# Vorlesung
# Deterministische Signale und Systeme

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

**Marius Pesavento**

## Copyright

- The presented material is part of a lecture taught at Technische Universität Darmstadt.
- The lecture material is only intended for the students of the class.
- All lecture material, figures and content is used under the legal framework of §60a UrhG.
- Dissemination or disclosure of material of this course (pdf documents, videos, animations, and others) in part of as a whole in not permitted.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

# Zusammenfassung WP3 – Lerneinheit 9
# Eigenschaften Fouriertransformation

# Fourier-Transformation

Transformationspaar

$$x(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\, X(j\omega)$$

Transformation in den Frequenzbereich:

$$X(j\omega) \quad = \quad \mathcal{F}\left\{x(t)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} \mathrm{d}t$$

Rücktransformation in den Zeitbereich:

$$x(t) \quad = \quad \mathcal{F}^{-1}\left\{X(j\omega)\right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} \mathrm{d}\omega$$

# Eigenschaften der Fourier-Transformation: Dualität

Die Hin- und Rücktransformation der FT erfüllt folgende **Dualitätsbeziehung** (Symmetriebeziehung):

$$X(jt) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\, 2\pi x(-\omega)$$

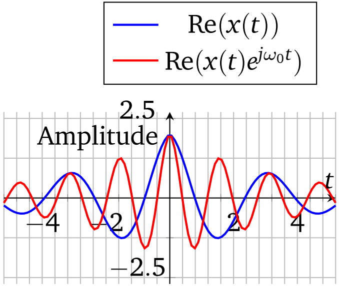
Mithilfe der Dualitätseigenschaft lässt sich z.B. die Fouriertransfomierte für solche Signale (bzw. Zeitbereichsfunktionen) berechnen, für die in der Korrespondenztabelle lediglich ein entsprechendes Signal als Frequenzbereichsfunktion gegeben ist.

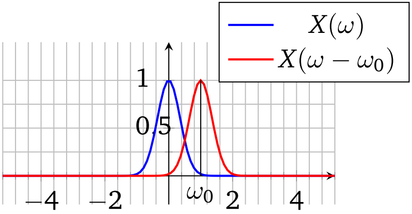
# Eigenschaften der Fourier-Transformation: Frequenzversatz

Für eine **Frequenzverschiebung** der FT $X(j\omega)$ um $\omega_0$ gilt die folgende Eigenschaft,

$$x(t)e^{j\omega_0 t} \circ\!\!-\!\!\bullet X\left(j(\omega-\omega_0)\right)$$

wobei $\omega_0$ eine reelle Konstante darstellt. Die Multiplikation des Signals $x(t)$ mit der komplexen Harmonischen $e^{j\omega_0 t}$ wird als **Modulation im Zeitbereich** bezeichnet.



# Eigenschaften der Fourier-Transformation: Differentiation nach der Zeit

$n$-te **Ableitung** des Signals $x(t)$ nach der Zeit

$$x^{(n)}(t) = \frac{\mathrm{d}^n x(t)}{\mathrm{d}t^n} \circ\!\!-\!\!\bullet\, (j\omega)^n X(j\omega)$$

Von Bedeutung bei Behandlung von Differentialgleichungen im Frequenzbereich, z.B. bei der Beschreibung realer Systeme wie RLC - Schwingkreisen,...

# Zusammenhang Impulsantwort und Übertragungsfunktion

Bereits bekannt: Ausgangssignal eines **LTI Systems** mithilfe Faltungsintegral vollständig durch Impulsantwort $h(t)$ des Systems (und Eingangssignal) beschrieben.

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)\mathrm{d}\,\tau$$

**Eingangs-Ausgangsbeziehung** eines LTI Systems im **Frequenzbereich**

$$x(t) * h(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\, X(j\omega) \cdot H(j\omega),$$

wobei $x(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\, X(j\omega)$ und $h(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\, H(j\omega)$.

# Fourier-Transformation des Impulszugs

Fourierreihenentwicklung von $y(t)$:

$$y(t) = \frac{\omega_s}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_s n t}$$

Aus $\mathcal{F}\{e^{j\omega_s n t}\} = 2\pi\delta(\omega - n\omega_s)$

$$y(t) = \frac{\omega_s}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_s n t} \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \omega_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s)$$