Vorlesung
Deterministische Signale und Systeme

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Marius Pesavento

Copyright

- The presented material is part of a lecture taught at Technische Universität Darmstadt.
- The lecture material is only intended for the students of the class.
- All lecture material, figures and content is used under the legal framework of §60a UrhG.
- Dissemination or disclosure of material of this course (pdf documents, videos, animations, and others) in part of as a whole in not permitted.

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Zusammenfassung WP3 – Lerneinheit 10
LTI System (Filter) im Frequenzbereich

Fourier-Transformation

Transformationspaar

$$x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet X(j\omega)$$

Transformation in den Frequenzbereich:

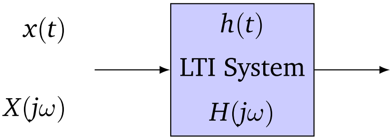
$$X(j\omega) \quad = \quad \mathcal{F}\left\{x(t)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} \mathrm{d}t$$

Rücktransformation in den Zeitbereich:

$$x(t) \quad = \quad \mathcal{F}^{-1}\left\{X(j\omega)\right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} \mathrm{d}\omega$$

Übertragungsfunktion und Filterung

Transformation (Filterung) eines Signals $x(t)$ mittels LTI System



$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega)$$

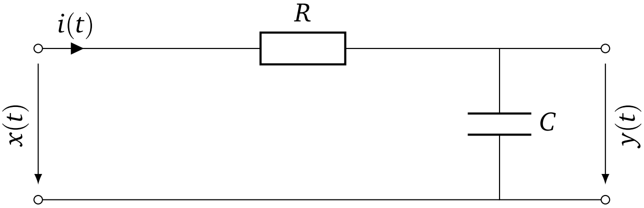
Abbildung: Filterung von $x(t)$ in einem LTI System.

Bereits bekannt:

$$y(t) = x(t) * h(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\, Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega)$$

$H(j\omega)$ wird **Übertragungsfunktion** des LTI Systems (auch Filters) genannt und entspricht FT der **Impulsantwort**. Da FT eine **ein-eindeutige Transformation** ist, beinhaltet $H(j\omega)$ dieselbe Information wie die Impulsantwort $h(t)$.

Übertragungsfunktion des RC Tiefpass-Filters



$$
\begin{aligned}
x(t) &= y(t) + RC\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} \quad , \quad -\infty < t < \infty \\
X(j\omega) &= (1 + j\omega RC) \cdot Y(j\omega) \\
Y(j\omega) &= \underbrace{H(j\omega)}_{(1+j\omega RC)^{-1}} \cdot X(j\omega)
\end{aligned}
$$

RC Tiefpass-Filter

Übertragungsfunktion des Systems ist Gebrochenrationale Funktion

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}.$$

wobei $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ als 3dB Grenzfrequenz bezeichnet wird.
Impulsantwort ergibt sich durch Rücktransformation (Tabelle)

$$h(t) = \omega_0 e^{-\omega_0 t} u(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$$

Amplitudengang des Systems ergibt sich als

$$|H(j\omega)| = \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

RC Tiefpass-Filter

Der Kehrwert von ω_0, d.h. $\omega_0^{-1} = RC$, wir auch als **Zeitkonstante** bezeichnet.

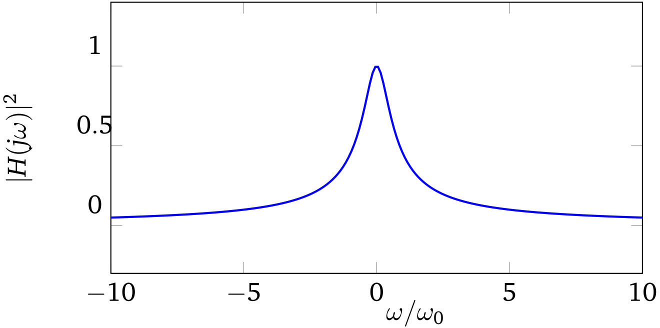


Abbildung: Amplitudengang eines Tiefpass-Filters.

RC Tiefpass-Filter

Aus dem **Amplitudengang** des Filters erkennen wir, dass mit steigendem ω der **Betrag** der Übertragungsfunktion abnimmt.

Für Frequenzen nahe Null sind die Beträge von $H(j\omega)$ groß.

- Systeme die sich so verhalten werden **Tiefpass**-Filter genannt.
- Signalanteile bei **tiefen Frequenzen** passieren das Filter nahezu unverändert.
- Signalanteile bei **hohen Frequenzen** werden hingegen start gedämpft.

Berechnung der Zeitbereichsantwort über die Frequenzdarstellung

- Berechnung der Übertragungsfunktion mittels Fouriertransformation der Differentialgleichung und Umstellen nach $H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$
- Fouriertransformation des Eingangssignals: $X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$.
- Berechnung der Systemantwort im Frequenzbereich: $Y(j\omega) = H(j\omega) \cdot X(j\omega)$.
- Rücktransformation in den Zeitbereich mittels Inverser Fouriertransformation: $y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(j\omega)\}$.

Anmerkung: Für R-, L-, C-Kreise ergeben sich im Frequenzbereich häufig Gebrochenrationale Funktionen. Diese lassen sich mittels Polynomdivision und Partialbruchzerlegung in geeignete Summanden (Partialbrüche) zerlegen, die mittels Korrespondenztabelle (und Eigenschaften) rücktransformiert werden können.

Fourier-Transformierte wichtiger Funktionen

	$x(t)$	$X(j\omega)$	
1.	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{a+j\omega}$,	$a > 0$
2.	$e^{at}u(-t)$	$\frac{1}{a-j\omega}$,	$a > 0$
3.	$te^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(a+j\omega)^2}$,	$a > 0$
4.	$t^n e^{-at}u(t)$	$\frac{n!}{(a+j\omega)^{n+1}}$,	$a > 0$
13.	$e^{-at}\sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\omega_0}{(a+j\omega)^2+\omega_0^2}$,	$a > 0$
14.	$e^{-at}\cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{a+j\omega}{(a+j\omega)^2+\omega_0^2}$,	$a > 0$
17.	$\frac{\mathrm{d}^k\delta(t-t_0)}{\mathrm{d}t^k}$	$(j\omega)^k e^{-j\omega t_0}$	

Tiefpass-Filter mit Rechtecksimpuls am Eingang

Für kleine Werte von $\frac{\tau}{RC} \ll 1$ (d.h. $\tau \ll RC$) ist eine **erhebliche Verzerrung** am Ausgang zu beobachten. Daher bestimmt der Quotient $\frac{\tau}{RC}$ den generellen Verlauf des Ausgangssignals $y(t)$.

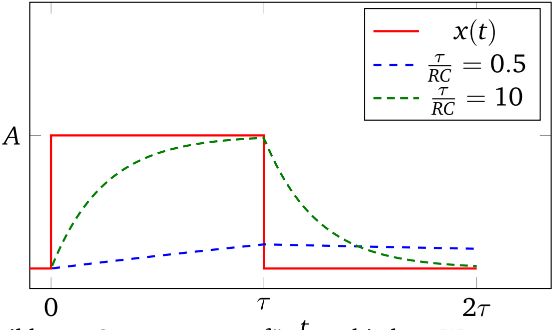


Abbildung: Systemausgang für verschiedene Werte von $\frac{\tau}{RC}$.

Tiefpass-Filter mit Rechtecksimpuls am Eingang

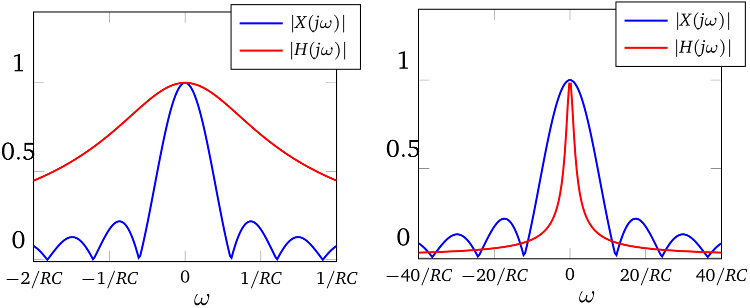


Abbildung: Amplitudengänge von $X(j\omega)$ und $H(j\omega)$ für a) $\frac{\tau}{RC} = 10$ und b) $\frac{\tau}{RC} = \frac{1}{2}$.

Linearphasiges Filter
Beispiel: Allpass

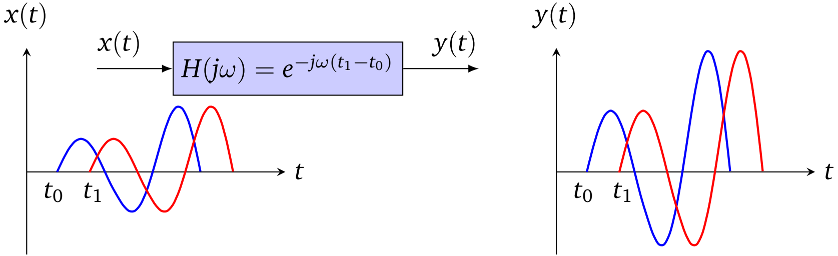
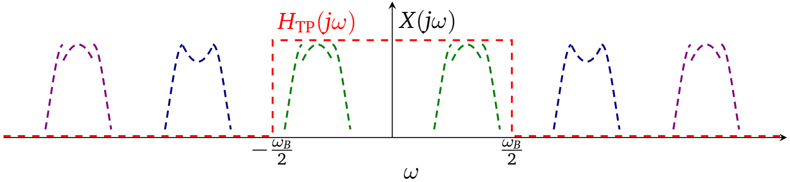
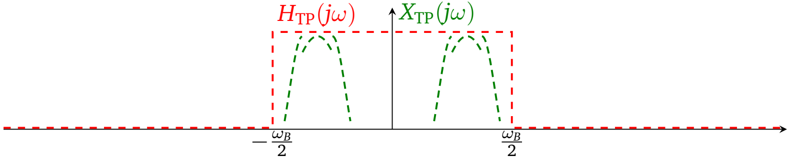


Abbildung: Linearphasiges Filter (Allpass).

- Ein Allpass hat einen konstanten Amplitudengang $|H(j\omega)| = 1$.
- Ist zusätzlich der Phasengang linear, d.h. ($\arg\{H(j\omega)\} = -\omega\tau$), für beliebige Zeitverzögerungen τ, dann ist die Form des Eingangssignals am Ausgang unverändert.
- Dann wirkt sich das Allpassfilter auf das Eingangssignal lediglich in Form eine Zeitverzögerung des Signals um τ aus, d.h, $y(t) = x(t - \tau)$.

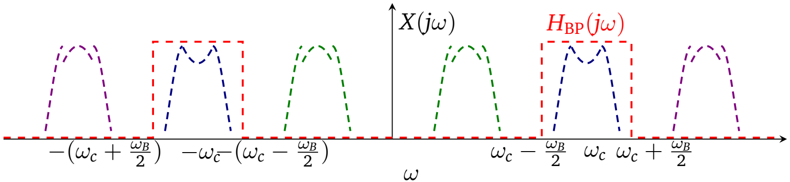
Idealer Tiefpass (reeles Zeitsignal)

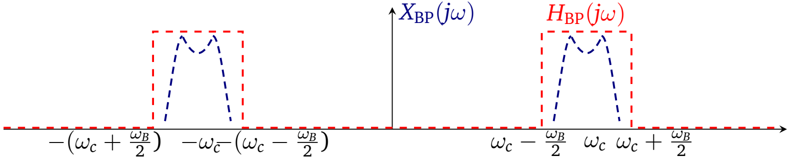




$$
\begin{aligned}
H_{\mathrm{TP}}(j\omega) &= K r_{\frac{\omega_B}{2}}(\omega)\, e^{-j\omega t_0} \\
h_{\mathrm{TP}}(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{H_{\mathrm{TP}}(j\omega)\} = \frac{K\omega_B}{2\pi} \operatorname{sinc}\left[\frac{\omega_B}{2\pi}(t-t_0)\right]
\end{aligned}
$$

Idealer Bandpass (reeles Zeitsignal)

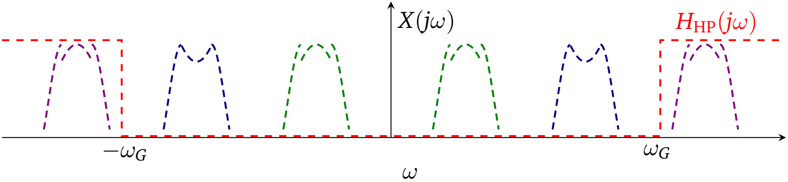


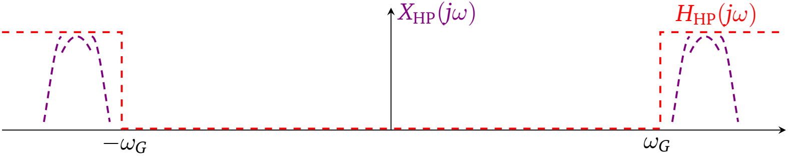


$$H_{\mathrm{BP}}(j\omega) = K\left[r_{\frac{\omega_B}{2}}(\omega-\omega_0) + r_{\frac{\omega_B}{2}}(\omega+\omega_0)\right] e^{-j\omega t_0}$$

$$h_{\mathrm{BP}}(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H_{\mathrm{BP}}(j\omega)\} = \frac{K\omega_B}{\pi}\mathrm{sinc}\left[\frac{\omega_B}{2\pi}(t-t_0)\right]\cos[\omega_0(t-t_0)]$$

Idealer Hochpass (reeles Zeitsignal)





$$
\begin{aligned}
H_{HP}(j\omega) &= K\left[1 - r_{\frac{\omega_B}{2}}(\omega)\right] e^{-j\omega t_0} \\
h_{HP}(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{H_{\mathrm{BP}}(j\omega)\} = K\delta(t-t_0) - \frac{K\omega_B}{2\pi}\mathrm{sinc}\left[\frac{\omega_B}{2\pi}(t-t_0)\right]
\end{aligned}
$$

Ideale Filter

Im Frequenzbereich

- Konstante Verstärkung im Durchlassbereich
- Vollständige Unterdrückung im Stoppbandbereich
- Linear Phase (entspricht konstanter Zeitverzögerung)
- Unendlich steile Flanken am Übergang vom Durchlassbereich zum Stoppbandbereich

Im Zeitbereich

- Nichtkausales Filter (Impulsantwort zu negativen Zeiten verschwindet nicht)
- Unendlich ausgedehnte Impulsantwort

Reale Filter mit endlicher Impulsantwort lassen sich durch Abschneiden (bei positiven und negativen Zeiten) und Verschieben der Impulsantwort generieren.
$\Rightarrow$ Gibbs'sches Phänomen.