Trabajo final de analisis numerico

Broz Lozano, Juan Felipe
f870421@gmail.com

November 18, 2015

Abstract

Proyecto final de la materia analisis numerico. Para el cual se programaron los metodos numericos de los capitulos de solucion de ecuaciones, sistemas de ecuaciones e interpolacion, dejando como trabajo adicional los metodos para integracion y solucion de ecuaciones diferenciales. El proyecto se desarrollo durante la asignatura, con revisiones periodicas de los metodos y sus correspondientes interfaces.

Seccion 1: Ecuaciones no lineales

Son ecuaciones de la forma $F(u) = 0$.

1.1 Busquedas por intervalos

Para este tipo de metodos usamos el algoritmo de busquedas incrementales como base, ya que devuelve un intervalo en el cual se encuentra la raiz. Cuando se tiene una funcion continua la funcion prueba con un valor inicial y el siguiente hasta que se agoten el numero maximo de iteraciones o hasta que encuentre un numero menor a cero evaluando ambos valores: $f(x_{i-1}) * f(x_i) < 0$. Teniendo el intervalo $[a, b]$ se aplica alguno de los siguientes metodos.

1.1.1 Biseccion

Se comienza desde un intervalo cerrado $[a, b]$ y teniendo en cuenta los parametros de tolerancia, numero de intervalos y delta se hace una biseccion y se toma el subintervalo donde el producto de la funcion $y = f(x)$ evaluada en sus extremos retorna un valor menor a 0.

Pseudocodigo

```
Inputs: f, X_0, X_n, n, tol, delta
i = 1
While i ≤ n do
  c = (X_0 + X_n)/2
  If (f(c) == 0 or (X_0 − X_n)/2) < tol then
    Print(c)
    Stop
  end If
  i = i+ 1
  If sign(f(c)) == sign(f(a)) then
    X_0 = c
  else
    X_n = c
  end If
end While
Print(Method failed, max number of steps exceeded)
```

1.1.2 Regla falsa

Se parte de un intervalo inicial $[x_1, x_2]$ y se asume que la funcion solo cambia de signo una vez en el intervalo. A continuacion se busca un x_3 que esta dado por la interseccion entre el eje x y una linea recta que pasa por $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$. Este valor esta dado por:

$$x_3 = x_1 - \frac{(x_2 - x_1) * f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}$$

Pseudocodigo

```
Inputs: f, X_0, X_n, n, tol, delta
i = 1
While i ≤ n do
  c = X_0 − f(X_0)∗((X_n − X_0)/f(X_n)−f(X_0))
  If (f(c) == 0 or (X_0 − X_n)/2 < tol then
    Print(c)
    Stop
  end If
  i = i+ 1
  If sign(f(c)) == sign(f(a)) then
    X_0 = c
  else
    X_n = c
  end If
end While
Print(Method failed, max number of steps exceeded)
```

1.2 Metodos abiertos

Estos metodos comienzan con uno o dos puntos que pueden o no tener una raiz entre ellos, por esta razon se les conoce como metodos abiertos.

1.2.1 Punto fijo

Require que la ecuacion $f(x) = 0$ se vuelva a escribir de la forma $x = g(x)$. Luego con una aproximacion inicial para x_0 se resuelve g y se obtiene x_1, $x_1 = g(x_0)$. A partir de aca el valor de x_{i+1} se calcula de la forma: $x_{i+1} = g(x_i)$.

Pseudocodigo

```
Inputs: tol, X_a, n, delta
fx = f(X_a)
cont = 0
error = tol + 1
While fx ≠ 0 and error > tol and cont < n do
  X_n = g(X_a)
```

```
  fx = f(X_n)
  error = abs(X_n - X_a)
  X_a = X_n
  cont += 1
end While
if fx == 0 then
  Print(X_a is root)
else if error < tol
  Print(X_a is an approx with tol)
else
  Print(method failed with n iters)
end if
```

1.2.2 Newton

Tambien conocido como el metodo de las tangentes. El valor de x_{i+1} se obtiene como el punto de corte de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ con el eje x, es decir en el punto $(x_i, f(x_i))$. Generalizando:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Pseudocodigo

```
Inputs: tol, X_0, n, delta
fx = f(X_0)
dfx = f'(X_0)
cont = 0
error = tol + 1
While fx ≠ 0 and dfx \neq 0 and error > tol and cont < n do
  X_1 = x_0 - fx/dfx
  fx = f(X_1)
  dfx = f'(X_1)
  error = abs(X_n - X_a)
  X_0 = X_1
  cont += 1
end While
if fx == 0 then
  Print(X_0 is root)
else if error < tol
  Print(X_1 is an approx with tol)
else if dfx == 0 then
  Print(X_1 is maybe a multiple root)
```

```
else
  Print(method failed with n iters)
end if
```

1.2.3 Secante

Es una variante del metodo de Newton, en el cual se cambia la derivada por una expresion que la aproxima.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Pseudocodigo

```
Inputs: tol, X_0, X_1, n, delta
fx0 = f(X_0)
if fx0 == 0 then
  Print(x_0 is a root)
else
  fx1 = f(X_1)
  cont = 0
  error = tol + 1
  den = fx1 - fx0
  While fx1 ≠ 0 and error > tol and cont < n do
    X_2 = X_1 - fx1 * (X_1 - X_0) / den
    error = abs(X_2 - X_1)
    X_0 = x_1
    fx0 = fx1
    X_1 = x_2
    fx1 = f(X_1)
    den = fx1 - fx0
    cont += 1
  end While
  if fx == 0 then
    Print(X_1 is root)
  else if error < tol
    Print(X_1 is an approx with tol)
  else if den == 0 then
    Print(maybe a multiple root)
  else
    Print(method failed with n iters)
  end if
end if
```

Seccion 2: Sistemas de ecuaciones

Sobre los sistemas de ecuaciones y para que sirven.

2.1 Metodos directos

Que son los metodos directos.

2.1.1 Eliminacion gaussiana simple

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

2.1.2 Factorizacion LU

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

2.2 Metodos iterativos

2.2.1 Gauss Seidel

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

2.2.2 Jacobi

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

Seccion 3: Interpolacion

Sobre la interpolacion.

3.1 Metodos con sistemas de ecuaciones

Sobre los metodos con sistemas de ecuaciones.

3.1.1 Neville

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

3.1.2 Newton con diferencias divididas

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

3.1.3 Lagrange

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

3.2 Splines

3.2.1 Splines lineales

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

3.2.2 Splines cubicos

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

Seccion 4: Integracion

4.1 Metodo del trapecio

4.2 Metodo de simpson 1/3

Seccion 5: Solucion numerica de ecuaciones diferenciales

Esta no es una funcion sino el conjunto de puntos por donde pasa el intervalo definido.

5.1 Metodo de euler

Reemplaza la derivada por la pendiente de una recta secante.

$$y(x_{i+1}) \approx y(x_i) + hf(x_i, y_i)$$

El error en cada punto es proporcional a h (h es el delta entre puntos).

5.2 Metodo de euler modificado

$$y(x_{i+1}) \approx y(x_i) + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$$
$$k_1 = f(x_i, y(x_i))$$
$$U = y(x_i) + hk_1$$
$$k_2 = f(x_{i+1}, U)$$

El error en cada punto es proporcional a ch^2.

5.3 Metodo Runge-Kutta (RK4)

$$y(x_{i+1}) \approx y(x_i) + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$
$$k_1 = f(x_i, y(x_i))$$
$$k_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y(x_i) + \frac{hk_1}{2})$$
$$k_3 = f(x_i + \frac{h}{2}, y(x_i) + \frac{hk_2}{2})$$
$$k_4 = f(x_i + h, y(x_i) + hk_3)$$

References

[1] Blog de analisis numerico. *Numerical Analysis Yepes & Broz*. Internet, (Sep 11 2013).

[2] Proyecto analisis numerico 2014. *https://github.com/FelipeBuiles/CalcNA2*. Internet.

[3] Francisco Jose Correa. *Metodos numericos*. Fondo editorial universidad EAFIT.