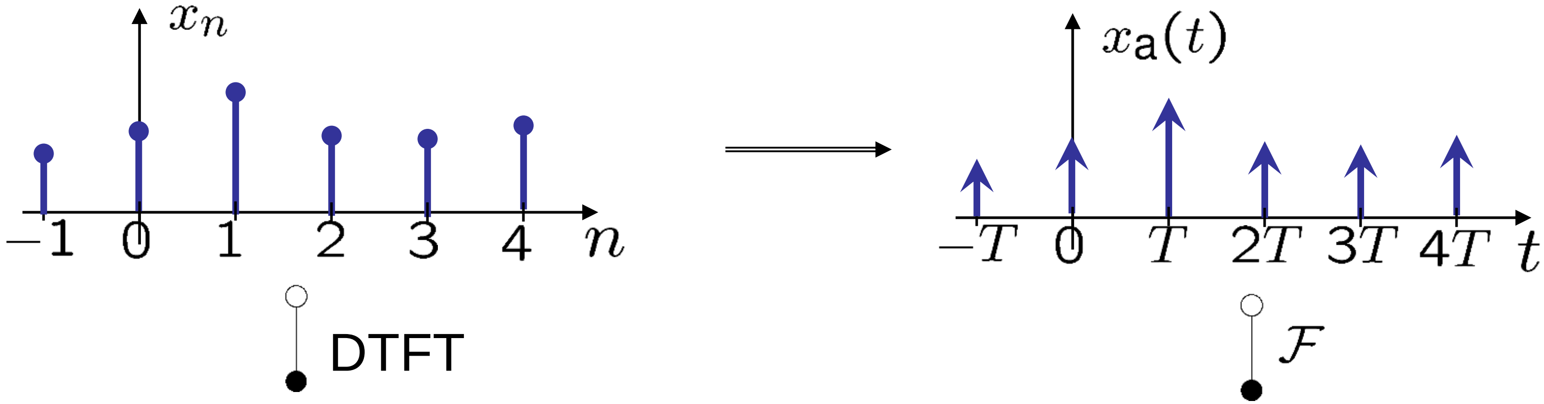
Zeitdiskrete Fourier-Transformation (DTFT)

Zeitdiskrete Fourier-Transformation

- Zeitdiskrete Fourier-Transformation, Discrete-Time Fourier Transform, DTFT: hat für Zahlenfolgen die gleiche Bedeutung wie die Fourier-Transformation für zeitkontinuierliche Signale.
- Wir entwickeln die DTFT aus der Fourier-Transformation für ideal abgetastete Funktionen $x_{\mathrm{a}}(t)$.



Zeitdiskrete Fourier-Transformierte von x_n $\Longleftarrow$ Fourier-Transformierte $X_{\mathrm{a}}(j\omega)$

- Die DTFT ordnet einer Folge x_n ein periodisches, kontinuierliches Spektrum zu.

Entwicklung der DTFT aus der Fourier-Transformation

Zusammenhang zwischen Folge x_n und ideal abgetasteter Funktion $x_{\mathsf{a}}(t)$:

$$x_{\mathsf{a}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \cdot \delta(t - nT)$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet \; \mathcal{F}$$

$$X_{\mathsf{a}}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_{\mathsf{a}}(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \delta(t - nT) e^{-j\omega t} dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) e^{-j\omega nT} dt =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-j\omega nT} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) dt}_{=1}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-j\omega nT}$$

Entwicklung der DTFT aus der Fourier-Transformation

- Fourier-Transformierte:

$$X_{\mathrm{a}}(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-j\omega n T}$$

- Wir ersetzen $\Omega = \omega T$:

$$X_{\mathrm{a}}(j\omega)|_{\Omega=\omega T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-j\Omega n} =: X(j\Omega)$$

Zeitdiskrete Fourier-Transformierte

Ω : diskrete Kreisfrequenz, ω normiert auf die Abtastfrequenz $1/T$, dimensionslos

- Die zeitdiskrete Fourier-Transformierte ist die Fourier-Transformierte der ideal abgetasteten Funktion $x_{\mathrm{a}}(t)$ mit Variablensubstitution $\Omega = \omega T$.

Zeitdiskrete Fourier-Transformation, DTFT

- Zeitdiskrete Fourier-Transformierte der Folge x_n :

$$\boxed{X(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-j\Omega n}, \quad \Omega = \omega T}$$

- Die DTFT ordnet der reellen oder komplexen *Folge* x_n eine *Funktion* $X(j\Omega)$ der reellen Variablen Ω zu. Die Zuordnung ist eindeutig.
- Schreibweisen:

$$\begin{aligned} X(j\Omega) &= \mathcal{F}\{x_n\} \\ x_n &= \mathcal{F}^{-1}\{X(j\Omega)\} \\ x_n &\circ\!\!-\!\!\bullet\ X(j\Omega) \\ X(j\Omega) &\bullet\!\!-\!\!\circ\ x_n \end{aligned}$$

- Beachte die Ähnlichkeit zur z-Transformation:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n}$$

Periodizität der zeitdiskreten Fourier-Transformierten

- $$X(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-j\Omega n}, \quad \Omega = \omega T$$

  Periodizität: $X(j\Omega)$ ist periodisch mit $\Omega = 2\pi$,

  denn $e^{-j(\Omega+2\pi)n} = e^{-j\Omega n} \underbrace{e^{-j2\pi n}}_{=1} = e^{-j\Omega n}$

  Grundperiode: $-\pi \leq \Omega \leq \pi$

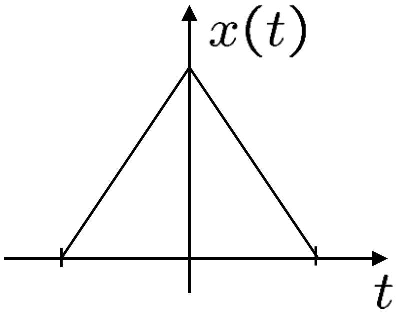
  oft gibt man nur die Grundperiode von $X(j\Omega)$ an.

- $$X_{\mathrm{a}}(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-j\omega n T}$$

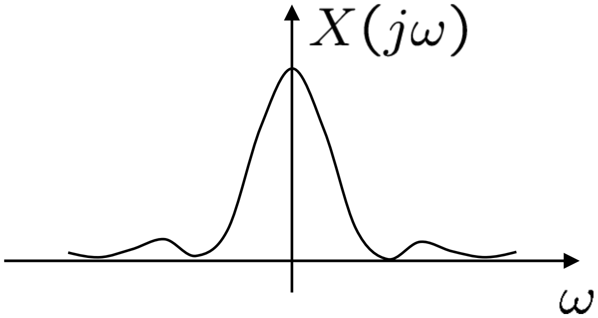
  Periodizität: $X_{\mathrm{a}}(j\omega)$ ist periodisch mit $\omega = 2\pi/T$

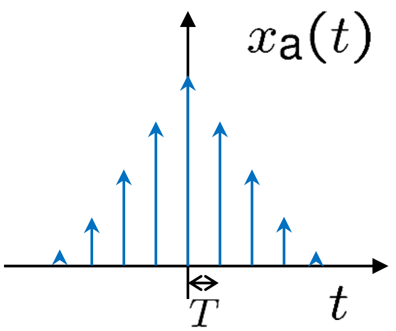
  Grundperiode: $-\pi/T \leq \omega \leq \pi/T$.

Übersicht abgetasteter und periodischer Signale und ihrer Spektren, Fourier-Transformation



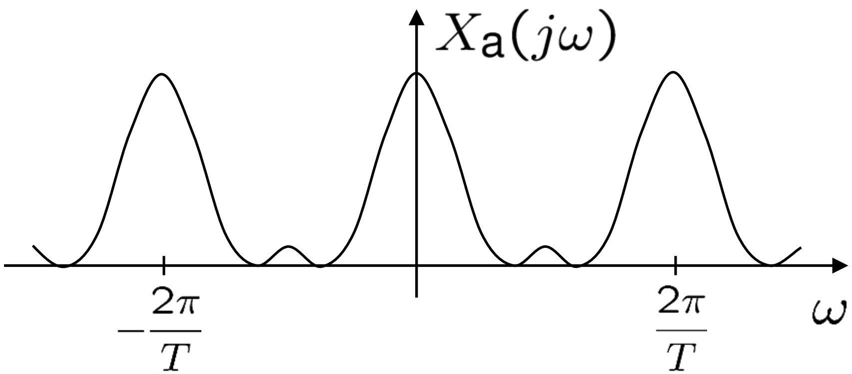
$\overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}$





abgetastet in t

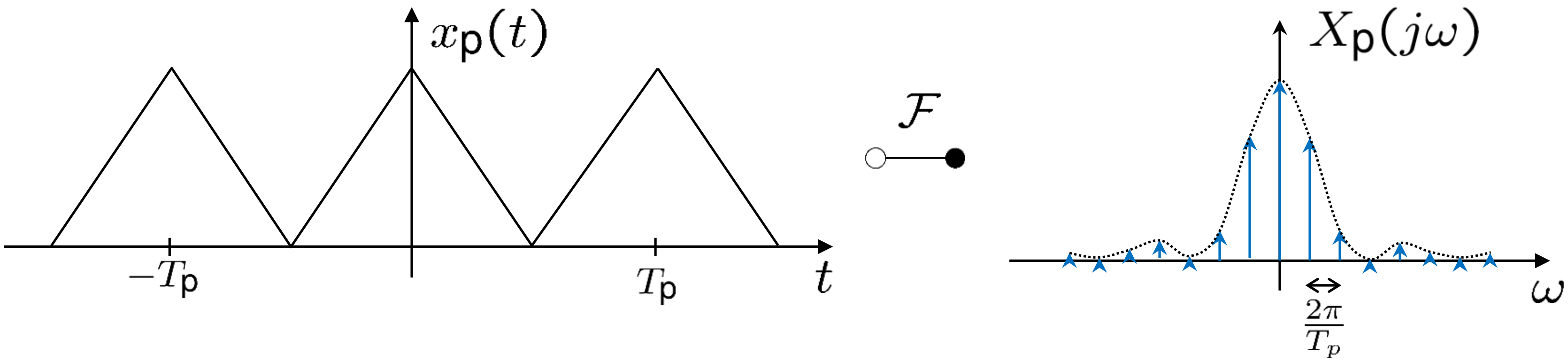
$\overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet}$



periodisch fortgesetzt in ω

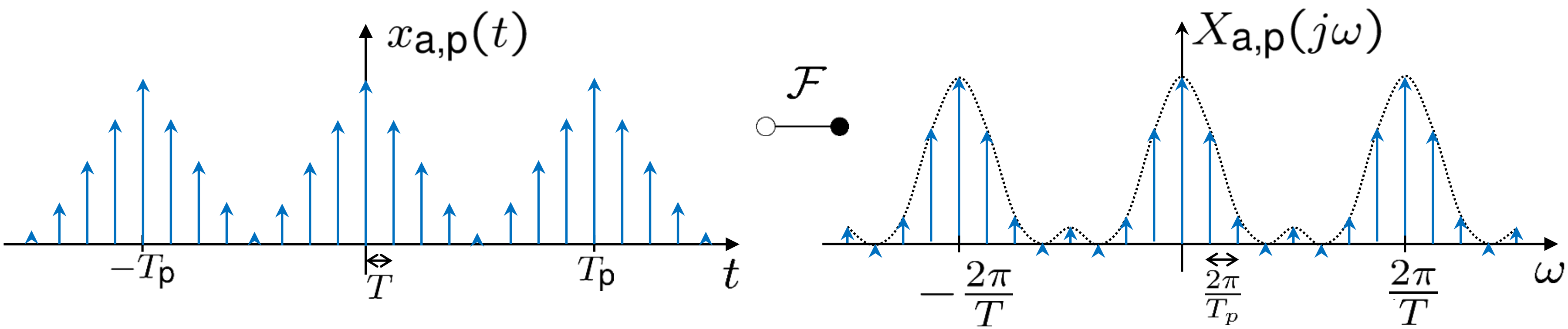
Übersicht abgetasteter und periodischer Signale und ihrer Spektren, Fourier-Transformation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT



periodisch fortgesetzt in t

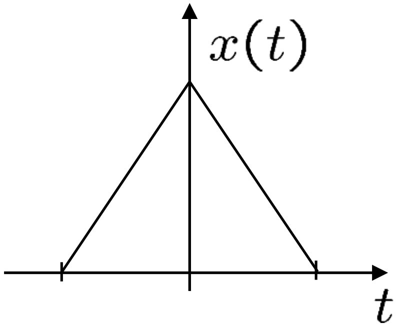
abgetastet in ω (Linienspektrum)



abgetastet in t
periodisch fortgesetzt in t

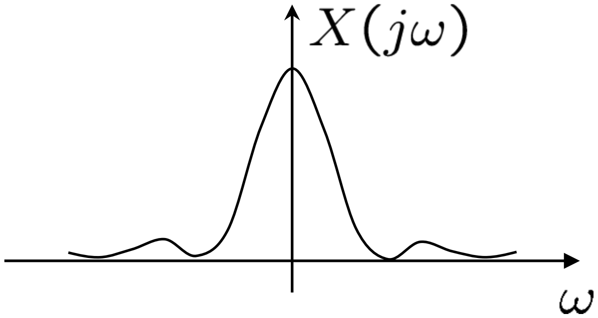
periodisch fortgesetzt in ω
abgetastet in ω (periodisches Linienspektrum)

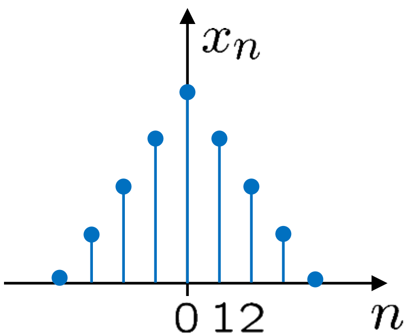
Übersicht abgetasteter und periodischer Signale und ihrer Spektren, „passende“ Transformationen



$\mathcal{F}$

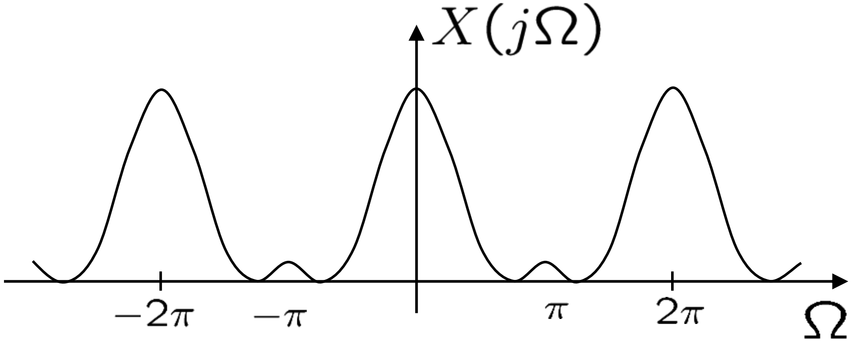
$\circ\!\!-\!\!\bullet$



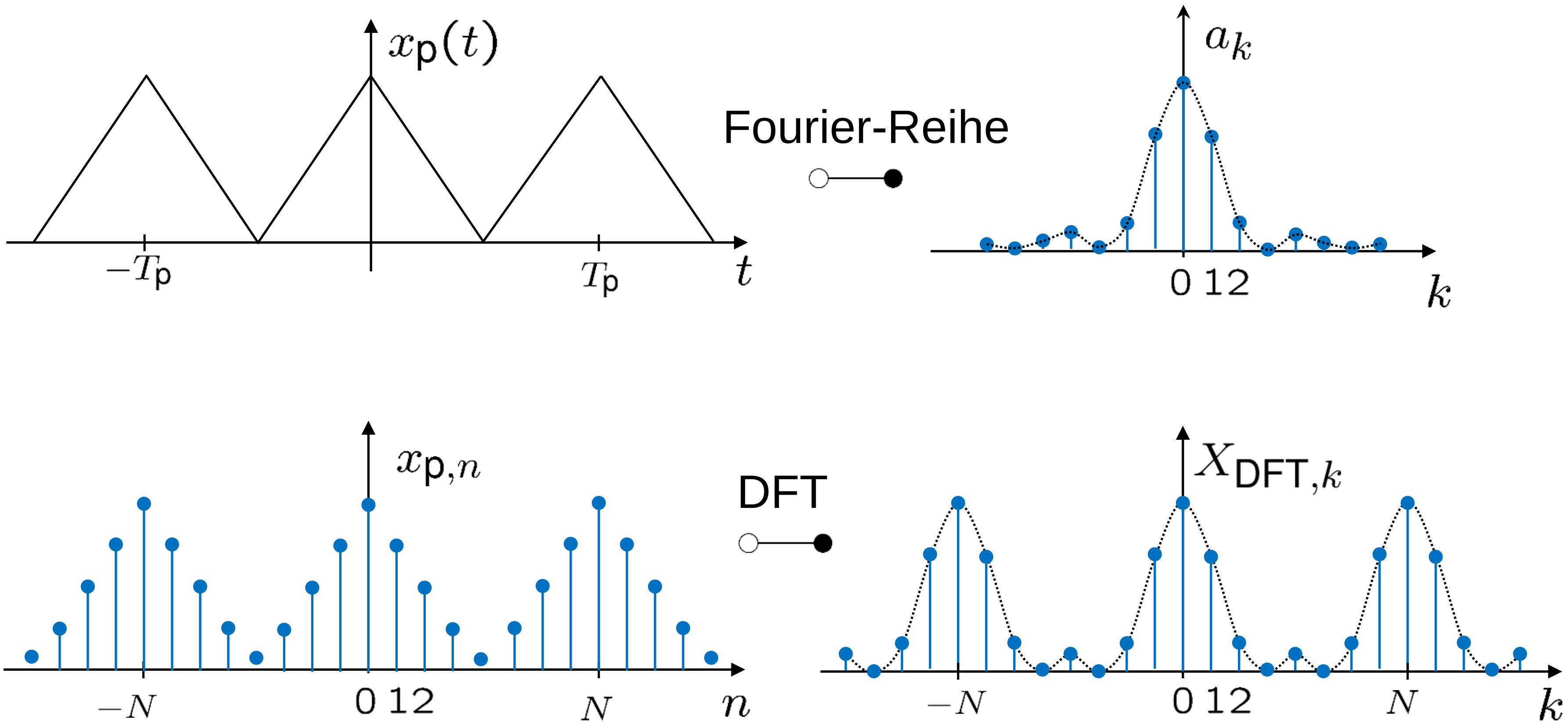


DTFT

$\circ\!\!-\!\!\bullet$



Übersicht abgetasteter und periodischer Signale und ihrer Spektren, „passende“ Transformationen



Übersicht Transformationen für abgetastete und periodische Signale

		Zeitbereich: kontinuierlich	Zeitbereich: diskret (periodisches Spektrum)
Frequenzbereich	kontinuierlich	Fourier-Transformation	Zeitdiskrete Fourier-Transformation (DTFT)
Frequenzbereich	diskret (periodisches Signal)	Fourier-Reihe	Diskrete Fourier-Transformation (DFT)

Inverse zeitdiskrete Fourier-Transformation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$\boxed{x_n = \mathcal{F}^{-1}\{X(j\Omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(j\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega}$$

- Die Folge x_n entsteht also durch eine gewichtete Überlagerung von Exponentialfunktionen $e^{j\Omega n}$. Die Spektralwerte $X(j\Omega)$ sind die Gewichtsfaktoren.

Beweis der Inversen Zeitdiskreten Fourier-Transformation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Beweis durch Einsetzen:

$$
\begin{aligned}
x_n &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sum_{l=-\infty}^{\infty} x_l e^{-j\Omega l} e^{j\Omega n} d\Omega \\
&= \sum_{l=-\infty}^{\infty} x_l \cdot \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{j\Omega(n-l)} d\Omega \\
&= \sum_{l=-\infty}^{\infty} x_l \cdot \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{j(n-l)} e^{j\Omega(n-l)}\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \sum_{l=-\infty}^{\infty} x_l \cdot \frac{1}{2\pi j(n-l)}\left(e^{j\pi(n-l)} - e^{-j\pi(n-l)}\right) \\
&= \sum_{l=-\infty}^{\infty} x_l \cdot \underbrace{\frac{\sin((n-l)\pi)}{(n-l)\pi}}_{=1 \text{ für } n=l \text{ und } 0 \text{ sonst}} \\
&= x_n
\end{aligned}
$$

Verbindung zur Fourier-Transformierten kontinuierlicher Signale

- Wenn das diskrete Signal durch Abtastung eines kontinuierlichen Signals $x(t)$ entstanden ist, gilt:

$$x(t) \xrightarrow{\text{Abtastung}} x_{\mathsf{a}}(t) \longrightarrow x_n$$

kontinuierliches Signal | abgetastetes Signal | diskretes Signal, Folge

$$x(t) \overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} X(j\omega) \qquad x_{\mathsf{a}}(t) \overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} X_{\mathsf{a}}(j\omega) \qquad x_n \overset{\text{DTFT}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} X(j\Omega)$$

$$X_{\mathsf{a}}(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(j\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)\right)$$

siehe Kapitel Abtastung

mit $\omega T = \Omega : X(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(j\omega_k\right)\big|_{\omega_k = \frac{\Omega - 2\pi k}{T}}$

Verbindung zur Fourier-Transformierten kontinuierlicher Signale

- Beachte: Diese Zusammenhänge zwischen $X_{\mathsf{a}}(j\omega)$ bzw. $X(j\Omega)$ und $X(j\omega)$ gelten auch, wenn das Abtasttheorem *nicht* eingehalten wird, sofern die dadurch entstehenden Überfaltungen berücksichtigt werden.

In diesem Fall entspricht jedoch die Grundperiode des resultierenden Spektrums $X_{\mathsf{a}}(j\omega)$ bzw. $X(j\Omega)$ nicht dem Spektrum $X(j\omega)$ des kontinuierlichen Signals.

⟶ Zwei Möglichkeiten zur Berechnung von $X(j\Omega)$:

1. direkt über die Transformationsformel
2. aus der Fourier-Transformierten $X(j\omega)$ einer entsprechenden kontinuierlichen Zeitfunktion $x(t)$ mit $x_n = x(nT)$

Beispiel: Zeitdiskrete Fourier-Transformierte der Cosinusfolge

$$x(t) = \cos(\omega_0 t) \quad \overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} \quad X(j\omega) = \pi\left[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)\right]$$

$\downarrow$ Abtastung

DTFT

$$x_n = \cos(\omega_0 nT) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X(j\Omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j\omega_k)\Big|_{\omega_k=\frac{\Omega-2\pi k}{T}}$$

$$= \cos(\Omega_0 n)$$

mit $\Omega_0 = \omega_0 T$

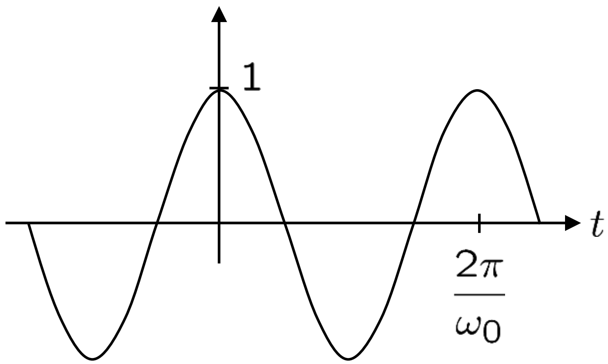
$$X(j\Omega) = \frac{\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\delta\left(\frac{\Omega+\Omega_0-2\pi k}{T}\right)+\delta\left(\frac{\Omega-\Omega_0-2\pi k}{T}\right)\right]$$

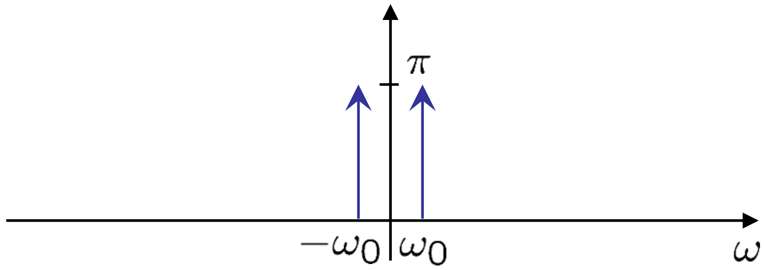
$$= \pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\delta(\Omega+\Omega_0-2\pi k)+\delta(\Omega-\Omega_0-2\pi k)\right]$$

mit $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$

Beispiel: Zeitdiskrete Fourier-Transformierte der Cosinusfolge

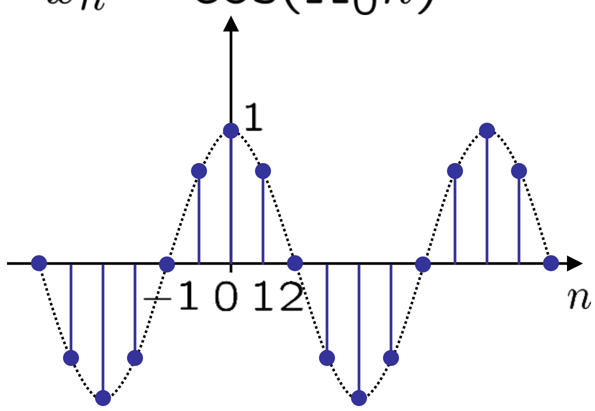
$$x(t) = \cos(\omega_0 t) \quad \overset{\mathcal{F}}{\circ\!\!-\!\!\bullet} \quad X(j\omega) = \pi\left[\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0)\right]$$

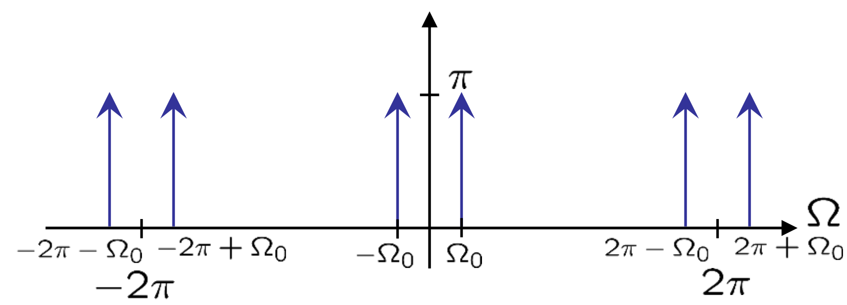




DTFT

$$x_n = \cos(\Omega_0 n) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X(j\Omega) = \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\delta(\Omega+\Omega_0-2\pi k) + \delta(\Omega-\Omega_0-2\pi k)\right]$$

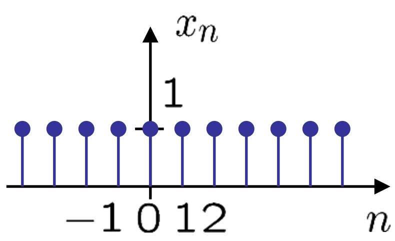


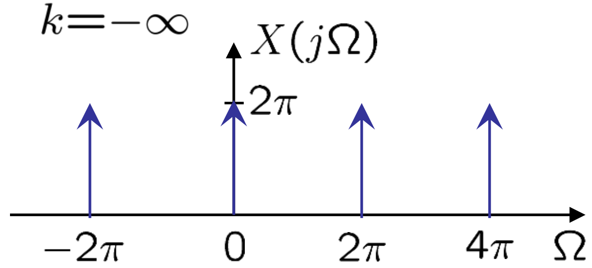


Beispiel: Zeitdiskrete Fourier-Transformierte des diskreten Delta-Kamms

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$x_n = 1 \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X(j\Omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi k)$$





Beweis durch Einsetzen:

$$x_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(j\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega \quad = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi k)e^{j\Omega n}d\Omega$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} \delta(\Omega - 2\pi k)e^{j2\pi kn}d\Omega = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi kn} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \delta(\Omega - 2\pi k)d\Omega}_{= \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}} = 1$$

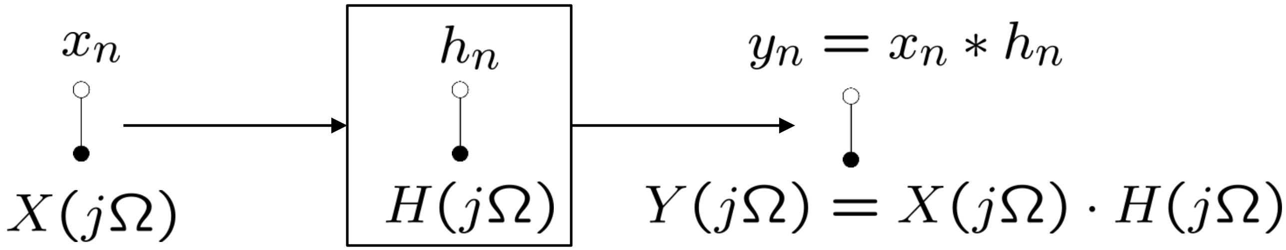
DTFT: Eigenschaften und Rechenregeln

- Die Eigenschaften der DTFT entsprechen weitgehend denen der Fourier-Transformation, z.B.
  - Linearität,
  - Zeit - und Frequenzverschiebung,
  - Skalierung, Maßstabsänderung
  - Symmetrie-Eigenschaften.

- Von zentraler Bedeutung ist wieder die Faltungsregel:

$$x_n * y_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k y_{n-k} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X(j\Omega) \cdot Y(j\Omega)$$

Systembeschreibung mittels DTFT



Spektrum des Eingangssignals

Frequenzgang des Systems

Spektrum des Ausgangssignals

Beispiel: Mittelungsfilter mit harmonischer Schwingung am Eingang

$$x_n = \cos(\Omega_0 n) \longrightarrow \boxed{h_n = \frac{1}{3}(\delta_{n+1} + \delta_n + \delta_{n-1})} \longrightarrow y_n$$

digitales Filter, berechnet gleitenden Mittelwert der Länge 3 (symmetrisch, akausal)

- Frequenzgang des Filters:

$$H(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-1}^{1} \frac{1}{3} e^{-j\Omega n}$$

$$= \frac{1}{3}\left[e^{j\Omega} + 1 + e^{-j\Omega}\right] = \frac{1}{3}[1 + 2\cos(\Omega)]$$

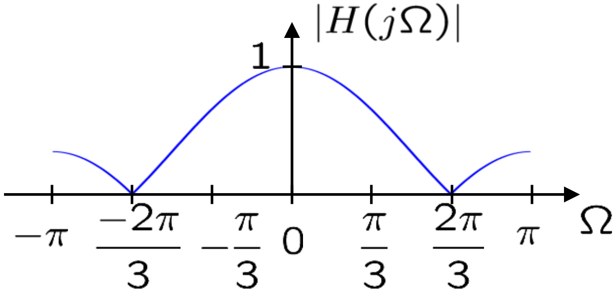
periodisch in Ω mit Periode 2π

Ω	0	$\pi/3$	$2\pi/3$	π
$\cos(\Omega)$	1	$1/2$	$-1/2$	-1
$H(j\Omega)$	1	$2/3$	0	$-1/3$

Beispiel: Mittelungsfilter mit harmonischer Schwingung am Eingang

- Darstellung des Frequenzgangs $H(j\Omega)$ nach Betrag und Phase: (für Grundperiode $-\pi \le \Omega < \pi$)
- Amplitudengang, Betragsfrequenzgang:

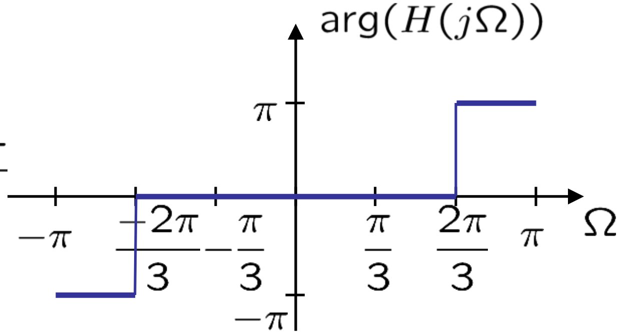
$$|H(j\Omega)| = \frac{1}{3}|1 + 2\cos(\Omega)|$$



Tiefpasscharakter

- Phasengang:

$$\arg(H(j\Omega)) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad |\Omega| \le \frac{2\pi}{3} \\ -\pi & \text{für} \quad -\pi \le \Omega < -\frac{2\pi}{3} \\ \pi & \text{für} \quad \frac{2\pi}{3} < \Omega < \pi \end{cases}$$



ungerade in Ω

Beispiel: Mittelungsfilter mit harmonischer Schwingung am Eingang

- Spektrum des Eingangssignals:

$$X(j\Omega) = \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\delta(\Omega + \Omega_0 - 2\pi k) + \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi k)\right]$$

Grundperiode: für $-\pi \leq \Omega < \pi$:

$$X(j\Omega) = \pi\left[\delta(\Omega + \Omega_0) + \delta(\Omega - \Omega_0)\right]$$

- Spektrum des Ausgangssignals für $-\pi \leq \Omega < \pi$:

$$Y(j\Omega) = X(j\Omega) \cdot H(j\Omega)$$

$$= \pi\left[H(-j\Omega_0)\delta(\Omega + \Omega_0) + H(j\Omega_0)\delta(\Omega - \Omega_0)\right]$$

und da $H(j\Omega)$ eine gerade Funktion ist

$$= \pi H(j\Omega_0)\left[\delta(\Omega + \Omega_0) + \delta(\Omega - \Omega_0)\right]$$

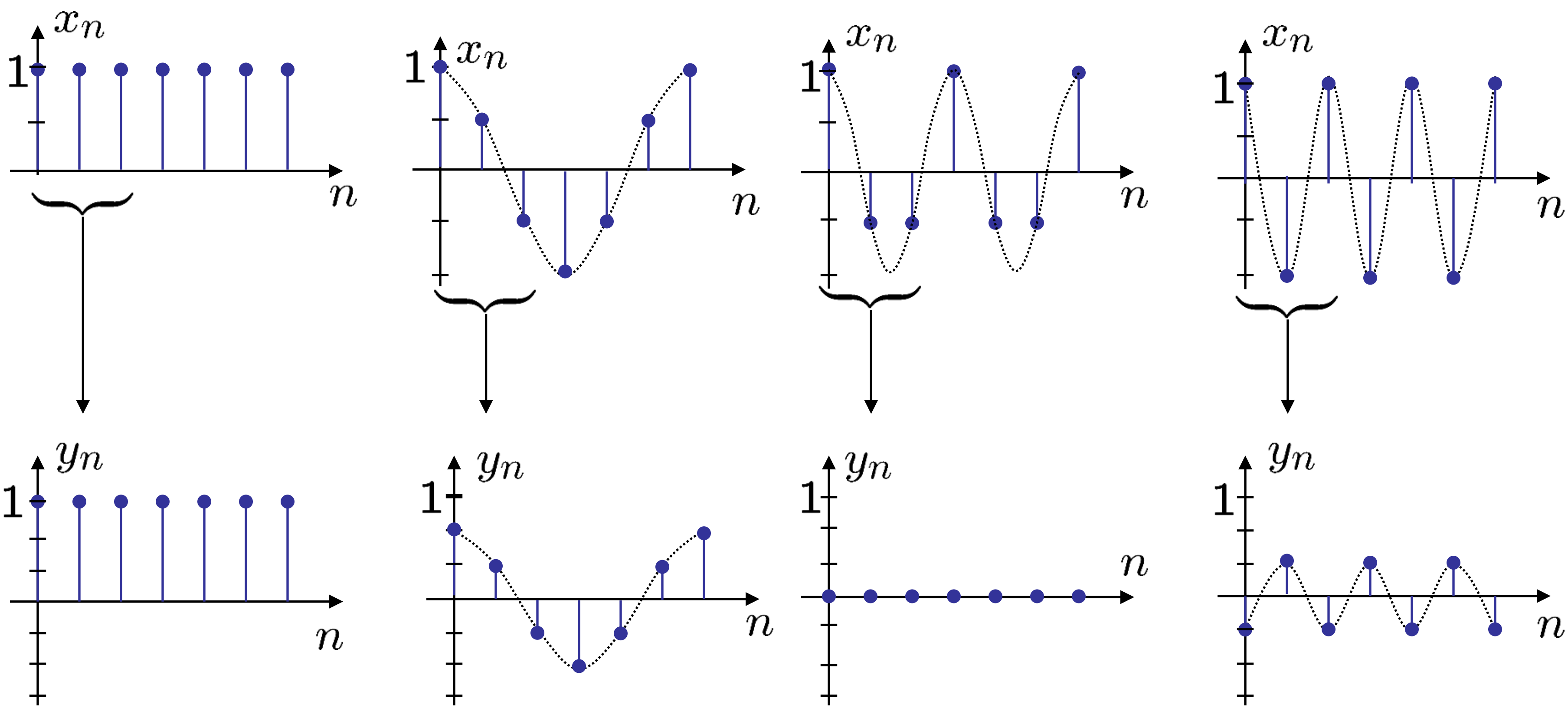
$$y_n = H(j\Omega_0)\cos(\Omega_0 n) = \frac{1}{3}\left[1 + 2\cos(\Omega_0)\right]\cos(\Omega_0 n) = H(j\Omega_0)\cdot x_n$$

Ausgangsfolge

Beispiel: Mittelungsfilter mit harmonischer Schwingung am Eingang

$$x_n = \cos(\Omega_0 n)$$

$\Omega_0 = 0 \; : \; y_n = x_n$ $\quad$ $\Omega_0 = \frac{\pi}{3} \; : \; y_n = \frac{2}{3}x_n$ $\quad$ $\Omega_0 = \frac{2\pi}{3} \; : \; y_n = 0$ $\quad$ $\Omega_0 = \pi \; : \; y_n = -\frac{1}{3}x_n$



Komplexe Exponentialfolgen als Eingangsfolgen diskreter LTI-Systeme

$$x_n = e^{j\Omega_0 n}$$

$$X(j\Omega) = 2\pi \cdot \delta(\Omega - \Omega_0)$$

für $-\pi \leq \Omega < \pi$

$$h_n \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad H(j\Omega)$$

$$y_n = H(j\Omega_0) \cdot x_n$$

$$Y(j\Omega) = H(j\Omega) \cdot X(j\Omega) = H(j\Omega_0) \cdot X(j\Omega)$$

($H(j\Omega_0)$: Skalar)

aus der Fourier-Transformierten der entsprechenden kontinuierlichen Zeitfunktion

$$x(t) = e^{j\omega_0 t}$$

$$X(j\omega) = 2\pi \cdot \delta(\omega - \omega_0)$$

Ausgangsfolge y_n entspricht bis auf eine Skalierung mit $H(j\Omega_0)$ der Eingangsfolge x_n

$\rightarrow$ komplexe Exponentialfolgen sind Eigenfolgen der LTI-Systeme

Rücktransformation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Möglichkeiten zur Bestimmung der Folge x_n ,
d.h. der Rücktransformierten aus $X(j\Omega)$:

- Einsetzen in Definitionsgleichung,
- mit Hilfe von Transformationstabellen oder
- durch Koeffizientenvergleich.

Beispiel Koeffizientenvergleich:

$$H(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n e^{-j\Omega n} = \frac{1}{3}[1 + 2\cos(\Omega)]$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(e^{j\Omega} + e^{-j\Omega}\right) = \frac{1}{3} \cdot e^{-j\Omega(-1)} + \frac{1}{3} \cdot e^{-j\Omega 0} + \frac{1}{3} \cdot e^{-j\Omega(+1)}$$

$$\Rightarrow h_n = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{für } n = -1,\ 0,\ 1 \text{ und} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Parsevalsches Theorem für diskrete Signale

$$\mathrm{E}_x^{\text{diskret}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(j\Omega)|^2 d\Omega = \text{ Signalenergie}$$

- Zusammenhang zur Energie des zugehörigen kontinuierlichen Signals $x(t)$:

$$\mathrm{E}_x^{\text{kontin.}} = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

Bei Einhaltung des Abtasttheorems ist $x(t)$ auf π/T bandbegrenzt →

$$\mathrm{E}_x^{\text{kontin.}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} |X(j\omega)|^2 d\omega = \frac{T^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(j\Omega)|^2 \frac{d\Omega}{T} = T \cdot \mathrm{E}_x^{\text{diskret}}$$

mit $X(j\Omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(j\omega_k\right)\Big|_{\omega_k = \frac{\Omega - 2\pi k}{T}}$

und $\Omega = \omega T, \quad d\omega = \frac{1}{T} d\Omega, \; \omega = \pm\frac{\pi}{T} \rightarrow \Omega = \pm\pi$