Signalabtastung und -rekonstruktion

Zusammenhang zwischen diskreten und kontinuierlichen Signalen und Systemen

- Verbindung zwischen den beiden „Welten“ kontinuierlich und diskret bildet die systemtheoretische Grundlage der digitalen Signalverarbeitung.
- Große praktische Bedeutung, z.B.
  - Multimediabereich, digitale Verarbeitung und Speicherung von Audio- und Videosignalen (CD, DVD, Foto),
  - Nachrichtenübertragung (ISDN, DSL, digitaler Mobilfunk),
  - Regelungs- und Automatisierungtechnik.

Signalabtastung und -rekonstruktion

$$\text{kontinuierliches Signal} \quad \underset{\text{Signalrekonstruktion}}{\overset{\text{Signalabtastung}}{\rightleftarrows}} \quad \text{diskretes Signal}$$

Unter welchen Bedingungen lassen sich kontinuierliche Signale durch diskrete Abtastwerte eindeutig darstellen und wieder rekonstruieren?

Ideale Abtastung

- $x(t)$ kontinuierliches Signal

  $\downarrow$ abtasten

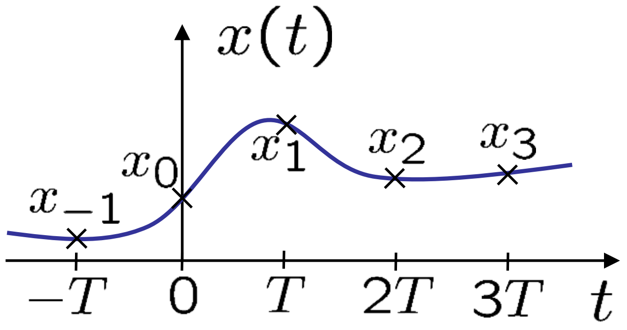
  $x_n = x(t)|_{t=nT},\ n \in \mathbb{Z}$

  x_n Abtastwert, Sample

  T Abtastintervall

  $f_\text{a} = 1/T$ Abtastrate, Abtastfrequenz

  $\omega_\text{a} = 2\pi/T$ Abtastkreisfrequenz



Ideale Abtastung: Systemtheoretische Beschreibung – Zeitbereich

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

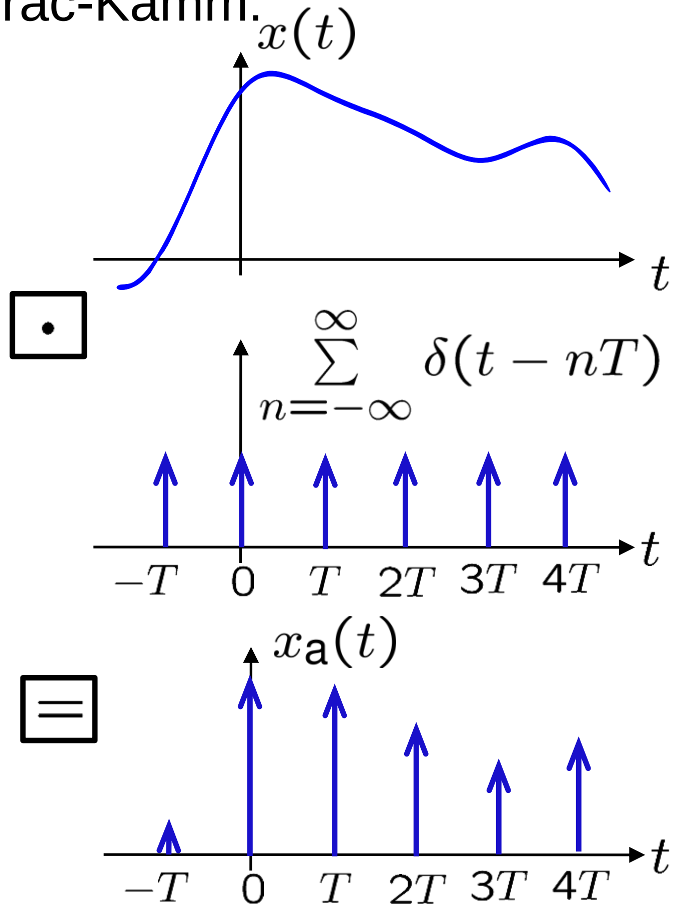
(vgl. Kapitel z-Transformation)

Multiplikation des Signals $x(t)$ mit einem Dirac-Kamm:

$$x_\mathrm{a}(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \delta(t - nT)$$

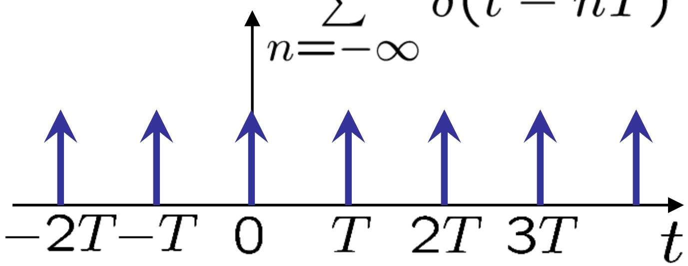


$x_\mathrm{a}(t)$ ideal abgetastetes Signal, kontinuierliche Darstellung, für alle Zeiten t definiert, Null außer für $t = nT$

$x_\mathrm{a}(t)$ darstellbar durch Folge x_n

Ideale Abtastung: Systemtheoretische Beschreibung – Frequenzbereich

$$x_\mathrm{a}(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$



$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{c}_n \cdot e^{jn\omega_\mathrm{a} t} \quad \text{mit } \omega_\mathrm{a} = \frac{2\pi}{T}$$

Periodische Funktion,
darstellbar als Fourierreihe

$$\text{mit } \underline{c}_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) \cdot e^{-jn\omega_\mathrm{a} t} dt = \frac{1}{T}$$

Ideale Abtastung: Systemtheoretische Beschreibung – Frequenzbereich

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$x_{\mathsf{a}}(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \cdot e^{jn\frac{2\pi}{T}t}$$

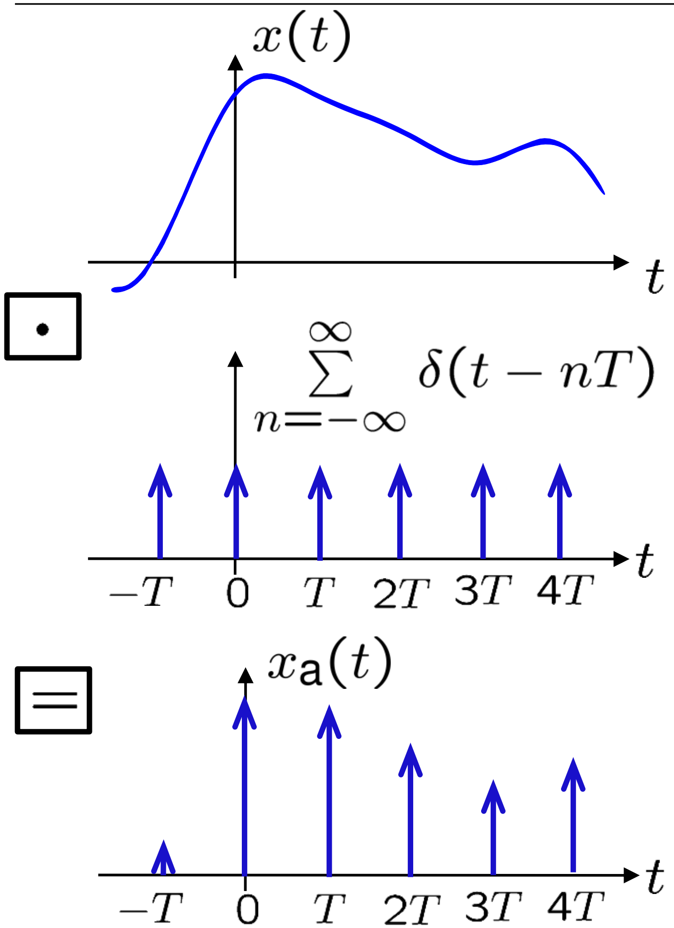
$$\circ\!\!-\!\!\bullet\ \mathcal{F}$$

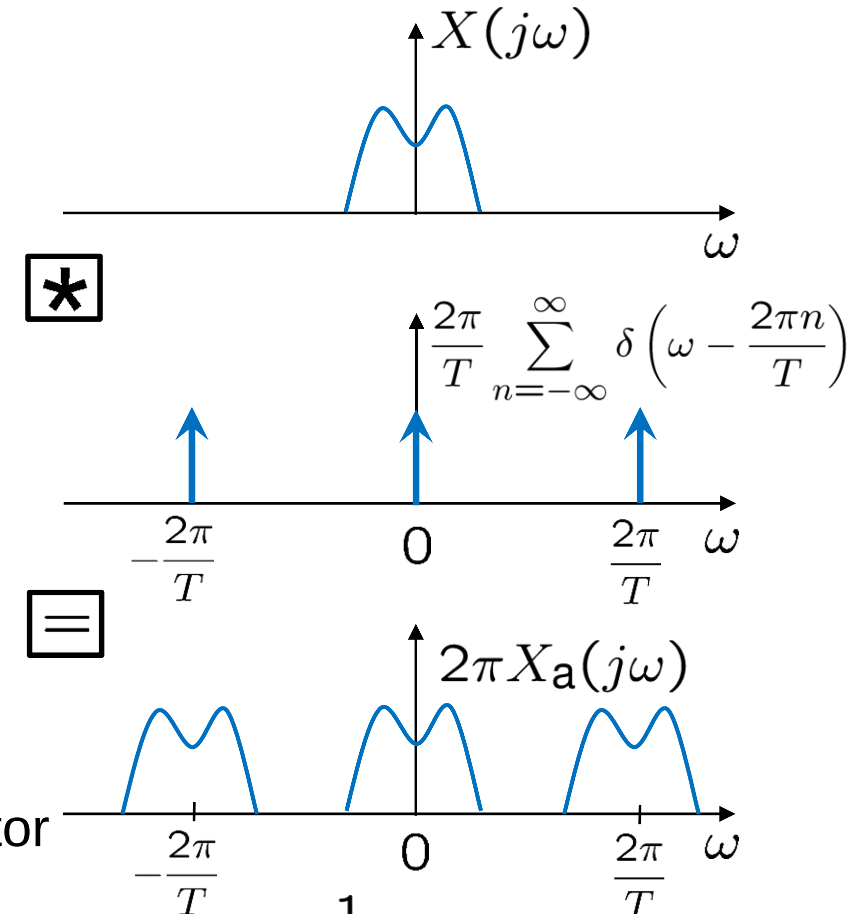
$$X_{\mathsf{a}}(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \cdot 2\pi\delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{T}\right)$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(j\left(\omega - \frac{2\pi n}{T}\right)\right)$$

Skalierte periodische Fortsetzung des ursprünglichen Spektrums im Abstand $\omega = \omega_{\mathsf{a}} = 2\pi/T$

Ideale Abtastung: Veranschaulichung im Zeit- und Frequenzbereich



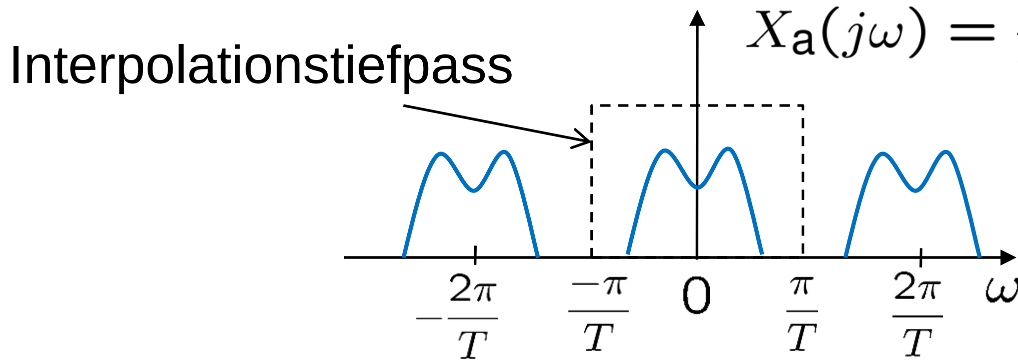


und Faktor 2π,
weil $x_1(t) \cdot x_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{2\pi} X_1(j\omega) * X_2(j\omega)$

Ideale Rekonstruktion: Systemtheoretische Beschreibung ─ Frequenzbereich

- Man erhält $X(j\omega)$ aus $X_{\mathsf{a}}(j\omega)$ und damit $x(t)$ aus $x_{\mathsf{a}}(t)$, indem man die periodischen Fortsetzungen des Spektrums mit Hilfe eines Tiefpasses wegfiltert.

$$X_{\mathsf{a}}(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(j\left(\omega - \frac{2\pi n}{T}\right)\right)$$



- Idealer Tiefpass mit Grenzkreisfrequenz gleich der halben Kreisfrequenz der periodischen Fortsetzung:

$$H_{\mathsf{TP}}(j\omega) = T \cdot r_{\frac{\pi}{T}}(\omega) = T \cdot r_{\frac{\omega_{\mathsf{a}}}{2}}(\omega)$$

- $\tilde{X}(j\omega) = X_{\mathsf{a}}(j\omega) \cdot H_{\mathsf{TP}}(j\omega)$
  und $\tilde{X}(j\omega) = X(j\omega)$ unter gewissen Bedingungen, siehe Abtasttheorem

Ideale Rekonstruktion: Systemtheoretische Beschreibung – Zeitbereich

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$H_{\mathsf{TP}}(j\omega) = T \cdot r_{\frac{\pi}{T}}(\omega) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad h_{\mathsf{TP}}(t) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{T}t\right)}{\frac{\pi}{T}t} = \mathsf{si}\left(\pi\frac{t}{T}\right)$$

$$\tilde{X}(j\omega) = X_{\mathsf{a}}(j\omega) \cdot H_{\mathsf{TP}}(j\omega)$$

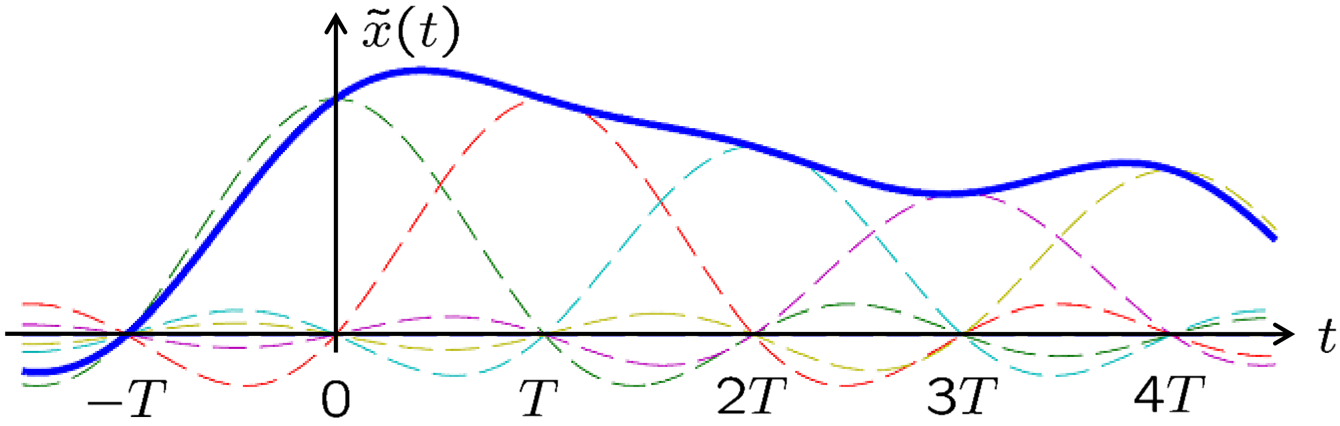
$$\bullet\!\!-\!\!\circ$$

$$\begin{aligned}\tilde{x}(t) &= x_{\mathsf{a}}(t) * h_{\mathsf{TP}}(t) \\ &= \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \delta(t-nT)\right] * \mathsf{si}\left(\pi\frac{t}{T}\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \cdot \mathsf{si}\left(\pi \cdot \frac{t-nT}{T}\right)\end{aligned}$$

für $t = kT$ ist nur der k-te Summand ungleich Null

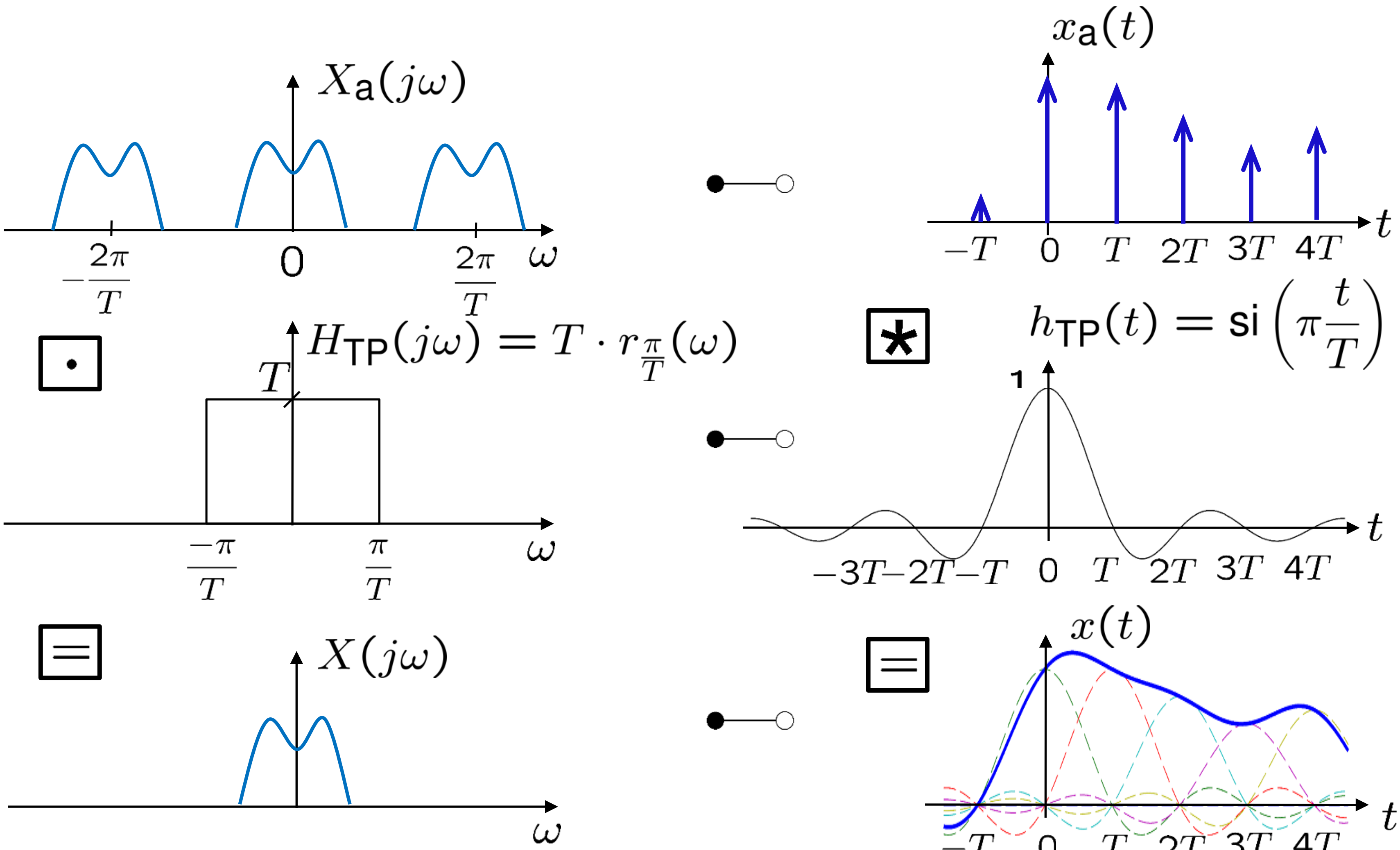
und $\tilde{x}(t) = x(t)$ unter gewissen Bedingungen, siehe Abtasttheorem.

Ideale Rekonstruktion: Systemtheoretische Beschreibung — Zeitbereich



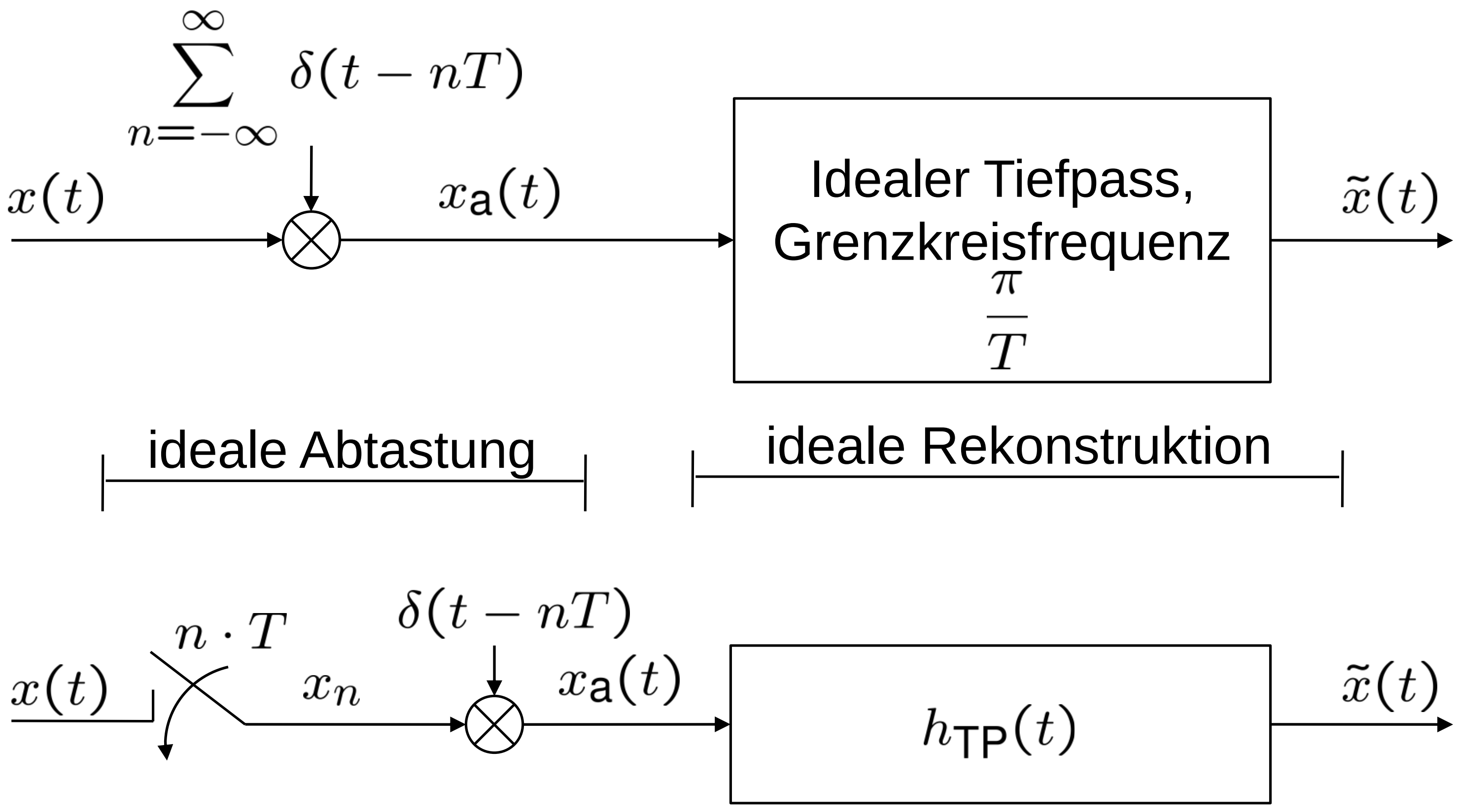
- Stetiger Signalverlauf $\tilde{x}(t)$ wird aus dem abgetasteten Signal $x_{\mathrm{a}}(t)$ *rekonstruiert*, *Interpolation* der Abtastwerte.

Ideale Rekonstruktion: Veranschaulichung im Frequenz- und Zeitbereich



Vorgang der Abtastung und Rekonstruktion

Systemtheoretische Darstellung



ideale technische Realisierung

Abtasttheorem

- Unter welchen Bedingungen können wir ein kontinuierliches Signal aus seinen Abtastwerten wieder *fehlerfrei* rekonstruieren, d.h. $\tilde{x}(t) = x(t)$?

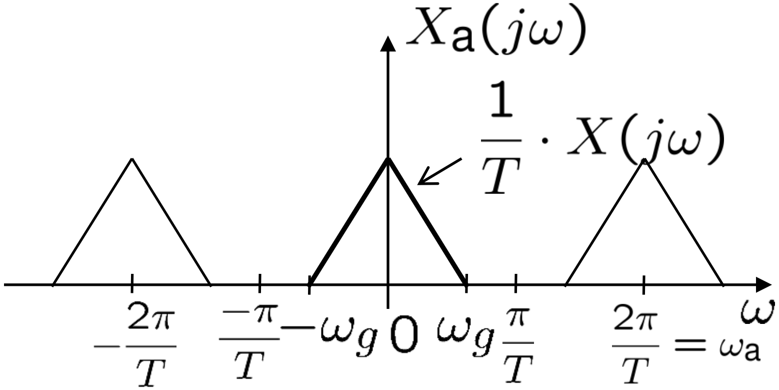
- Abtasten eines Signal $x(t)$ mit Abtastkreisfrequenz $\omega_\mathrm{a} = 2\pi/T$

$\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet$

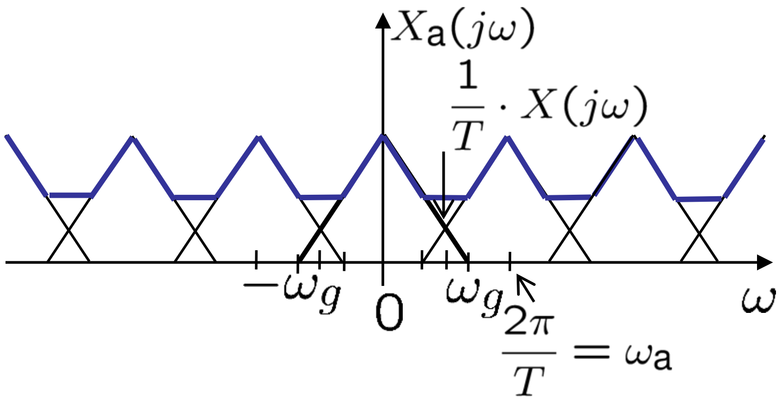
Periodische Fortsetzung des Spektrums $X(j\omega)$ mit $\omega_\mathrm{a} = 2\pi/T$

- Bedingungen, damit sich die periodischen Fortsetzungen nicht überlappen:
  - Signal $x(t)$ muss *bandbegrenzt* sein, Grenzkreisfrequenz ω_g .
  - Abtastkreisfrequenz muss größer als die doppelte Grenzkreisfrequenz ω_g des Signals sein, d.h. $\omega_\mathrm{a} > 2\omega_g$

Spektren bei Abtastung



$\omega_a > 2\omega_g$



$\omega_a < 2\omega_g$

Überabtastung,
periodische Fortsetzungen
überlappen sich nicht,
kein Aliasing.

Fehlerfreie Rekonstruktion
von $X(j\omega)$ mittels Tiefpass
möglich.

Unterabtastung,
periodische Fortsetzungen
überlappen sich,
Aliasing (Spektrale Überfaltung).

Fehlerfreie Rekonstruktion
von $X(j\omega)$ nicht möglich.

Abtasttheorem

Jedes *bandbegrenzte* Signal $x(t)$ lässt sich eindeutig mit Hilfe von Abtastwerten $x_n = x(nT)$ darstellen.

Die Abtastkreisfrequenz $\omega_{\mathsf{a}} = 2\pi/T$ muss dazu größer als die doppelte Grenzkreisfrequenz ω_g (maximale Kreisfrequenz) des Signals gewählt werden:

$$\omega_{\mathsf{a}} > 2\omega_g$$

Die doppelte Grenzfrequenz $2\omega_g/2\pi = 2f_g$ (= minimale Abtastrate) bezeichnet man auch als Nyquistrate.

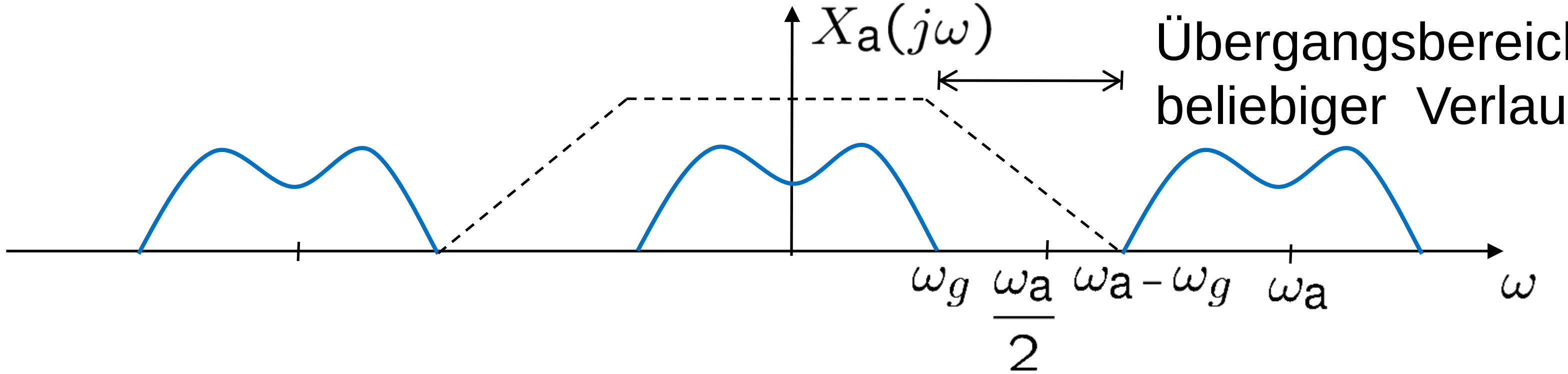
Beachte: Die Abtastkreisfrequenz $\omega_{\mathsf{a}} = 2\omega_g$ (statt $\omega_{\mathsf{a}} > 2\omega_g$) ist ausreichend, wenn bei $\omega = \pi/T$ kein Dirac-Impuls vorliegt.

Praktische Aspekte bei der Abtastung

- Der Abtastung wird i.d.R. ein Anti-Aliasing-Tiefpass vorgeschaltet. Beispiel: Digitalisierung verschiedener Signale:

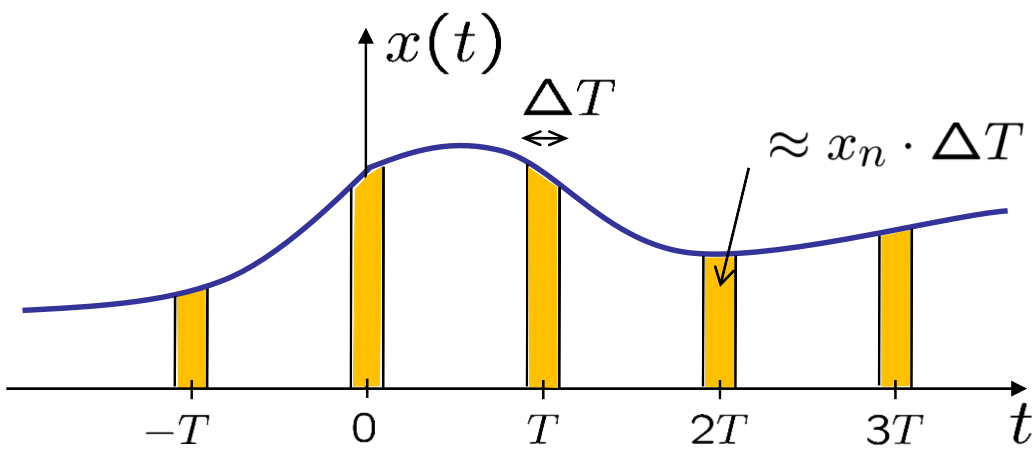
	Grenzfrequenz $f_{g,\text{alias}}$ des Tiefpasses	Abtastrate f_a
Telefonsignal	3,4 kHz	8 kHz
Audiosignal	20 kHz	48 kHz
S/W Bildsignal	5 MHz	13,5 MHz

- Bei Abtastrate > Nyquistrate (Überabtastung) ist eine fehlerfreie Rekonstruktion mit einem nichtidealen Tiefpassfilter möglich.



Nichtideale Abtastung

- Dirac-Abtaster technisch nicht realisierbar.
- Abtastung wird i.d.R. mit Hilfe eines Abtasthaltegliedes (Sample-and-Hold-Glied) realisiert:
  elektronischer Schalter, der periodisch für kurze, endliche Zeitdauer ΔT schließt und während dieser Zeitspanne einen Kondensator auf die Signalspannung auflädt (Kurzzeitintegration).



Nichtideale Rekonstruktion

- Dirac-Impulsgenerator technisch nicht realisierbar.
- Bei realen Digital-Analog-Wandlern versucht man nicht, $x_{\mathrm{a}}(t)$ mit hohen, schmalen Impulsen anzunähern, sondern erzeugt aus den Abtastwerten x_n mit Hilfe eines Haltegliedes ein treppenförmiges Ausgangssignal $x_{\mathrm{tr}}(t)$.