z-Transformation

z-Transformation und Laplace-Transformation

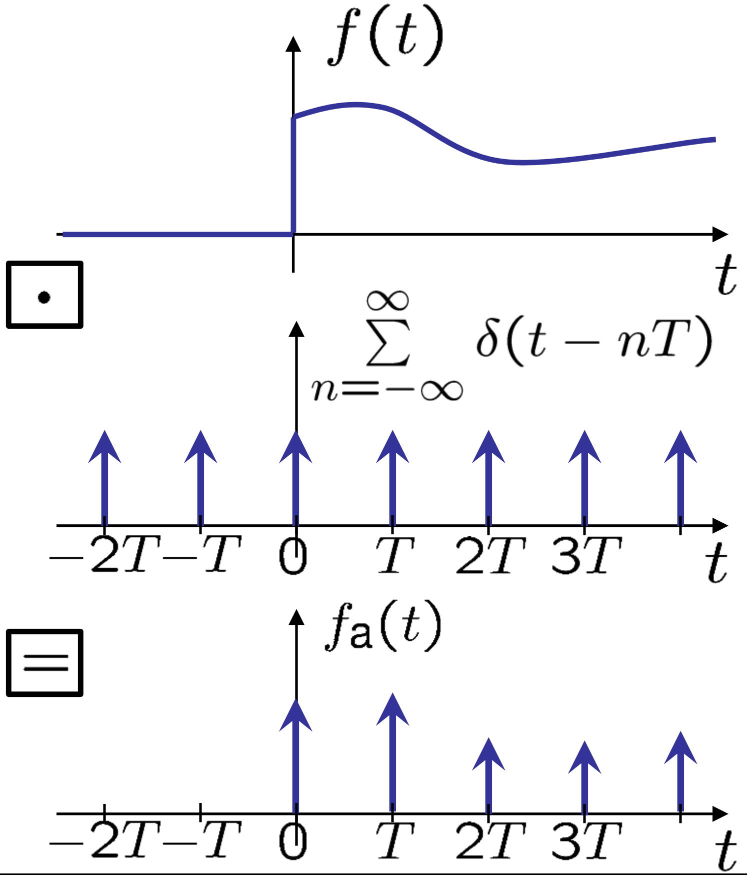
- Die z-Transformation hat für Zahlenfolgen die gleiche Bedeutung wie die Laplace-Transformation für zeitkontinuierliche Signale.
- Wir entwickeln die z-Transformation aus der Laplace-Transformation für ideal abgetastete Signale.
- Anwendungsbeispiele der z-Transformation: Beschreibung diskreter linearer Filter durch Nullstellen und Pole.

Entwicklung der z-Transformation aus der Laplace-Transformation

Ausgangspunkt: ideal abgetastetes Signal $f_{\mathrm{a}}(t)$,

d.h. Signal $f(t)$ wird mit einem Dirac-Kamm multipliziert

$$
\begin{aligned}
f_{\mathrm{a}}(t) &= f(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t-nT) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{f(nT)}_{=:f_n} \cdot \delta(t-nT)
\end{aligned}
$$



Entwicklung der z-Transformation aus der Laplace-Transformation

- Wir betrachten die *einseitige* Laplace-Transformation und *einseitige* z-Transformation und nehmen deshalb an:

$$f(t) = f_\mathrm{a}(t) = 0 \quad \text{für } t < 0,$$
$$f_n = 0 \quad \text{für } n < 0.$$

- Laplace-Transformierte von $f_\mathrm{a}(t)$:

$$F_\mathrm{a}(p) = \int_0^\infty f_a(t) e^{-pt} dt = \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty f_n \cdot \delta(t - nT) e^{-pnT} dt$$
$$= \sum_{n=0}^\infty f_n \cdot e^{-pnT} \underbrace{\int_0^\infty \delta(t - nT) dt}_{=1}$$
$$= \sum_{n=0}^\infty f_n e^{-pnT}$$

Entwicklung der z-Transformation aus der Laplace-Transformation

- Laplace-Transformierte:

$$F_{\mathsf{a}}(p) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{-pnT}$$

- Wir ersetzen $z = e^{pT}$:

$$F_{\mathsf{a}}(p)\big|_{z=e^{pT}} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} =: \mathcal{Z}\{f_n\}$$

z-Transformierte

- Die z-Transformierte ist die Laplace-Transformierte der ideal abgetasteten Funktion $f_{\mathsf{a}}(t)$ mit Variablensubstitution $z = e^{pT}$.

z-Transformation

- z-Transformierte der Folge f_n :

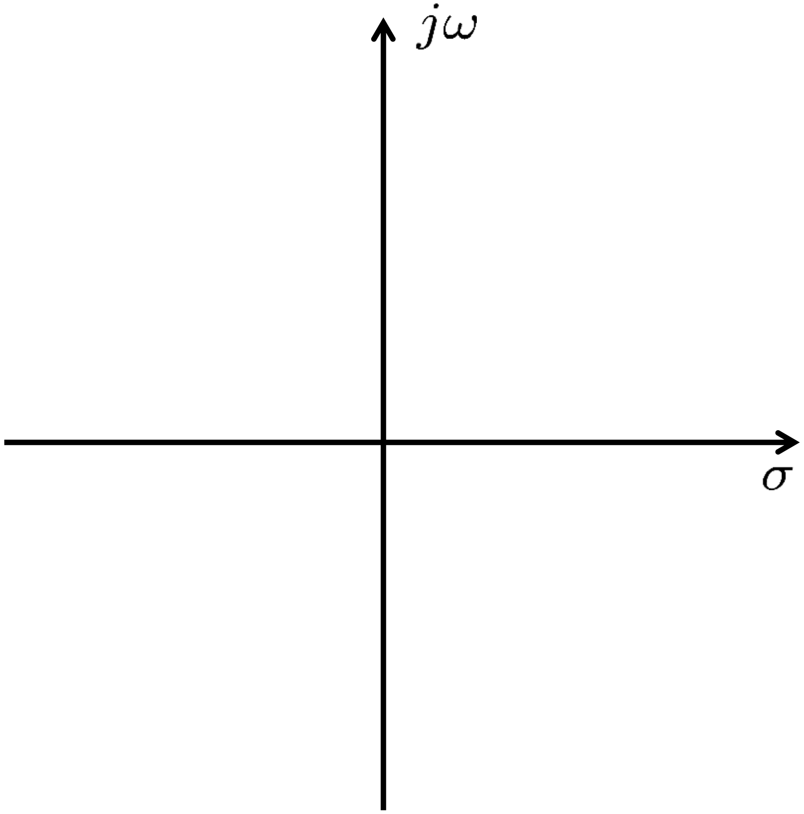
$$\boxed{F(z) = \mathcal{Z}\{f_n\} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}}$$

- Die z-Transformation ordnet der reellen oder komplexen Folge f_n eine Funktion $F(z)$ der komplexen Variablen z zu. Die Zuordnung ist eindeutig.
- Schreibweisen:

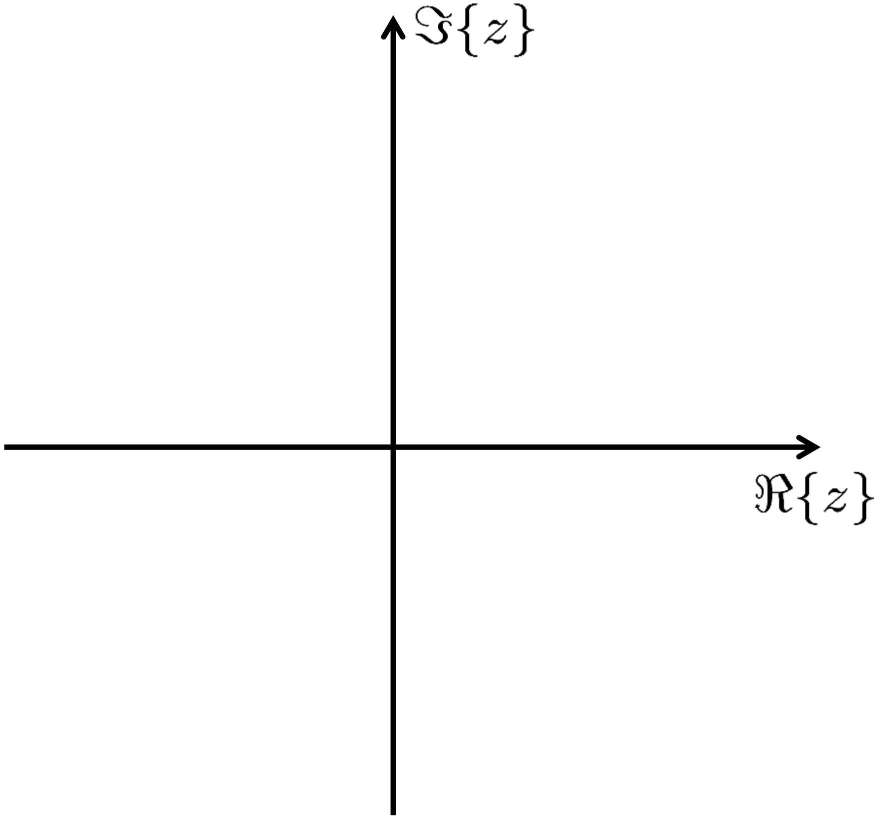
$$\begin{aligned} F(z) &= \mathcal{Z}\{f_n\} \\ f_n &= \mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\} \\ f_n &\circ\!\!-\!\!\bullet\; F(z) \\ F(z) &\bullet\!\!-\!\!\circ\; f_n \end{aligned}$$

Geometrische Deutung der Variablensubstitution $z = e^{pT}$

Mit $p = \sigma + j\omega$ folgt $z = e^{pT} = e^{\sigma T} \cdot e^{j\omega T}$ und $|z| = e^{\sigma T}$.



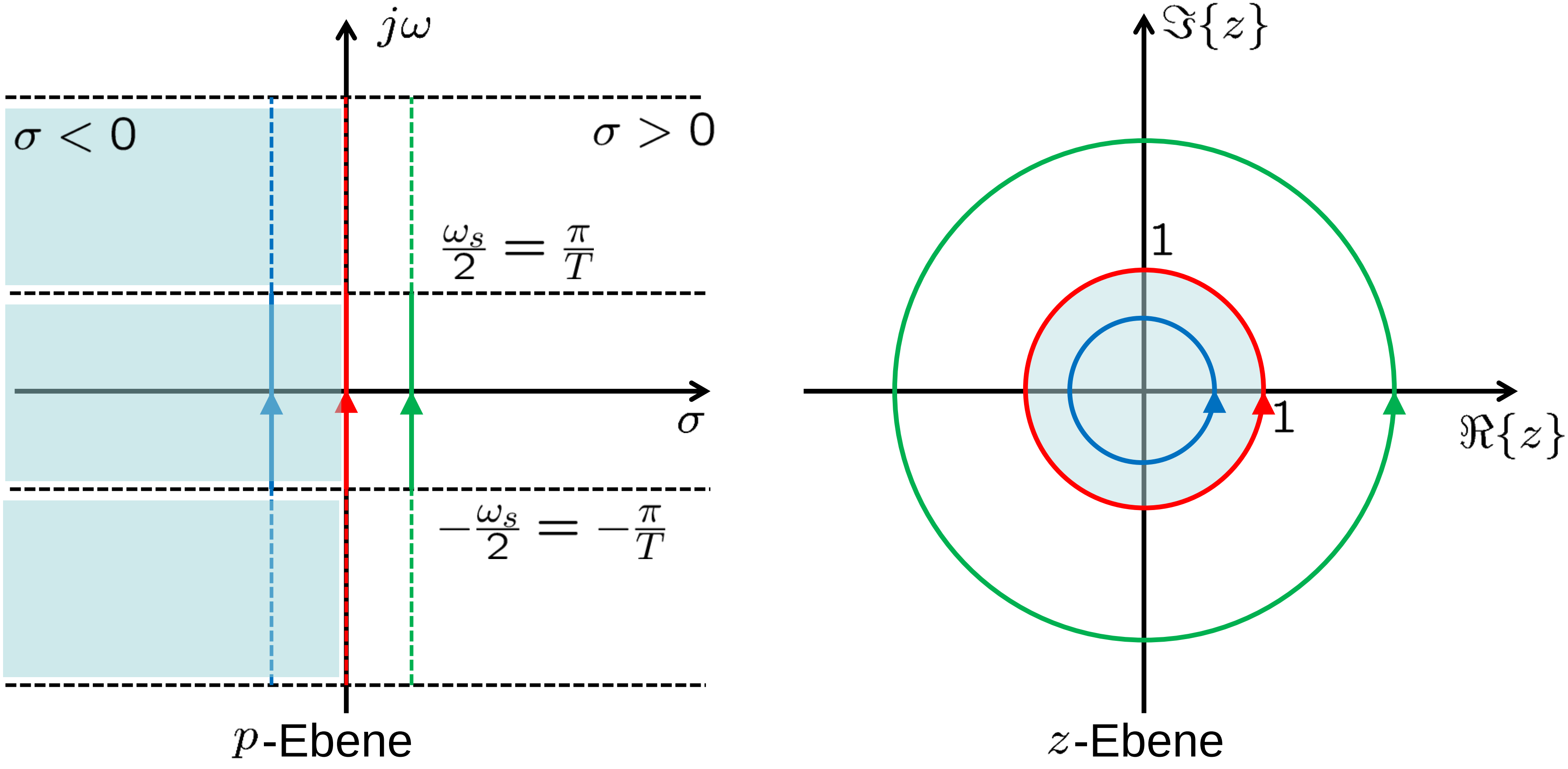
p-Ebene



z-Ebene

Geometrische Deutung der Variablensubstitution $z = e^{pT}$

Mit $p = \sigma + j\omega$ folgt $z = e^{pT} = e^{\sigma T} \cdot e^{j\omega T}$ und $|z| = e^{\sigma T}$.



Geometrische Deutung der Variablensubstitution $z = e^{pT}$

1. $\sigma < 0 \Leftrightarrow |z| < 1$, d.h. jeder Punkt in der linken Hälfte der p -Ebene wird abgebildet auf einen Punkt innerhalb des Einheitskreises in der *z*-Ebene.

2. $\sigma > 0 \Leftrightarrow |z| > 1$, d.h. jeder Punkt in der rechten Hälfte der p -Ebene wird abgebildet auf einen Punkt außerhalb des Einheitskreises in der *z*-Ebene.

3. $\sigma = 0 \Leftrightarrow |z| = 1$, d.h. die $j\omega$ -Achse der p-Ebene wird auf den Einheitskreis in der *z*-Ebene abgebildet.

4. $p = 0 \Leftrightarrow z = 1$, d.h. Ursprung der p -Ebene wird auf den Punkt $z = 1$ abgebildet.

Geometrische Deutung der Variablensubstitution $z = e^{pT}$

5. Punkte p_k, die vertikal von einem Punkt p_0 einen Abstand haben, der ein Vielfaches der Abtastkreisfrequenz $\omega_\mathrm{S} = \frac{2\pi}{T}$ ist, werden auf den gleichen Punkt $z_0 = e^{p_0 T}$ in der z-Ebene abgebildet.

$$p_k = p_0 + jk\omega_\mathrm{S} \quad , k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$
$$z_k = e^{p_k T} = e^{p_0 T} e^{jk\omega_\mathrm{S} T} = e^{p_0 T} e^{jk2\pi} = e^{p_0 T} = z_0 \quad \text{für alle } k$$

p-Ebene kann in horizontale Streifen der Breite ω_S eingeteilt werden, wovon jeder auf die gesamte z-Ebene abgebildet wird.

- Primärstreifen: $|\omega| \leq \omega_\mathrm{S}/2$
- Komplementärstreifen: Die Wiederholungen nach oben und unten mit ω_S

Konvergenzgebiet

- Die z-Transformierte $\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}$ existiert für diejenigen $z \in \mathcal{K} \subseteq \mathbb{C}$, für

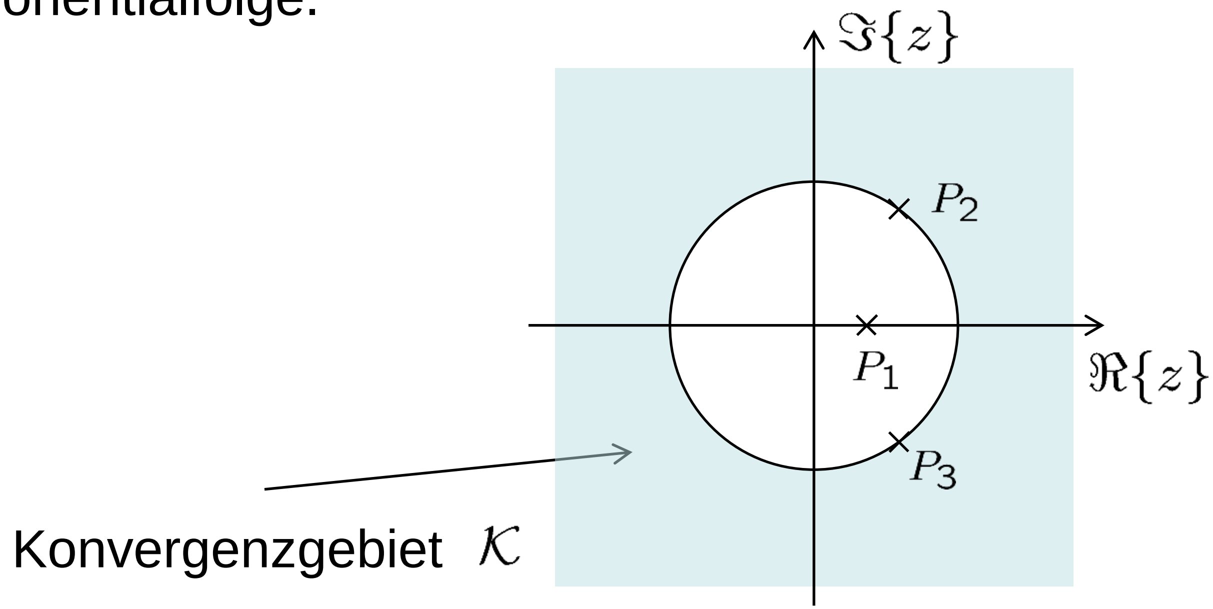
  die die Summe absolut konvergiert:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| f_n z^{-n} \right| < \infty, \quad z \in \mathcal{K}$$

- $\mathcal{K}$ bezeichnet man als Konvergenzgebiet der z-Transformierten.
- Die Werte der Folge f_n sind die Koeffizienten der Laurent-Reihenentwicklung der z-Transformierten $F(z)$ um den Punkt $z = 0$.
- Das Gebiet, in dem die Laurent-Reihe die z-Transformierte $F(z)$ eindeutig darstellt, ist das Konvergenzgebiet $\mathcal{K}$ der z-Transformierten.

Konvergenzgebiet

- Das Konvergenzgebiet $\mathcal{K}$ der *einseitigen* z-Transformierten ist die Fläche außerhalb eines Kreises mit Zentrum im Ursprung.
- Der Radius des Kreises (Konvergenzradius) wird durch den betragsmäßig größten Pol bestimmt.
- Im Zeitbereich entspricht dies der am stärksten aufklingenden Exponentialfolge.



Beispiel:
3 Pole: P_1, P_2, P_3

Konvergenzgebiet

- Vermutung: Die z-Transformierten existieren für alle Folgen, die nicht stärker als exponentiell ansteigen.
- Wir nehmen an, dass f_n nicht stärker wächst als eine Exponentialfolge, d.h. es existiert $b \in \mathbb{R}$, so dass gilt:

$$|f_n| \leq e^{bn} \quad \text{für alle } n.$$

Mit $z = |z|e^{j\,\text{arg}(z)} =: e^a \cdot e^{j\,\text{arg}(z)}, \quad a \in \mathbb{R}$ folgt

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f_n z^{-n}| = \sum_{n=0}^{\infty} |f_n| e^{-an}$$
$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} e^{bn} e^{-an} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{(b-a)n} < \infty, \quad \text{für } a > b.$$

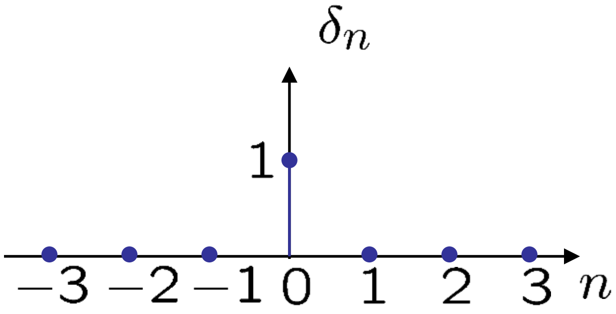
Damit ist die Vermutung bestätigt.

Konvergenzgebiet

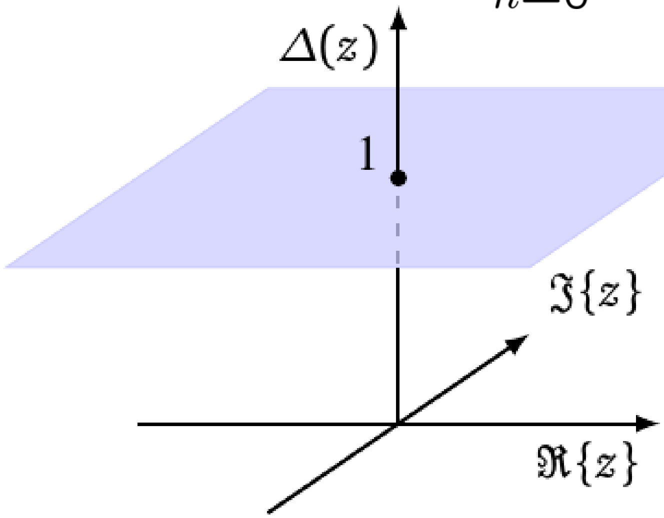
- Wählen wir also den Konvergenzradius $r = e^a$ nur groß genug, so erhalten wir für alle praktisch relevanten Folgen Konvergenz.
- Lediglich für die stärker als exponentiell anwachsenden Folgen wie z.B. $f_n = e^{n^2}$ oder $f_n = n!$ konvergiert und existiert daher die z-Transformierte nicht.
- Den Exponentialfaktor e^{-an} bezeichnet man als *Konvergenz sichernden Faktor*, da er für $n \to \infty$ die Summanden so schnell nach null drückt, dass die Summe absolut konvergiert.

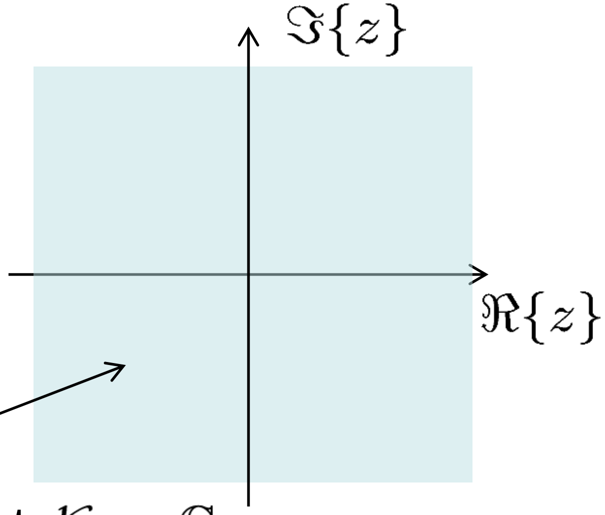
Beispiel:
z-Transformierte der Impulsfolge

$$\delta_n = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0 \\ 0 & \text{für } n \neq 0 \end{cases}$$



$$\Delta(z) = \mathcal{Z}\{\delta_n\} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n z^{-n} = 1 \cdot z^0 + 0 \cdot z^{-1} + 0 \cdot z^{-2} + \cdots = 1.$$

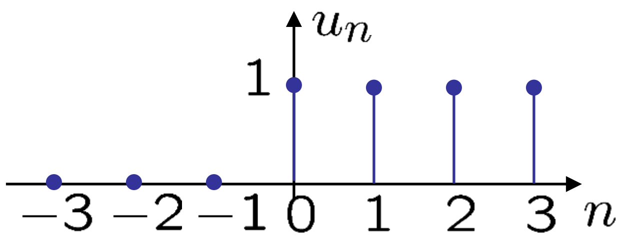




Konvergenzgebiet $\mathcal{K} = \mathbb{C}$

Beispiel:
z-Transformierte der Sprungfolge

$$u_n = \begin{cases} 1 & \text{für } n \geq 0 \\ 0 & \text{für } n < 0 \end{cases}$$



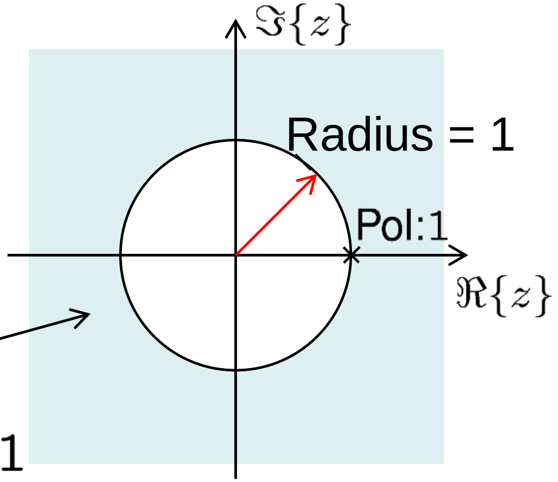
$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$U(z) = \mathcal{Z}\{u_n\} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1}, \quad \text{für } \left|\frac{1}{z}\right| < 1, \text{ d.h. } |z| > 1$$

Geometrische Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{für } |x| < 1$$



Konvergenzgebiet $\mathcal{K}: |z| > 1$

Beispiel:
z-Transformierte der (kausalen) Exponentialfolge

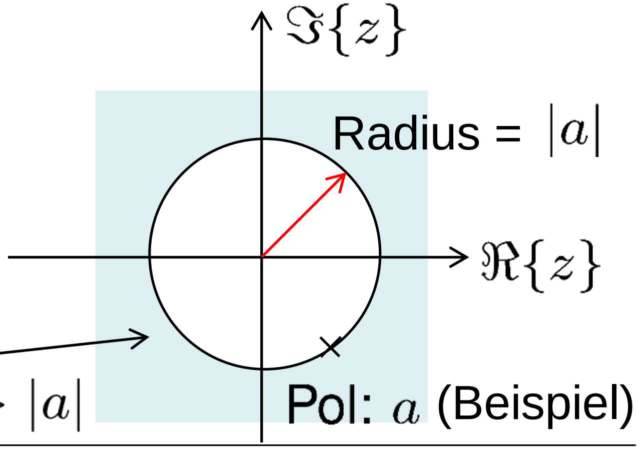
$$f_n = a^n u_n$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$F(z) = \mathcal{Z}\{f_n\} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n u_n z^{-n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n$$

$$= \frac{1}{1-\frac{a}{z}} = \frac{z}{z-a}, \quad \text{für} \left|\frac{a}{z}\right| < 1, \text{d.h. } |z| > |a|$$



Konvergenzgebiet $\mathcal{K}: |z| > |a|$

Eigenschaften der z-Transformation: Linearität

- Wenn $f_n \circ\!\!-\!\!\bullet \; F(z)$ mit dem Konvergenzgebiet $\mathcal{K}_f$
  und $g_n \circ\!\!-\!\!\bullet \; G(z)$ mit dem Konvergenzgebiet $\mathcal{K}_g$
  dann gilt

$$\boxed{af_n + bg_n \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad aF(z) + bG(z), \quad \mathcal{K} \supseteq \mathcal{K}_f \cap \mathcal{K}_g}$$

- Der Beweis folgt direkt aus der Definition der z-Transformation:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{af_n + bg_n\} &= \sum_{n=0}^{\infty} (af_n + bg_n) z^{-n} \\
&= a \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} + b \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^{-n} \\
&= aF(z) + bG(z)
\end{aligned}$$

Eigenschaften der z-Transformation: Linearität

- Durch die Skalierung mit einer Konstanten ändert sich das Konvergenzgebiet nicht.
- Das resultierende Konvergenzgebiet ist in der Regel die Schnittmenge der beiden einzelnen Konvergenzgebiete.
- Kürzen sich jedoch durch die Addition Pole weg, so kann sich das Konvergenzgebiet vergrößern.

Beispiel: Konvergenzgebietsvergrößerung bei linearer Operation

$$
\begin{aligned}
f_n &= u_n - u_{n-1} = \delta_n \\
u_n &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \tfrac{z}{z-1}, \quad \text{für } |z| > 1 \\
u_{n-1} &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \sum_{n=0}^{\infty} u_{n-1} z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} - z^0 \\
&= \frac{z}{z-1} - 1 = \frac{z-(z-1)}{z-1} = \frac{1}{z-1}, \quad \text{für } |z| > 1 \\
F(z) &= \frac{z}{z-1} - \frac{1}{z-1} = \frac{z-1}{z-1} = 1 \\
& \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}
\end{aligned}
$$

- Sonderfall: Pol bei $z = 1$ kürzt sich weg
  $\rightarrow$ Konvergenzgebiet vergrößert sich.

Beispiel:
z-Transformierte der Summe zweier (kausaler) Exponentialfolgen

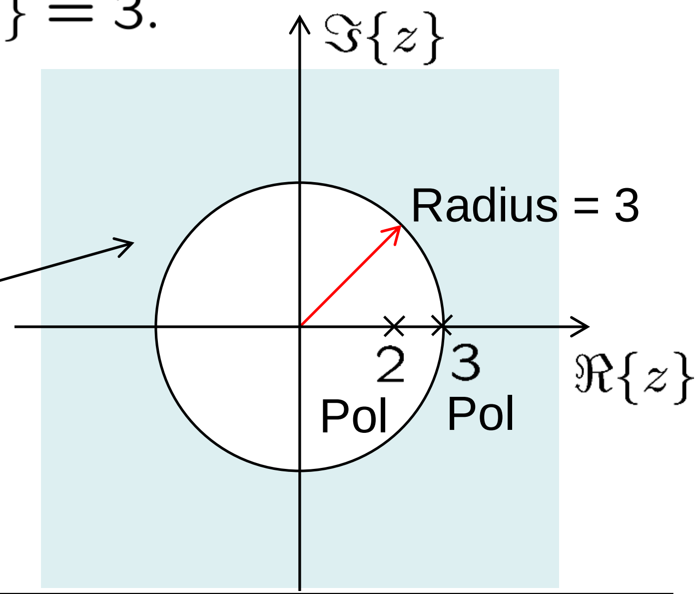
$$f_n = 2^n u_n + 3^n u_n = (2^n + 3^n) u_n$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$F(z) = \mathcal{Z}\{f_n\} = \frac{z}{z-2} + \frac{z}{z-3} = \frac{z^2-3z+z^2-2z}{(z-2)(z-3)} = \frac{2z^2-5z}{(z-2)(z-3)}$$

Konvergenzgebiet $\mathcal{K}$:

$|z| > 2$ *und* $|z| > 3$, d.h. $|z| > \max\{2, 3\} = 3.$



Konvergenzgebiet $\mathcal{K}$: $|z| > 3$,
d.h. außerhalb des Kreises,
der *beide* Pole enthält.

Beispiel:
z-Transformierte der (kausalen) Cosinus- und Sinusfolgen

$$f_n = \cos(n\omega)u_n = \frac{1}{2}\left(e^{jn\omega} + e^{-jn\omega}\right)u_n$$

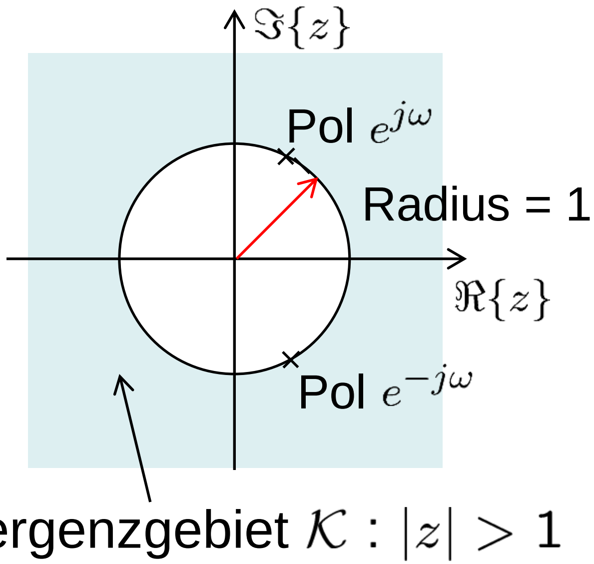
$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$F(z) = \mathcal{Z}\{f_n\} = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-e^{j\omega}} + \frac{z}{z-e^{-j\omega}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{z(z-e^{-j\omega}) + z(z-e^{j\omega})}{(z-e^{j\omega})(z-e^{-j\omega})}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2z^2 - ze^{j\omega} - ze^{-j\omega}}{(z^2 - ze^{j\omega} - ze^{-j\omega} + 1)}$$

$$= \frac{z^2 - z\cos(\omega)}{z^2 - 2z\cos(\omega) + 1}, \quad \text{für } |z| > 1.$$

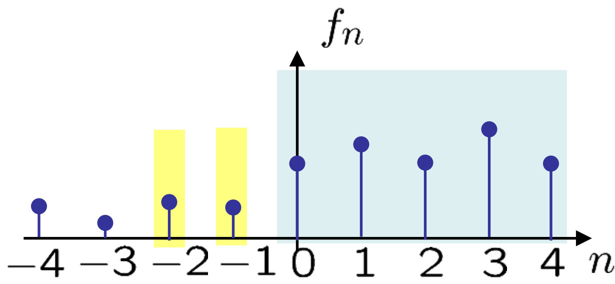


Analog:

$$\sin(n\omega)u_n \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{z\sin(\omega)}{z^2 - 2z\cos(\omega) + 1}$$

Eigenschaften der z-Transformation: Verschiebung im Zeitbereich nach rechts

$$f_n \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}$$



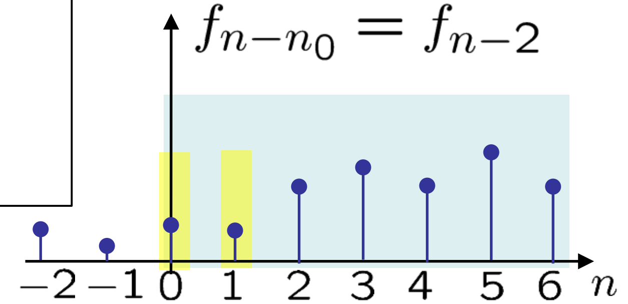
- Korrekturterm, da Werte der Folge in den Erfassungsbereich der Transformation ($n \geq 0$) hinzukommen.

Für $n_0 > 0$:

$$f_{n-n_0} \circ\!\!-\!\!\bullet \quad z^{-n_0} F(z) + \sum_{m=-n_0}^{-1} f_m z^{-(m+n_0)}$$

$$= \quad z^{-n_0} F(z) + \sum_{m=1}^{n_0} f_{-m} z^{m-n_0}$$

Für $n_0 = 2$:



- Das Konvergenzgebiet ändert sich i.a. nicht.
- Beachte: Für kausale Folgen f_n entfällt der Korrekturterm bei Verschiebung nach rechts.

Eigenschaften der z-Transformation: Verschiebung im Zeitbereich nach rechts

Der Beweis folgt direkt aus der Definition der z-Transformation:

Für $n_0 > 0$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{f_{n-n_0}\} &= \sum_{n=0}^{\infty} f_{n-n_0} z^{-n} = \sum_{m=-n_0}^{\infty} f_m z^{-(m+n_0)} \\
&= z^{-n_0}\left[\sum_{m=0}^{\infty} f_m z^{-m} + \sum_{m=-n_0}^{-1} f_m z^{-m}\right] \\
&= z^{-n_0}\left[F(z) + \sum_{m=-n_0}^{-1} f_m z^{-m}\right] \\
&= z^{-n_0} F(z) + \sum_{m=-n_0}^{-1} f_m z^{-(m+n_0)}
\end{aligned}$$

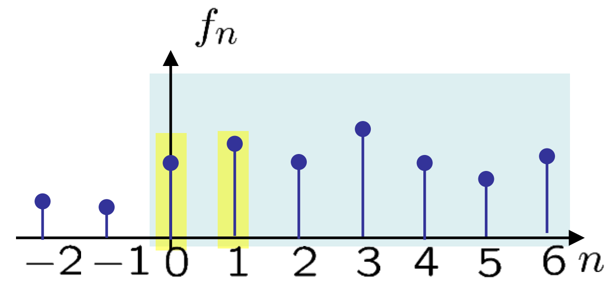
Vergleich zu Laplace-Transformation:

Für $t_0 > 0$:

$$\mathcal{L}\{x(t-t_0)\} = e^{-t_0 p}\left[X(p) + \int_{-t_0}^{0} x(t) e^{-pt} dt\right]$$

Eigenschaften der z-Transformation: Verschiebung im Zeitbereich nach links

$$f_n \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}$$

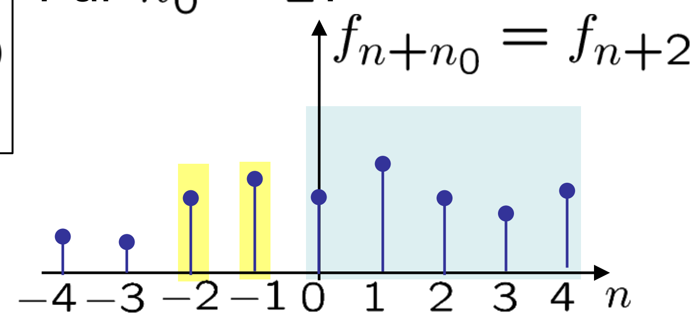


- Korrekturterm, da Werte der Folge aus dem Erfassungsbereich der Transformation ($n \geq 0$) herausfallen.

Für $n_0 > 0$:

$$f_{n+n_0} \circ\!\!-\!\!\bullet \quad z^{n_0} F(z) - \sum_{m=0}^{n_0-1} f_m z^{-(m-n_0)}$$

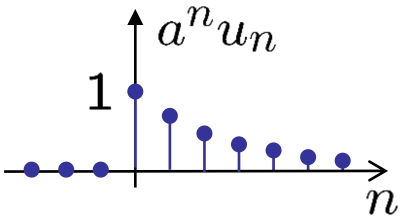
Für $n_0 = 2$:



- Das Konvergenzgebiet ändert sich i.a. nicht.
- Beweis analog zu Verschiebung nach rechts.

Beispiel:
z-Transformierte der zeitverschobenen Exponentialfolge

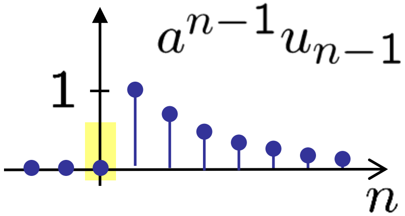
- Kausale Exponentialfolge:



$$a^n u_n \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{z}{z-a} \quad \text{für } |z| > |a|$$

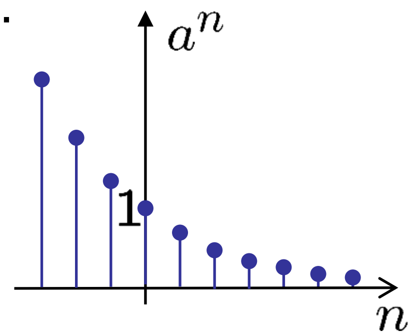
- Um $n_0 = 1$ nach rechts verschobene kausale Exponentialfolge:

$$a^{n-1} u_{n-1} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad z^{-1}\frac{z}{z-a} = \frac{1}{z-a} \quad \text{für } |z| > |a|$$



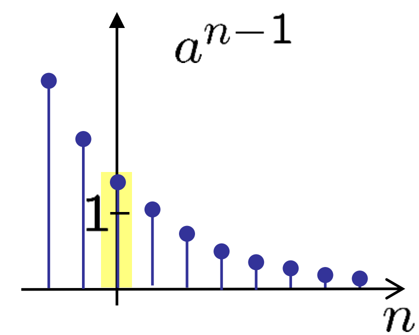
Beispiel:
z-Transformierte der zeitverschobenen Exponentialfolge

- Auch eine *nichtkausale* Exponentialfolge führt bei der *einseitigen* z-Transformation zum gleichen Ergebnis wie die kausale:



$$a^n \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{z}{z-a} \quad \text{für } |z| > |a|$$

- Um $n_0 = 1$ nach rechts verschobene *nichtkausale* Exponentialfolge:



$$a^{n-1} \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad z^{-1} \cdot \frac{z}{z-a} + a^{-1} z^0$$

$$= \frac{1}{z-a} + \frac{1}{a} = \frac{a+z-a}{(z-a)a} = \frac{1}{a} \cdot \frac{z}{z-a} \quad \text{für } |z| > |a|$$

Oder einfacher über Linearität:

$$a^{n-1} = \frac{1}{a} \cdot a^n \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{a} \cdot \frac{z}{z-a} \quad \text{für } |z| > |a|$$

Eigenschaften der z-Transformation: Dämpfung / Modulation der Folge, Skalierung von z

- Für die Multiplikation der (Zeit-)Folge f_n mit a^n gilt für beliebiges $a \neq 0$:

$$a^n f_n \circ\!\!-\!\!\bullet \; F\left(\frac{z}{a}\right), \quad \mathcal{K} = |a| \cdot \mathcal{K}_f .$$

- Der Konvergenzradius multipliziert sich dabei um Faktor $|a|$.
- Der Beweis folgt durch Einsetzen in die Definition:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n f_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot \left(\frac{z}{a}\right)^{-n} = F\left(\frac{z}{a}\right).$$

- Der Wert von a bestimmt den „Charakter" der Operation, wobei sich insbesondere folgende zwei praktisch relevante Fälle ergeben:
  - Reelles a, $0 < a < 1$: Dämpfung der Folge
  - Komplexes a mit Betrag eins, $a = e^{j\omega}$: Modulation der Folge.

Beispiel:
z-Transformierte der gedämpften Cosinus- und Sinusfolgen

$$\cos(n\omega)u_n \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{z^2 - z\cos(\omega)}{z^2 - 2z\cos(\omega) + 1} \quad \text{für } |z| > 1$$

$$a^n\cos(n\omega)u_n \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{\left(\frac{z}{a}\right)^2 - \frac{z}{a}\cos(\omega)}{\left(\frac{z}{a}\right)^2 - 2\frac{z}{a}\cos(\omega) + 1}$$

$$= \frac{z^2 - az\cos(\omega)}{z^2 - 2az\cos(\omega) + a^2} \quad \text{für } |z| > |a|$$

Analog:

$$a^n\sin(n\omega)u_n \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{az\sin(\omega)}{z^2 - 2az\cos(\omega) + a^2} \quad \text{für } |z| > |a|$$

Eigenschaften der z-Transformation: Lineare Gewichtung der Folge, Ableitung im z-Bereich

- Der linearen Gewichtung im Originalbereich entspricht die Ableitung im z-Bereich.

$$n \cdot f_n \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad -z\frac{dF(z)}{dz}, \quad \mathcal{K} = \mathcal{K}_f$$

- Der Beweis erfolgt über gliedweise Differentiation der z-Transformierten, was innerhalb des Konvergenzgebiets zulässig ist:

$$\frac{dF(z)}{dz} = \frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} -n \cdot f_n \cdot z^{-n-1}$$

Die Multiplikation mit ($-z$) auf beiden Seiten ergibt den Beweis.

- Das Konvergenzgebiet ändert sich nicht.

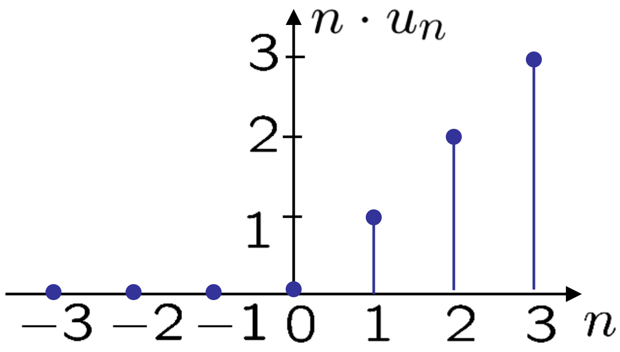
Beispiel:
z-Transformierte der Rampenfolge

$$u_n \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{z}{z-1} \quad \text{für } |z| > 1$$

$$n \cdot u_n \circ\!\!-\!\!\bullet -z \cdot \frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right)$$

$$= -z \cdot \frac{(z-1)-z}{(z-1)^2}$$

$$= \frac{z}{(z-1)^2} \quad \text{für } |z| > 1$$



Quotientenregel:

$$\frac{d}{dx}\frac{U(x)}{V(x)} = \frac{U'(x)V(x) - U(x)V'(x)}{V^2(x)}$$

Diskrete Faltung

- Diskrete Faltung, Faltungsprodukt, Faltungssumme:

$$\boxed{y_n = f_n * h_n = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f_i \cdot h_{n-i} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i f_{n-i}}$$

- Eigenschaften:
  - Kommutativität: $f_n * h_n = h_n * f_n$
  - Assoziativität: $f_n * (g_n * h_n) = (f_n * g_n) * h_n$
  - Distributivität: $f_n * (g_n + h_n) = f_n * g_n + f_n * h_n$
  - Neutralelement: $\delta_n * f_n = f_n$
- *Faltung* einer Folge f_n mit zeitverschobener Impulsfolge:

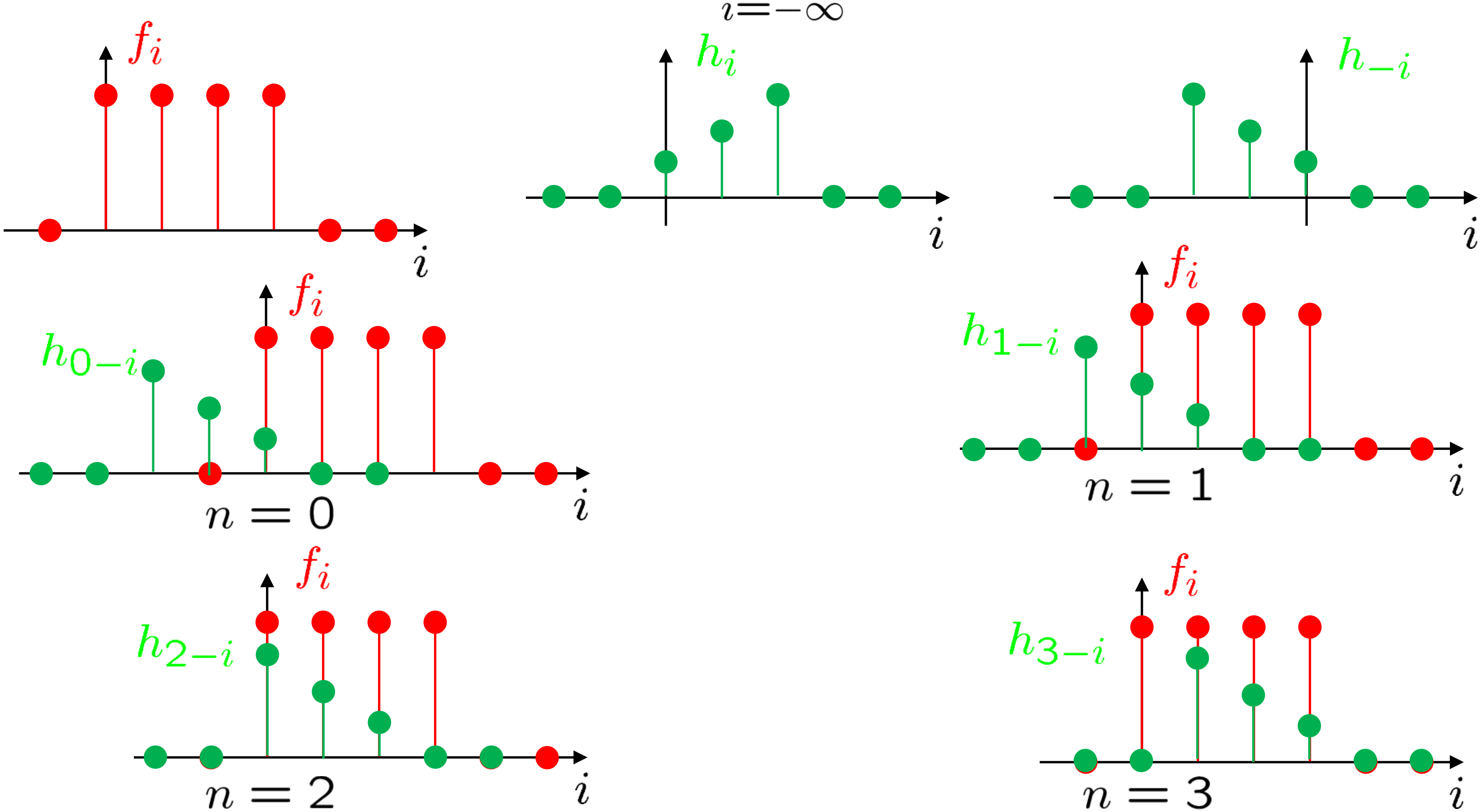
$$f_n * \delta_{n-n_0} = f_{n-n_0}$$

- *Produkt* einer Folge f_n mit zeitverschobener Impulsfolge:

$$f_n \cdot \delta_{n-n_0} = f_{n_0} \cdot \delta_{n-n_0}$$

Diskrete Faltung:
Veranschaulichung

$$y_n = f_n * h_n = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f_i h_{n-i}$$



Diskrete Faltung: Papierstreifenmethode, Tabelle

- Beispiel: Folge $f_i: \quad f_0 = 2,\ f_1 = 4,\ f_2 = 1,\ f_i = 0$ sonst
  $h_i: \quad h_0 = 3,\ h_1 = 2,\ h_2 = 1,\ h_i = 0$ sonst

f_i : $\boxed{2 \quad 4 \quad 1}$

h_{n-i} : $\boxed{1 \quad 2 \quad 3} \longrightarrow n$

$$y_n = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f_i \cdot h_{n-i}$$

i		-2	-1	0	1	2	3	4	n	y_n
f_i				2	4	1				
h_{0-i}		1	2	3					0	$6+0+0=6=y_0$
h_{1-i}			1	2	3				1	$4+12+0=16=y_1$
h_{2-i}				1	2	3			2	$2+8+3=13=y_2$
h_{3-i}					1	2	3		3	$0+4+2=6=y_3$
h_{4-i}						1	2	3	4	$0+0+1=1=y_4$
										$y_n = 0$ sonst

Diskrete Faltung: Papierstreifenmethode, Tabelle

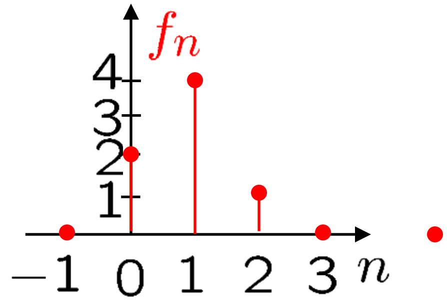
- Wenn die Längen der Folgen f_n , h_n und y_n
  L_f , L_h und L_y sind, gilt:

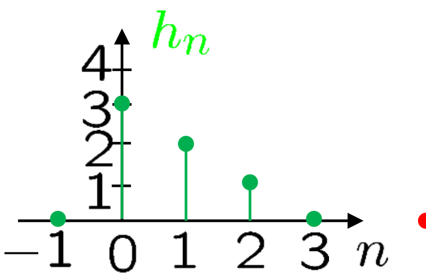
$$L_y = L_f + L_h - 1.$$

Diskrete Faltung:
Berechnung mit Impulsfolge

- Beispiel: Folge $f_n: \quad f_0 = 2,\ f_1 = 4,\ f_2 = 1,\ f_n = 0$ sonst

  $h_n: \quad h_0 = 3,\ h_1 = 2,\ h_2 = 1,\ h_n = 0$ sonst





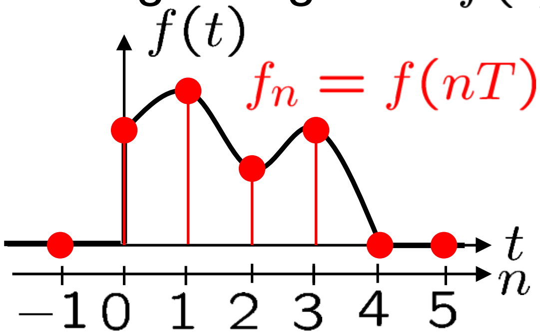
$$f_n = 2\cdot\delta_n + 4\cdot\delta_{n-1} + 1\cdot\delta_{n-2}$$

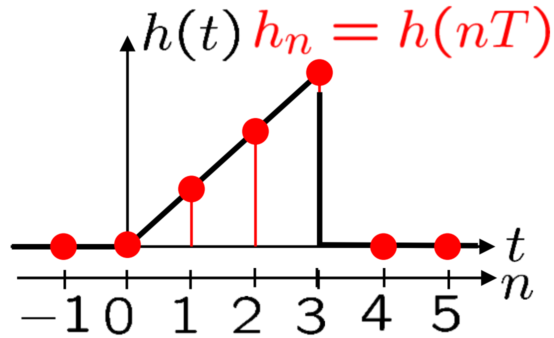
$$h_n = 3\cdot\delta_n + 2\cdot\delta_{n-1} + 1\cdot\delta_{n-2}$$

$$\begin{aligned} y_n = f_n * h_n &= (2\delta_n + 4\delta_{n-1} + \delta_{n-2}) * (3\delta_n + 2\delta_{n-1} + \delta_{n-2}) \\ &= 6\delta_n + 4\delta_{n-1} + 2\delta_{n-2} \\ &\qquad + 12\delta_{n-1} + 8\delta_{n-2} + 4\delta_{n-3} \\ &\qquad + 3\delta_{n-2} + 2\delta_{n-3} + \delta_{n-4} \\ &= 6\delta_n + 16\delta_{n-1} + 13\delta_{n-2} + 6\delta_{n-3} + \delta_{n-4} \end{aligned}$$

Zusammenfassung kontinuierliche und diskrete Faltung

- Die beiden Folgen f_n und h_n seien durch ideale Abtastung aus analogen Signalen $f(t)$ und $h(t)$ entstanden.





- Sind die Abtastwerte $y(t = nT)$ der kontinuierlichen Faltung $y(t) = f(t) * h(t)$ gleich den Folgenwerten der diskreten Faltung $y_n = f_n * h_n$?
- Im allgemeinen nicht, da bei der kontinuierlichen Faltung durch die Integration auch alle Funktionswerte $f(t)$ und $h(t)$ zwischen den Abtaststellen $iT,\ i \in \mathbb{Z}$ das Ergebnis $y(t = nT)$ beeinflussen.
- Bei der diskreten Faltung hingegen wird y_n nur durch die Abtastwerte $f_i = f(iT)$ und $h_i = h(iT),\ i \in \mathbb{Z}$ bestimmt.

Eigenschaften der z-Transformation: Faltungsregel

- Eine zentrale Eigenschaft der z-Transformation ist die Überführung der Faltungsoperation im diskreten Zeitbereich in eine Multiplikation im z-Bereich.

$$\boxed{f_n * h_n \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(z)\cdot H(z), \quad \mathcal{K} \supseteq \mathcal{K}_f \cap \mathcal{K}_h}$$

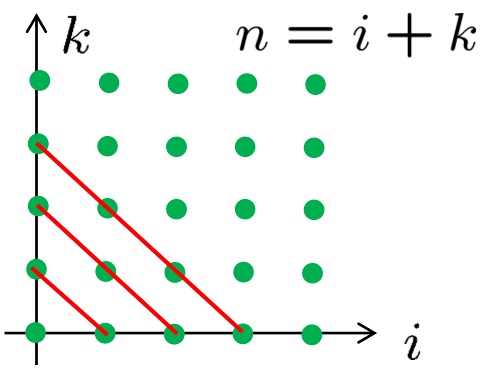
- Beweis:

$$F(z)\cdot H(z) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i z^{-i} \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^{-k}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} f_i h_k z^{-(i+k)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\Big(\sum_{k=0}^{\infty} f_{n-k} h_k\Big)}_{=f_n * h_n} z^{-n}$$

Neue Summation:



Linien konstanter Summe n

Faltungssumme bei kausalen Folgen f_n und h_n .

Beispiel: Bestimmung der Faltungssumme mit Hilfe der z-Transformation

$$f_n = 2\delta_n + 4\delta_{n-1} + \delta_{n-2} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(z) = 2 + 4z^{-1} + z^{-2}$$

$$h_n = 3\delta_n + 2\delta_{n-1} + \delta_{n-2} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad H(z) = 3 + 2z^{-1} + z^{-2}$$

$$Y(z) = F(z)H(z) = \left(2 + 4z^{-1} + z^{-2}\right)\left(3 + 2z^{-1} + z^{-2}\right)$$

$$\begin{aligned} &= 6 \quad +4z^{-1} \quad +2z^{-2} \\ &\qquad\quad +12z^{-1} \quad +8z^{-2} \quad +4z^{-3} \\ &\qquad\qquad\qquad\quad +3z^{-2} \quad +2z^{-3} \quad +z^{-4} \\ &= 6 \quad +16z^{-1} \quad +13z^{-2} \quad +6z^{-3} \quad +z^{-4} \end{aligned}$$

$$y(n) \quad = \quad 6\delta_n \quad +16\delta_{n-1} \quad +13\delta_{n-2} \quad +6\delta_{n-3} \quad +\delta_{n-4}$$

Eigenschaften der z-Transformation: Anfangswertsatz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Für den Anfangswert einer Folge gilt

$$\boxed{f_0 = \lim_{z \to \infty} F(z)}$$

- Damit kann man den Anfangswert einer Folge direkt aus ihrer z-Transformierten ohne Rücktransformation ablesen.
- Der Satz folgt unmittelbar aus der Definitionsgleichung:

$$\begin{aligned} \lim_{z \to \infty} F(z) &= \lim_{z \to \infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} \right) \\ &= \lim_{z \to \infty} \left(f_0 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + \cdots \right) \\ &= f_0 \end{aligned}$$

Eigenschaft der z-Transformation: Endwertsatz

- Hat die z-Transformierte $F(z)$ höchstens einen einfachen Pol bei $z = 1$ und sonst nur Pole innerhalb des Einheitskreises, dann gilt:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{z\to 1} (z-1)\cdot F(z)}$$

- Anschauliche Begründung:
  Sind die Voraussetzungen erfüllt, setzt sich die Folge f_n aus abklingenden Exponentialfolgen (Pole innerhalb des Einheitskreises) und evtl. einem konstantem Anteil (Pol bei $z = 1$) zusammen.
  Für $n \to \infty$ verschwinden die Anteile der abklingenden Exponentialfunktionen, und nur der konstante Anteil mit Pol bei $z = 1$ bleibt übrig.

Rücktransformation: Komplexes Umkehrintegral

- Ein direkter funktionaler Zusammenhang zwischen der z-Transformierten und der zugehörigen Originalfolge (inverse z-Transformation) ist über das Umkehrintegral gegeben.

$$\boxed{f_n = \mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint\limits_C F(z) z^{n-1} dz}$$

- Als Integrationsweg C ist dabei eine mathematisch positiv orientierte, den Ursprung umfassende, geschlossene, doppelpunktfreie Kurve im Konvergenzgebiet der z-Transformierten zu wählen.
- Berechnung des Umkehrintegrals in der Regel mit Hilfe des Residuensatzes.

Rücktransformation: Partialbruchzerlegung

- Für rationale z-Transformierte stellt die Rücktransformation über die Partialbruchzerlegung das wichtigste und einfachste Verfahren dar.
- Idee: Komplizierte Funktion in einfache elementare Terme zerlegen, die jeweils getrennt einfach (z.B. mittels Korrespondenztabelle) behandelt werden können.

Rücktransformation: Partialbruchzerlegung

- **Ausgangspunkt**: rationale Funktion, Zählergrad ≤ Nennergrad.

$$F(z) = \frac{\sum\limits_{i=0}^{N} b_i z^i}{\sum\limits_{j=0}^{N} a_j z^j} = \frac{b_0 + b_1 z^1 + \cdots + b_N z^N}{a_0 + a_1 z^1 + \cdots + a_N z^N}, \quad a_N \neq 0.$$

  Falls Zählergrad > Nennergrad, muss vorher das Polynom in z (antikausaler Signalanteil) mittels Polynomdivision abgespalten und getrennt behandelt werden.

- **Schritt 1**: Bilden der Hilfsfunktion $\tilde{F}(z) = F(z)/z$.

  Dadurch ist sichergestellt, dass Zählergrad < Nennergrad, d.h. $\tilde{F}(z)$ *echt* gebrochen rational, und damit Ansatz der Partialbruchzerlegung für $\tilde{F}(z)$ möglich ist.

Rücktransformation: Partialbruchzerlegung

- **Schritt 2**: Bestimmen der Pole α_i und deren Vielfachheiten k_i von $\tilde{F}(z)$ über die Nullstellen des Nennerpolynoms.
- **Schritt 3**: Ansatz der Partialbruchzerlegung in der Form:

$$\tilde{F}(z) = \frac{F(z)}{z} = \underbrace{\sum_i \frac{r_i}{z-\alpha_i}}_{\text{einfache Pole}} + \underbrace{\sum_i \sum_{l=1}^{m_i} \frac{\tilde{r}_{i,l}}{(z-\tilde{\alpha}_i)^l}}_{\text{mehrfache Pole}},$$

$$\alpha_i,\ \tilde{\alpha}_i,\ r_i,\ \tilde{r}_{i,l} \in \mathbb{C}$$

bzw. für (einfache) konjugiert komplexe Polpaare eventuell zusätzliche Terme der Form

$$\sum_i \frac{e_i(z-d_i)}{z^2-b_iz+c_i}, \quad b_i,\ c_i,\ d_i,\ e_i \in \mathbb{R}.$$

Rücktransformation: Partialbruchzerlegung

- **Schritt 4**: Bestimmen der Koeffizienten $r_i,\ \tilde{r}_{i,l},$ bzw. $d_i,\ e_i$
  - über Koeffizientenvergleich der auf den Hauptnenner gebrachten Partialbruchsumme oder
  - über die Residuenformel für
    - einfache Pole:
$$r_i = (z-\alpha_i)\tilde{F}(z)\Big|_{z=\alpha_i}$$
    - mehrfache Pole:
$$\tilde{r}_{i,l} = \frac{1}{(m-l)!}\frac{d^{m-l}}{dz^{m-l}}\left[(z-\tilde{\alpha}_i)^m \cdot \tilde{F}(z)\right]\Big|_{z=\tilde{\alpha}_i}$$
- **Schritt 5**: Multiplikation der Gleichung mit z führt auf die Form

$$F(z) = \sum_i r_i \frac{z}{z-\alpha_i} + \sum_i \sum_{l=1}^{m} \tilde{r}_{i,l} \frac{z}{(z-\tilde{\alpha}_i)^l},$$

welche mit der Korrespondenztabelle rücktransformiert werden kann.

Rücktransformation: Partialbruchzerlegung

Korrespondenzen:

- Einfache Pole:

$$\frac{z}{z-\alpha} \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; \alpha^n u_n$$

Exponentialfolge, Basis = Polstelle

- Mehrfache Pole:

$$\frac{z}{(z-\alpha)^{m+1}} \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; \binom{n}{m}\alpha^{n-m}u_n$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(m-1))}{m!}\alpha^{n-m}u_n$$

ausmultipliziert: Polynom *m*-ten Grades in *n*
gewichtete Exponentialfolge, Gewichtungsfunktion: Grad *m* in *n*

Rücktransformation: Partialbruchzerlegung

- Konjugiert komplexe Polpaare:

$$\frac{z\cdot r}{z-\alpha}+\frac{z\cdot r^*}{z-\alpha^*} \quad \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ \quad 2|r||\alpha|^n \cos\left(\arg(\alpha)\cdot n+\arg(r)\right) u_n$$

reelle Schwingung

- Bei rationalen Funktionen mit *reellen* Koeffizienten treten nur *reelle Pole* oder *konjugiert komplexe Polpaare* auf.

Rücktransformation: Partialbruchzerlegung

Alternativer Ansatz, wenn Zählergrad < Nennergrad:

- Direkte Partialbruchzerlegung von $F(z)$:

$$F(z) = \sum_i \frac{r'_i}{z - \alpha'_i} + \sum_i \sum_{l=1}^{m} \frac{\tilde{r}'_{i,l}}{(z - \tilde{\alpha}'_i)^l}$$

- In diesem Fall fehlt jeweils der Term z im Zähler der Entwicklungsglieder, um die elementaren Korrespondenzen anzuwenden.
- Erweitern mit z/z :

$$F(z) = \sum_i \underbrace{z^{-1}} \underbrace{\frac{r'_i z}{z - \alpha'_i}} + \sum_i \sum_{l=1}^{m} \underbrace{z^{-1}} \underbrace{\frac{\tilde{r}'_{i,l} z}{(z - \tilde{\alpha}'_i)^l}}$$

Zeitverschiebung Korrespondenztabelle

Elementare Korrespondenzen sind in einer zeitverschobenen Version anzuwenden.

Rücktransformation: Polynomdivision

- Man dividiert das Zählerpolynom durch das Nennerpolynom.
- Wenn Zählergrad ≤ Nennergrad, ergibt dies eine Form

$$f_0 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + \cdots .$$

- Die Faktoren f_n sind genau die gesuchte kausale Zahlenfolge.

Rücktransformation: Polynomdivision

- Beispiel: $F(z) = \dfrac{z}{z-2}, \quad |z| > 2$

$$
\begin{array}{l}
z \qquad\qquad : (z-2) = 1 + 2z^{-1} + 4z^{-2} + \cdots \\
\underline{-(z-2)} \\
\quad 2 \\
\quad \underline{-(2-4z^{-1})} \\
\qquad 4z^{-1} \\
\qquad \underline{-(4z^{-1}-8z^{-2})} \\
\qquad\qquad 8z^{-2}
\end{array}
$$

$$1 = f_0, \quad 2 = f_1, \quad 4 = f_2$$

Gesuchte Zahlenfolge

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{-n}$$

$$f_n = 2^n u_n$$

- Nur sinnvoll, wenn sich der generelle Ausdruck für f_n aus den ersten wenigen Werten $f_0,\ f_1,\ f_2, \ldots$ ableiten lässt oder wenn nur wenige erste Werte, z.B. $f_0,\ f_1,\ f_2,\ f_3$ gesucht sind.