Diskrete Signale

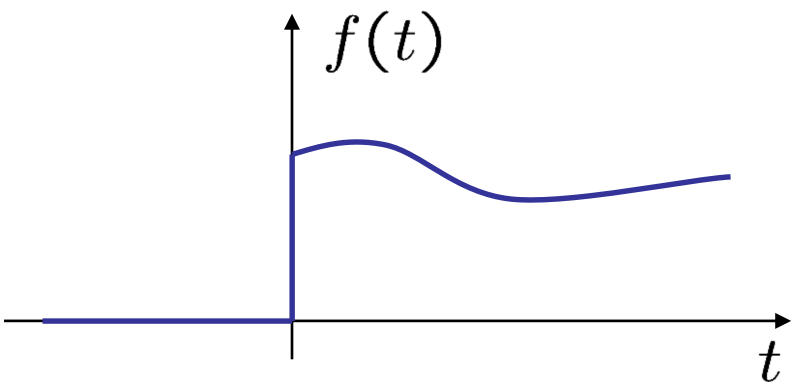
Literatur für Teil 2 der Vorlesung:

T. Frey, M. Bossert: Signal- und Systemtheorie, Teubner-Verlag

Kontinuierliche Signale

Ein (zeit-) kontinuierliches Signal wird durch eine reelle oder komplexe Funktion $f(t) \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C})$ einer reellen Veränderlichen $t \in \mathbb{R}$ dargestellt.

- Wertebereich: $\mathbb{R}\ (\mathbb{C})$
- Definitionsbereich: $\mathbb{R}$

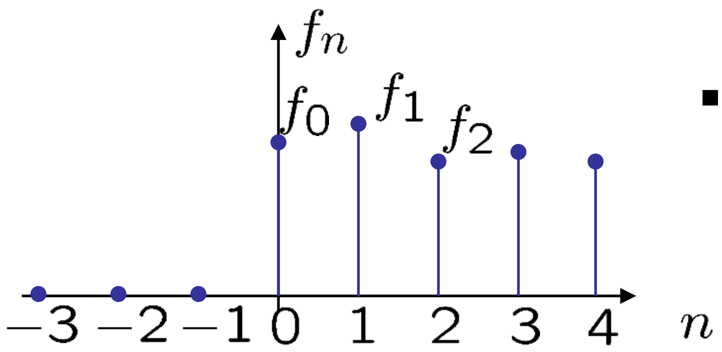


Zeitkontinuierliche Signale lassen sich nicht mit Hilfe von Digitalrechnern verarbeiten

Diskrete Signale

Ein (zeit-) diskretes Signal wird durch eine Folge reeller oder komplexer Zahlen $f_n = f(n) \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C}),\ n \in \mathbb{Z}$ dargestellt.

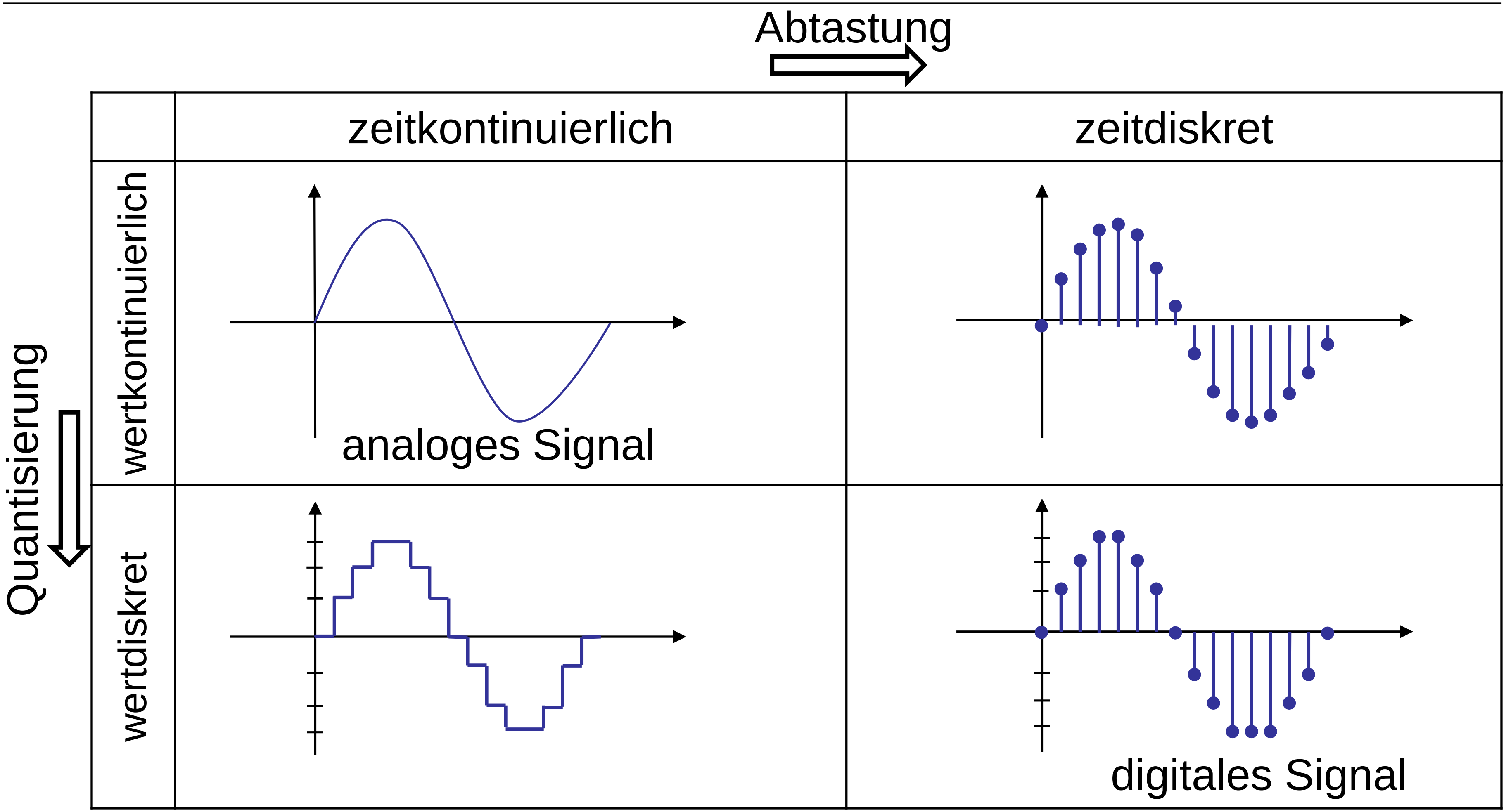
- Wertebereich: $\mathbb{R}\ (\mathbb{C})$
- Definitionsbereich: $\mathbb{Z}$



- Fall 1: von sich aus diskretes Signal, z.B. täglicher Börsenschlusskurs
- Fall 2: aus analogem Signal abgeleitet: $f_n = f(nT)$

Übersicht kontinuierliche und diskrete Signale

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT



Abtastung + Quantisierung = A/D - Wandlung

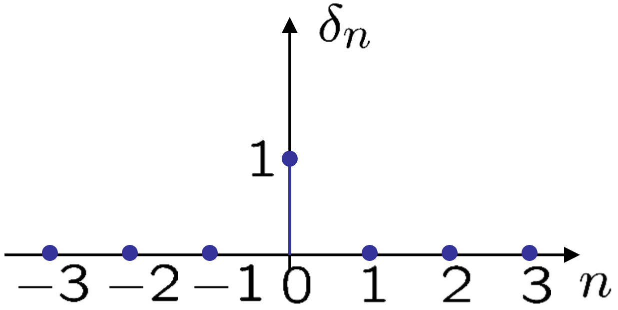
Praktische Betrachtungen zu digitalen Signalen, die aus analogen abgeleitet sind

- Zeitkontinuierliches Signal $f(t)$ wird in eine reine Zahlendarstellung übersetzt.
- Dadurch wird der Einsatz digitaler Übertragungsverfahren, digitaler Signalverarbeitung, digitaler Regelungen usw. möglich.
- Annahmen im Folgenden:
  - Abtastung des zeitkontinuierlichen Signals $f(t)$ zu äquidistanten diskreten Zeitpunkten $t = nT$, $T =$ konstant. *T* heißt Abtastintervall.
  - Einfluss der Amplitudenstufung bei Quantisierung vernachlässigbar wegen hoher Auflösung.
- Die Wahl des Abtastintervalls *T* werden wir im Abschnitt „Abtastung“ behandeln.

Elementare diskrete Signale: Impulsfolge

- Impuls zum Zeitpunkt Null:

$$\delta_n = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0 \\ 0 & \text{für } n \neq 0 \end{cases}$$



diskreter Deltaimpuls,

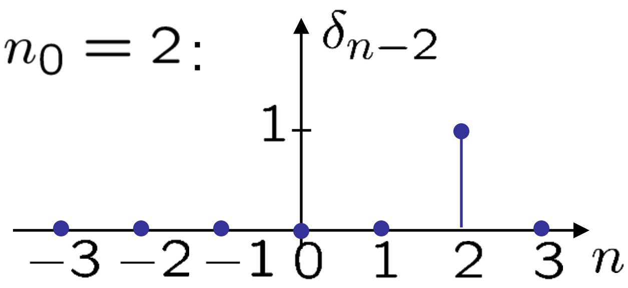
Einheitsimpuls,

Kronecker – Delta

- Verschobener Impuls:

$$\delta_{n-n_0} = \begin{cases} 1 & \text{für } n = n_0 \\ 0 & \text{für } n \neq n_0 \end{cases}$$

Für $n_0 = 2$:



Elementare diskrete Signale: Impulsfolge

- Abtast- oder Ausblendeigenschaft:

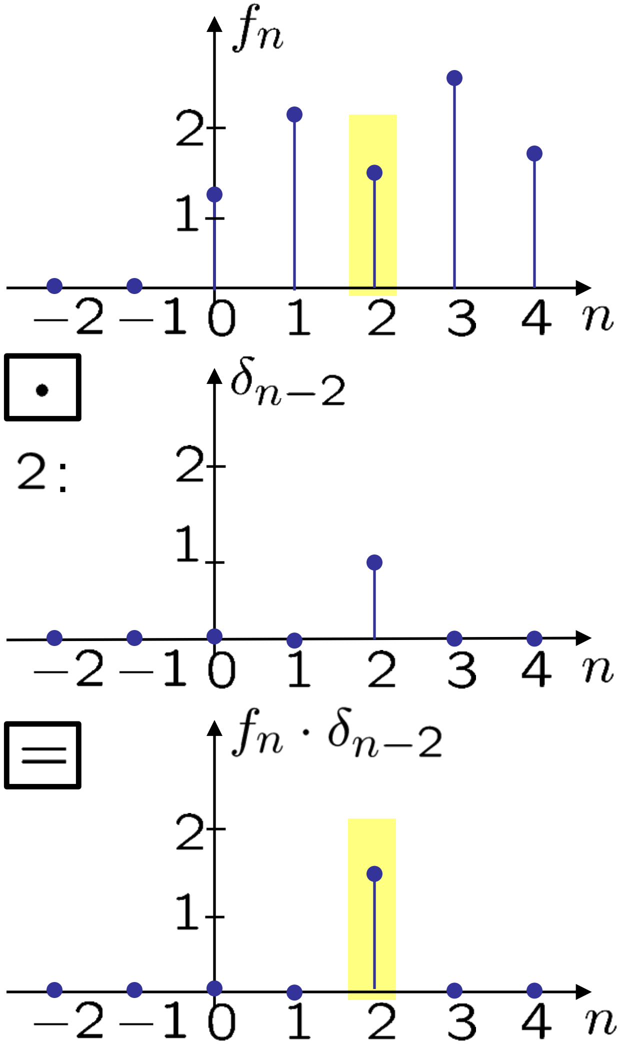
$$f_n \cdot \delta_{n-n_0} = f_{n_0} \cdot \delta_{n-n_0}$$

Alle Werte der Folge bis auf *einen* werden ausgeblendet.

- Daraus folgt:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \cdot \delta_{n-n_0}$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_{n_0} \delta_{n-n_0} = f_{n_0}$$

Für $n_0 = 2$:

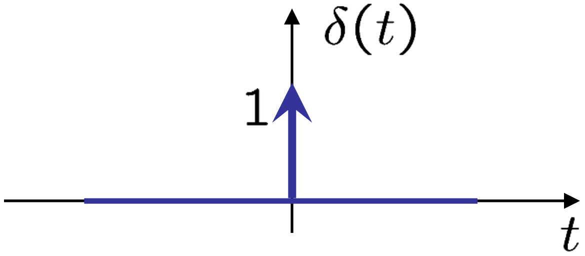


- Andere Interpretation: Jede Folge f_{n_0} lässt sich als Summe (Überlagerung) verschobener und gewichteter Deltaimpulse darstellen.

Vergleich Impulsfolge δ_n und Dirac-Impuls $\delta(t)$

- Dirac-Impuls zum Zeitpunkt Null:

$$\delta(t) = \begin{cases} \textit{unendlich}\text{, Gewicht 1 für } t = 0\,, \\ \quad \text{d.h. } \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1 \\ 0 \quad \text{für } t \neq 0 \end{cases}$$



Distribution

- Verschobener Dirac:

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} \text{unendlich, Gewicht 1 für } t = t_0 \\ 0 \quad \text{für } t \neq t_0 \end{cases}$$

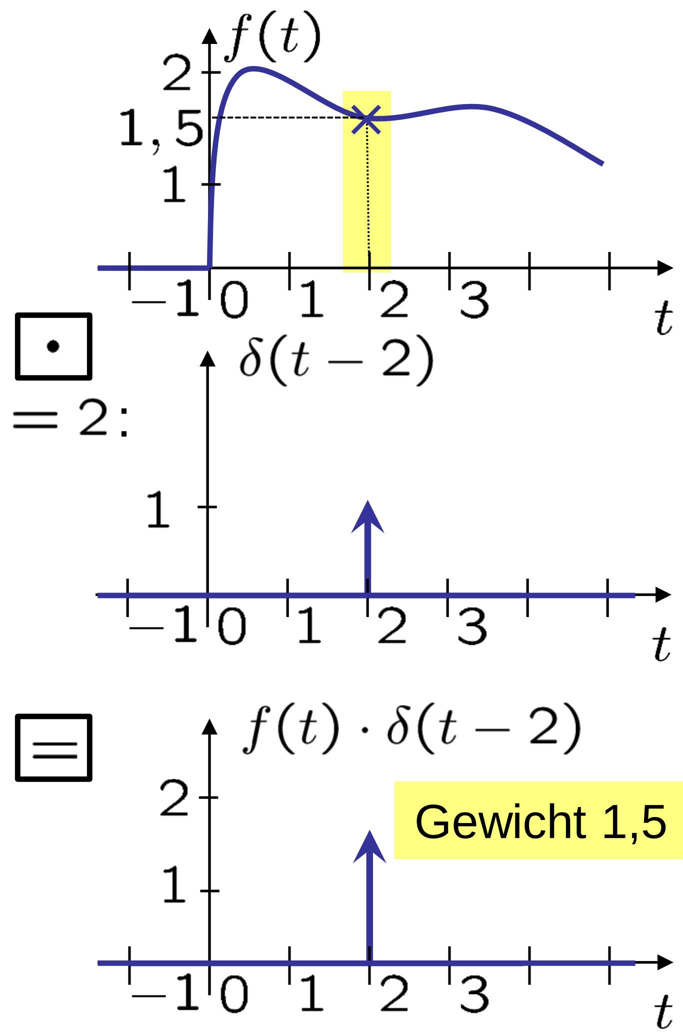
Vergleich Impulsfolge δ_n und Dirac-Impuls $\delta(t)$

- Abtast- oder Ausblendeigenschaft:

$$f(t) \cdot \delta(t - t_0) = f(t_0) \cdot \delta(t - t_0)$$

Alle Werte der Funktion bis auf *einen* werden ausgeblendet. Dieser bestimmt das *Gewicht* des Dirac-Impulses.

Für $t_0 = 2$:



- Daraus folgt:

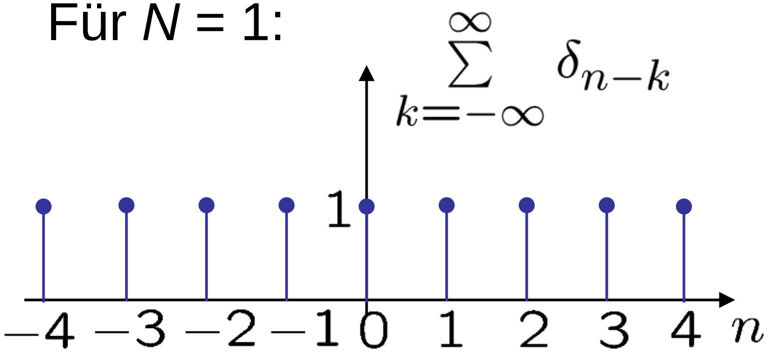
$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t_0)\delta(t - t_0)dt \\ &= f(t_0) \end{aligned}$$

Elementare diskrete Signale: Diskreter Deltakamm

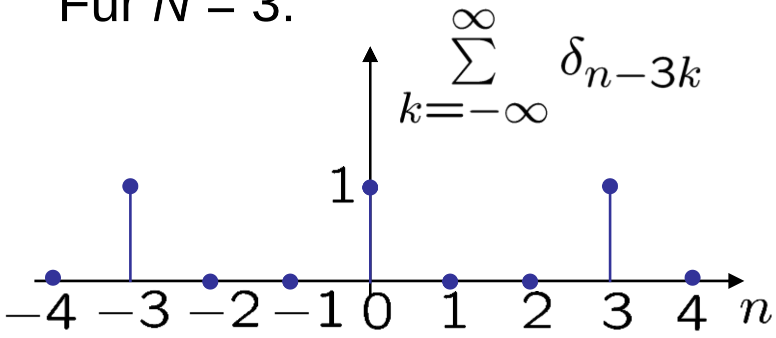
Der diskrete Deltakamm für $N \in \mathbb{N}$ ist gegeben durch

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{n-kN}$$

Für N = 1:



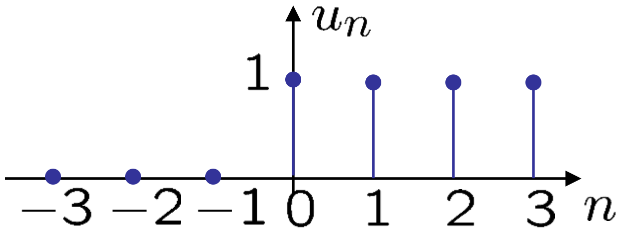
Für N = 3:



Elementare diskrete Signale: (Einheits-) Sprungfolge

Einheitssprungfolge:

$$u_n = \begin{cases} 1 & \text{für } n \geq 0 \\ 0 & \text{für } n < 0 \end{cases}$$

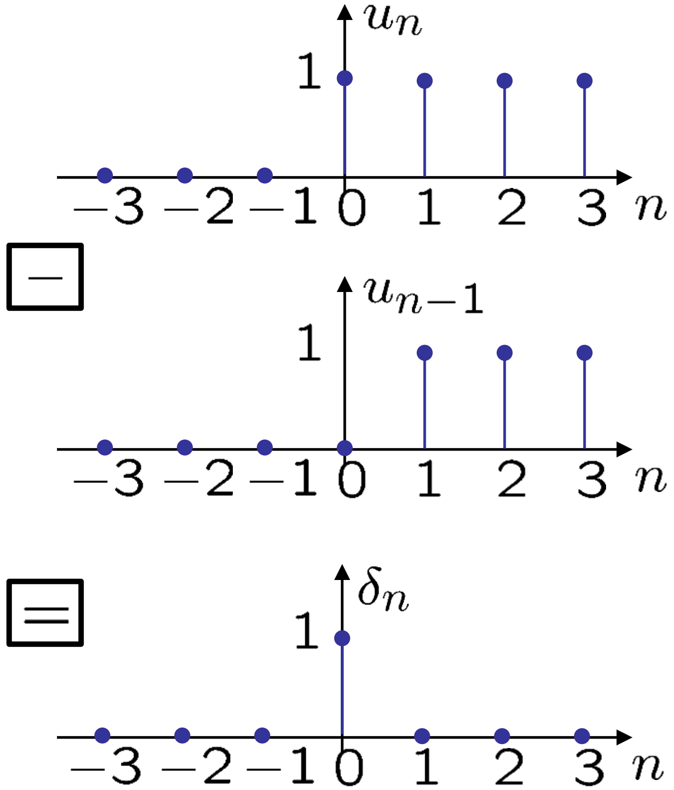


Zusammenhang zwischen Impulsfolge und Sprungfolge

$$\delta_n = u_n - u_{n-1}$$

erste Differenz der Einheitssprungfolge

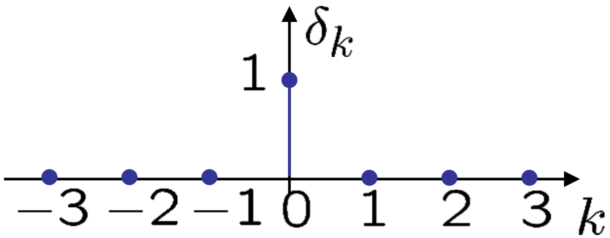
(entspricht Ableitung in Zeitkontinuierlichen)



$$u_n = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta_k$$

Summe von $-\infty$ bis n.

(entspricht Integral im Zeitkontinuierlichen)



Summe bis $k = n = -2$

Summe bis $k = n = 2$

Elementare diskrete Signale: Exponentialfolge

- Exponentialfolge:

$$f_n = a^n = e^{\beta n},\ a, \beta \in \mathbb{C},\ a = e^{\beta}$$

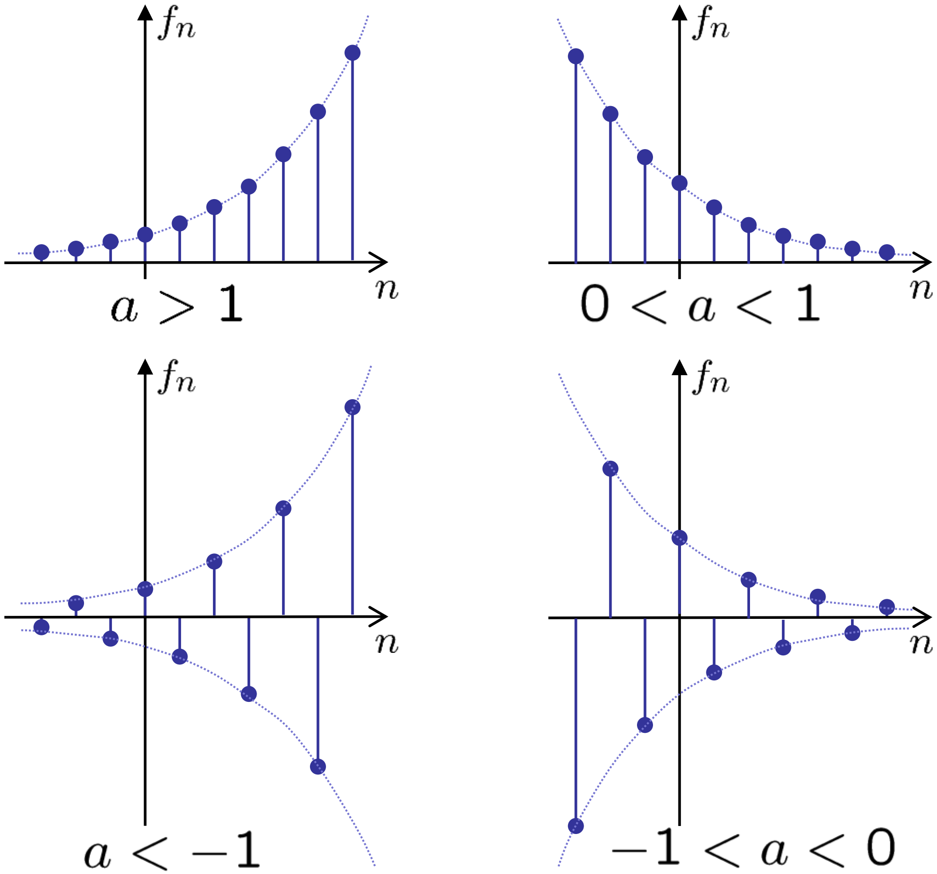
  - Abklingend für

    $|a| < 1$ oder $\Re\{\beta\} < 0$

  - Aufklingend für

    $|a| > 1$ oder $\Re\{\beta\} > 0$

Spezialfall: a reell:



Elementare diskrete Signale: Exponentialfolge, Cosinus- und Sinusfolgen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Exponentialfolge: $f_n = a^n = e^{\beta n}, \quad a, \beta \in \mathbb{C}, a = e^{\beta}$
- Spezialfall der Exponentialfolge: $a = e^{j\omega}$, $\beta = j\omega$, somit β rein imaginär.

$$f_n = e^{j\omega n} = \underbrace{\cos(n\omega)}_{\text{Cosinusfolge}} + j \underbrace{\sin(n\omega)}_{\text{Sinusfolge}}$$

- Cosinus- und Sinusfolgen: Mit komplexen Exponentialfunktionen können Sinus- und Cosinusfolgen dargestellt werden.
  - Cosinusfolge:

$$\cos(n\omega + \phi) = \frac{1}{2}\left(e^{j\phi}e^{jn\omega} + e^{-j\phi}e^{-jn\omega}\right)$$

  - Sinusfolge:

$$\sin(n\omega + \phi) = \frac{1}{2j}\left(e^{j\phi}e^{jn\omega} - e^{-j\phi}e^{-jn\omega}\right)$$

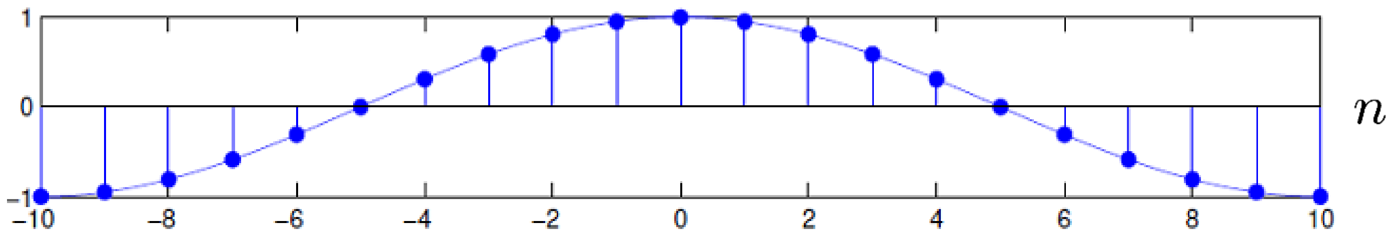
Frequenzperiodizität komplexer Exponentialfolgen

- Jede komplexe Exponentialfolge f_n ist *frequenzperiodisch,* d.h. sie ergibt sich nicht nur für ω, sondern auch für andere Frequenzen $\omega \pm m \cdot 2\pi,\ m \in \mathbb{Z}$, denn

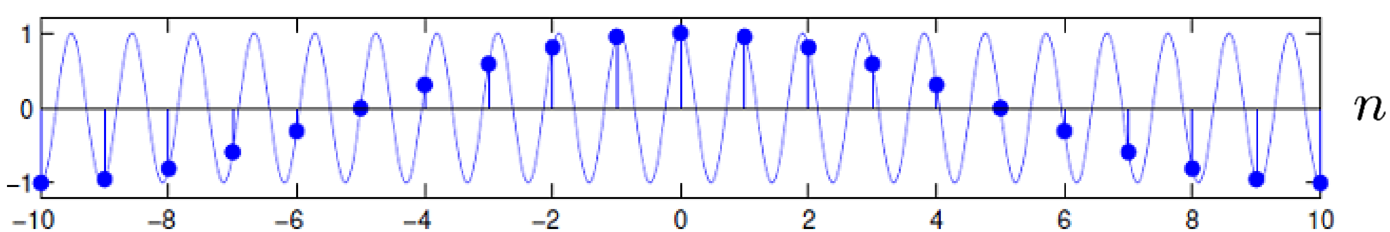
$$f(n) = e^{j(\omega + m2\pi)n} = e^{j\omega n}$$

- Ein um $m \cdot 2\pi$ höherfrequentes komplexes Exponentialsignal hat die gleichen Abtastwerte wie seine niederfrequente Version:

$\cos(0,1\pi n)$



$\cos(2,1\pi n)$



Zeitperiodizität komplexer Exponentialfolgen

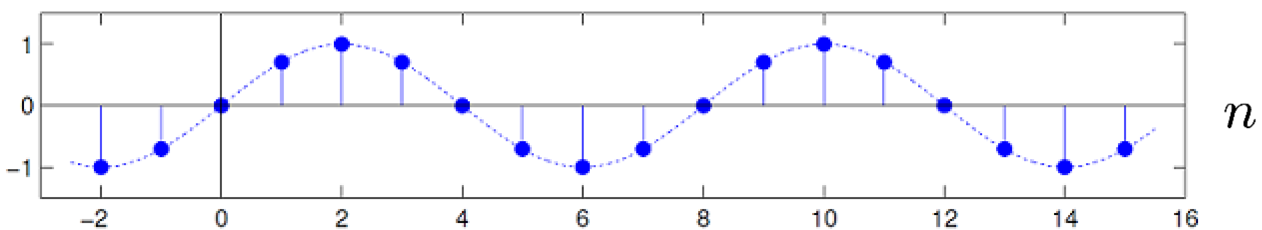
- Komplexe Exponentialfolgen sind *frequenzperiodisch*, *aber nicht immer zeitperiodisch.*
- Bedingung für die Zeitperiodizität einer abgetasteten Exponentialfolge nach *N* Abtastwerten:

$$e^{j\omega(n+N)} = e^{j\omega n}$$

$$\Rightarrow e^{j\omega N} = 1 \Leftrightarrow \omega N = m \cdot 2\pi, m \in \mathbb{Z}$$

Das heißt, $\frac{\omega}{2\pi}$ muss eine rationale Zahl $\frac{m}{N}$ sein.

$\sin(n\frac{\pi}{4})$



$\sin(n)$