis Hinreichende Bedingung

Für begrenzte Eingangssignale $|x(\tau)| \leq M < \infty$ mit endlicher Konstante M folgt unter der Voraussetzung, dass $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| \mathrm{d}t < \infty$ ist:

$$|y(t)| \leq M \int_{-\infty}^{\infty} |h(t-\tau)| \mathrm{d}\tau < \infty$$

Die absolute Integrierbarkeit von $h(t)$ ist daher hinreichend.

Beispiel eines BIBO stabilen Systems

Ein System mit Impulsantwort

$$h(t) = \frac{1}{RC} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) u(t)$$

ist BIBO stabil.

Mit $T_0 = R \cdot C$ folgt dies unmittelbar aus:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| \mathrm{d}t &= \int_{-0}^{\infty} \frac{1}{T_0} \exp(-\frac{t}{T_0}) \, \mathrm{d}t \\ &= -\exp(-\frac{t}{T_0})\Big|_0^{\infty} \\ &= 0 + 1 = 1 < \infty \end{aligned}$$