Die Fourier-Transformation

Lernziel der 7. Lerneinheit:
WP 3 – Fourier-Transformation

In der 7. Lerneinheit erweitert wir die Freqenzbereichsdarstellung von periodischen Signalen auf nicht-periodische Signale.

- Wir erreichen diese Erweiterung indem wir die Periodendauer sukzessive vergrößern und ins „Unendliche“ laufen lassen.
- Wir stellen fest, dass dabei benachbarte Frequenzlinien immer näher aneinander rücken, aus der Summation ein Integral und aus dem Linienspektrum eine kontinuierliche Funktion wird.
- Die Fourier-Transformierte $X(j\omega)$ an der Frequenz ω ist ein Korrelations-Maß dafür, wie ähnlich das Zeitsignal $x(t)$ mit der orthogonalen Basisfunktion $e^{j\omega t}$ an der Frequenz ω ist.
- Das Betragsspektrum $|X(j\omega)|$ gibt an mit welcher Intensität die Frequenz ω im Signal $x(t)$ enthalten ist.
- Der Phasengang $\arg\big(X(j(\omega)\big)$ gibt die relative Phasenlage des Signals $x(t)$ im Bezug auf die Basisfunktion $e^{j\omega t}$ an.

Die Fourier-Transformation

Ein periodisches Signal $x(t)$ mit der Periodendauer T_0 und Grundfrequenz $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ lässt sich als exponentielle Fourierreihe schreiben:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j\omega_0 nt}$$

mit

$$X_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j\omega_0 nt} \, \mathrm{d}t.$$

Die Fourierreiheentwicklung lässt sich nur auf periodische Signale anwenden.

Praktische Signale sind jedoch meist nichtperiodisch.

Die Fourier-Transformation

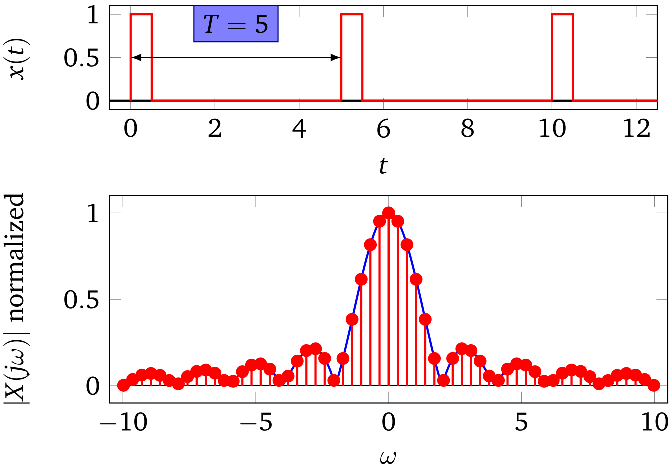
- Für Periodendauer $T_0 \to \infty$ erweitert sich die exponentielle Fourierreihenentwicklung auf nichtperiodische Signale.

- Der Abständ der Frequenzlinien im Linienspektrum, d.h. $\omega_0 = 2\pi/T_0$ läuft gegen infinitesimal kleine Werte $\mathrm{d}\omega$ und die Folge $n\omega_0$ diskreter Vielfacher der Grundfrequenz $\omega_0 = 2\pi/T_0$ nähert sich dem kontinuierlichen Parameter ω an.

- Die Fourier-Transformation ergibt sich, indem man in der Fourierreihenentwicklung die diskrete Summe durch ein Integral ersetzt.

- Das Betragspektrum (Amplitudenspektrum) der Fourier-Transformierten bildet dann quasi die Einhüllende des Betragspektrums (Linienspektrums) der Fourierreihenentwicklung.

Die Fourier-Transformation



Die Fourier-Transformation

Durch Einsetzen der Fourierkoeffizienten in die Fourierreihenentwicklung ergibt sich:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 nt} \left[\frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(\tau) e^{-j\omega_0 n\tau} \, \mathrm{d}\tau \right].$$

Für $T_0 \to \infty$, ergibt sich $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \to \mathrm{d}\omega$ und $n\omega_0 \to \omega$.

Aus der Summe in der orbrigen Gleichung wird dann ein Integral:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} \, \mathrm{d}\tau \right] \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}$$

Die Fourier-Transformation

Das innere Integral ist eine Funktion in $j\omega$ und hängt nicht von t ab.

Wir bezeichnen das innere Integral als $X(j\omega)$.

Es ergibt sich das Transformations-Paar:

$$\text{Fourier-Transformation} \qquad X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} \mathrm{d}t.$$

$$\text{Inverse Fourier-Transformation} \qquad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} \mathrm{d}\omega$$

Die Fourier-Transformation

Die Fourier-Transformierte

$$\text{Fourier-Transformation} \qquad X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t.$$

ist ein Korrelationsmaß dafür wie ähnlich das Zeitsignal $x(t)$ zu der Basisfunktion $e^{j\omega t}$ bei der Frequenz ω ist.

Fourier-Transformation

Fourier-Transformation

$$X(j\omega) \quad = \quad \mathcal{F}\left\{x(t)\right\} \qquad \text{Transformation in den Frequenzbereich}$$

Inverse Fourier-Transformation

$$x(t) \quad = \quad \mathcal{F}^{-1}\left\{X(j\omega)\right\} \qquad \text{Transformation in den Zeitbereich}$$

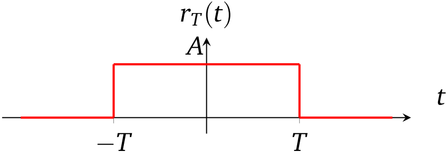
Das Transformationspaar (die Korrespondenz) aus Zeitbereichsfunktion und zugehöriger Frequenzbereichsfunktion wird allgemein mit dem Symbol "$\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet$" dargestellt:

$$x(t) \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; X(j\omega)$$

Fourier-Transformation
Beispiel: Rechtecksimpuls

Rechtecksimpuls:

$$A\, r_T\,(t) = \begin{cases} A, & |t| \leq T \\ 0, & |t| > T \end{cases}$$



Fourier-Transformierte

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} \mathrm{d}t = A \int_{-T}^{T} e^{-j\omega t} \mathrm{d}t = \frac{jA}{\omega} \left(e^{-j\omega T} - e^{j\omega T} \right) \\ &= \frac{2A}{\omega} \sin\left(\omega T\right) = 2AT \mathrm{si}\left(\omega T\right) = 2AT \mathrm{sinc}(\omega T/\pi) \end{aligned}$$

Fourier-Transformation
Beispiel: Rechtecksimpuls

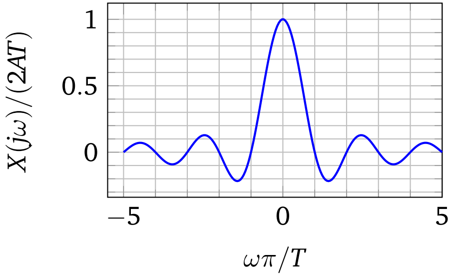
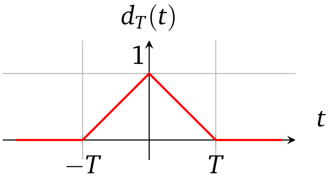


Abbildung: Spektrum $X(j\omega) = 2AT\mathrm{sinc}(\omega T/\pi)$ des Rechtecksimpulses.

Fourier-Transformierte $X(j\omega)$ des Rechtecksimpulses ist ähnlich zu Fourierreihenentwicklung c_n bzw. X_n.

Fourier-Transformation
Beispiel: Dreiecksimpuls

$$d_T(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T}, & |t| \leq T \\ 0, & |t| > T \end{cases}$$



Die Höhe des Pulses ist auf Eins normiert und der Puls um $t = 0$ zentriert. Die Breite des Pulses beträgt $2T$.

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} d_T(t) e^{-j\omega t} \mathrm{d}t = \int_{-T}^{0} \left(1 + \frac{t}{T}\right) e^{-j\omega t} \mathrm{d}t + \int_{0}^{T} \left(1 - \frac{t}{T}\right) e^{-j\omega t} \mathrm{d}t \\ &= \int_{0}^{T} \left(1 - \frac{t}{T}\right) e^{j\omega t} \mathrm{d}t + \int_{0}^{T} \left(1 - \frac{t}{T}\right) e^{-j\omega t} \mathrm{d}t = 2 \int_{0}^{T} \left(1 - \frac{t}{T}\right) \cos(\omega t) \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Fourier-Transformation
Beispiel: Dreiecksimpuls

Integral: $$\int t\cos(at)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a^2}\left[\cos(at) + at\sin(at)\right]$$

Nach Umformungen und mit Additionstheorem $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ folgt

$$X(j\omega) = T\mathrm{si}^2\left(\frac{T\omega}{2}\right)$$

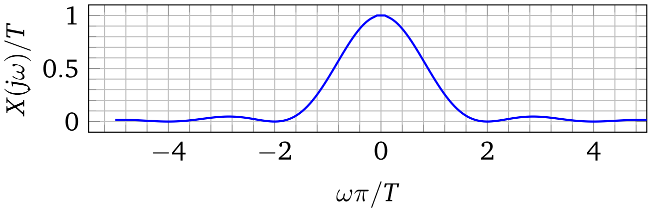


Abbildung: Spektrum $X(j\omega)$ des Dreiecksimpulses.

Fourier-Transformation
Beispiel: Einheitsimpulses $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$

Gemäß der Definition des Einheitsimpulses

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t = 1$$

Rücktransformation

$$\begin{aligned}
\delta(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\lim_{\alpha\to\infty}\int_{-\alpha}^{\alpha} e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{\pi}\lim_{\alpha\to\infty}\frac{\sin(\alpha t)}{t} = \lim_{\alpha\to\infty}\frac{\alpha}{\pi}\mathrm{sinc}\frac{\alpha t}{\pi}
\end{aligned}$$

Wir erinnern uns: $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$ verhält sich wie der Einheitsimpuls $\delta(t)$.

Fourier-Transformation
Beispiel: Einheitsimpulses $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$

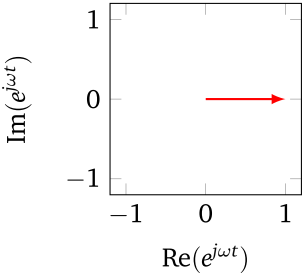
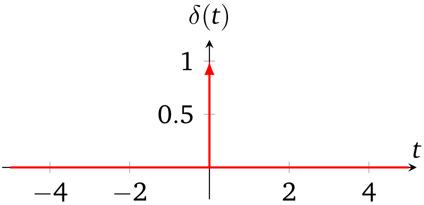


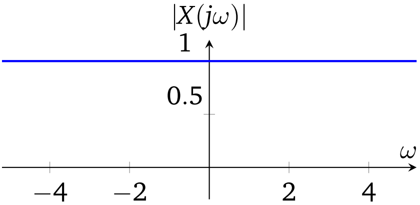
Abbildung: Komplexe Ebene $t = 0$, $\omega = 0 \cdot d\omega, \ldots, 256 \cdot d\omega$.

Für $t = 0$ zeigen alle Zeiger in Richtung $1 = e^{j0}$ und werden kohärent aufsummiert.
Summe (bzw. das Integral) ist ungleich Null.
Animation: fig-06-anim2-einheitsimp.pdf

Fourier-Transformation
Beispiel: Einheitsimpulses $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$

$$\delta(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, 1$$

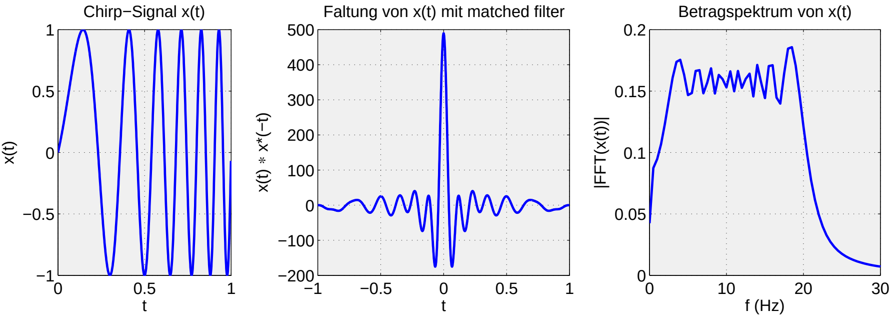




Fourier-Transformation
Beispiel: Chirp-Signal

Ein idealer Einheitsimpuls mit konstantem Betragsspektrum ist in Praxis technisch nicht realisierbar. In Ultraschall- und Radar-Anwendungen werden Chirp-Signale und passende Empfangsfilter verwendet. Das Verfahren wird Pulskompression genannt.

$$x(t) = \sin\left(2\pi(f_0 + f_1 t)t\right)$$



Konvergenz der Fourier-Transformation

- Die Fourierreihenentwicklung eines periodischen Signals konvergiert nicht überall gleichmäßig bzw. punktweise.
- Erfüllt das Signal die Dirichlet Bedingungen, ist die Konvergenz der Reihe garantiert.
- Entsprechend gilt auch für Fourier-Transformation, dass diese nicht notwendigerweise für alle Signale konvergiert.

Die Dirichlet Bedingungen sind hinreichend (nicht notwendig) für die Konvergenz der Fourier-Transformation.

Konvergenz der Fourier-Transformation: Dirichlet Bedingung 1

1. Das Signal $x(t)$ ist absolut integrierbar.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| \mathrm{d}t \quad < \quad \infty$$

Aus der Dreiecksungleichung ($\left|\int a\right| \leq \int |a|$) folgt damit:

$$|X(j\omega)| \quad = \quad \left|\int x(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t\right| \leq \int |x(t)|\mathrm{d}t < \infty.$$

Wenn die Bedingung der absoluten Integrierbarkeit erfüllt ist, dann ist die Fourier-Transformierte $X(j\omega)$ begrenzt (d.h., die Fourier-Transformation lässt sich berechnen und sie nimmt an allen Frequenzen ω endliche Werte an).

Konvergenz der Fourier-Transformation: Dirichlet Bedingung 2

2. Das Signal $x(t)$ erfüllt bestimmte Regularitätsbedingungen:

- $x(t)$ stückweise stetig
- die Anzahl aller Sprungstellen, Unstetigkeiten, Maxima und Minima von $x(t)$ ist endlich.

Konsequenzen der Dirichlet Bedingungen

- Die Dirichlet Bedingungen schliessen per se die wichtige Klasse der sinusförmigen Signale bzw. der komplexen Exponentialfunktionen aus, da diese nicht absolut integrierbar sind.

- Die Fourier-Transformierten dieser Signale lassen sich jedoch mithilfe der verallgemeinerten Funktionen (z.B. der Impulsfunktion) darstellen.

Fourier-Transformation im Grenzbereich

- Bestimmte Signale, wie z.B. $x(t) = \sin(\omega_0 t)$, sind nicht absolut integrierbar und erfüllen die Dirichlet-Bedingungen daher nicht.

- Für die Frequenzbereichsdarstellung dieser Signale erweitern wir die Definition der Fourier-Transformation um die Fourier-Transformation im Grenzbereich.

Beispiel: Das konstante Signal $x(t) = A$, mit $A \neq 0$.

Das Signal $x(t) = A$ ist nicht absolut integrierbar.

Frage: Existiert dennoch die Fourier-Transformierte von $x(t) = A$?

Fourier-Transformation
Beispiel: Konstante Funktion $x(t) = A$

Ansatz: Das Signal $x(t) = A$ wird durch eine Funktion approximiert, für die eine Fourier-Transformierte existiert. Dazu eignet sich die Rechtecksfunktion $A\, r_{\frac{\epsilon}{2}}(t)$.
Wenn wir die Breite ϵ der Rechteckfunktion gegen „Unendlich“ laufen lassen, dann gilt unter bestimmten Regularitätsbedingungen, dass wir die Integration bei der Berechnung der Fourier-Transformierten und die Grenzwertbildung vertauschen können:

$$\begin{aligned} x(t) &= \lim_{\epsilon \to \infty} A\, r_{\frac{\epsilon}{2}}(t) \\ X(j\omega) &= \lim_{\epsilon \to \infty} \mathcal{F}\left\{ A\, r_{\frac{\epsilon}{2}}(t) \right\}. \end{aligned}$$

Die Fourier-Transformierte der Rechtecksfunktion ist bekannt:

$$\mathcal{F}\left\{ A\, r_{\frac{\epsilon}{2}}(t) \right\} = \frac{2A}{\omega} \sin\left(\frac{\omega \cdot \epsilon}{2}\right) = A \cdot \epsilon \cdot \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega \cdot \epsilon}{2\pi}\right)$$

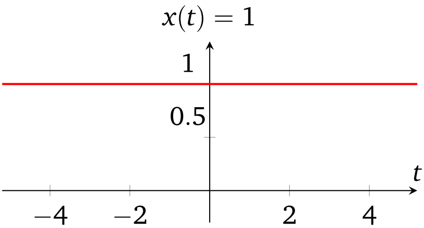
Fourier-Transformation
Beispiel: Konstante Funktion $x(t) = A$

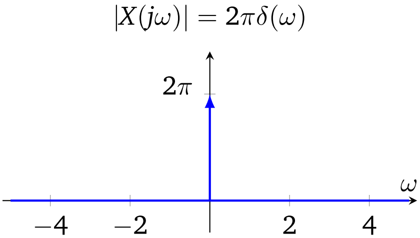
Aus Definition des Einheitsimpulses erhalten wir

$$X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \lim_{\epsilon\to\infty} \int_{-\epsilon/2}^{\epsilon/2} Ae^{-j\omega t}\mathrm{d}\omega = \lim_{\epsilon\to\infty} A \cdot \epsilon \cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega \cdot \epsilon}{2\pi}\right) = 2\pi A\delta(\omega)$$

Fourier-Transformation
Beispiel: Konstante Funktion $x(t) = A$

$$1 \circ\!\!-\!\!\bullet \, 2\pi\delta(\omega)$$





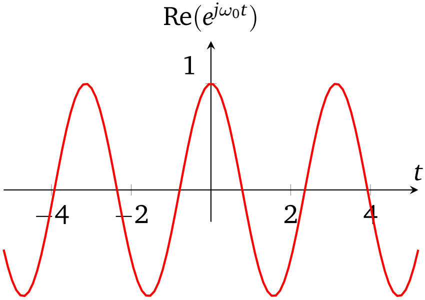
Fourier-Transformation
Beispiel: komplexe Exponentialfunktion

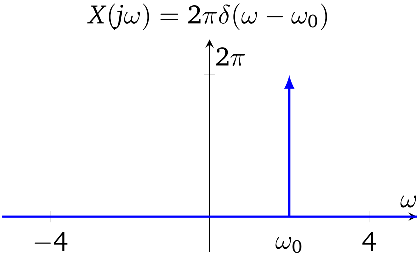
$$
\begin{aligned}
x(t) &= e^{j\omega_0 t} \\
X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} \mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega-\omega_0)t} \mathrm{d}t \\
&= 2\pi\delta(\omega-\omega_0)
\end{aligned}
$$

Das Ergebnis ist nicht überraschend, da das Signal $e^{j\omega t}$ seine gesamte Energie an der Kreisfrequenz ω_0 konzentriert.

Fourier-Transformation
Beispiel: komplexe Exponentialfunktion

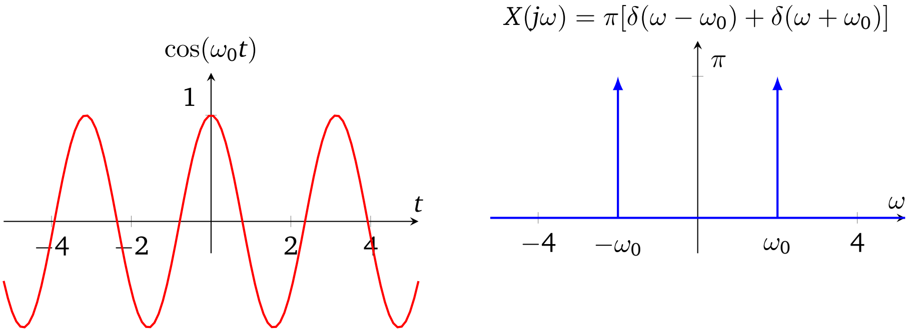
$$e^{j\omega_0 t} \circ\!\!-\!\!\bullet\; 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$





Fourier-Transformation
Beispiel: Trigonometrische Funktion

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$



Beispiel: Beidseitige gedämpfte Exponentialfunktion

Das reellwertige Signal:

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at}, & t \geq 0; \\ -e^{at}, & t < 0. \end{cases}, \qquad a > 0$$

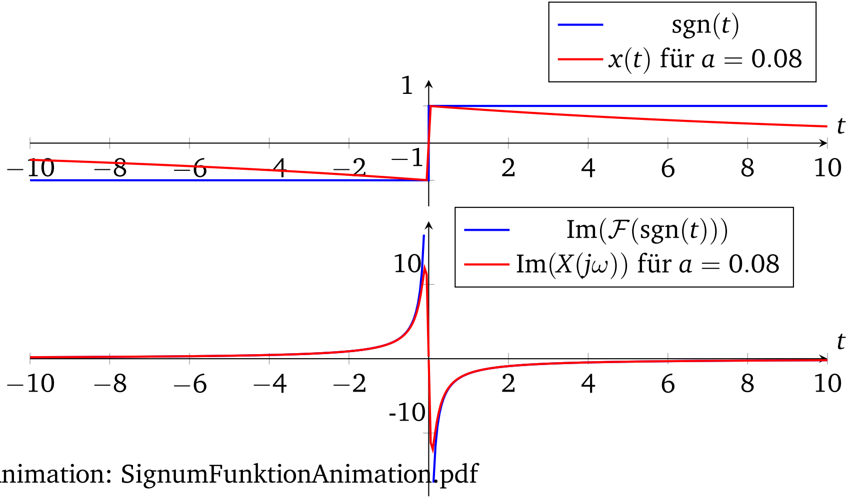
Fourier-Transformierte:

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{0} -e^{at}e^{-j\omega t}\mathrm{d}t + \int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}\mathrm{d}t = -\frac{1}{a - j\omega} + \frac{1}{a + j\omega} = -\frac{j \cdot 2\omega}{a^2 + \omega^2}$$

Für $a \to 0$ ergibt sich

$$\mathcal{F}\{\mathrm{sgn}(t)\} = \lim_{a \to 0} -\frac{j \cdot 2\omega}{a^2 + \omega^2} = \frac{2}{j\omega}$$

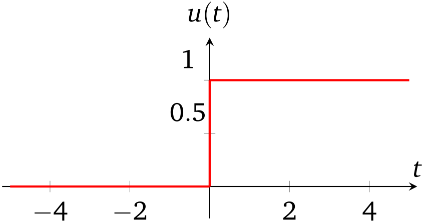
Beispiel: Beidseitige gedämpfte Exponentialfunktion

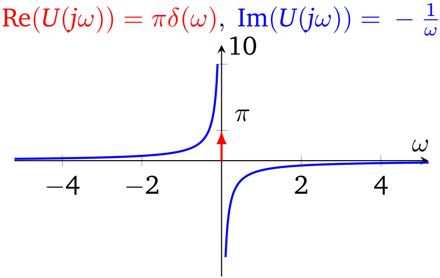


Animation: SignumFunktionAnimation.pdf

Fourier-Transformation
Beispiel: Signum Funktion

$$u(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$





Fourier-Transformation
Auszug aus der Korrespondenztabelle

	$x(t)$	$X(j\omega)$	
1.	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{a+j\omega}$,	$a > 0$
2.	$e^{at}u(-t)$	$\frac{1}{a-j\omega}$,	$a > 0$
3.	$te^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(a+j\omega)^2}$,	$a > 0$
4.	$t^n e^{-at}u(t)$	$\frac{n!}{(a+j\omega)^{n+1}}$,	$a > 0$
5.	$\|t\|$	$-\frac{2}{\omega^2}$	
6.	$\delta(t)$	1	
7.	1	$2\pi\delta(\omega)$	
8.	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$	
9.	$\cos(\omega_0 t)$	$\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$	
10.	$\sin(\omega_0 t)$	$j\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$	
11.	$\cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\pi}{2}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]+\frac{j\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$	
12.	$\sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\pi}{2j}[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]+\frac{\omega_0}{\omega_0^2-\omega^2}$	
13.	$e^{-at}\sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\omega_0}{(a+j\omega)^2+\omega_0^2}$,	$a > 0$
14.	$e^{-at}\cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{a+j\omega}{(a+j\omega)^2+\omega_0^2}$,	$a > 0$
15.	$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$	$\omega_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_0)$,	$\omega_0=\frac{2\pi}{T}$
16.	$e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}}$	$\sigma\sqrt{2\pi}e^{\frac{-\sigma^2\omega^2}{2}}$	

Eigenschaften der Fourier-Transformation

Die Energiedichtefunktion

Wir haben die Energie eines Signals $x(t)$ bereits im Zeitbereich definiert:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \,\mathrm{d}t$$

Signale für die $E < \infty$ gilt sind energiebegrenzt.

Wir interessieren uns für einen Ausdruck zur Berechnung der Signalenergie im Frequenzbereich.

$$\begin{aligned}
E &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) x(t) \mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} \mathrm{d}\omega \right] \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) e^{j\omega t} \mathrm{d}t \,\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} \mathrm{d}t \right]^* \mathrm{d}\omega
\end{aligned}$$

Energiedichtefunktion und Parseval's Theorem

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, X^*(j\omega)\, \mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left|X(j\omega)\right|^2 \mathrm{d}\omega$$

und

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left|x(t)\right|^2 \, \mathrm{d}t = \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left|X(j\omega)\right|^2 \, \mathrm{d}\omega$$

Energiedichtefunktion und Parseval's Theorem

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) X^*(j\omega) \, \mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 \, \mathrm{d}\omega$$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, \mathrm{d}t = \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 \, \mathrm{d}\omega$$

- Das Betragssignal $|X(j\omega)|^2$ ist die spektrale Energiedichtefunktion von $x(t)$.
- Die Integration der spektralen Energiedichtefunktion über den gesamten Frequenzbereich ergibt die Gesamtenergie.
- Die Signalenergie in einem begrenzten Frequenzband, z.B. $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$, berechnet sich durch Integration der Spektralen Energiedichtefunktion über das Intervall $[\omega_1, \omega_2]$.
- Das Betragsignal $|x(t)|^2$ hingegen wird als Momentanleistung bezeichnet.

Beispiel: Energie einer einseitigen gedämpften Exponentialfunktion

$$x(t) = e^{-at}u(t), \qquad a > 0$$

Es ist bekannt, dass

$$X(j\omega) = \int_0^\infty e^{-(a+j\omega)t}\mathrm{d}t = \frac{-1}{a+j\omega}\left[e^{-(a+j\omega)t}\right]_0^\infty = \frac{1}{a+j\omega}.$$

Gesamtenergie des Signals

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(j\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{a^2+\omega^2}\,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{a}\arctan\frac{\omega}{a}\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{2\pi a}\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right] = \frac{1}{2a} \end{aligned}$$

In diesem Fall ist es einfacher, die Signalenergie im Zeitbereich zu berechnen.

Lernziel der 8. Lerneinheit: WP 3 – Eigenschaften der Fourier-Transformation

In der 8. Lerneinheit untersuchen wir allgemeine Zusammenhänge zwischen der Signaldarstellung im Zeit- und Frequenzbereich.

- Dabei wenden wir jeweils Operationen (wie z.B. eine Zeitverschiebung oder die komplexe Konjugation) auf das Zeitsignal $x(t)$ an und untersuchen wie sich diese Operationen auf die zugehörige Fourier-Transformierte $X(j\omega)$ auswirken und umgekehrt.
- Die Eigenschaften der Fourier-Transformation die wir dabei herleiten sind sowohl bei der Analyse von Signalen und Systemn im Frequenzbereich als auch bei der pratischen Berechnung der Fourier-Transformation oder der Systemantwort sehr hilfreich.

Eigenschaften der Fourier-Transformation

- Als nächstes leiten wir wichtige allgemeine Eigenschaften für die Fourier-Transformation her.
- Ausgangslage für die Herleitung der Eigenschaften ist immer ein gegebenes Transformationspaar (Korrespondenz)

$$x(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X(j\omega)$$

  auf das im Zeitbereich (oder im Frequenzbereich) eine Operation angewendet wird.
- Ziel ist es die entsprechende Operation im dualen Bereich, d.h. im Frequenbereiche, (bzw. Zeitbereich) anzugeben.

Eigenschaften der Fourier-Transformation

- Die allgemeinen Eigenschaften der Fourier-Transformation sind für das Verständnis von Signalen und Systemen in praktischen Anwendungen fundamental wichtig.
- Die allgemeinen Eigenschaften ermöglichen uns in vielen Fällen eine einfache Berechnung der Fourier-Tranformierten durchzuführen, ohne jeweils das Transformationsintegral auswerten zu müssen.
- Voraussetzung ist, dass ein geeignetes Transformationspaar gegeben ist (z.B. in der Korrespondenztabelle) und dazu eine entsprechend geeignete Operation, sodass sich das Fourier-Transformierte des gesuchten Signals damit darstellen lässt.

Eigenschaften der Fourier-Transformation: Linearität

Linearität (Superposition):

Wenn

$$x_1(t) \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad X_1(j\omega)$$

$$x_2(t) \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad X_2(j\omega)$$

dann gilt für beliebige Konstanten a and b:

$$a\,x_1(t) + b\,x_2(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\, a\,X_1(j\omega) + b\,X_2(j\omega)$$

Eigenschaften der Fourier-Transformation: Linearität

Herleitung: Mit $g(t) = a\,x_1(t) + b\,x_2(t)$ und $g(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\, G(j\omega)$, folgt aus der Definition der Fourier-Transformation (FT), dass

$$
\begin{aligned}
G(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} [a\,x_1(t) + b\,x_2(t)] e^{-j\omega t}\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} a\,x_1(t) e^{-j\omega t}\,dt + \int_{-\infty}^{\infty} b\,x_2(t) e^{-j\omega t}\,dt \\
&= a \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) e^{-j\omega t}\,dt + b \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t) e^{-j\omega t}\,dt \\
&= a\,X_1(j\omega) + b\,X_2(j\omega)
\end{aligned}
$$

Eigenschaften der Fourier-Transformation: Zeitverschiebung

Zeitverschiebung eines Zeitsignals $x(t)$ um t_0:

$$x(t - t_0) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\, X(j\omega)e^{-j\omega t_0}$$

für eine reellwertige Konstante t_0.

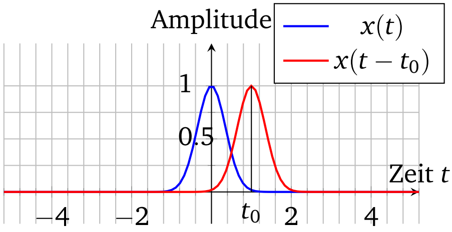
Herleitung: Es sei $g(t) = x(t - t_0) \quad \Rightarrow \quad G(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0)e^{-j\omega t}\, dt$

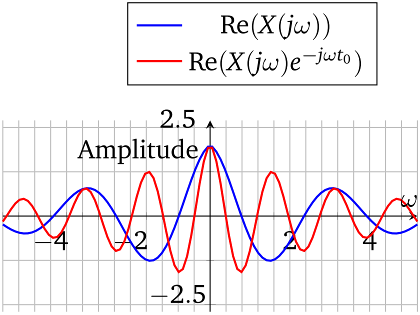
Unter Verwendung der Variablentransformation $\tau = t - t_0$ bzw. $t = \tau + t_0$ ergibt sich

$$G(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\omega(\tau + t_0)}\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau}\, d\tau\, e^{-j\omega t_0} = X(j\omega)e^{-j\omega t_0}$$

Eigenschaften der Fourier-Transformation: Zeitverschiebung

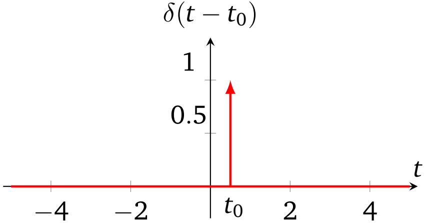
$$x(t - t_0) \circ\!\!-\!\!\bullet\, X(j\omega)e^{-j\omega t_0}$$

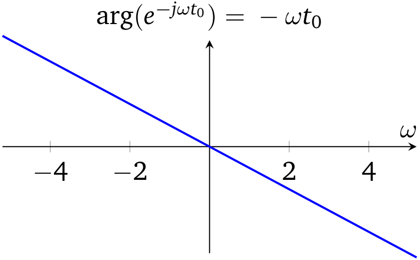




Eigenschaften der Fourier-Transformation
Zeitverschiebung der Impulsfunktion $\delta(t)$

$$\delta(t - t_0) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; e^{-j\omega t_0}$$





Beispiel: Pfadverzögerung im OFDM System

Wir betrachten eine OFDM Übertragungsstrecke im Mobilfunk. Gesendet wird das Signal $x(t) = \sum_{n=1}^{N} A_n e^{j\omega_n t}$.

Die Informationssymbole A_n werden für $n = 1, \ldots, N$ auf die jeweiligen Trägersignale $e^{j\omega_n t}$ bei den Frequenzen $\omega_1, \ldots, \omega_N$ aufmoduliert.

Am Empfänger ergibt sich das Signal

$$y(t) \quad = \quad x(t - t_0) = \sum_{n=1}^{N-1} \underbrace{A_n}_{\text{Symbol}} \cdot \underbrace{e^{j\omega_n (t-t_0)}}_{\text{Träger}} = \sum_{n=1}^{N-1} \underbrace{A_n e^{-j\omega t_0}}_{\text{rotiertes Symbol}} \quad e^{j\omega t}$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet \quad Y(j\omega) = X(j\omega) e^{-j\omega t_0} = \sum_{n=1}^{N} A_n e^{-j\omega t_0} \delta(\omega - \omega_n)$$

Die Zeitverzögerung am Empfänger führt zu einer frequenzabhängigen Phasendrehung der Informationssymbole A_n.

Beispiel: Pfadverzögerung im OFDM System

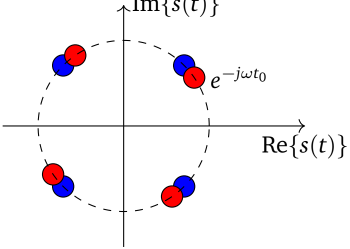
Die Zeitverzögerung t_0 muss geschätzt werden und die Rotation der empfangenen Symbole müssen entsprechend korrigiert werden.

Sendesignal (blau)

$$X(j\omega) = \sum_{n=1}^{N-1} \underbrace{A_n}_{\text{Symbol}} \delta(\omega - \omega_n)$$

Empfängersignal (rot)

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= X(j\omega)e^{-j\omega t_0} \\ &= \sum_{n=1}^{N} \underbrace{A_n e^{-j\omega t_0}}_{\text{rotiertes Symbol}} \delta(\omega - \omega_n) \end{aligned}$$



QPSK Konstellationsdiagramm

Eigenschaften der Fourier-Transformation: Zeitskalierung

Skalierung des Zeitparameters um den reellwertigen Faktor a:

$$x(at) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{|a|} X\left(\frac{j\omega}{a}\right).$$

Eigenschaften der Fourier-Transformation: Zeitskalierung

Herleitung: Mit $g(t) = x(at)$

$$G(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(at) e^{-j\omega t}\, dt$$

Fall 1: Für $a > 0$ und die Substitution $\tau = at$ bzw $\tau / a = t$ ergibt sich

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{\frac{-j\omega\tau}{a}} \frac{d\tau}{a} \\ &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\left(\frac{\omega}{a}\right)\tau}\, d\tau = \frac{1}{a} X\left(\frac{j\omega}{a}\right). \end{aligned}$$

Eigenschaften der Fourier-Transformation: Zeitskalierung

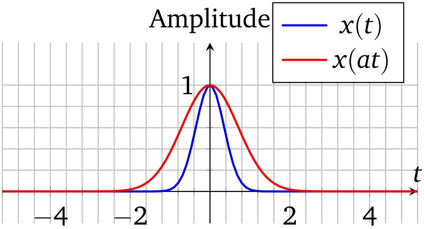
Fall 2: Für $a < 0$ und die Substitution $\tau = at$ bzw $\tau/a = t$ ergibt sich mit geänderten Integrationsgrenzen:

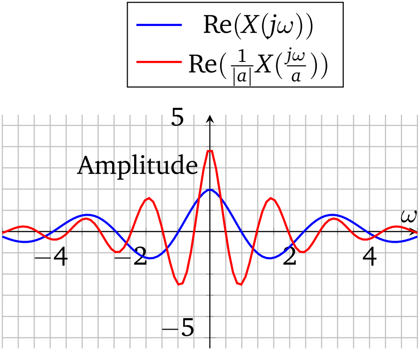
$$
\begin{aligned}
G(j\omega) &= \int_{\infty}^{-\infty} x(\tau) e^{\frac{-j\omega\tau}{a}} \frac{d\tau}{a} \\
&= -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\left(\frac{\omega}{a}\right)\tau} \, d\tau = -\frac{1}{a} X\left(\frac{j\omega}{a}\right)
\end{aligned}
$$

Die Kombination beider Fälle liefert Ergebnis.

Eigenschaften der Fourier-Transformation: Zeitskalierung

$$x(at) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{|a|} X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$$





Eigenschaften der Fourier-Transformation: Zeit-Spiegelung

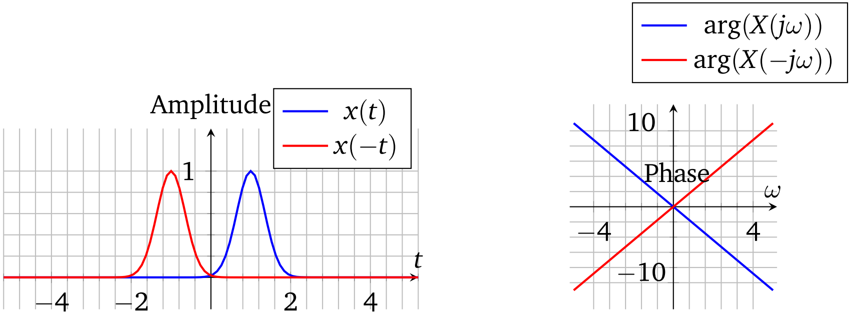
Ein am Zeitursprung gespiegeltes Signal $x(t)$ hat folgende Fourier-Transformierte:

$$x(-t) \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad X(-j\omega) \qquad (= X^*(j\omega), \qquad \text{falls } x(t) \text{ reell.})$$

Die Herleitung: folgt direkt aus Skalierungseigenschaft für $a = -1$.

Eigenschaften der Fourier-Transformation: Zeit-Spiegelung

$$x(-t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, X(-j\omega)$$



Eigenschaften der Fourier-Transformation: Dualität

Wir erkennen, dass die Fourier-Transformation und die Inverse Fourier-Transformation gewisse Gemeinsamkeiten zueinander aufweisen.

Hin- und Rücktransformation der Fourier-Transformation erfüllen die Dualitätbeziehung (Symmetriebeziehung):

$$X(jt) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; 2\pi x(-\omega)$$

Herleitung:

$$2\pi x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(j\lambda) e^{j\lambda t}\, d\lambda$$

Ein Vergleich mit Definition der Fourier-Transformation

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

ergibt, dass beide Ausdrücke bis auf Minus $(-)$ Zeichen im Exponenten identisch sind.

Eigenschaften der Fourier-Transformation: Dualität

Die Substitution von t durch $-t$ in der ersten Gleichung ergibt

$$2\pi x(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(j\lambda) e^{-j\lambda t} \, d\lambda$$

Die Substitution von t durch ω ergibt.

$$\begin{aligned} 2\pi x(-\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} X(j\lambda) e^{-j\omega\lambda} \, d\lambda \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(j\tau) e^{-j\omega\tau} \, d\tau \end{aligned}$$

Dies beweist die Gültigkeit der Dualitätsbeziehung.

Eigenschaften der Fourier-Transformation: Dualität (Beispiel 1 aus Klausur WS 14/15)

Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte $G(j\omega)$ der Zeitfunktion

$$g(t) = \frac{6}{(a + jt)^4}, \qquad a > 0$$

in Abhängigkeit von a unter Zuhilfenahme einer geeigneten Korrespondenz und einer geeigneten Eigenschaft der Fourier-Transformation.

Eigenschaften der Fourier-Transformation: Dualität (Beispiel 1 aus Klausur WS 14/15)

Die Fourier-Transformierte der Funktion $g(t)$ kann unter Zuhilfenahme der Symmetrieeigenschaft der Fourier-Transformation

$$\text{Symmetrie/Dualität:} \qquad X(jt) \circ\!\!-\!\!\bullet\; 2\pi\, x(-\omega)$$

und der Transformationskorrespondenz

$$t^n e^{-\alpha t} u(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{n!}{(\alpha + j\omega)^{n+1}} \quad \alpha > 0$$

berechnet werden, mit $n = 3$. Es folgt

$$g(t) = X(jt) = \frac{6}{(a + jt)^4} = \frac{3!}{(a + jt)^{3+1}} \circ\!\!-\!\!\bullet\; -2\pi\omega^3 e^{a\omega} u(-\omega) = G(j\omega)$$

Eigenschaften der Fourier-Transformation: Dualität (Beispiel 2 aus Klausur SS 16)

Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte $H(j\omega)$ der Zeitfunktion

$$h(t) = \frac{1}{(\sqrt{\pi} + jbt)^2}, \quad b > 0$$

in Abhängigkeit von b.

Hinweis:

Nutzen Sie die Eigenschaften der Fourier-Transformation sowie eine geeignete Korrespondenz.

Eigenschaften der Fourier-Transformation: Dualität (Beispiel 2 aus Klausur SS 16)

Die Fourier-Transformierte $H(j\omega)$ des Zeitsignals $h(t)$ lässt sich in drei Schritten bestimmen:

- Definition des Signals $h(t)$ als zeitskalierte Version des Signals $\tilde{h}(t)$. Es gilt:

  $$h(t) = \tilde{h}(b \cdot t)$$

  mit

  $$\tilde{h}(t) = \frac{1}{(\sqrt{\pi} + jt)^2}$$

- Mit Hilfe der Korrespondenz

  $$x(t) = te^{-at}u(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{(a + j\omega)^2} = X(j\omega)$$

  folgt:

  $$\tilde{h}(t) = X(jt) \quad \text{mit} \quad a = \sqrt{\pi}$$

Eigenschaften der Fourier-Transformation: Dualität (Beispiel 2 aus Klausur SS 16)

Die Fourier-Transformierte $\tilde{H}(j\omega)$ des Zeitsignals $\tilde{h}(t)$ ergibt sich mit Hilfe des Dualitätssatzes der Fourier-Transformation zu

$$\tilde{H}(j\omega) = 2\pi(-\omega)e^{\sqrt{\pi}\omega}u(-\omega) = -2\pi\omega e^{\sqrt{\pi}\omega}(1 - u(\omega))$$

- $H(j\omega)$ ergibt sich aus $\tilde{H}(j\omega)$ durch Anwendung des Satzes zur Zeitskalierung der Fourier-Transformation (Hinweis: $b > 0$ ist vorausgesetzt laut Aufgabenstellung):

$$H(j\omega) = \frac{1}{|b|}\tilde{H}(\frac{j\omega}{b}) = \frac{1}{b}\left(-2\pi\frac{\omega}{b}e^{\sqrt{\pi}\frac{\omega}{b}}\left(1 - u\left(\frac{\omega}{b}\right)\right)\right)$$

$$= -2\pi\frac{\omega}{b^2}e^{\sqrt{\pi}\frac{\omega}{b}}(1 - u(\omega)) = -2\pi\frac{\omega}{b^2}e^{\sqrt{\pi}\frac{\omega}{b}}u(-\omega)$$

Eigenschaften der Fourier-Transformation: Frequenzversatz

Frequenzverschiebung der Fourier-Transformierten $X(j\omega)$ um den Frequenzversatz ω_0

$$x(t)e^{j\omega_0 t} \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet X\left(j(\omega - \omega_0)\right)$$

wobei ω_0 reelle Konstante ist.
Die Multiplikation des Signals $x(t)$ mit der komplexer Harmonischen $e^{j\omega_0 t}$ im Zeitbereich wird Modulation genannt.

Herleitung: Mit $g(t) = x(t)e^{j\omega_0 t}$

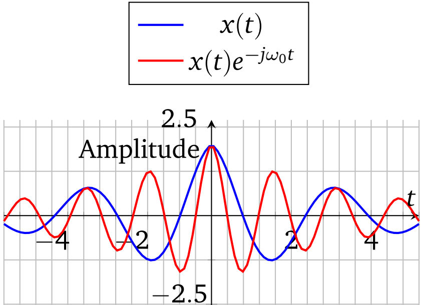
$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j\omega_0 t}e^{-j\omega t}\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j(\omega-\omega_0)t}\,dt \\ &= X\left(j(\omega - \omega_0)\right). \end{aligned}$$

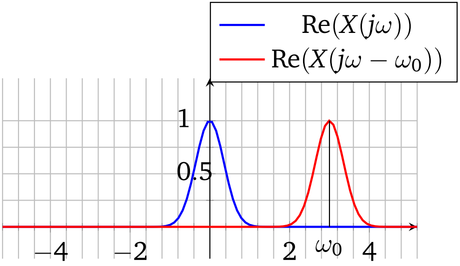
Eigenschaften der Fourier-Transformation
Beispiel: Modulation

$$x(t)e^{j\omega_0 t} \circ\!\!-\!\!\bullet X\left(j(\omega - \omega_0)\right)$$

Wird dem Trägersignal $e^{j\omega_0 t}$ im Zeitbereich das Signal $x(t)$ aufmoduliert, dann verschieben sich im Frequenzbereich alle Spektralanteile von $X(j\omega)$ um ω_0.

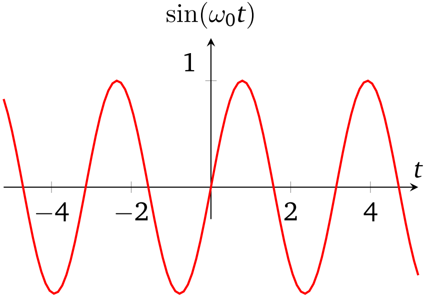
Das Prinzip der Modulation spielt eine große Rolle bei der Datenübertragung im Frequenzband um ω_0.



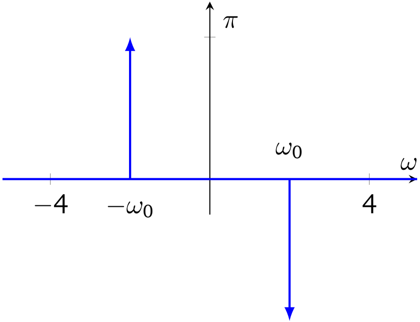


Eigenschaften der Fourier-Transformation
Beispiel: Sinus der Grundfrequenz ω_0

$$\sin(\omega_0 t) = \frac{1}{2j}(1 \cdot e^{j\omega_0 t} - 1 \cdot e^{-j\omega_0 t}) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$$



$$\mathrm{Im}(X(j\omega)) = \pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$$



Eigenschaften der Fourier-Transformation: Modulation

Die Modulation des Signals $x(t)$ mit einem Cosinussignal $\cos(\omega_0 t)$ im Zeitbereich erfüllt die folgende Eigenschaft:

$$x(t)\cos(\omega_0 t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{2}\left[X\left(j(\omega-\omega_0)\right)+X\left(j(\omega+\omega_0)\right)\right],$$

wobei ω_0 eine reelle Konstante ist.

Herleitung: $\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}\right)$

$$g(t) = x(t)\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}\left(x(t)e^{j\omega_0 t}+x(t)e^{-j\omega_0 t}\right)$$

Aus dem Frequenzverschiebungseigenschaft folgt

$$G(j\omega) = \frac{1}{2}\left[X\left(j(\omega-\omega_0)\right)+X\left(j(\omega+\omega_0)\right)\right].$$

Eigenschaften der Fourier-Transformation: Differentiation nach der Zeit

Die n-te Ableitung des Signals $x(t)$ nach der Zeit

$$\frac{\mathrm{d}^n x(t)}{\mathrm{d}t^n} \circ\!\!-\!\!\bullet \ (j\omega)^n X(j\omega)$$

Herleitung: $x^{(n)}(t) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} x(t)$ ist die n-te Ableitung von $x(t)$

$$\begin{aligned} x^{(n)}(t) &= \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega\right] \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\left[e^{j\omega t}\right]\mathrm{d}\omega \end{aligned}$$

Wenn die Funktion auf dem Integrations-/Differenzationsbereich stetig ist, dann kann die Differentiation unter dem Integral durchgeführt werden ($\Rightarrow$ Satz von Fubini).

Eigenschaften der Fourier-Transformation: Differentiation nach der Zeit

Bekannt ist die Differentiationsregel der komplexen Funktion:

$$\frac{d}{dt}[e^{j\omega t}] = j\omega e^{j\omega t}$$

Die zweite Ableitung der komplexen Exponentialfunktion nach der Zeit ist

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}[e^{j\omega t}] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[j\omega e^{j\omega t}] = (j\omega)^2 e^{j\omega t}$$

Die n-te Ableitung ergibt sich zu:

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}[e^{j\omega t}] = (j\omega)^n e^{j\omega t}$$

Daher gilt:

$$x^{(n)}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (j\omega)^n X(j\omega) e^{j\omega t} \, \mathrm{d}\omega$$

Eigenschaften der Fourier-Transformation: Differentiation nach der Zeit

Die n-te Ableitung des Signals $x(t)$ nach der Zeit

$$\frac{\mathrm{d}^n x(t)}{\mathrm{d}t^n} \circ\!\!-\!\!\bullet\; (j\omega)^n X(j\omega)$$

Bedeutung des Differentiationssatzes:

Der Differentiationssatz der Fourier-Transformation spielt bei der Analyse von realen Systemen, d.h. RLC-Netwerken, eine große Rolle, da sich in diesen Systemen die Eingang-/Ausgangsbeziehung implizip über lineare Differentialgleichungen beschreiben läßt.

Wir werden diese Differentialgleichungen im Frequenzbereich untersuchen.

Eigenschaften der Fourier-Transformation: Faltungstheorem

Die Faltung zweiter Zeitsignale $x_1(t)$ und $x_2(t)$ ergibt:

$$x_1(t) * x_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, X_1(j\omega) \cdot X_2(j\omega)$$

Das Faltungstheorem der Fourier-Transformation ist eines der wichtigsten Eigenschaften für LTI-Systeme. Es ermöglicht eine vereinfachte Berechnung der Systemantwort aus dem Eingangssignal $x(t)$ und der Impulsantwort $h(t)$ des Systems im Frequenzbereich.

Herleitung: Faltungsintegral

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t-\tau) x_2(\tau) \mathrm{d}\tau$$

Eigenschaften der Fourier-Transformation: Faltungstheorem

Zeitverschiebungssatz

$$\mathcal{F}\{x_1(t-\tau)\} = X_1(j\omega)e^{-j\omega\tau}.$$

$$x_1(t-\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_1(j\omega)e^{-j\omega\tau}e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
x_1(t) * x_2(t) &= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_1(j\omega)e^{-j\omega\tau}e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega\right] x_2(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_1(j\omega)\left[\int_{-\infty}^{\infty} x_2(\tau)e^{-j\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau\right] e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_1(j\omega)X_2(j\omega)e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega = \mathcal{F}^{-1}\{X_1(j\omega)X_2(j\omega)\}
\end{aligned}$$

Eigenschaften der Fourier-Transformation: Faltungstheorem

Die Faltung zweier Signale im Zeitbereich entspricht der Multiplikation der jeweiligen Fourier-Transformierten im Frequenzbereich

$$\mathcal{F}\{x_1(t) * x_2(t)\} = X_1(j\omega) \cdot X_2(j\omega)$$

Häufig wird das Faltungsintegral mithilfe des Faltungtheorems im Frequenzbereich berechnet und dann gegebenenfalls in den Zeitbereich rücktransformiert.

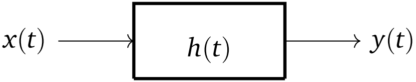
Beispiel: Schnelle Faltung

Ausblick DSS Teil 2: Fourieranalyse zeitdiskreter (abgetasteter) Signale

$\Rightarrow$ Schnelle Faltung mittels schneller Diskreter Fourier Transformation (Fast Fourier Transformation – FFT).

Diverse Eigenschaften der Fourier-Transformation: Beispiel 1 aus Klausur WS15/16

Das Signal $x(t)$ liegt als Eingangssignal an einem LTI-System (Filter) H mit der Impulsantwort $h(t)$ an.



Es sei $y(t)$ das Signal am Ausgang des Systems H.

Weiterhin sei

$$\tilde{x}(t) = 2x(T - t).$$

Geben Sie $\tilde{y}(t) = h(t) * \tilde{x}(t)$ als Funktion von $y(t)$ und in Abhängigkeit von T an.

Geben Sie die Fourier-Transformierte $\tilde{Y}(j\omega) = \mathcal{F}\{\tilde{y}(t)\}$ von $\tilde{y}(t)$ als Funktion von $Y(j\omega) = \mathcal{F}\{y(t)\}$ und in Abhängigkeit von T an.

Diverse Eigenschaften der Fourier-Transformation: Beispiel 1 aus Klausur WS15/16

Das veränderte Ausgangssignal $\tilde{y}(t)$ und dessen Fourier-Transformierte $\tilde{Y}(j\omega) = \mathcal{F}\{\tilde{y}(t)\}$ ergeben sich aus der Linearität und der Zeitinvarianz des Systems, sowie aus den Eigenschaften von Faltung und Fourier-Transformation:

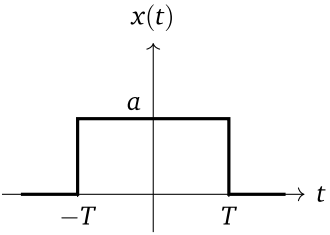
$$\tilde{y}(t) = h(t) * 2x(T - t)$$

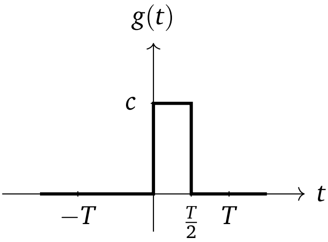
$$\tilde{Y}(j\omega) = H(j\omega)2X(-j\omega)e^{j\omega T}$$

Diverse Eigenschaften der Fourier-Transformation: Beispiel 2 aus Klausur WS14/15

Wir betrachten das LTI-System (Filter) G, charakterisiert durch die zugehörige Impulsantwort $g(t)$, welche im Folgenden skizziert ist.

Mit dem Eingangssignal $x(t)$ des Systems G ergibt sich das Ausgangssignal $z(t) = g(t) * x(t)$.





Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte $Z(j\omega) = \mathcal{F}\{z(t)\}$ in Abhängigkeit von a,c und T.

Diverse Eigenschaften der Fourier-Transformation: Beispiel 2 aus Klausur WS14/15

Die Antwort lässt sich einfach mit Hilfe der Multiplikation im Frequenzbereich $Z(j\omega) = X(j\omega) \cdot G(j\omega)$ bestimmen:

$$\begin{aligned}
x(t) &= a\Pi\left(\frac{t}{2T}\right) \circ\!\!-\!\!\bullet\, a2T\mathrm{si}(\omega T) = X(j\omega) \\
g(t) &= c\Pi\left(\frac{t-\frac{T}{4}}{\frac{T}{2}}\right) \circ\!\!-\!\!\bullet\, c\frac{T}{2}\mathrm{si}\left(\omega\frac{T}{4}\right)e^{-j\omega\frac{T}{4}} = G(j\omega) \\
Z(j\omega) &= X(j\omega)\cdot G(j\omega) = acT^2\mathrm{si}(\omega T)\mathrm{si}\left(\omega\frac{T}{4}\right)e^{-j\omega\frac{T}{4}}
\end{aligned}$$

Eigenschaften der Fourier-Transformation: Multiplikation im Zeitbereich

Die Multiplikation zweier Signale $x_1(t)$ mit $x_2(t)$ im Zeitbereich:

$$x_1(t) \cdot x_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{2\pi} X_1(j\omega) * X_2(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(j\lambda) X_2\left(j(\omega - \lambda)\right) \, \mathrm{d}\lambda$$

Herleitung: Unmittelbar aus der Dualitätsbeziehung und dem Faltungssatz.

$$x(t) = x_1(t) * x_2(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X(j\omega) = X_1(j\omega) \cdot X_2(j\omega)$$

Dualität $\qquad X(jt) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad 2\pi x(-\omega)$

$$X_1(jt) \cdot X_2(jt) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad 2\pi x_1(-\omega) * x_2(-\omega)$$

$$X_1(jt) \cdot X_2(jt) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{2\pi} \left(\underbrace{2\pi x_1(-\omega)}_{\mathcal{F}\{X_1(jt)\}} * \underbrace{2\pi x_2(-\omega)}_{\mathcal{F}\{X_2(jt)\}} \right)$$

Eigenschaften der Fourier-Transformation: Integration

Die Integration des Signals $x(t)$ bzgl. der Zeit ergibt im Frequenzbereich

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,\mathrm{d}\tau \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{X(j\omega)}{j\omega} + \pi X(0)\delta(\omega)$$

Herleitung:

Bekannt ist die Korrespondenz:

$$u(t) = \frac{1}{2}\left[1 + \mathrm{sgn}(t)\right] \circ\!\!-\!\!\bullet \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\ .$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)u(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = x(t) * u(t)$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet \quad X(j\omega)\mathcal{F}\{u(t)\} = X(j\omega)\left[\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right] = \frac{X(j\omega)}{j\omega} + \pi X(0)\delta(\omega)$$

Fourier-Transformation
Beispiel: Dreieckssignal

Das Dreieckssignal ist definiert durch

$$d_T(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T}, & |t| < T \\ 0, & \text{ansonsten} \end{cases}$$

Die Fourier-Transformierte lässt sich durch direkte Auswertung des Transformationsintegrals berechnen.

Einfacher ist es jedoch die zweifache Ableitung des Dreiecksignals in den Frequenzbereich zu transformieren und dann den Integrationssatz zu verwenden.

$$\frac{d}{dt} d_T(t) = \begin{cases} -\frac{1}{T}\operatorname{sgn}(t) & |t| < T \\ 0 & \text{ansonsten} \end{cases}$$

Fourier-Transformation
Beispiel: Dreieckssignal

Erste Ableitung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} d_T(t) = \frac{1}{T}\left[r_{\frac{T}{2}}\left(t+\frac{T}{2}\right) - r_{\frac{T}{2}}\left(t-\frac{T}{2}\right)\right] = -\frac{1}{T} r_T(t)\,\mathrm{sgn}(t)$$

Zweite Ableitung:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} d_T(t) = \frac{1}{T}\left[\delta(t+T) - 2\delta(t) + \delta(t-T)\right]$$

Mit $\mathcal{F}\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} d_T(t)\right]\Big|_{\omega=0} = 0$ und $\mathcal{F}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} d_T(t)\right]\Big|_{\omega=0} = 0$ (L'Hospital) gilt

$$\frac{d^2}{\mathrm{d}t^2} d_T(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; \mathcal{F}\left[\frac{1}{T}\left[\delta(t+T) - 2\delta(t) + \delta(t-T)\right]\right] = \frac{1}{T}\left[e^{j\omega T} - 2 + e^{-j\omega T}\right]$$

$$\frac{d}{\mathrm{d}t} d_T(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; \mathcal{F}\left[\frac{d}{\mathrm{d}t} d_T(t)\right] = \frac{1}{j\omega}\frac{1}{T}\left[e^{j\omega T} - 2 + e^{-j\omega T}\right] + \pi \cdot 0 \cdot \delta(\omega)$$

$$d_T(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{(j\omega)^2}\frac{1}{T}\left[e^{j\omega T} - 2 + e^{-j\omega T}\right] + \pi \cdot 0 \cdot \delta(\omega)$$

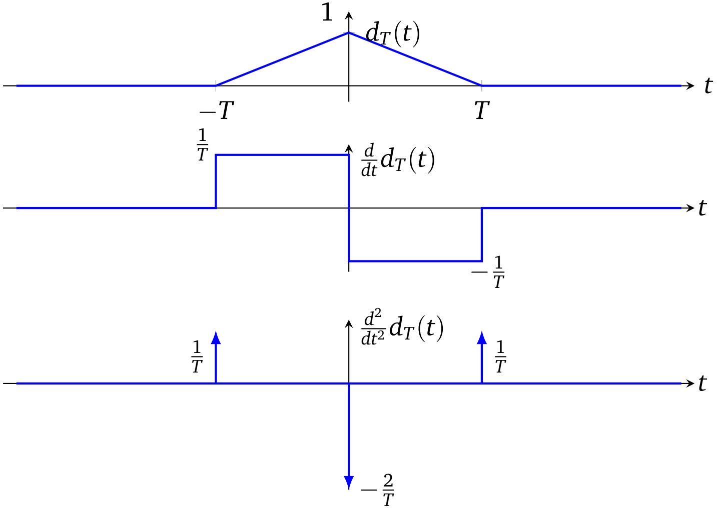
Fourier-Transformation
Beispiel: Dreieckssignal

Daher gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left\{d_T\left(t\right)\right\} &= \frac{2}{(j\omega)^2 T}[\cos(\omega T) - 1] \\ &= \frac{4}{\omega^2 T}\sin^2\left(\frac{\omega T}{2}\right) \\ &= T\operatorname{sinc}^2\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)\end{aligned}$$

Das Beispiel zeigt die praktische Bedeutung der Eigenschaften der Fourier-Transformation.

Fourier-Transformation
Beispiel: Dreieckssignal



Eigenschaften der Fourier-Transformation: Grenzverhalten

Unter sehr allgemeinen Bedingungen bzgl. der Glattheit des Signals $x(t)$ gilt:

$$\lim_{\omega\to\infty} X(j\omega) = \lim_{\omega\to\infty} X(-j\omega) = 0$$

Herleitung: (anschaulich):

Wegen $e^{-j\omega t} = \cos\omega t - j\sin\omega t$ wird das Signal $x(t)$ mit wachsendem ω durch immer dichter aufeinander folgende positive und negative Halbwellen gewichtet.

Im Grenzfall heben sich daher die jeweilig positiven und negativen Teilbeträge gegenseitig auf.

Eigenschaften der Fourier-Transformation: Konjugiert komplexes Zeitsignal, reelles Zeitsignal

Das konjugiert komplexe Zeitsignal $x(t)$ ergibt im Frequenzbereich:

$$x^*(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, X^*(-j\omega)$$

Herleitung:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{x^*(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\omega t}\,\mathrm{d}t\right)^* = X^*(-j\omega)\end{aligned}$$

Für Signale mit symmetrischem Frequenzgang ($X(j\omega) = X^*(-j\omega)$) folgt:

$$x(t) = x^*(t) \qquad \Rightarrow x(t) \quad \text{ist rein reell.}$$

Ähnlich gilt für $-X(-j\omega) = X^*(j\omega)$, dass $x(t)$ rein imaginär, $x^*(t) = -x(t)$, ist.

Eigenschaften der Fourier-Transformation: gerade Zeitfunktionen

Eine gerade Zeitfunktion $x(t)$ mit $x(t) = x(-t)$ ergibt im Frequenzbereich:

$$x(t) = x(-t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; X(-j\omega) = X(j\omega)$$

Herleitung:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{0} x(t)e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t$$

Im ersten Ausdruck auf der rechten Seite ergibt die Substitution $t = -t$ mit $x(t) = x(-t)$:

$$X(j\omega) = \int_{0}^{\infty} x(t)\left(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right)\,\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{\infty} x(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}t$$

Eigenschaften der Fourier-Transformation: gerade und ungerade Zeitfunktionen

Entsprechend gilt

$$x(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty X(j\omega) \cos \omega t \, \mathrm{d}t$$

Wenn $x(t)$ gerade ist, dann ist auch $X(j\omega)$ gerade und umgekehrt.

Ähnlich gilt für ungerades $x(t)$, dass auch $X(j\omega)$ ungerade ist und umgekehrt.

$$-x(t) = x(-t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \; X(-j\omega) = -X(j\omega)$$

Beispiel:

$$1 \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \; 2\pi\delta(\omega)$$

Eigenschaften der Fourier-Transformation

- Die direkte Auswertung der Integrale

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} \mathrm{d}t \qquad \text{und} \qquad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} \mathrm{d}\omega$$

  zur Berechnen der (Inversen) Fourier-Transformation ist häufig zu aufwendig und nicht nötig.

- Häufig ist es besser die Berechnung der Fourier-Transformierten mittels der Tabelle bekannter Transformationskorrespondenzen unter Ausnutzung bekannter Eigenschaften der Fourier-Transformation durchzuführen.

Eigenschaften der Fourier-Transformation
Zusammenfassung: Auszug aus den Hilfblättern

Linearität:	$a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$a_1X_1(j\omega) + a_2X_2(j\omega)$
Zeitverschiebung:	$x(t - t_0)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X(j\omega)e^{-j\omega t_0}$
Frequenzverschiebung:	$x(t)e^{j\omega_0 t}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X(j(\omega - \omega_0))$
Zeitskalierung:	$x(at)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$
Zeitumkehr:	$x(-t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X(-j\omega)$
Ableitung im Zeitbereich:	$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}x(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$(j\omega)^n X(j\omega)$
Ableitung im Frequenzbereich:	$(-jt)^n x(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\omega^n}X(j\omega)$
Integration:	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\mathrm{d}\tau$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{j\omega}X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$
Symmetrie/ Dualität:	$X(jt)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$2\pi x(-\omega)$
Multiplikation:	$x_1(t)x_2(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{2\pi}X_1(j\omega) * X_2(j\omega)$
Faltung:	$x_1(t) * x_2(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$X_1(j\omega)X_2(j\omega)$

Fourier-Transformation
Beispiel: Impulszug

Der Impulszug spielt beim Abtasten (Sampling) von Signalen eine wichtige Rolle.

$$y(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT_s) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \omega_s \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - m\omega_s) \qquad \omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$$

Mit

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y_n e^{j\omega_s n t}.$$

folgt aus der Definition der Impulsfunktion:

$$Y_n = \frac{1}{T_s} \int_{-T_s/2}^{T_s/2} \delta(t)\, e^{-j\omega_s n t}\, \mathrm{d}t = \frac{\omega_s}{2\pi}$$

Fourier-Transformation
Beispiel: Impulszug

Da $y(t)$ mit T_s periodisch ist, ergibt die Fourierreihenentwicklung von $y(t)$:

$$y(t) = \frac{\omega_s}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_s n t}$$

Aus $\mathcal{F}\{e^{j\omega_s n t}\} = 2\pi\delta(\omega - n\omega_s)$ folgt

$$y(t) = \frac{\omega_s}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_s n t} \circ\!\!-\!\!\bullet\ \omega_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s)$$

LTI-Systeme im Frequenzbereich

Lernziel der 9. Lerneinheit: WP 3 – LTI-Systeme im Frequenzbereich – Reale Filter

In der 9. Lerneinheit untersuchen wir reale LTI-Systeme (d.h. RLC-Netzwerke) im Frequenzbereich.

- Wir nutzen den Faltungssatz der Fourier-Transformation um die Eingangs-/Ausgang-Beziehung in LTI-Systemen im Frequenzbereich darzustellen.
- Wir lernen, dass die Übertragungsfunktion $H(j\omega)$ eines Systems als Fourier-Transformierte der Impulsantwort $h(t)$ durch die ein LTI-System vollständig charakterisiert ist.
- Aus der Faltung mit der Impulsantwort $h(t)$ im Zeitbereich wird eine einfache Multiplikation mit der Übertragungsfunktion $H(j\omega)$ im Frequenzbereich.
- Die Fourier-Transformierte des Ausgangssignals $Y(j\omega)$ im Frequenzbereich ergibt sich aus dem Produkt der Fourier-Transformierten des Eingangssignals $X(j\omega)$ und der Übertragungsfunktion $H(j\omega)$, d.h., $Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$.

WP 3 – LTI-Systeme im Frequenzbereich
Reale Filter

- Für das Beispiel eines angeregten RC-Schwingkreises untersuchen wir das Tiefpassveralten des Systems sowohl im Zeitbereich als auch im Frequenzbereich.
- Ein Tiefpass ist ein System bei dem Signalanteile bei tiefe Frequenzen das System weitgehend unverzerrt passieren können und bei dem Signalanteile bei hohen Frequenzen am Ausgang gegenüber dem Eingangssignal deutlich gedämpft auftreten.
- Aus dem Betragsspektrums $|H(j\omega)|$ der Übertragungsfunktion $H(j\omega)$ eines LTI-Systems lässt sich sehr einfach feststellen, ob es sich bei einem System um einen Hochpass-, Bandpass-, oder Tiefpass-Filter handelt.

Zusammenhang Impulsantwort und Übertragungsfunktion

Bereits bekannt: Das Ausgangssignal eines LTI-Systems lässt sich mithilfe des Faltungsintegrals vollständig durch die Impulsantwort $h(t)$ des Systems und dem Eingangsignal beschreiben.

$$y(t) \quad = \quad h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)\mathrm{d}\,\tau$$

Die Eingangs-/Ausgangsbeziehung eines LTI-Systems im Frequenzbereich ergibt sich aus dem Faltungssatz:

$$x(t) * h(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X(j\omega) \cdot H(j\omega),$$

wobei $x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet X(j\omega)$ und $h(t) \circ\!\!-\!\!\bullet H(j\omega)$.

Systemanalyse im Frequenzbereich

- Der Ausgang eines LTI-Systems berechnet sich als Produkt der Fourier-Transformierten des Eingangssignals und der Übertragungsfunktion an allen Frequenzen (anstelle einer „aufwendigen“ Faltung im Zeitbereich).

- Der einfache Zusammenhang der Eingangs- und Ausgangsignale von LTI-Systemen im Frequenzbereich ist der Grund warum LTI-Systeme in der Praxis häufig im Frequenzbereich untersucht werden.

- Beispiele: Sensorsysteme, Kommunikationssysteme, Radarsysteme, allg. Signalverarbeitungsysteme, regelungstechnische Systeme.

Systemanalyse im Frequenzbereich

- Die einfache Frequenzbereichsbeziehung ermöglicht eine anschauliche Interpretation der Signale.
- Beispiele: Amplituden- und Frequenzmodulation, Abtasttheorie, Filtertheorie in Kommunikationssystemen, Sensorsystemen, Signalverabeitung, Regelungsystemen.

Übertragungsfunktion und Filterung

Transformation (Filterung) eines Signals $x(t)$ mittels LTI System

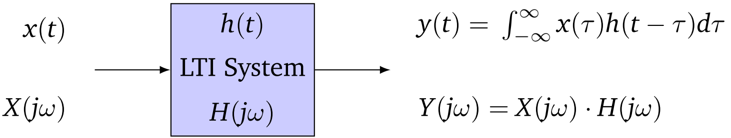


Abbildung: Filterung von $x(t)$ in einem LTI-System.

Bereits bekannt:

$$y(t) = x(t) * h(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega)$$

$H(j\omega)$ wird Übertragungsfunktion des LTI-Systems (Filters) genannt und entspricht der Fourier-Transformierten der Impulsantwort.

Da die Fourier-Transformation eine bijektive Transformation ist beinhaltet $H(j\omega)$ dieselbe Information wie die Impulsantwort $h(t)$.

Übertragungsfunktion und Filterung

Ein LTI-System ist durch seine Impulsantwort oder durch seine Übertragungsfunktion eindeutig bestimmt.

Da $H(j\omega)$ allgemein komplexwertig ist gilt:

$$H(j\omega) = |H(j\omega)|\, e^{j\Theta_H(\omega)}$$

$|H(j\omega)|$ ist der Amplitudengang (das Betragsspektrum) des Systems

$\Theta_H(\omega)$ ist die Phasenantwort (der Phasengang).

Wenn $h(t)$ reell ist, dann ist $H(-j\omega) = H^*(j\omega)$, und

$$|H(j\omega)| = |H(-j\omega)|$$

$$\Theta_H(\omega) = -\Theta_H(-\omega).$$

Reale und ideale Filter

Beispiel: RC-Tiefpass

Wir interessieren uns für die Übertragungsfunktion eines RC-Tiefpasses.

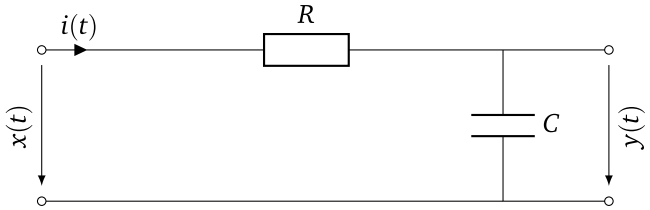


Abbildung: RC-Tiefpass-Filter.

Das RC-Netzwerk stellt ein LTI-System dar.

Beispiel: RC-Tiefpass

Die Eingangs- und Ausgangssignale sich im Zeitbereich über die Folgende Diffentialgleichung miteinander verbunden

$$
\begin{aligned}
x(t) &= R\,i(t) + y(t) \\
i(t) &= C\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}
$$

Damit gilt

$$x(t) = RC\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + y(t) \quad , \quad -\infty < t < \infty$$

Beispiel: RC-Tiefpass

Wenn die Fourier-Transformierten der beteiligten Signale existieren, dann ergibt sich mit dem Differentiationssatz der Fourier-Transformation:

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} \circ\!\!-\!\!\bullet\, (j\omega)Y(j\omega)$$

Die Eingangs-/Ausgangsbeziehung im Frequenzbereich lautet dann:

$$X(j\omega) = \underbrace{(1 + j\omega RC)}_{\frac{1}{H(j\omega)}} \cdot Y(j\omega).$$

Beispiel: RC-Tiefpass

Die Übertragungsfunktion des Systems ist

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}.$$

Die zugehörige Impulsantwort ergibt sich durch Rücktransformation (aus der Korrespondenztabelle)

$$h(t) = \omega_0 e^{-\omega_0 t} u(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$$

$\omega_0 = \frac{1}{RC}$ ist die 3 dB Grenzfrequenz.

Es gilt: $|H(j\omega_0)| = \frac{1}{\sqrt{2}}|H(0)|$, so dass $20\log_{10}\left[\frac{|H(j\omega_0)|}{|H(0)|}\right] = -3$ dB.

Beispiel: RC-Tiefpass

Die Übertragungsfunktion des Systems lautet

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}.$$

Der Amplitudengang des Systems an der Frequenz ω ist

$$|H(j\omega)| = \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

Beispiel: RC-Tiefpass

Der Kehrwert von ω_0, d.h. $\omega_0^{-1} = RC$, wir als Zeitkonstante bezeichnet.

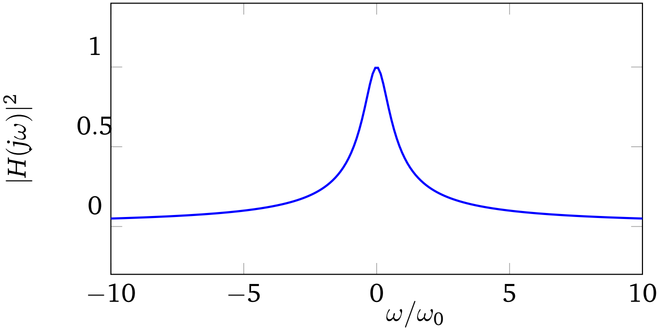


Abbildung: Amplitudengang eines Tiefpass-Filters.

Beispiel: RC-Tiefpass

Der Kehrwert von ω_0, d.h. $\omega_0^{-1} = RC$, wir als Zeitkonstante bezeichnet.

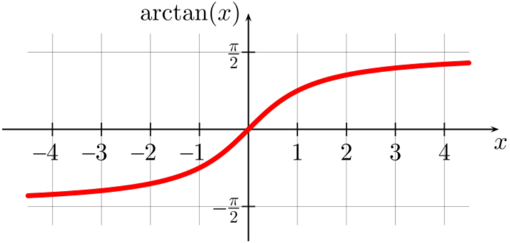


Abbildung: Phasengang eines Tiefpass-Filters.

Beispiel: RC-Tiefpass

Amplitudengang: mit steigendem ω nimmt der Betrag der Übertragungsfunktion ab.

Für kleine Frequenzen sind die Beträge von $H(j\omega)$ groß.

- Systeme, die sich so verhalten, werden Tiefpass-Filter genannt.
- Signalanteile bei tiefen Frequenzen passieren Filter nahezu unverändert.
- Signalanteile bei hohen Frequenzen werden stark gedämpft.

Beispiel: RC-Tiefpass

Bestimmung des Phasengangs $\Theta_H(\omega)$: Es gilt

$$H(j\omega) = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}} \cdot \frac{1-j\frac{\omega}{\omega_0}}{1-j\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{1-j\frac{\omega}{\omega_0}}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

So dass: $$\Theta_H(\omega) = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\{H(j\omega)\}}{\mathrm{Re}\{H(j\omega)\}}\right) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right).$$

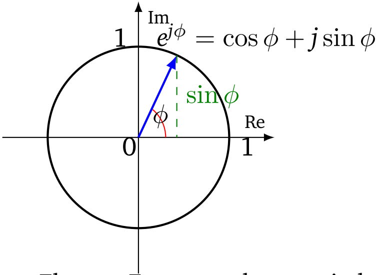


Abbildung: Komplexe Ebene – Zusammenhang zwischen Betrag und Phase.

Beispiel: RC-Tiefpass

Die Systemantwort $y(t)$ für den Eingang $x(t)$ lässt sich mithilfe der Übertragungsfunktion berechnen.

- Der Zeitbereichsansatz erfordert die „aufwendige" Lösung der zugehörigen Differentialgleichung für $x_0(t) = \delta(t)$

- Der Frequenzbereichsansatz ist meist deutlich einfacher.

Frequenzbereichsansatz
Beispiel: Abklingende E-Funktion am RC-Tiefpass

Zeitbereichssignal

$$x(t) = A\,e^{-\alpha t}u(t), \qquad \alpha > 0$$

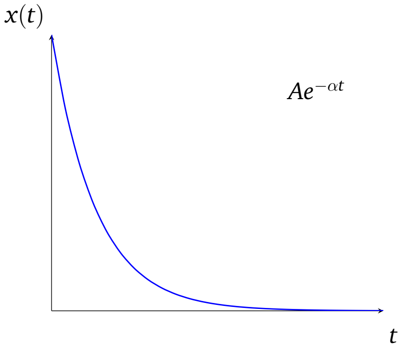


Abbildung: Eingangssignal.

Frequenzbereichsansatz
Beispiel: Abklingende E-Funktion am RC-Tiefpass

Zeitbereichssignal

$$x(t) = A\,e^{-\alpha t} u(t), \qquad \alpha > 0$$

Die Fourier-Transformierte des Eingangssignals ist

$$X(j\omega) = \frac{A}{\alpha + j\omega}$$

Die Fourier-Transformierte des Ausgangssignals ist

$$Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega) = \frac{A/RC}{(\alpha + j\omega)(1/RC + j\omega)}$$

Partialbruchzerlegung
Beispiel: Abklingende E-Funktion am RC-Tiefpass

$$
\begin{aligned}
Y(j\omega) &= X(j\omega) \cdot H(j\omega) = \frac{A/RC}{(\alpha + j\omega)(1/RC + j\omega)} \\
&= \frac{a}{\alpha + j\omega} + \frac{b}{1/RC + j\omega} = \frac{a(1/RC + j\omega) + b(\alpha + j\omega)}{(\alpha + j\omega)(1/RC + j\omega)} \\
&= \frac{(a/RC + b\alpha) + j(a + b)\omega}{(\alpha + j\omega)(1/RC + j\omega)}
\end{aligned}
$$

Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich

$$a = -b; \quad a + b\alpha RC = A.$$

So dass

$$a = -b = \frac{A}{1 - \alpha RC}$$

Frequenzbereichsansatz
Beispiel: Abklingende E-Funktion am RC-Tiefpass

$$Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega) = \frac{A/RC}{(\alpha + j\omega)(1/RC + j\omega)}$$

Aus der Partialbruchzerlegung ergibt sich

$$Y(j\omega) = \frac{A}{\alpha RC - 1} \left[\frac{1}{1/RC + j\omega} - \frac{1}{\alpha + j\omega} \right]$$

Für $\alpha RC \neq 1$

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(j\omega)\} = \frac{A}{\alpha RC - 1} \left[e^{-\frac{t}{RC}} - e^{-\alpha t} \right] u(t)$$

Für $\alpha RC = 1$ ergibt die Grenzwertbetrachtung $\alpha RC \rightarrow 1$, dass

$$y(t) = A \left(\frac{t}{RC} \right) e^{-\frac{t}{RC}} u(t) \quad , \quad \alpha = \frac{1}{RC}$$

Zeitbereichsdarstellung
Beispiel: Rechtecksimpuls am Tiefpass

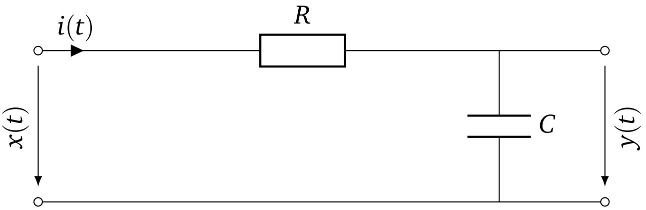


Abbildung: RC-Tiefpass-Filter.

Rechtecksimpuls am Eingang

$$x(t) = A r_{\frac{\tau}{2}}\left(t - \frac{\tau}{2}\right) = A\left[u(t) - u(t-\tau)\right]$$

Zeitbereichsdarstellung
Beispiel: Rechtecksimpuls am Tiefpass

$$x(t) = A r_{\frac{\tau}{2}}\left(t - \frac{\tau}{2}\right) = A\left[u(t) - u(t-\tau)\right]$$

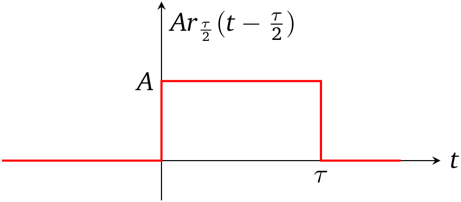


Abbildung: Verschobener Rechtecksimpuls.

Zeitbereichsdarstellung
Beispiel: Rechtecksimpuls am Tiefpass

Der Systemausgang $y(t)$ berechnet sich mithilfe der Sprungantwort $a_s(t)$.

Die Sprungantwort ist die Antwort des Systems auf den Einheitssprung $u(t)$.

$$a_s(t) = h(t) * u(t)$$

$h(t)$ ist die Impulsantwort des Systems

Die Impulsantwort ist die inverse Fourier-Transformierte der Übertragungsfunktion $H(j\omega)$.

Es ist bereits bekannt, dass

$$h(t) = \omega_0 e^{-\omega_0 t} u(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$$

Zeitbereichsdarstellung
Beispiel: Rechtecksimpuls am Tiefpass

$$
\begin{aligned}
a_s(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)u(t-\lambda)\,\mathrm{d}\lambda \\
&= \int_{-\infty}^{t} h(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda \qquad \text{für } t \geq 0, \text{ (ansonsten } a_s(t) = 0) \\
&= \frac{1}{RC}\int_{0}^{t} e^{-\frac{\lambda}{RC}}\,\mathrm{d}\lambda \\
a_s(t) &= \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) u(t)
\end{aligned}
$$

Die Sprungantwort wird durch Integration der Impulsantwort ermittelt.

Zeitbereichsdarstellung
Beispiel: Rechtecksimpuls am Tiefpass

$$
\begin{aligned}
y(t) &= A[a_s(t) - a_s(t-\tau)] \\
&= \begin{cases} 0, & t < 0 \\ A\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right), & 0 \leq t \leq \tau \\ A\left(e^{-\frac{t-\tau}{RC}} - e^{-\frac{t}{RC}}\right), & t > \tau \end{cases}
\end{aligned}
$$

Das Produkt RC definiert die Zeitkonstante mit der Filter einen eingeschwungenen Zustand erreicht.

Für kleines RC konvergiert der Ausgang schnell, d.h., der Ausgang reagiert schnell auf Änderungen am Eingang.

Die Impulsbreite τ ist groß gegenüber RC (d.h. $\frac{\tau}{RC} \gg 1$)
$\Rightarrow$ Der Filter konvergiert schnell gegen den momentanen Wert des Rechteckssignals am Eingang. $\Rightarrow$ Die Signalverzerrung ist gering.

Zeitbereichsdarstellung
Beispiel: Rechtecksimpuls am Tiefpass

Für kleine Werte von $\frac{\tau}{RC} \ll 1$ (d.h. $\tau \ll RC$) ist die Verzerrung am Ausgang groß.
$\Rightarrow$ Der Quotient $\frac{\tau}{RC}$ bestimmt den Verlauf des Ausgangssignals $y(t)$.

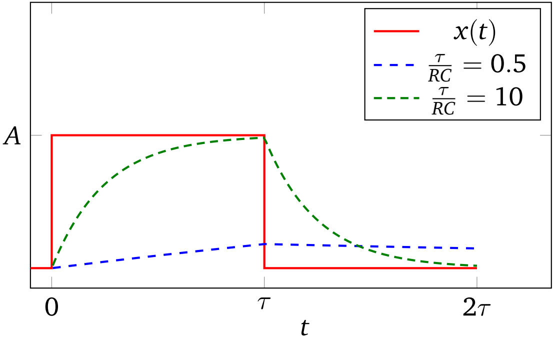


Abbildung: Systemausgang für verschiedene Werte von $\frac{\tau}{RC}$.

Frequenzbereichsdarstellung
Beispiel: Rechtecksimpuls am Tiefpass

Die zuvor im Zeitbereich gemachten Beobachtungen lassen sich auch im Frequenzbereich machen.

Die relative Bandbreite von $X(j\omega)$ und $H(j\omega)$ lässt sich über das Verhältnis $\frac{\tau}{RC}$ beschreiben.

Wenn τ ansteigt, nimmt die Bandbreite von $X(j\omega)$ ab.

Dieser Zusammenhang wurde zuvor anhand der Fourier-Transformation des Rechteckspulses beobachtet.

Ebenso beobachten wir, dasss $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ die 3 dB Grenzfrequenz des RC Tiefpass-Filters ist.

Frequenzbereichsdarstellung
Beispiel: Rechtecksimpuls am Tiefpass

Für steigendes RC, nimmt die Bandbreite von $H(j\omega)$ ab.

Die Filterbandbreite $\frac{1}{RC}$ ist klein gegenüber der Signalbandbreite $\frac{1}{\tau}$, d.h. $\frac{\tau}{RC}$ ist klein:

$\Rightarrow$ Das Ausgangssignal $y(t)$ ist gegenüber dem Eingangsignal $x(t)$ verzerrt.

Umgekehrt gilt, dass die Filterbandbreite ($\frac{1}{RC}$) groß gegenüber der Signalbandbreite $\frac{1}{\tau}$ ist, d.h. $\frac{\tau}{RC}$ ist groß:

$\Rightarrow$ Die Signalverzerrung am Ausgang ist sehr gering.

Diese Erkenntniss entspricht der Zeitbereichsbetrachtung.

Beispiel:
Tiefpass-Filter mit Rechtecksimpuls am Eingang

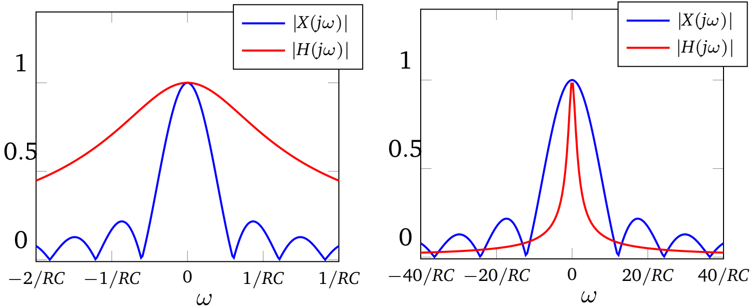


Abbildung: Amplitudengänge von $X(j\omega)$ und $H(j\omega)$ für a) $\frac{\tau}{RC} = 10$ und b) $\frac{\tau}{RC} = \frac{1}{2}$.

Ideale Filter

Lernziel der 10. Lerneinheit: WP 3 – LTI-Systeme im Frequenzbereich– Ideale Filter

In der 10. Lerneinheit beschäftigen wir uns mit der theoretischen Modellvorstellung der ideale Filter.

- Wir unterscheiden vier grundlegende Filtertypen: den Allpass-Filter, den Tiefpass-Filter, den Bandpass-Filter und den Hochpass-Filter.
- Ideale Filter werden im Frequenzbereich definiert und haben unendlich steile Flanken zwischen dem Durchlass- und dem Sperrbereich.
- Wir lernen, dass die zugehörigen Impulsantworten von idealen Filtern in positive wie auch negative Zeitrichtungen unendlich ausgedehnt sind und sich daher in der Praxis nicht als kausale Systeme umsetzen lassen.
- Die Modellvorstellung der idealen Filter hilft jedoch bei dem Verständnis von Systemen im Frequenzbereich.

Ideale Filter

Bekannt: Ein LTI-System kann als Filter aufgefasst werden.

- Bei der Modellierung, dem Entwurf und der Analyse eines praktischen Systems ist es häufig sinnvoll mit der Vorstellung von idealisierten Filtern zu arbeiten.

Ein idealer Filter ist im Frequenzbereich wie folgt characterisiert:

- Im Durchlassbereich ist der Amplitudengang konstant (meistens konstant Eins).
- Im Sperrbereich ist der Amplitudengang identisch Null.
- Der Übergang von Durchlassbereich zu Sperrbereich hat unendlich steile Flanken.

Ideale Filter
Vier Arten idealer Filter

Vier Arten idealer Filter:

1. Allpass-Filter
2. Tiefpass-Filter
3. Bandpass-Filter
4. Hochpass-Filter

Ein Stopband-Filter lässt sich aus Bandpass-Filtern generieren (z.B. als $H_{\mathrm{SB}}(j\omega) = 1 - H_{\mathrm{BP}}(j\omega)$).

Häufige gilt die Anforderung, dass der Phasengang der Filter im Durchlassbereich linear (d.h. eine lineare Funktionen der Frequenz) ist.

Linearphasigkeit garantiert, dass die Verzerrung des Eingangssignals im Durchlassbereich am Ausgang lediglich in einer Zeitverzögerung besteht (vergleiche Verschiebungssatz).

Beim idealen linear-phasigen Tiefpass bleibt die Hüllkurve des Eingangssignals im Durchlassbereich erhalten.

Linearphasiges Filter
Beispiel: Allpass

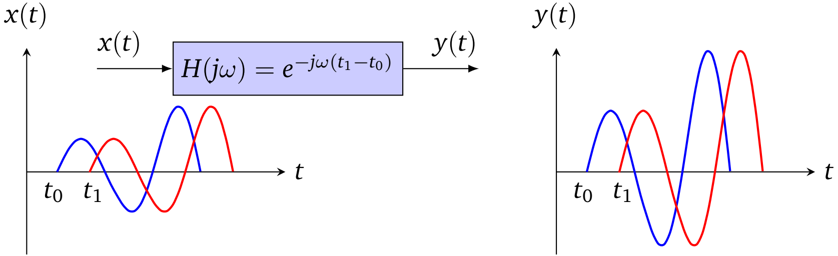


Abbildung: Linearphasiges Filter (Allpass).

- Ein Allpass hat einen konstanten Amplitudengang $|H(j\omega)| = 1$.
- Ist zusätzlich der Phasengang linear, d.h. ($\arg\{H(j\omega)\} = -\omega\tau$), für beliebige Zeitverzögerungen τ, dann ist die Form des Eingangssignals am Ausgang unverändert.
- Dann wirkt sich das Allpassfilter auf das Eingangssignal lediglich in Form eine Zeitverzögerung des Signals um τ aus, d.h, $y(t) = x(t - \tau)$.

Idealer Tiefpass (reelles Zeitsignal)

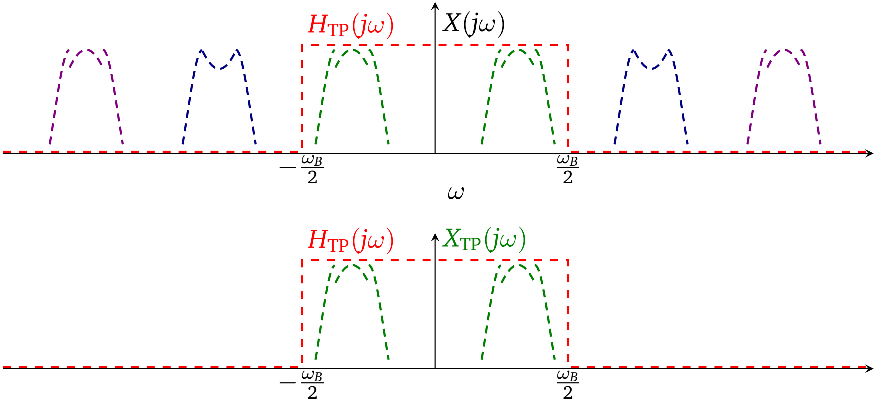


Abbildung: Amplitudengang eines idealen Tiefpasses.

Idealer Bandpass (reelles Zeitsignal)

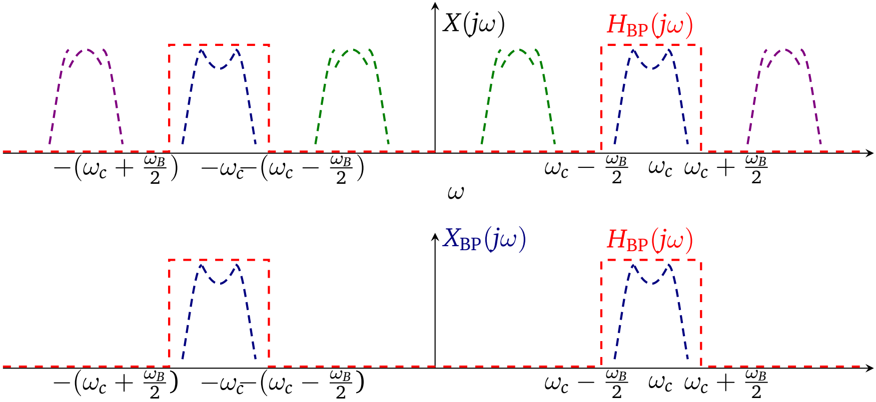


Abbildung: Amplitudengang eines idealen Bandpasses.

Idealer Hochpass (reelles Zeitsignal)

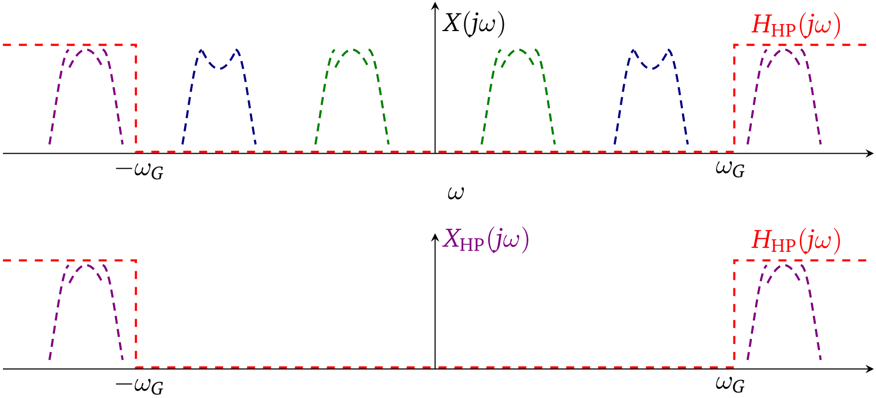


Abbildung: Amplitudengang eines idealen Hochpasses.

Idealer Filter (reelles Zeitsignal)

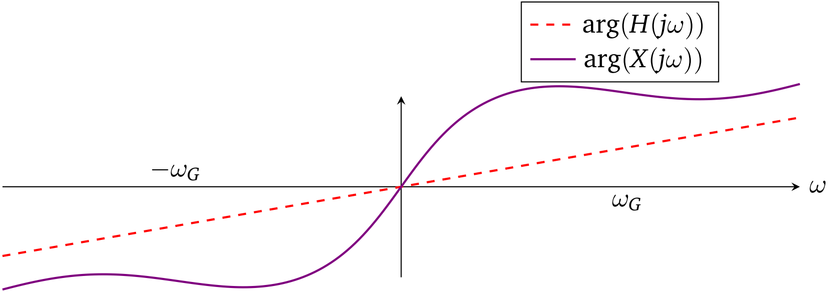


Abbildung: Phasengang eines idealen Filters mit Übertragungsfunktion $H(j\omega)$ (linear-phasig)

Ideale Filter

Die Impulsantwort eines idealen Tiefpass-Filters ergibt sich als inverse Fourier-Transformierte der Übertragungsfunktion.

$h_{\mathrm{TP}}(t)$ ist die Impulsantwort des idealen Tiefpass-Filters:

$$\begin{aligned} h_{\mathrm{TP}}(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H_{\mathrm{TP}}(j\omega)e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K r_{\frac{\omega_B}{2}}(\omega)\, e^{-j\omega t_0}e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{K\omega_B}{2\pi}\,\mathrm{sinc}\left[\frac{\omega_B}{2\pi}(t-t_0)\right] \end{aligned}$$

Die Impulsantwort $h_{\mathrm{TP}}(t)$ ist für $t < 0$ ungleich Null!

$\Rightarrow$ Der ideale Tiefpass-Filter ist nicht-kausal.

Die Impulsantwort klingt in positiver und negativer Zeitrichtung zwar mit steigendem $|t|$ ab, sie ist jedoch prinzipiell unendlich ausgedehnt.

Ideale Filter

Der ideale Bandpass-Filter mit der Mittenfrequenz ω_0 und der Bandbreite ω_B hat die Übertragungsfunktion:

$$H_{\mathrm{BP}}(j\omega) = K\left[r_{\frac{\omega_B}{2}}(\omega - \omega_0) + r_{\frac{\omega_B}{2}}(\omega + \omega_0)\right] e^{-j\omega t_0}$$

Die Impulsantwort $h_{LP}(t)$ des Tiefpasses ergibt sich aus der Korrespondenz

$$x(t)\cos(\omega_0 t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{2}[X(\omega - \omega_0) + X(\omega + \omega_0)]$$

Die Impulsantwort des Bandpass-Filters ist daher

$$h_{\mathrm{BP}}(t) = \frac{K\omega_B}{\pi}\mathrm{sinc}\left[\frac{\omega_B}{2\pi}(t - t_0)\right]\cos[\omega_0(t - t_0)]$$

Ideale Filter

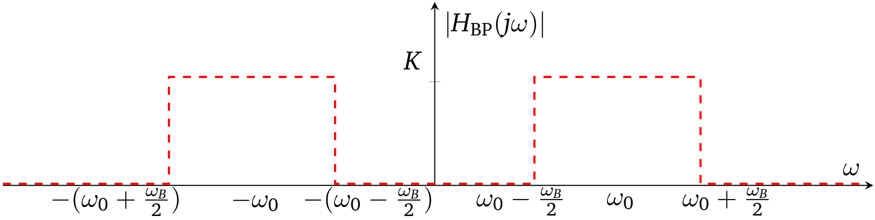


Abbildung: Amplitudengang eines idealen Bandpassfilters.

Ideale Filter

Die Übertragungsfunktion eines idealen Hochpass-Filters mit der Grenzfrequenz $\frac{\omega_B}{2}$ ist

$$H_{\mathrm{HP}}(j\omega) = K\left[1 - r_{\frac{\omega_B}{2}}(\omega)\right] e^{-j\omega t_0}$$

$H_{\mathrm{TP}}(j\omega)$ ist die Übertragungsfunktion eines idealen Tiefpass-Filters mit der Grenzfrequenz $\frac{\omega_B}{2}$.

Dann ist $H_{\mathrm{HP}}(j\omega) = 1 - H_{\mathrm{TP}}(j\omega)$ und die zugehörige Impulsantwort

$$h_{\mathrm{HP}}(t) = K\delta(t - t_0) - \frac{K\omega_B}{2\pi}\mathrm{sinc}\left[\frac{\omega_B}{2\pi}(t - t_0)\right]$$

Ideale Filter

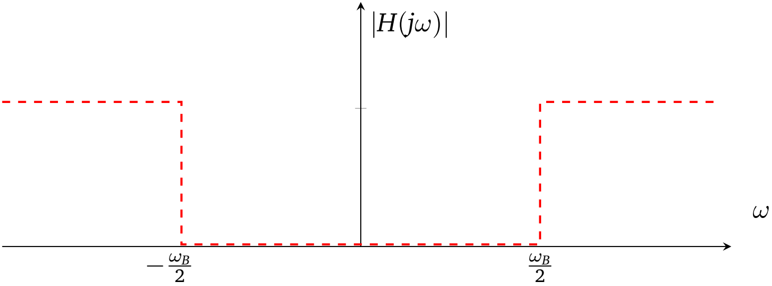


Abbildung: Amplitudengang eines idealen Hochpass-Filters.