Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra kybernetiky

Semestrální práce č. 1

Operační analýza

Zkratka katedry/zkratka předmětu (KKY/OA)

Jan Burian
27. září 2022

Obsah

1 Zadání

Zápočtová práce 1

Jméno a přijmení: Jan | Fakulta, ročník: FAV4

Rozhodování podle maximální aposteriorní pravděpodobnosti

Zadaní:

Uvažujeme diskrétní systém v čase, mající 4 stavové hodnoty x_1, x_2, x_3 a x_4. Z dlouhodobějšího pozorování víme, že pravděpodobnost výskytu jednotlivých hodnot stavové proměnné X jsou známé a dány hodnotami $P(x_1)=\mathbf{0.34}$, $P(x_2)=\mathbf{0.21}$, $P(x_3)=\mathbf{0.05}$ a $P(x_4)=\mathbf{0.40}$. Na systému je možno pozorovat binární výstup Y s hodnotami 0 či 1. Předpokládáme, že v průběhu pozorování se v okamžicích t_0, ..., t_{k-1}, t_k, ... hodnota stavové proměnné X nemění. Tedy, že

$$x(t_{k+1})=x(t_k)=x(t_0)=x.$$

Předpokládáme dále, že hodnoty y výstupní proměnné Y jsou v jednotlivých okamžicích t_k závislé jen na hodnotě stavové proměnné X systému, nikoli na minulých hodnotách výstupu $y(t_k)$. Platí

$$P(y(t_k)=0\,|\,x,y(t_{k-1}),\ldots,y(t_0))=P(y(t_k)\,|\,x) \quad \forall k.$$

Považujeme tyto pravděpodobnosti za známé, přičemž $P(y(t_k)=0|X=x_k)=**$, pro $k = 1,2,3,4$ viz tabulka

$p(y(t_k = 0 \mid x_1)$	$p(y(t_k = 0 \mid x_2)$	$p(y(t_k = 0 \mid x_3)$	$p(y(t_k = 0 \mid x_4)$
0.15	0.34	0.28	0.23

Úkoly

1. Metodou maximální aposteriorní pravděpodobnosti (Bayssovský přístup) určete optimální rozhodovací pravidlo pro odhad neznámé hodnoty x stavové proměnné X systému ze tří po sobě jdoucích pozorování hodnot $y(t_0)$, $y(t_1)$ a $y(t_2)$ výstupní proměnné Y.
2. Stanovte pravděpodobnost správného a chybného rozhodnutí.}

Pomůcky:

Platí

$$P(y(t_0),y(t_1),y(t_2)\,|\,x)= \\ = P(y(t_2)\,|\,y(t_1),y(t_0),x)P(y(t_1)\,|\,y(t_0),x)P(y(t_0)\,|\,x)$$

a tedy v našem případě

$$P(y(t_0),y(t_1),y(t_2)|x)=P(y(t_2)|x)P(y(t_1)|x)P(y(t_0)|x).$$

Zadání vygenerované systémem "OA2000"

2 Vypracování

Semestrální práce byla řešena v programovém prostředí Matlab.

2.1 Údaje ze zadání

Známé hodnoty pravděpodobností (ze zadání):

$P(X_1) = 0,34$

$P(X_2) = 0,21$

$P(X_3) = 0,05$

$P(X_4) = 0,40$

Dále je ze zadání známa výstupní relace, která může být zapsána pomocí následujících podmíněných pravděpodobností pro jednotlivé stavové hodnoty X_1, X_2, X_3, X_4:

$X_1: \quad P(0|X_1) = 0,15; \;\; P(1|X_1) = 0,85$

$X_2: \quad P(0|X_2) = 0,34; \;\; P(1|X_1) = 0,66$

$X_3: \quad P(0|X_3) = 0,28; \;\; P(1|X_1) = 0,72$

$X_4: \quad P(0|X_4) = 0,23; \;\; P(1|X_1) = 0,77$

Jelikož naším cílem je pozorování tří po sobě jdoucích hodnot $y(t_0), y(t_1)\ y(t_2)$, pak na výstupu Y pozorujeme následující hodnoty: 111, 110, 101, 011, 100, 010, 001, 000.

2.2 Výpočet pravděpodobností

Pro každý výstup Y byla pomocí Bayesova vztahu vypočtena pravděpodobnost, že systém byl ve stavu X_i.
Pro výpočet jednotlivých pravděpodobností byl použit Bayesův vzorec v tomto tvaru:

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum\limits_i P(A|B_i)P(B_i)} = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{P(A)} \tag{1}$$

Po dosazení do vzorce 1 byla nejprve vypočtena hodnota podmíněné pravděpodobnosti $P(X_1|111)$:

$$\begin{aligned} P(X_1|111) = & \frac{P(111|X_1)P(X_1)}{P(111)} = \frac{P(111|X_1)P(X_1)}{\sum_{i=1}^{4} P(X_i)P(111|X_i)} = \\ \doteq & \frac{0,85^3 \cdot 0,34}{0,34 \cdot 0,85^3 + 0,21 \cdot 0,66^3 + 0,05 \cdot 0,72^3 + 0,40 \cdot 0,77^3} = \\ \doteq & 0,4438 \end{aligned}$$

Jako příklad uvedu ještě, jak by vypadal výpočet pravděpodobnosti např. $P(X_1|101)$

$$\begin{aligned} \bar{P}(X_1|101) = & \frac{P(101|X_1)P(X_1)}{P(101)} = \frac{P(101|X_1)P(X_1)}{\sum_{i=1}^{4} P(X_i)P(101|X_i)} = \\ = & \frac{0,85^2 \cdot 0,15 \cdot 0,34}{0,34 \cdot 0,85^2 \cdot 0,15 + 0,21 \cdot 0,66^2 \cdot 0,34 + 0,05 \cdot 0,72^2 \cdot 0,28 + 0,40 \cdot 0,77^2 \cdot 0,23} = \\ \doteq & 0,2840 \end{aligned}$$

Obdobně bylo postupováno i u výpočtů ostatních pravděpodobností.

2.3 Získaná kompletní tabulka

Jednotlivé získané pravděpodobnosti byly zaneseny do tabulky:

Y	$P(X_1\|Y)$	$P(X_2\|Y)$	$P(X_3\|Y)$	$P(X_4\|Y)$
111	**0,4438**	0,1283	0,0397	0,3882
110	0,284	0,2397	0,0559	**0,4204**
101	0,284	0,2397	0,0559	**0,4204**
011	0,284	0,2397	0,0559	**0,4204**
100	0,1562	0,3848	0,0678	**0,3913**
010	0,1562	0,3848	0,0678	**0,3913**
001	0,1562	0,3848	0,0678	**0,3913**
000	0,0747	**0,5372**	0,0714	0,3167

Tučně zvýrazněné hodnoty reprezentují hodnoty s největší aposteriorní pravděpodobností pro daný výstup.

2.4 Výpočet pravděpodobnosti správného rozhodnutí

Pravděpodobnost správného rozhodnutí byla vypočtena na základě tohoto vzorce:

$$P_{sprav} = P(111) \cdot P(X_1|111) + 3 \cdot P(110) \cdot P(X_4|110) + 3 \cdot P(100) \cdot P(X_4|100)+$$
$$+P(000) \cdot P(X_2|000) = 0,4273$$

2.5 Výpočet pravděpodobnosti špatného rozhodnutí

Pravděpodobnost špatného rozhodnutí byla vypočtena následovně:

$$P_{spat} = 1 - P_{sprav} = 1 - 0,4273 = 0,5727$$

3 Závěr

Optimální rozhodovací pravidlo pro odhad neznámé hodnoty x stavové proměnné X, získané pomocí metody aposteriorní pravděpodobnosti je tedy následující:

$111 \rightarrow X_1$

$110 \rightarrow X_4$

$101 \rightarrow X_4$

$011 \rightarrow X_4$

$100 \rightarrow X_4$

$010 \rightarrow X_4$

$001 \rightarrow X_4$

$000 \rightarrow X_2$

Pravděpodobnost správného rozhodnutí je rovna 0,4273 a pravděpodobnost špatného rozhodnutí je rovna 0,5727.

A Zdrojový kód z Matlabu

```matlab
clc
clear all
close all

%% Ukol 1
%% Pravdepodobnosti vyskytu jednotlivych hodnot stavove promenne X
pX = [0.34 0.21 0.05 0.40];

%% Vystup je dan nasledujicimi stochastickymi zavislostmi
Px1_0 = 0.15;
Px2_0 = 0.34;
Px3_0 = 0.28;
Px4_0 = 0.23;

Px1_1 = 1 - Px1_0;
Px2_1 = 1 - Px2_0;
Px3_1 = 1 - Px3_0;
Px4_1 = 1 - Px4_0;

PX_0 = [Px1_0 Px2_0 Px3_0 Px4_0]; % P(0|x_1,...,x_4)
PX_1 = [Px1_1 Px2_1 Px3_1 Px4_1]; % P(1|x_1,...,x_4)

%% Na vystupu Y pozorujeme tyto hodnoty:
% 111, 110, 101, 011, 100, 010, 001, 000

%% Bayesovy vztahy pro vypocet pravdepodobnosti, ze system byl ve stavu Xi

% 111
veta_uplna_ppst_1 = pX(1) * (PX_1(1)^3) + pX(2) * (PX_1(2)^3) + pX(3) * (PX_1(3)^3) + pX(4) * (PX_1(4)^3);

P1 = (pX(1) * (PX_1(1)^3)) / veta_uplna_ppst_1;
P2 = (pX(2) * (PX_1(2)^3)) / veta_uplna_ppst_1;
P3 = (pX(3) * (PX_1(3)^3)) / veta_uplna_ppst_1;
P4 = (pX(4) * (PX_1(4)^3)) / veta_uplna_ppst_1;

% 110, 101, 011 -> pro tyto tri kombinace dostanu stejny vysledek
veta_uplna_ppst_2 = (pX(1) * (PX_1(1)^2 * PX_0(1))) + (pX(2) * (PX_1(2)^2 * PX_0(2))) + (pX(3) * (PX_1(3)^2 * PX_0(3))) + (pX(4) * (PX_1(4)^2 * PX_0(4)));
P5 = (pX(1) * (PX_1(1)^2 * PX_0(1))) / veta_uplna_ppst_2;
P6 = (pX(2) * (PX_1(2)^2 * PX_0(2))) / veta_uplna_ppst_2;
P7 = (pX(3) * (PX_1(3)^2 * PX_0(3))) / veta_uplna_ppst_2;
P8 = (pX(4) * (PX_1(4)^2 * PX_0(4))) / veta_uplna_ppst_2;

% 100, 010, 001 -> pro tyto tri kombinace dostanu stejny vysledek
veta_uplna_ppst_3 = (pX(1) * (PX_1(1) * PX_0(1)^2)) + (pX(2) * (PX_1(2) * PX_0(2)^2)) + (pX(3) * (PX_1(3) * PX_0(3)^2)) + (pX(4) * (PX_1(4) * PX_0(4)^2));
P9 = (pX(1) * (PX_1(1) * PX_0(1)^2)) / veta_uplna_ppst_3;
```

```
P10 = (pX(2) * (PX_1(2) * PX_0(2)^2)) / veta_uplna_ppst_3;
P11 = (pX(3) * (PX_1(3) * PX_0(3)^2)) / veta_uplna_ppst_3;
P12 = (pX(4) * (PX_1(4) * PX_0(4)^2)) / veta_uplna_ppst_3;

% 000
veta_uplna_ppst_4 = pX(1) * (PX_0(1)^3) + pX(2) * (PX_0(2)^3) + pX(3) * (PX_0(3)^3) + pX(4) * (PX_0(4)^3);
P13 = (pX(1) * (PX_0(1)^3)) / veta_uplna_ppst_4;
P14 = (pX(2) * (PX_0(2)^3)) / veta_uplna_ppst_4;
P15 = (pX(3) * (PX_0(3)^3)) / veta_uplna_ppst_4;
P16 = (pX(4) * (PX_0(4)^3)) / veta_uplna_ppst_4;

%% Vysledna tabulka
result_table = [P1 P2 P3 P4;
                P5 P6 P7 P8;
                P5 P6 P7 P8;
                P5 P6 P7 P8;
                P9 P10 P11 P12;
                P9 P10 P11 P12;
                P9 P10 P11 P12;
                P13 P14 P15 P16;]

maxima = max(result_table')

% Vysledek:
    % 111 -> X_1
    % 110 -> X_4
    % 101 -> X_4
    % 011 -> X_4
    % 100 -> X_4
    % 010 -> X_4
    % 001 -> X_4
    % 000 -> X_2

%% Ukol 2
%% Pravdepodobnosti spravneho a spatneho rozhodnuti
P_111 = veta_uplna_ppst_1;
P_110 = veta_uplna_ppst_2; % = P_011, P_101
P_100 = veta_uplna_ppst_3; % = P_001, P_010
P_000 = veta_uplna_ppst_4;

% Pravdepodobnost spravneho rozhodnuti
P_sprav_roz = P_111 * maxima(1) + 3 * P_110 * maxima(2) + 3 * P_100 * maxima(5) + P_000 * maxima(6)

% Pravdepodobnost spatneho rozhodnuti
P_spat_roz = 1 - P_sprav_roz
```