Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra kybernetiky

FAKULTA
APLIKOVANÝCH VĚD
ZÁPADOČESKÉ
UNIVERZITY
V PLZNI

Semestrální práce č. 1

Stochastické systémy a procesy

Zkratka katedry/zkratka předmětu (KKY/STP)

Jan Burian
5. dubna 2022

Obsah

1 Zadání

ZČU v Plzni – Katedra kybernetiky | Stochastické systémy a procesy

Markovské řetězce

Zadání semestrální práce č. 1

Zvolte si grafy prezentující Markovské řetězce, jehož uzly značí stavy a hrany určují pravděpodobnosti přechodu $p_{i,j}$ z uzlu i do uzlu j, tak aby měl 6 uzlů a aby platilo že

Příklad č. 1

Markovský řetězec je homogenní a regulární. Pro tento řetězec určete:

- M – střední počet kroků, které jsou třeba k (prvnímu) dosažení stavu j za předpokladu, že se vycházelo ze stavu i,
- a – finální pravděpodobnosti.

Příklad č. 2

Markovský řetězec je homogenní a absorpční se dvěma absorpčními stavy. Pro tento řetězec určete:

- T – střední počet průchodů stavem j, pokud se vychází ze stavu i, do té doby, než dojde k pohlcení (pokud $j = i$, výchozí stav se započítává za první průchod),
- t – dobu pobytu v tranzientním stavu,
- d – pravděpodobnost, že Markovský řetězec vycházející ze stavu i skončí v daném absorpčním stavu.

2 Vypracování

Oba příklady byly řešeny v programovém prostředí Matlab.

2.1 Příklad č. 1

2.1.1 Zvolení Markovského řetězce

Na základě zadání byl zvolen Markovský řetězec, který je homogenní a zároveň regulární. Markovský řetězec je homogenní právě tehdy, když matice pravděpodobností přechodů $\mathbf{P}$ je konstantní. Platí tedy následující vztah:

$$\mathbf{P}(k) = \mathbf{P}, \forall k \tag{1}$$

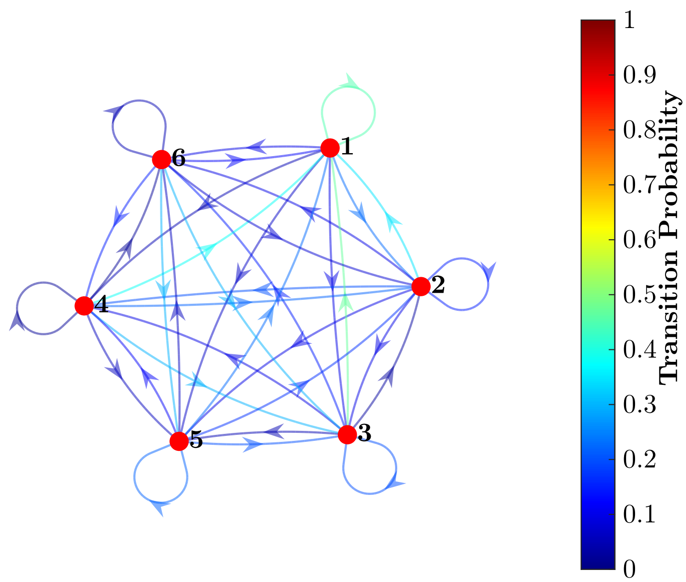
Markovský řetězec s maticí přechodu $\mathbf{P}$ je regulární právě tehdy, když existuje k takové, že $\mathbf{P}^k$ nemá nulové prvky.

Byla tedy zvolena následující matice přechodu $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.45 & 0.23 & 0.1 & 0.05 & 0.07 & 0.1 \\ 0.35 & 0.15 & 0.1 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0.47 & 0.03 & 0.2 & 0.1 & 0.05 & 0.15 \\ 0.38 & 0.22 & 0.3 & 0.02 & 0.06 & 0.02 \\ 0.23 & 0.17 & 0.2 & 0.12 & 0.22 & 0.06 \\ 0.12 & 0.08 & 0.3 & 0.15 & 0.3 & 0.05 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Součet pravděpodobností v jednotlivých řádcích matice je vždy roven 1.

Následně byl pomocí funkce *dtmc()* vytvořen z matice $\mathbf{P}$ Markovský řetězec, který byl poté za využití funkce *graphplot()* vykreslen.



Obrázek 1: Vykreslený Markovský řetězec.

2.1.2 Výpočet finálních pravděpodobností

Nejprve byly vypočteny finální pravděpodobnosti a. Platí následující soustava rovnic:

$$a = a\mathbf{P} \tag{3}$$

Tato soustava obsahuje celkem M neznámých $a_1, a_2, ..., a_M$, tyto neznámé jsou lineárně závislé a tudíž není možné bez další informace nalézt jediné řešení. Nalezení jednoznačného řešení nicméně umožňuje zavedení podmínky, která říká, že součet jednotlivých finálních pravděpodobností je roven 1. Podmínka je tedy definována následovně:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 1 \tag{4}$$

Hodnoty finálních pravděpodobností, tedy získáme řešením soustavy rovnic:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots & p_{0M} \\ p_{10} & p_{11} & \cdots & p_{1M} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{M0} & p_{M1} & \cdots & p_{MM} \end{bmatrix} \tag{5}$$

s využitím podmínky (4).

V našem případě hodnoty finálních pravděpodobností vyšly:

- $a_1 = 0.3763$
- $a_2 = 0.1628$
- $a_3 = 0.1649$
- $a_4 = 0.0965$
- $a_5 = 0.1079$
- $a_6 = 0.0916$

2.1.3 Výpočet středního počtu kroků prvního přechodu

Na tento výpočet byla využita fundamentální matice $\mathbf{Z}$ regulárního řetězce, kterou lze definovat pomocí limitní matice $\mathbf{A}$, jejíž řádky jsou tvořeny hodnotami finálních pravděpodobností $a_0, a_1, ..., a_M$. Definice fundamentální matice je následující:

$$\mathbf{Z} = [\mathbf{I} - (\mathbf{P} - \mathbf{A})]^{-1}, \tag{6}$$

kde I je jednotková matice, P je maticí přechodu a A je limitní matice.
Střední počet kroků prvního přechodu lze vyjádřit následovně:

$$m_{i,j} = \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^{n} p_{is} m_{sj} + 1; i, j = 1, 2, ... \tag{7}$$

Jestliže střední počet kroků prvního přechodu mezi jednotlivými stavy systému vyjádříme pomocí matic, dostaneme:

$$\mathbf{M} = \mathbf{P}(\mathbf{M} - \bar{\mathbf{M}}) + \mathbf{E}, \tag{8}$$

kde matice $\bar{\mathbf{M}}$ obsahuje diagonální prvky matice $\mathbf{M}$ a $\mathbf{E}$ je maticí samých jedniček. Při stanovení prvků diagonální matice $\bar{\mathbf{M}}$ na hlavní diagonále je vycházeno z toho, že pro střední kroky prvního návratu m_{ii} platí vztah $m_{ii} = 1/a_{ii}$, kde a_{ii} jsou složkami finálního vektoru a.

Pokud matici $\mathbf{M}$ vyjádříme v explicitním tvaru, pak dostaneme následující rovnici:

$$\mathbf{M} = (\mathbf{I} - \mathbf{Z} + \mathbf{E}\bar{\mathbf{Z}})\bar{\mathbf{M}}, \tag{9}$$

kde $\bar{\mathbf{Z}}$ je matice obsahující pouze diagonální prvky fundamentální matice $\mathbf{Z}$.

Výsledná matice středních kroků $\mathbf{M}$ pro naše hodnoty je tedy následující:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2.6575 & 5.6431 & 6.8314 & 10.0214 & 10.7336 & 10.3500 \\ 2.9327 & 6.1420 & 6.6428 & 8.6097 & 10.4795 & 10.4585 \\ 2.5796 & 6.9637 & 6.0642 & 9.7407 & 10.9212 & 9.7787 \\ 2.7424 & 5.8568 & 5.6364 & 10.3641 & 11.0513 & 11.0373 \\ 3.2802 & 6.1583 & 6.0164 & 9.3080 & 9.2697 & 10.8188 \\ 3.5831 & 6.8340 & 5.2648 & 9.0589 & 8.4847 & 10.9135 \end{bmatrix} \tag{10}$$

2.2 Příklad č. 2

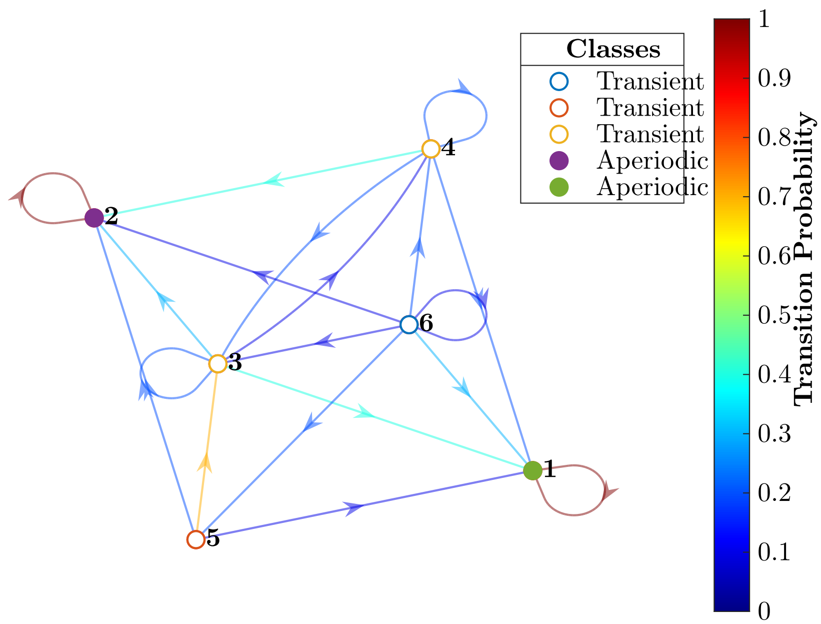
2.2.1 Zvolení Markovského řetězce

Na základě zadání byl zvolen Markovský řetězec, který je homogenní a zároveň absorpční se dvěma absorpčními stavy. Markovský řetězec je homogenní právě tehdy, když matice pravděpodobností přechodů **P** je konstantní. Stav je absoprční, pokud po vstupu do tohoto stavu se z něj již není možné dostat pryč. U absorpčního Markovského řetězce skončíme v absorpčním stavu s pravděpodobností 1.

Byla tedy zvolena následující matice přechodu **P**:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 & 0.0 & 0.0 \\ 0.2 & 0.4 & 0.2 & 0.2 & 0.0 & 0.0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.7 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.3 & 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Následně byl pomocí funkce *dtmc()* vytvořen z matice **P** Markovský řetězec, který byl poté za využití funkce *graphplot()* vykreslen.



Obrázek 2: Vykreslený Markovský řetězec se dvěma absorpčními stavy.

Nechť má Markovský řetězec S stavů, z toho R absorpčních a $S-R$ tranzientních.

Matice přechodu **P** absorpčních řetězců může být přeuspořádána na matici v následujícím kanonickém tvaru:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R} & \mathbf{Q} \end{bmatrix}, \tag{12}$$

kde **I** je jednotková matice řádu R, **0** je nulová matice typu $R \times S$, **R** je matice typu $S \times R$ udávající pravděpodobnosti přechodu mezi neabsorpčními a absorpčními stavy a **Q** je čtvercová matice řádu S obsahující pravděpodobnosti přechodu mezi neabsorpčními stavy.

Lze si povšimnout, že zvolená matice **P** je v již zmiňovaném kanonickém tvaru (12).

2.2.2 Výpočet středního počtu průchodů stavem j

Pro tento výpočet byl využit následující vztah:

$$\mathbf{T} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}, \tag{13}$$

kde **I** je jednotková matice s hodností $rank = rank(\mathbf{Q})$ a **Q** je matice, jež vznikla vynecháním řádků a sloupců odpovídajících absorpčním stavům.

Výsledná matice **T**:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1.2903 & 0.1613 & 0 & 0 \\ 0.3226 & 1.2903 & 0 & 0 \\ 0.9032 & 0.1129 & 1.0000 & 0 \\ 0.4158 & 0.3297 & 0.2222 & 1.1111 \end{bmatrix} \tag{14}$$

2.2.3 Výpočet doby pobytu v tranzientním stavu

Hodnota doby pobytu v tranzientním stavu byla získána využitím vztahu, který je v maticově definován jako:

$$t = \mathbf{T}1, \tag{15}$$

kde 1 je vektor samých jedniček.

Získali jsme vektor doby doby pobytu v tranzientním stavu:

$$t = \begin{bmatrix} 1.4516 \\ 1.6129 \\ 2.0161 \\ 2.0789 \end{bmatrix} \tag{16}$$

2.2.4 Výpočet pravděpodobnosti v daném absorpčním stavu

Jako b_{ij} označíme pravděpodobnost přechodu z přechodného stavu i do absorpčního stavu j . Pravděpodobnost může být vyjádřena jako:

$$d_{ij} = p_{ij} + \sum p_{ik} d_{kj}, \tag{17}$$

kde p_{ij} představuje přímý přechod do absorpčního stavu, druhý člen označuje všechny možné nepřímé přechody.

V maticové formě lze tyto pravděpodobnosti zapsat jako:

$$\mathbf{d} = \mathbf{R} + \mathbf{Q}\mathbf{d}. \tag{18}$$

Po úpravě:

$$\mathbf{d} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{R} = \mathbf{T}\mathbf{R}. \tag{19}$$

Následně bylo pouze dosazeno do rovnice 19.

Na závěr jsme získali pravděpodobnosti, že Markovský řetězec vycházející ze stavu i skončí v daném absorpčním stavu:

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0.5484 & 0.4516 \\ 0.3871 & 0.6129 \\ 0.4839 & 0.5161 \\ 0.5878 & 0.4122 \end{bmatrix} \tag{20}$$

3 Zdroje

- https://view.officeapps.live.com/op/view.aspx?src=https%3A%2F%2Fis.muni.cz%2Fel%2Fecon%2Fjaro2009%2FPMNPRO%2Fum%2FP5-RegularniRetezce.doc&wdOrigin=BROWSELINK
- https://is.muni.cz/el/1456/jaro2009/PMNPRO/um/P6-AbsorpcniStavy.pdf
- https://www.fd.cvut.cz/department/k611/pedagog/K611THO_soubory/skriptaUP.pdf
- https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~prokesov/2017/cv4_5.pdf
- Přednášky z předmětu STP

A Zdrojový kód z Matlabu

```
%% Prvni semestralni prace z predmetu STP
% Jan Burian

%% Priklad 1
% Markovsky retezec
    % - homogenni (pij(n) nezavisi na n)
    % - regularni (P^(n) pro konecne n (neobsahuje zadne nulove prvky)
% 6 uzlu => matice prechodu P o velikosti 6x6

clc
clear all
close all

P = [0.45 0.23 0.1 0.05 0.07 0.1;
     0.35 0.15 0.1 0.2  0.1  0.1;
     0.47 0.03 0.2 0.1  0.05 0.15;
     0.38 0.22 0.3 0.02 0.06 0.02;
     0.23 0.17 0.2 0.12 0.22 0.06;
     0.12 0.08 0.3 0.15 0.3  0.05];

mc = dtmc(P);
figure;
graphplot(mc,'ColorEdges',true);

syms a1 a2 a3 a4 a5 a6
a = [a1 a2 a3 a4 a5 a6];
soucin_aP = a*P;
eqns = [soucin_aP(1) == a1,
        soucin_aP(2) == a2,
        soucin_aP(3) == a3,
        soucin_aP(4) == a4,
        soucin_aP(5) == a5,
        soucin_aP(6) == a6,
        a1 + a2 + a3 + a4 + a5 + a6 == 1];
result = solve(eqns, [a1 a2 a3 a4 a5 a6]);
a = structfun(@double,result)'
A = [a; a; a; a; a; a];

n = rank(P); % hodnost matice P
I = eye(n); % jednotkova matice
E = ones(n); % matice samych jednicek
Z = inv(I - (P - A));

Z_pomocna = diag(diag(Z));
M_pomocna = inv(diag(diag(A)));

M = (I - Z + E * Z_pomocna) * M_pomocna

%% Priklad 2
% Markovsky retezec
    % - homogenni (pij(n) nezavisi na n)
```

```
    % - absorpcni se dvema absorpcnimi stavy
% 6 uzlu => matice prechodu P o velikosti 6x6

clc
clear all
close all

P = [1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0;
     0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0;
     0.4 0.3 0.2 0.1 0.0 0.0;
     0.2 0.4 0.2 0.2 0.0 0.0;
     0.1 0.2 0.7 0.0 0.0 0.0;
     0.3 0.1 0.1 0.2 0.2 0.1];

mc = dtmc(P);
graphplot(mc,'ColorNodes',true,'ColorEdges',true)

% kanonicky tvar P = [I 0; R Q]
Q = P(3:6, 3:6); % matice Q vznikne z P, a to vynechanim radku a sloupcu odpovidajicich absorpcnim stavum
I = eye(4); % jednotkova matice o hodnosti 4 = rank(Q)
T = inv(I - Q) % stredni pocet pruchodu stavem j... (fundamentalni matice T)
t = T * ones(4,1) % doba pohybu v tranzientnim stavu
R = P(3:6, 1:2); % matice typu s x r obsahujici pravdepodobnosti prechodu z neabsorpcnich do
                                % absorpcnich stavu a

d = T * R
```

Seznam obrázků