Nachrichtentechnik
Lösung 1

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Pegelrechnung/Linkbudget

1 Kurzfragen

Pegelrechnung

Warum benutzt man die logarithmische Darstellung von Größen wie z.B. der Leistung?

- ☐ Ist einfacher zu rechnen, da man einfach Leistungspegel addieren kann.
- ☐ Es erhöht den Respekt anderer Leute, die keinen Einblick in die Materie haben.
- ☑ Die Verschaltung von Dämpfung und Verstärkung wird von einer Multiplikation in eine einfache Addition gewandelt.
- ☐ Das Rauschen der Gesamtschaltung wird durch die Verwendung von logarithmischen Größen verringert.
- ☐ Der Logarithmus ist nur für Leistungswerte definiert.

Lösung

Nach den Rechenregeln für Logarithmen wird die Multiplikation in eine einfache Addition gewandelt. Dies ermöglicht das einfache Handling auch großer Zahlen in einfachen Additionen. Allerdings muss man aufpassen, da die Addition zweier Leistungen nicht mit der Addition ihrer Pegel übereinstimmt.

Strahlungsdichte

Die Strahlungsdichte einer Antenne im Fernfeld verhält sich folgendermaßen:

- ☐ Sie nimmt kubisch mit dem Abstand ab.
- ☑ Sie nimmt quadratisch mit dem Abstand ab.
- ☐ Sie nimmt linear mit dem Abstand ab.
- ☐ Sie nimmt kubisch mit dem Abstand zu.
- ☐ Sie nimmt quadratisch mit dem Abstand zu.
- ☐ Sie nimmt linear mit dem Abstand zu.

Lösung

Die Strahlungsdichte nimmt quadratisch mit dem Abstand ab. Dies liegt an der Ausbreitung der Wellen als Kugelwellen. Die Kugeloberfläche $O_K = 4\pi r^2$ nimmt mit dem Abstand quadratisch zu, so dass die Leistungsdichte $S = P/O_K$ quadratisch abnimmt.

Freiraumdämpfung

Welche Aussage über die Ursache für die Freiraumdämpfung a_{fs} trifft zu?

- ☐ Sie entsteht durch die Verwendung nichtidealer Antennen.
- ☐ Sie entsteht dadurch, dass sich elektromagnetische Wellen entlang gerader Linien ausbreiten.
- ☐ Sie steigt, wenn die Antennen nicht optimal zueinander ausgerichtet sind.
- ☑ Sie entsteht dadurch, dass sich elektromagnetische Wellen kugelförmig ausbreiten.
- ☐ Sie entsteht dadurch, dass die elektromagnetische Welle auf ihrem Weg zwischen Sender und Empfänger verlustbehaftete Medien (Luft, Vakuum, etc.) durchqueren muss. Bei Satellitenverbindungen ist dieser Einfluss besonders groß, da die Entfernungen mit bis zu 36 000 km sehr lang sind.

Lösung

Die Freiraumdämpfung entsteht dadurch, dass sich elektromagnetische Wellen kugelförmig ausbreiten. Die Leistungsdichte nimmt quadratisch mit dem Abstand ab.

2 Pegelumrechnung

a) Was ist ein Pegel? Was ist der Unterschied zwischen einem relativen und einem absoluten Pegel?

Lösung

Der Pegel ist definiert als das logarithmische Verhältnis einer Größe (Leistung, Strom, Spannung etc.) bezogen auf eine Bezugsgröße A derselben Dimension. Das Ergebnis ist dimensionslos. Um die Verwendung der Pegelrechnung anzuzeigen, wird dem Pegel die Pseudoeinheit Dezibel (dB) nachgestellt. Dabei bedeutet „Bel“ die Verwendung des dekadischen Logorithmus[1] und „Dezi“ die Multiplikation des Ergebnisses mit dem Faktor 10. In der Elektrotechnik werden dabei immer auf Leistungen bezogene Größen in Verhältnis gesetzt.
Die Umrechnung einer Leistung P in einen Leistungspegel L folgt dabei folgender Formel:

$$L = 10 \cdot \log\left(\frac{P}{A}\right)$$

Die Umrechnung des Leistungspegels zurück in die Leistung folgt:

$$P = 10^{\frac{L}{10}} \cdot A$$

dB: Logarithmische Darstellung von reinen ZAHLEN bzw. Verhältnissen. Beispielsweise der Verstärkungsfaktor eines Verstärkers:

$$G = 10 \cdot \log\left(\frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}}\right)$$

Werden nun die Spannungen an Ein- und Ausgang betrachtet, so gilt:

$$G = 10 \cdot \log\left(\frac{P_{\text{in}}}{P_{\text{out}}}\right) = 10 \cdot \log\left(\frac{U_{\text{in}}^2 \cdot R}{U_{\text{out}}^2 \cdot R}\right) = 20 \cdot \log\left(\frac{U_{\text{in}}}{U_{\text{out}}}\right)$$

Achtung: Wie groß die Eingangsleistung P_{in} bzw. die Ausgangsleistung P_{out} in einem konkreten Fall ist, kann aus dem Verhältnis nicht gewonnen werden.
dBm, dBW: Für eine einfache Berechnung im logarithmischen Bereich von absoluten Größen, wie z.B. einer konkreten Leistung oder Spannung etc. an einem bestimmten Punkt muss ebenfalls eine logarithmische Darstellung für absolute Größen eingeführt werden. Dies geschieht dadurch, dass als Bezugsgröße ein definierter Wert (z.B. 1 W oder 1 V) verwendet wird. Dass es sich um eine logarithmische Darstellung einer absoluten Größe handelt, wird durch ein entsprechendes Anhängsel an die Pseudoeinheit dB kenntlich

[1] Normalerweise wird der Logarithmus zu einer beliebigen Basis A mit $\log_A$ dargestellt. Der dekadische Logarithmus $\lg = \log_{10}$, der Logarithmus dualis $\text{ld} = \log_2$ und der Logarithmus naturalis $\ln = \log_e$ sind die gebräuchlichsten Logarithmen. Das Symbol log ohne angegebene Basis wird verwendet, wenn die Basis aus dem Zusammenhang ersichtlich oder aufgrund einer Konvention festgelegt ist. In technischen Anwendungen und auch auf den meisten Taschenrechnern steht log für den dekadischen Logarithmus. Gelegentlich wird log auch verwendet, wenn die verwendete Basis keine Rolle spielt.

gemacht.
Der einzige Unterschied zwischen absolutem und relativem Pegel ist dabei die Wahl der Bezugsgröße. Bei einem relativen Pegel kann eine beliebige Bezugsgröße gewählt werden, wohingegen bei absoluten Pegeln die Bezugsgröße genormt ist. In der Nachrichtentechnik sind folgende absoluten Pegel mit ihren Bezugsgrößen genormt:

„dBm" Leistungspegel mit dem Bezugswert $A = 1\,\mathrm{mW}$

„dBu" Spannungspegel mit dem Bezugswert $A = \sqrt{600\,\Omega \cdot 1\,\mathrm{mW}} \approx 774{,}6\,\mathrm{mV}$

Gebräuchliche relative Pegel sind unter anderem:

„dBW" Leistungspegel mit dem Bezugswert $A = 1\,\mathrm{W}$

„dBk" Leistungspegel mit dem Bezugswert $A = 1\,\mathrm{kW}$

„dBV" Spannungspegel mit dem Bezugswert $A = 1\,\mathrm{V}$

b) Vereinfachen Sie folgende Formeln:

1. $\log_X \left(A^B\right)$
2. $\log_X (A \cdot B)$
3. $\log_X \left(\frac{A}{B}\right)$

Lösung

Rechenregeln für Logarithmen:

$$\log_X \left(A^B\right) = B \cdot \log_X (A)$$
$$\log_X (A \cdot B) = \log_X (A) + \log_X (B)$$
$$\log_X \left(\frac{A}{B}\right) = \log_X (A) - \log_X (B)$$

c) Rechnen Sie um:

1. $L_P = 10\,\mathrm{dB\,W}$ in dBm
2. $L_P = 10\,\mathrm{dB}\mu\mathrm{W}$ in dBm
3. $L_U = 10\,\mathrm{dB\,V}$ in dB mV
4. $L_U = 10\,\mathrm{dB}\mu\mathrm{V}$ in dB mV

Lösung

Umrechnung von Leistungspegeln (z.B. von dB W in dBm):

$$\begin{aligned}
L_P|_{\mathrm{dBm}} &= 10\log\left(\frac{P}{1\,\mathrm{mW}}\right) = 10\log\left(\frac{P}{1\,\mathrm{W}}\cdot\frac{1\,\mathrm{W}}{1\,\mathrm{mW}}\right)\\
&= 10\log\left(\frac{P}{1\,\mathrm{W}}\right) + 10\log\left(\frac{1\,\mathrm{W}}{0{,}001\,\mathrm{W}}\right) = 10\log\left(\frac{P}{1\,\mathrm{W}}\right) + 10\log(1000)\\
&= L_P|_{\mathrm{dBW}} + 30\,\mathrm{dB}
\end{aligned}$$

Die Umrechnung von dBm in dB W erfolgt analog:

$$L_P|_{\mathrm{dBW}} = L_P|_{\mathrm{dBm}} - 30\,\mathrm{dB}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
10\,\mathrm{dB\,W} &= 10\,\mathrm{dBm} + 30\,\mathrm{dB} = 40\,\mathrm{dBm}\\
10\,\mathrm{dB}\,\mu\mathrm{W} &= 10\,\mathrm{dBm} - 30\,\mathrm{dB} = -20\,\mathrm{dBm}
\end{aligned}$$

Umrechnung von Spannungspegeln (z.B. von dB V in dB mV):

$$\begin{aligned}
L_U|_{\mathrm{dBmV}} &= 20\log\left(\frac{U}{1\,\mathrm{mV}}\right) = 20\log\left(\frac{U}{1\,\mathrm{V}}\cdot\frac{1\,\mathrm{V}}{1\,\mathrm{mV}}\right)\\
&= 20\log\left(\frac{U}{1\,\mathrm{V}}\right) + 20\log\left(\frac{1\,\mathrm{V}}{0{,}001\,\mathrm{V}}\right) = 20\log\left(\frac{U}{1\,\mathrm{V}}\right) + 20\log(1000)\\
&= L_U|_{\mathrm{dBV}} + 60\,\mathrm{dB}
\end{aligned}$$

Die Umrechnung von dBmV in dBV erfolgt analog:

$$L_U|_{\mathrm{dBV}} = L_U|_{\mathrm{dBmV}} - 60\,\mathrm{dB}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
10\,\mathrm{dB\,V} &= 10\,\mathrm{dB\,mV} + 60\,\mathrm{dB} = 70\,\mathrm{dB\,mV}\\
10\,\mathrm{dB}\,\mu\mathrm{V} &= 10\,\mathrm{dB\,mV} - 60\,\mathrm{dB} = -50\,\mathrm{dB\,mV}
\end{aligned}$$

d) Die Dämpfung einer Leitung entspricht einem exponentiellen Verlauf ($a_U = e^{\alpha\cdot l}$). Sie wurde daher in der Regel in Neper angegeben, wobei $a|_{\mathrm{Np}} = \ln(a|_{\mathrm{lin}})$ gilt. Heutzutage ist die Angabe in Neper unüblich. Stellen Sie eine Umrechnungsfunktion von dB in Neper und umgekehrt auf.

Lösung

Da es sich bei $a_U = e^{\alpha\cdot l}$ um eine Spannungsübertragungsfunktion handelt, muss der Faktor 20 bei der Umrechnung in dB berücksichtigt werden.

$$\begin{aligned}
a|_{\mathrm{Np}} &= \ln\left(e^{\alpha\cdot l}\right) = (\alpha\cdot l)\ \mathrm{Np}\\
a|_{\mathrm{dB}} &= 20\log\left(e^{\alpha\cdot l}\right)\\
&= 20\log(e)\cdot\alpha\cdot l = (8{,}686\cdot\alpha\cdot l)\ \mathrm{dB}\\
&\Rightarrow 1\,\mathrm{Np} = 8{,}686\,\mathrm{dB}\\
&\Rightarrow 10\,\mathrm{dB} = 1{,}151\,\mathrm{Np}
\end{aligned}$$

e) Berechnen Sie:

1. $10\,\mathrm{dB} + 10\,\mathrm{dB}$
2. $10\,\mathrm{dB\,W} - 20\,\mathrm{dB}$
3. $20\,\mathrm{dB\,W} - 10\,\mathrm{dB\,W}$
4. $10\,\mathrm{dB\,W} + 10\,\mathrm{dBm}$

Lösung

Addition von Pegeln:

1. Die Addition von zwei relativen Pegeln ist unproblematisch. Beispiel: Zwei Verstärkungsfaktoren.
$$10\,\mathrm{dB} + 10\,\mathrm{dB} = 20\,\mathrm{dB} \Longleftrightarrow \left[10^{\frac{10}{10}} \cdot 1\right] \cdot \left[10^{\frac{10}{10}} \cdot 1\right] = \left[10^{\frac{20}{10}} \cdot 1\right]$$

2. Die Addition eines Leistungspegeln und eines relativen Pegels ist ebenfalls unproblematisch. Beispiel: Eingangsleistung und Leistungsverstärkung bzw. Dämpfung.
$$10\,\mathrm{dB\,W} - 20\,\mathrm{dB} = -10\,\mathrm{dB\,W} \Longleftrightarrow \frac{\left[10^{\frac{10}{10}} \cdot 1\,\mathrm{W}\right]}{\left[10^{\frac{20}{10}} \cdot 1\right]} = \left[10^{\frac{-10}{10}} \cdot 1\,\mathrm{W}\right]$$

3. Die Subtraktion zweier Leistungspegel ist ebenfalls möglich. Beispiel: Dämpfungs- bzw. Verstärkungsfaktor aus Eingangs- und Ausgangsleistungspegel.
$$20\,\mathrm{dB\,W} - 10\,\mathrm{dB\,W} = 10\,\mathrm{dB} \Longleftrightarrow \frac{\left[10^{\frac{20}{10}} \cdot 1\,\mathrm{W}\right]}{\left[10^{\frac{10}{10}} \cdot 1\,\mathrm{W}\right]} = \left[10^{\frac{10}{10}} \cdot 1\right]$$
Achtung: Auch ein + kann hier sinnvoll sein (wenn man beispielsweise ein SNR berechnet). Beispiel:
$$L_{\text{Signal}} = 10\mathrm{dBm}\,, \quad L_{\text{Noise}} = -10\mathrm{dBm}$$
Hier gilt:
$$\mathrm{SNR} = L_{\text{Signal}} - L_{\text{Noise}} = 10\mathrm{dBm} + 10\mathrm{dBm} = 20\mathrm{dB}$$

4. Die Addition zweier Leistungspegel ist nur mit besonderer Vorsicht zulässig:
$$10\,\mathrm{dB\,W} + 10\,\mathrm{dBm} = ? \Longleftrightarrow \left[10^{\frac{10}{10}} \cdot 1\,\mathrm{W}\right] \cdot \left[10^{\frac{10}{10}} \cdot 1\,\mathrm{mW}\right] = 0{,}1\,\mathrm{W}^2$$
Die Dimension W^2 ergibt jedoch keinen Sinn. Der einzige Ausweg aus dieser Problematik besteht darin, die Addition als die Subtraktion eines negativen Wertes aufzufassen. Mit dieser Methode kann dann der Dämpfungs- bzw. Verstärkungsfaktor berechnet werden.
$$10\,\mathrm{dB\,W} - (-10\,\mathrm{dBm}) = 40\,\mathrm{dBm} - (-10\,\mathrm{dBm}) = 50\,\mathrm{dB}$$
$$40\,\mathrm{dBm} - (-10\,\mathrm{dBm}) = 50\,\mathrm{dB} \Longleftrightarrow \frac{\left[10^{\frac{40}{10}} \cdot 1\,\mathrm{mW}\right]}{\left[10^{\frac{-10}{10}} \cdot 1\,\mathrm{mW}\right]} = \left[10^{\frac{50}{10}} \cdot 1\right]$$

f) Mit einem Hybrid können zwei Signale kombiniert werden (Leistungen werden addiert). Wie hoch ist der Gesamtleistungspegel L_Σ in dBm und die Gesamtleistung P_Σ, wenn die beiden Eingangssignale die Leistungspegel $L_1 = 10\,\text{dBm}$ und $L_2 = -20\,\text{dB W}$ haben.

Lösung

Wie bereits bekannt ergibt die direkte Addition von zwei Leistungspegel keinen Sinn, da das Ergebnis die Dimension W^2 haben würde. Auch die Auffassung als Dämpfungs- bzw. Verstärkungsfaktor ergibt hier keine Sinn, da ja bekanntlich zwei Leistungen addiert werden müssen. Die einzige Möglichkeit die Addition von zwei Leistungen zu berechnen führt über den „Umweg“ der Berechnung im linearen Bereich.

1. Berechnung der Leistungen aus den Leistungspegeln:

$$
\begin{aligned}
P_1 &= \left[10^{\frac{10}{10}} \cdot 1\,\text{mW}\right] = 10\,\text{mW} \\
P_2 &= \left[10^{\frac{-20}{10}} \cdot 1\,\text{W}\right] = 1 \cdot 10^{-2}\,\text{W} = 10\,\text{mW}
\end{aligned}
$$

2. Addition der Leistungen

$$
P_\Sigma = P_1 + P_2 = 10\,\text{mW} + 10\,\text{mW} = 20\,\text{mW}
$$

3. Berechnung des Leistungspegels

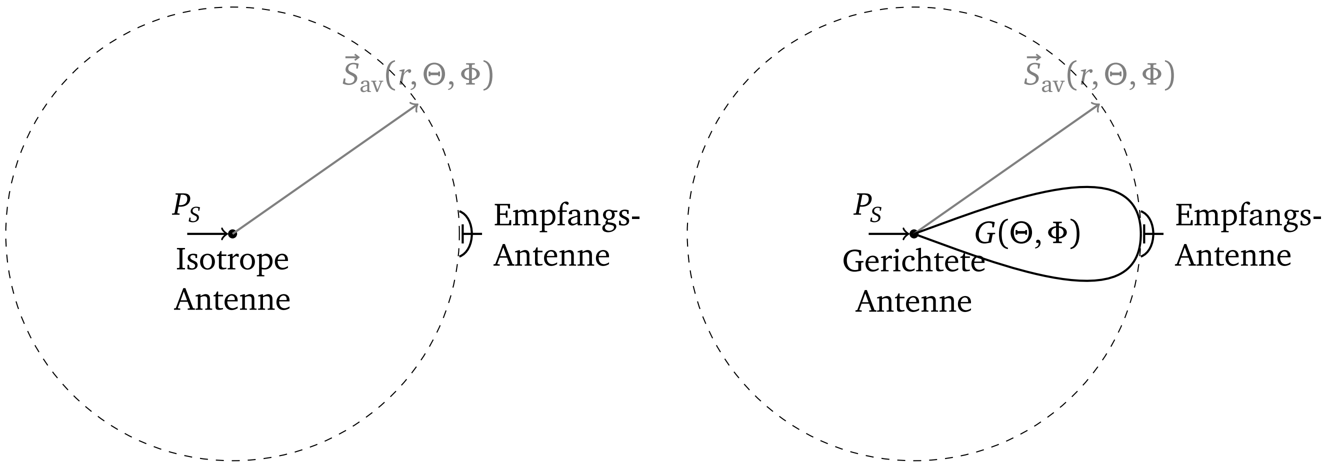
$$
L_\Sigma = 10 \log\left(\frac{P_\Sigma}{1\,\text{mW}}\right) = 10 \log\left(\frac{20\,\text{mW}}{1\,\text{mW}}\right) \approx 13\,\text{dBm}
$$

Alternativ ist in diesem speziellen Fall ($P_1 = P_2$) auch folgendes Vorgehen möglich:

$$
\begin{aligned}
P_\Sigma &= P_1 + P_2 = 2 \cdot P_1 \\
L_\Sigma &= L_1 + 10 \log(2) = L_1 + 3\,\text{dB} = 13\,\text{dBm}
\end{aligned}
$$

3 Freiraumdämpfung

Die einfachste (nur in der Theorie existierende) Antenne ist ein isotroper Strahler. Diese strahlt die Energie in alle Raumrichtungen gleichmäßig aus, sie hat demnach keine Vorzugsrichtung. Es entsteht eine Kugelwelle, wie in Abb. 3.1a dargestellt. Im Folgenden wird mit Kugelkoordinaten (r, Θ, Φ) gearbeitet, da dies die Berechnung stark vereinfacht.



(a) Isotrope Antenne

(b) Gerichtete Antenne

Abbildung 3.1: Antennen / Strahlungsdichte

a) Welche Eigenschaften haben die elektromagnetischen Wellen im Fernfeld einer Antenne?

Lösung

Im Fernfeld einer Antennen $\left(r > r_{\text{ff}} \approx \frac{2D^2}{\lambda}\right)$ breitet sich die Welle mit guter Näherung als sphärische TEM-Welle aus. Die bedeutet, dass **E**- und **H**-Feld und Ausbreitungsrichtung ein rechtshändiges System bilden. Es existieren also nur Θ- und Φ-Komponenten der **E**- und **H**-Felder. Insbesondere lässt sich die mittlere abgestrahlte Leistung (average radiated power) einfach aus der Integration der mittleren Strahlungsdichte über eine geschlossene Fläche im Fernfeld, üblicherweise eine Kugel mit Radius r, bestimmen.

$$P_S = \oiint_{\text{Sphäre}} \vec{S}_{av}(r,\Theta,\Phi)\, d\vec{A} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \vec{S}_{av}(r,\Theta,\Phi)\, \vec{e}_r \cdot r^2 \sin\Theta \; d\Theta \; d\Phi$$

b) Berechnen Sie die Strahlungsdichte $\vec{S}_{\text{av}}(r,\Theta,\Phi)$ der isotropen Antenne mit der Eingangsleistung P_S im Fernfeld.

Lösung

Eine isotropen Antenne strahlt die elektromagnetische Welle in alle Raumrichtungen gleich aus. Daraus folgt, dass die Strahlungsdichte S_{av} unabhängig von Θ und Φ ist und daher in

Bezug auf die Integrationsvariablen $d\Theta$ und $d\Phi$ als konstant angenommen werden kann. Daher folgt:

$$\begin{aligned}
P_S &= \vec{S}_{av}\vec{e}_r \cdot r^2 \cdot \int_0^{2\pi} d\Phi \cdot \int_0^{\pi} \sin\Theta \; d\Theta \\
&= S_{av} \cdot r^2 \cdot [\Phi]_0^{2\pi} \cdot [-\cos\Theta]_0^{\pi} \\
&= S_{av} \cdot r^2 \cdot [2\pi - 0] \cdot [1-(-1)] \\
&= S_{av} \cdot r^2 \cdot 4\pi \\
\Rightarrow \vec{S}_{av} &= \frac{P_S}{4\pi r^2}\vec{e}_r
\end{aligned}$$

c) Eine zweite Antenne (Empfangsantenne), die sich im Fernfeld der isotropen Antenne befindet, habe die effektive Apertur A_e. Die effektive Apertur ist die Wirkfläche der Antenne, durch sie sind die einfallende elektromagntische Welle und die Empfangsleistung verknüpft. Wie groß ist die empfangene Leistung?

Lösung

Die empfangene Leistung P_E ist die Integration der Strahlungdichte über die effektive Apertur der Empfangsantenne.

$$P_E = \iint_{A_e} \vec{S}_{\text{av}}(r, \Theta, \Phi) d\vec{A}$$

Da die Strahlungsdiche nicht von der Raumrichtung abhängt ist die Integration eine einfach Multiplikation.

$$P_E = S_{\text{av}} \cdot A_e = \frac{P_S \cdot A_e}{4\pi r^2}$$

In der Realität kommen isotrope Strahler nicht vor. Jede Antenne hat eine gewisse Richtcharakteristik, die der Antenne eine Vorzugsrichtung gibt. Vereinfacht lässt sich diese durch eine Gewinn der Antenne $g\,(\Theta, \Phi)$ beschreiben, siehe Abb. 3.1b.

d) Wie groß ist die Strahlungsdichte der gerichteten Antenne in Abhängigkeit der Raumrichtung (Θ, Φ).

Lösung

Wie beschrieben kann die Richtcharakteristik durch einen Gewinn berücksichtigt werden. Für die Strahlungsdichte folgt daher :

$$S_{\text{av}}\,(r, \Theta, \Phi) = S_{\text{av}}^{\text{iso}}\,(r) \cdot g\,(\Theta, \Phi)$$

e) Wie groß ist die empfangene Leistung, wenn die Empfangsantenne in der Hauptstrahlrichtung der Sendeantenne liegt? *Tipp: Die effektive Apertur und der Gewinn einer Antenne sind über $A_e/g = \lambda^2/4\pi$ verknüpft.*

Lösung

Wenn beide Antennen in Hauptstrahlrichtung zueinander liegen, ergibt sich die empfangene Leistung zu:

$$P_E = S_{\mathrm{av}}^{\mathrm{iso}} \cdot g_S \cdot A_e = \frac{P_S \cdot A_e \cdot g_S}{4\pi r^2}$$

wobei g_S der Gewinn der Sendeantenne in Hauptstrahlrichtung ist. Unter Berücksichtigung der gegebenen Formel für die effektiver Apertur ergibt sich:

$$P_E = \frac{P_S \cdot \frac{\lambda^2 \cdot g_E}{4\pi} \cdot g_S}{4\pi r^2} = \frac{P_S \cdot g_E \cdot g_S \cdot \lambda^2}{(4\pi)^2 r^2}$$

Dieses Beispiel beschreibt das Phänomen der Freiraumdämpfung, wie es bei allen drahtlosen Übertragungsstrecken auftritt.

f) Berechnen Sie die Freiraumdämpfung in dB aus dem Verhältnis der Sende- und Empfangsleistung. Der Gewinn der Antennen wird dabei nicht zur Freiraumdämpfung hinzugezählt.

Lösung

Das Verhältnis von Empfangs zu Sendeleistung berechnet sich zu:

$$\frac{P_E}{P_S} = \frac{g_E \cdot g_S \cdot \lambda^2}{(4\pi)^2 r^2}$$

Die Dämpfung a berechnet sich folglich zu:

$$a = -10 \log\left(\frac{P_E}{P_S}\right) = -10 \log\left(\frac{g_E \cdot g_S \cdot \lambda^2}{(4\pi)^2 r^2}\right)$$

Die Gewinne der Sende- und Empfangsantenne werden üblicherweise in dB angegeben:

$$\begin{aligned} a &= -G_E - G_S - 10 \log\left(\frac{\lambda^2}{(4\pi)^2 r^2}\right) \\ &= -G_E - G_S + 10 \log\left(\frac{(4\pi)^2 r^2}{\lambda^2}\right) \\ &= -G_E - G_S + \underbrace{20 \log\left(\frac{4\pi r}{\lambda}\right)}_{a_{\mathrm{fs}}} \end{aligned}$$

Die Freiraumdämpfung ergibt sich also unabhängig von Sende- und Empfangsantenne zu:

$$a_{\mathrm{fs}} = 20 \log\left(\frac{4\pi r}{\lambda}\right)$$

4 Übertragungsstrecke

Betrachtet wird die in Abbildung 4.1 dargestellte Übertragungsstrecke. Das Nutzsignal mit der Leistung P_{s1} sowie ein Rauschsignal mit der Leistung P_{na1} werden von einer Antenne empfangen und über das Kabel 1, einen Zwischenverstärker und das Kabel 2 dem Empfänger zugeführt. Der Verstärker lässt sich dabei durch sein Leistungsverstärkungsmaß G_1 sowie ein additiv überlagertes Verstärkerrauschen der Leistung P_{nv} beschreiben. Die Rauschleistung der Antenne beträgt zunächst $P_{na1} = 0\,\mathrm{W}$. Die Rauschleistung der beiden Kabel wird in dieser Aufgabe vernachlässigt.

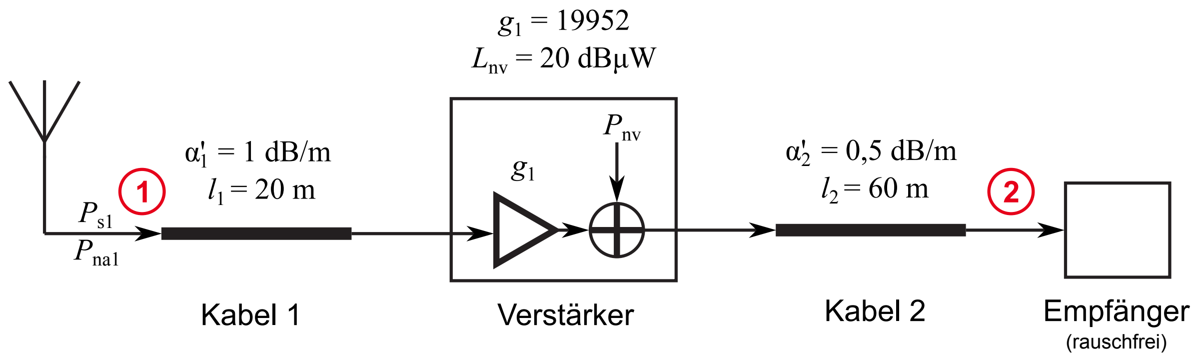


Abbildung 4.1: Empfangsübertragungsstrecke

a) Wie groß ist die Dämpfung der beiden Kabel? Wie groß ist die Verstärkung der Verstärkers in dB?

Lösung

Die Dämpfung der Kabel ist als Dämpfungsbelag in dB pro Meter (dB/m) angegebenen. Die Dämpfung des Kabels entspricht daher der Multiplikation des Dämpfungsbelags mit der Länge des Kabels.

$$a_1 = \alpha_1' \cdot l_1 = 1\,\mathrm{dB/m} \cdot 20\,\mathrm{m} = 20\,\mathrm{dB}$$
$$a_2 = \alpha_2' \cdot l_2 = 0{,}5\,\mathrm{dB/m} \cdot 60\,\mathrm{m} = 30\,\mathrm{dB}$$

Die Verstärkung des Verstärkers lässt sich leicht in den logarithmischen Maßstab umrechnen:

$$G_1 = 10 \log\left(\frac{19952}{1}\right) \approx 43\,\mathrm{dB}$$

b) Bestimmen Sie den Signalleistungspegel L_{s2} am Empfängereingang (Punkt 2) in dBμW, wenn der Eingangssignalpegel $L_{s1} = -20\,\mathrm{dBm}$ beträgt.

Lösung

Das Signal wird über das Kabel 1, den Verstärker und abschließend über das Kabel 2 übertragen. Der Leistungspegel am Empfängereingang L_{s2} berechnet sich zu:

$$\begin{aligned} L_{s2} &= L_{s1} - a_1 + G_1 - a_2 \\ &= -20\,\mathrm{dBm} - 20\,\mathrm{dB} + 43\,\mathrm{dB} - 30\,\mathrm{dB} = -27\,\mathrm{dBm} = 3\,\mathrm{dB}\mu\mathrm{W} \end{aligned}$$

c) Zeichnen Sie das Pegeldiagramm zwischen Punkt 1 und 2.

Lösung

Das Pegeldiagramm ist in Abb. 4.2 dargestellt.

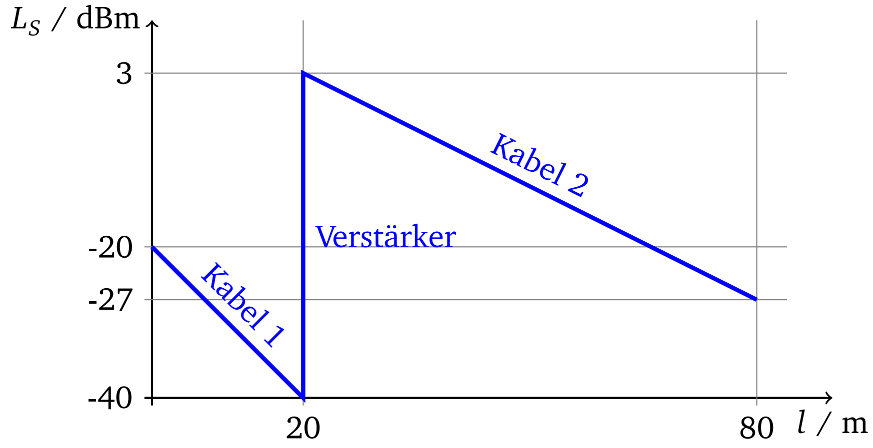


Abbildung 4.2: Pegeldiagramm

d) Wie groß ist der Signal-zu-Rauschabstand SNR_2 am Empfängereingang (Punkt 2)?

Lösung

Der Signal-zu-Rauschabstand kann aus den Leistungspegeln der Signale und des Rauschens berechnet werden.

$$\mathrm{SNR}_2 = L_{s2} - L_{n2}$$

Die Rauschleistung an Punkt 2 ergibt sich, unter der gegebenen Bedingung, dass $P_{n1} = 0$ und dass die Kabel als rauschfrei angenommen werden, zu:

$$L_{n2} = L_{nv} - a_2 = 20\,\mathrm{dB}\mu\mathrm{W} - 30\,\mathrm{dB} = -10\,\mathrm{dB}\mu\mathrm{W}$$
$$\mathrm{SNR}_2 = L_{s2} - L_{n2} = 3\,\mathrm{dB}\mu\mathrm{W} - (-10\,\mathrm{dB}\mu\mathrm{W}) = 13\,\mathrm{dB}$$

Die Antennenrauschleistung beträgt nun $L_{na1} = -33\,\mathrm{dBm}$.

e) Wie groß ist jetzt der Signal-zu-Rauschabstand SNR_2?

Lösung

Nun rauscht die Antenne mit einem Leistungspegel $L_{n1} = -33\,\mathrm{dBm}$. Damit setzt sich die Rauschleistung P_{n2} am Empfänger aus einem Anteil P_{na2} vom Antennenrauschen und einem Anteil P_{nv2} vom Verstärkerrauschen zusammen. Es gilt: $P_{n2} = P_{na2} + P_{nv2}$, jedoch nicht $L_{n2} = L_{na2} + L_{nv2}$ (siehe Aufgabe 2), sondern vielmehr

$$L_{n2}|_{\mathrm{dB}\mu\mathrm{W}} = 10 \log\left(\frac{P_{na2} + P_{nv2}}{1\,\mu\mathrm{W}}\right)$$

Für den Leistungspegel des Rauschanteils P_{nv2} gilt nach wie vor $L_{\text{nv2}} = -10\,\text{dB}\mu\text{W}$. Der Leistungspegel L_{na2} des Rauschanteils P_{na2} berechnet sich analog zu L_{s2} zu

$$L_{\text{na2}} = L_{\text{na1}} - a_1 + G_1 - a_2 = -33\,\text{dBm} - 7\,\text{dB} = -40\,\text{dBm} = -10\,\text{dB}\mu\text{W}$$

Da $L_{\text{na2}} = L_{\text{nv2}}$ und somit $P_{\text{na2}} = P_{\text{nv2}}$ gilt:

$$\begin{aligned}
P_{\text{n2}} &= 2 \cdot P_{\text{nv2}} \\
L_{\text{n2}} &= L_{\text{nv2}} + 3\,\text{dB} = -10\,\text{dB}\mu\text{W} + 3\,\text{dB} = -7\,\text{dB}\mu\text{W} \\
\text{SNR}_2 &= L_{\text{s2}} - L_{\text{n2}} = 3\,\text{dB}\mu\text{W} - (-7\,\text{dB}\mu\text{W}) = 10\,\text{dB}
\end{aligned}$$

5 Satelliten-Übertragungsstrecke

Gegeben ist eine Satelliten-Übertragungsstrecke (ASTRA-System) bei einer Frequenz von $f = 12\,\text{GHz}$. Die Entfernung zwischen Satellit und Hausantenne beträgt bei einer geostationären Umlaufbahn 36 000 km.

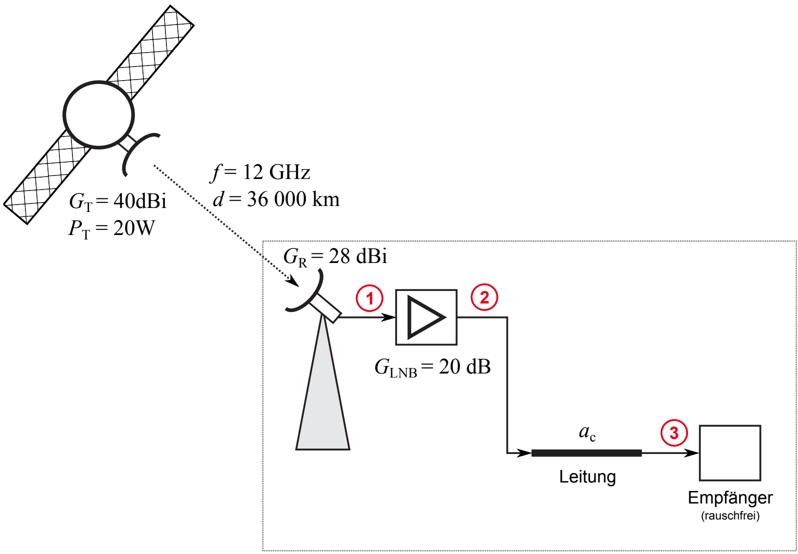


Abbildung 5.1: Satelliten-Übertragungsstrecke

a) Die Antennen haben einen Durchmesser von $D_T = 5\,\text{m}$ und $D_R = 0{,}8\,\text{m}$. In welcher Feldregion befinden sich die Antennen?

Lösung

Die wichtigste Feldregion einer Antenne ist die Fernfeldregion. Viele Antennenparameter, wie z.B. der Gewinn der Antenne, sind nur für das Fernfeld definiert. Das Fernfeld einer Antenne beginnt in einer Entfernung von ca.

$$r_{\text{ff}} = \frac{2D^2}{\lambda}$$

dabei entspricht D der maximalen Abmessung der Antenne und λ ist die Wellenlänge der elektromagnetischen Welle. Die Wellenlänge ergibt sich aus der Phasengeschwindigkeit $c = \sqrt{\mu\varepsilon}$ (bei Luft oder Vakuum gilt $c = c_0$) und der Frequenz.

$$\lambda = \frac{c_0}{f} = \frac{3 \cdot 10^8\,\text{m/s}}{12\,\text{GHz}} = \frac{3 \cdot 10^8\,\text{m/s}}{12 \cdot 10^9\,\text{Hz}} = 2{,}5\,\text{cm}$$

Damit beginnt die Fernfeldregion der Antennen bei:

Sendeantenne $r_{\text{ff}} = \frac{2D^2}{\lambda} = \frac{2\cdot(5\,\text{m})^2}{2{,}5\,\text{cm}} = 2\,\text{km}$

Empfangsantenne $r_{\text{ff}} = \frac{2D^2}{\lambda} = \frac{2\cdot(0{,}8\,\text{m})^2}{2{,}5\,\text{cm}} = 51{,}2\,\text{m}$

Damit befinden sich die Antennen im Fernfeld der jeweils anderen Antenne und wir können mit den bekannten Antennenparametern wie Gewinn weiterrechnen.

b) Bestimmen Sie die Sendeleistung des Satelliten P_T in dB W. Wie groß müsste die Strahlungsleistung eines isotropen Strahlers sein, um die gleiche Strahlungsdichte zu erzeugen?

Lösung

Der Satellit sendet mit einer Leistung von $P_T = 20\,\mathrm{W}$ dies entspricht

$$L_T = 10 \log\left(\frac{20\,\mathrm{W}}{1\,\mathrm{W}}\right) = 13\,\mathrm{dB\,W}$$

Ein isotroper Strahlen müsste mit folgender Leistung senden, damit er die gleiche Strahlungsdichte wie die gerichtete Antenne in Hauptstrahlrichtung erzeugen würde:

$$\begin{aligned} L_{\mathrm{T,i}} &= L_T + G_T = 13\,\mathrm{dB\,W} + 40\,\mathrm{dBi} = 53\,\mathrm{dB\,W} \\ P_{\mathrm{T,i}} &= 10^{\frac{L_{T,i}}{10}} \cdot 1\,\mathrm{W} = 10^{5{,}3} \cdot 1\,\mathrm{W} \approx 200\,000\,\mathrm{W} = 200\,\mathrm{kW} \end{aligned}$$

c) Wie groß ist die auftretende Freiraumdämpfung a_{fs}?

Lösung

Die Freiraumdämpfung a_{fs} ergibt sich aus:

$$a_{\mathrm{fs}} = 20 \log\left(\frac{4\pi d}{\lambda}\right) = 20 \log\left(\frac{4\pi \cdot 36 \cdot 10^6\,\mathrm{m}}{0{,}025\,\mathrm{m}}\right) \approx 205\,\mathrm{dB}$$

d) Berechnen Sie die Empfangsleistung P_R an Punkt 1 in dB W.

Lösung

Der Leistungspegel an Punkt 1 ergibt sich zu

$$\begin{aligned} L_R &= L_T + G_T - a_{\mathrm{fs}} + G_R \\ &= 13\,\mathrm{dB\,W} + 40\,\mathrm{dBi} - 205\,\mathrm{dB} + 28\,\mathrm{dBi} = -124\,\mathrm{dB\,W} \end{aligned}$$

Die Empfangsleistung beträgt

$$P_R = 10^{\frac{-124}{10}} \cdot 1\,\mathrm{W} \approx 0{,}4 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{W} = 0{,}4\,\mathrm{pW}$$

e) Für den Empfang ist an Punkt 3 eine minimale Leistung von $-110\,\mathrm{dB\,W}$ erforderlich. Wie groß darf die Dämpfung des Kabels a_C maximal sein?

Lösung

Der Leistungspegel am Punkt 3 ergibt sich aus

$$\begin{aligned} L_3 &= L_R + G_{\mathrm{LNB}} - a_c \geq -110\,\mathrm{dB\,W} \\ \Rightarrow a_c &\leq L_R + G_{\mathrm{LNB}} + 110\,\mathrm{dB\,W} \\ &= -124\,\mathrm{dB\,W} + 20\,\mathrm{dB} + 110\,\mathrm{dB\,W} = 6\,\mathrm{dB} \end{aligned}$$

Das Kabel darf eine maximale Dämpfung von 6 dB haben.

f) Wie groß ist der Wirkungsgrad η der Übertragungsstrecke vom Satellit zu Punkt 1?

Lösung

Der Wirkungsgrad ist das Verhältnis von gesendeter Leistung P_S und empfangener Leistung am Punkt 1 P_R:

$$\eta = \frac{P_R}{P_S} = \frac{0{,}4 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{W}}{20\,\mathrm{W}} = 2 \cdot 10^{-14}$$

g) Zeichnen Sie das Pegeldiagramm für eine Kabeldämpfung von $a_C = 3\,\mathrm{dB}$.

Lösung

Das Pegeldiagramm ist in Abb. 5.2 dargestellt.

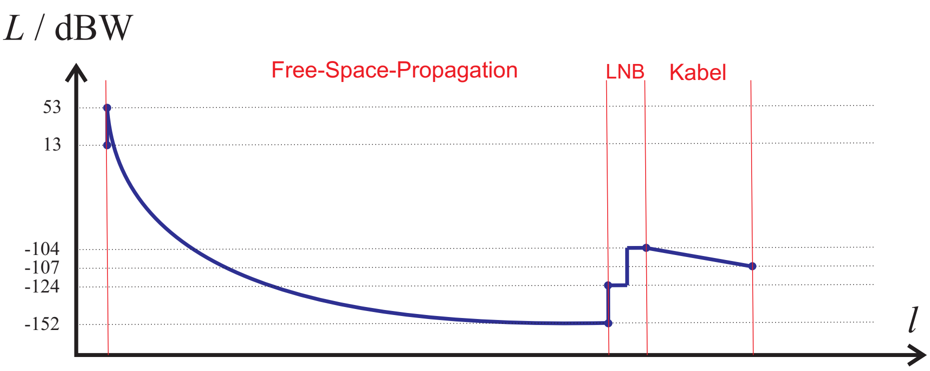


Abbildung 5.2: Pegeldiagramm

6 Mobilfunkstrecke

In einer Basisstation des GSM900-Mobilfunknetzes wird eine Sendeleistung $P_{\mathrm{BS}} = 20\,\mathrm{W}$ in die Antenne gespeist (Trägerfrequenz $f_c = 900\,\mathrm{MHz}$). Der Gewinn der Basisstationsantenne G_{BS} ist 15 dBi, der Gewinn der Mobilstationsantenne $G_{MS} = 3\,\mathrm{dBi}$. Die Basisstationsantenne befindet sich in einer effektiven Höhe von $h_{\mathrm{eff}} = 30\,\mathrm{m}$.

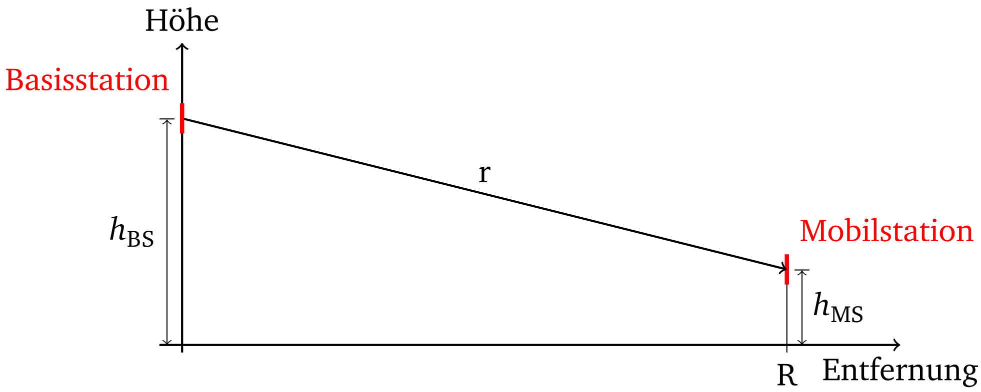


Abbildung 6.1: Mobilfunkstrecke

Es wird angenommen das Signal unterliegt einer Pfad-Dämpfung der Form

$$\frac{L}{\mathrm{dB}} = 70 + 26 \cdot \log\left(\frac{f}{\mathrm{MHz}}\right) - 13{,}8 \cdot \log\left(\frac{h_{\mathrm{eff}}}{\mathrm{m}}\right) + \left[45 - 6{,}5 \cdot \log\left(\frac{h_{\mathrm{eff}}}{\mathrm{m}}\right)\right] \cdot \log\left(\frac{R}{\mathrm{km}}\right)$$

(gültig für $R > 100\,\mathrm{m}$). Dabei enthält die Formel bereits die Freiraumdämpfung.

a) Leiten Sie eine Formel für die von der Mobilstation empfangenen Leistung P_{MS} als Funktion der Entfernung zwischen Basis- und Mobilstation ab. Skizzieren Sie diese Abhängigkeit quantitativ.

Lösung

Die an der Mobilstation empfangene Leistung ergibt sich aus

$$L_{\mathrm{MS}} = L_{\mathrm{BS}} + G_{\mathrm{BS}} - L + G_{\mathrm{MS}}$$

Mit

$$L_{\mathrm{BS}} = 10 \log\left(\frac{20\,\mathrm{W}}{1\,\mathrm{W}}\right) = 13\,\mathrm{dB\,W}$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{L}{\mathrm{dB}} &= 70 + 26 \log\left(\frac{f}{\mathrm{MHz}}\right) - 13{,}8 \log\left(\frac{h_{\mathrm{eff}}}{\mathrm{m}}\right) + \left[45 - 6{,}5 \cdot \log\left(\frac{h_{\mathrm{eff}}}{\mathrm{m}}\right)\right] \cdot \log\left(\frac{R}{\mathrm{km}}\right) \\
&= 70 + 26 \log\left(\frac{900\,\mathrm{MHz}}{\mathrm{MHz}}\right) - 13{,}8 \log\left(\frac{30\,\mathrm{m}}{\mathrm{m}}\right) + \left[45 - 6{,}5 \cdot \log\left(\frac{30\,\mathrm{m}}{\mathrm{m}}\right)\right] \cdot \log\left(\frac{R}{\mathrm{km}}\right) \\
&= 70 + 76,81 - 20,38 + 35,4 \log\left(\frac{R}{\mathrm{km}}\right) \\
&\approx 126,4 + 35,4 \log\left(\frac{R}{\mathrm{km}}\right)
\end{aligned}$$

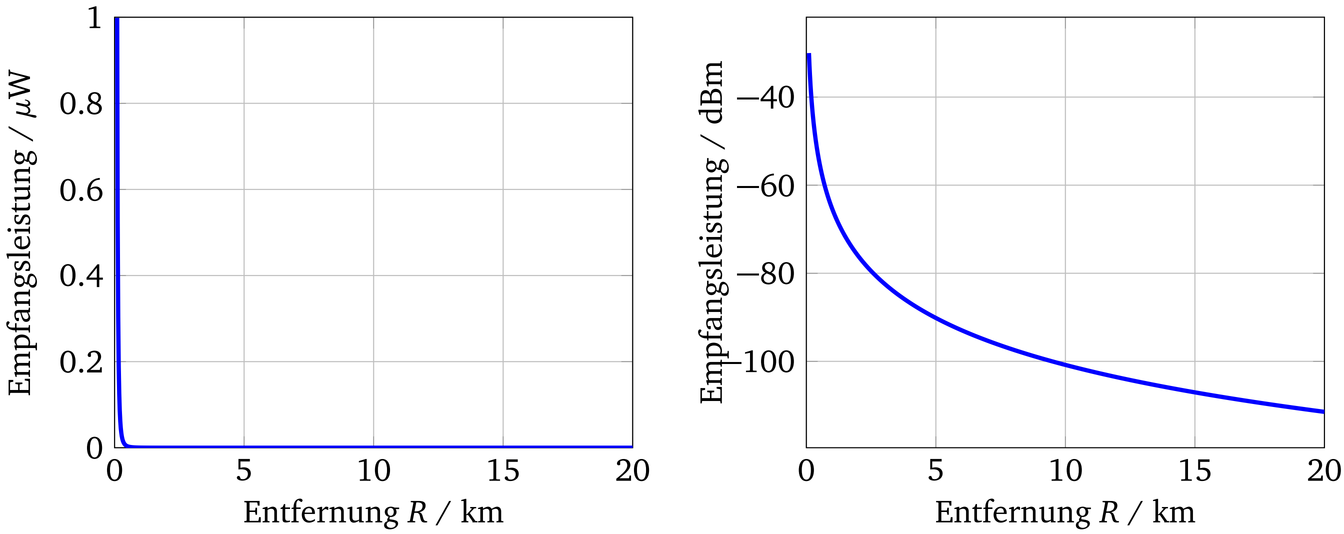
folgt:

$$L_{\mathrm{MS}} = 13\,\mathrm{dB\,W} + 15\,\mathrm{dBi} + 3\,\mathrm{dBi} - 126{,}4\,\mathrm{dB} - \left[35{,}4 \cdot \log\left(\frac{R}{\mathrm{km}}\right)\right]\mathrm{dB}$$
$$= -95{,}4\,\mathrm{dB\,W} - \left[35{,}4 \cdot \log\left(\frac{R}{\mathrm{km}}\right)\right]\mathrm{dB}$$

Die Empfangsleistung ergibt sich damit zu:

$$P_{\mathrm{MS}} = 10^{\frac{-95{,}4-35{,}4\log(R)}{10}} \cdot 1\,\mathrm{W}$$
$$= \frac{10^{\frac{-95{,}4}{10}}}{10^{\frac{35{,}4\log(R)}{10}}} \cdot 1\,\mathrm{W} = \frac{10^{\frac{-95{,}4}{10}}}{\left(10^{\log(R)}\right)^{\frac{35{,}4}{10}}} \cdot 1\,\mathrm{W}$$
$$= \frac{288\,\mathrm{pW}}{R^{3{,}54}}$$

In Abb. 6.2 ist das Ergebnis skizziert.



(a) Lineare Y-Achse (Leistung) **(b)** Logarithmische Y-Achse (Leistungspegel)

Abbildung 6.2: Pegeldiagramm

b) Die Mobilstation empfängt einen Rauschleistungspegel $L_{\mathrm{N,MS}} = -112\,\mathrm{dBm}$. Ein SNR von mindestens 10 dB ist an der Mobilstation notwendig, um das Gespräch ungestört zu übertragen. Wie weit darf die Mobilstation von der Basisstation entfernt sein?

Lösung

Der Signal-zu-Rauschabstand ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
\mathrm{SNR} &= L_{\mathrm{MS}} - L_{\mathrm{N,MS}} \\
&= -95{,}4\,\mathrm{dB\,W} - \left[35{,}4 \cdot \log\left(\frac{R}{\mathrm{km}}\right)\right] \mathrm{dB} - (-112\,\mathrm{dBm}) \\
&= -65{,}4\,\mathrm{dBm} - \left[35{,}4 \cdot \log\left(\frac{R}{\mathrm{km}}\right)\right] \mathrm{dB} - (-112\,\mathrm{dBm}) \\
&= 46{,}6\,\mathrm{dB} - \left[35{,}4 \cdot \log\left(\frac{R}{\mathrm{km}}\right)\right] \mathrm{dB}
\end{aligned}$$

Mit der Bedingung $\mathrm{SNR} \geq 10\,\mathrm{dB}$ folgt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{SNR} = 46{,}6\,\mathrm{dB} - \left[35{,}4 \cdot \log\left(\frac{R}{\mathrm{km}}\right)\right] \mathrm{dB} &\geq 10\,\mathrm{dB} \\
\rightarrow \left[35{,}4 \cdot \log\left(\frac{R}{\mathrm{km}}\right)\right] \mathrm{dB} &\leq 36{,}6\,\mathrm{dB} \\
\log\left(\frac{R}{\mathrm{km}}\right) &\leq \frac{36,6}{35,4} \\
R &\leq 10^{\frac{36{,}6}{35{,}4}} \cdot 1\,\mathrm{km} = 10{,}81\,\mathrm{km}
\end{aligned}$$

c) Eine Verminderung der Sendeleistung von 20 W auf 2 W und dann auf 0,2 W wird erwünscht, um die Elektrosmogeffekte zu mildern. Wie groß darf in diesen beiden Fällen der Zellenradius sein?

Lösung

Für eine Sendeleistung $P_{BS} = 2\,\mathrm{W}$ ergibt sich ein um 10 dB geringerer Empfangspegel als bei 20 W. Daraus folgt, dass der Signal-zu-Rauschabstand ebenfalls um 10 dB geringer ist.

$$\begin{aligned}
&\left[35{,}4 \cdot \log\left(\frac{R}{\mathrm{km}}\right)\right] \mathrm{dB} \leq 26{,}6\,\mathrm{dB} \rightarrow \log\left(\frac{R}{\mathrm{km}}\right) \leq \frac{26,6}{35,4} \\
&R \leq 10^{\frac{26{,}6}{35{,}4}} \cdot 1\,\mathrm{km} = 5{,}64\,\mathrm{km}
\end{aligned}$$

Für eine Sendeleistung $P_{\mathrm{BS}} = 0{,}2\,\mathrm{W}$ ergibt sich ein um 20 dB geringerer Empfangspegel als bei 20 W. Daraus folgt, dass der Signal-zu-Rauschabstand ebenfalls um 20 dB geringer ist.

$$\begin{aligned}
&\left[35,4 \cdot \log\left(\frac{R}{\mathrm{km}}\right)\right] \mathrm{dB} \leq 16{,}6\,\mathrm{dB} \rightarrow \log\left(\frac{R}{\mathrm{km}}\right) \leq \frac{16,6}{35,4} \\
&R \leq 10^{\frac{16{,}6}{35{,}4}} \cdot 1\,\mathrm{km} = 2{,}94\,\mathrm{km}
\end{aligned}$$

d) Welche Konsequenzen hat eine Verkleinerung der Zellen, bzw. eine Erhöhung der Anzahl der Sendestationen für den Elektrosmog?

Lösung

Durch die Verkleinerung der Zellen, welche mit der Erhöhung der Anzahl der Sendestation gleichbedeutend ist, kann die erforderliche Sendeleistung der Basis- und Mobilstationen stark verringert werden. In obigen Beispiel könnte eine Verkleinerung der Zelle von 10 km Radius auf 3 km Radius (entspricht 1/9 der Fläche) die erforderliche Sendeleistung um den Faktor 100 senken. Damit ist eine Senkung der Strahlenbelastung möglich.