

# Stochastické procesy a stacionarita

## Zadání semestrální práce č. 2

### Příklad č. 1

Uvažujte Gauss-Markovův diskretní proces generovaný vztahem

$$X_{k+1} = e^{-bT} X_k + W_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

kde  $W_k$  je bílý šum,  $p(W_k) = \mathcal{N}\{W_k; 0, Q(1-e^{-2bT})\}$ , počáteční podmínka je  $p(X_0) = \mathcal{N}\{X_0; 0, Q\}$ ,  $Q = 3$ ,  $b = 0.5$  a  $T = 1$ . Vygenerujte  $M = 10^4$  realizací Gauss-Markova procesu pro  $N=100$  časových okamžiků. Vypočítejte odhad autokovarianční funkce  $\widehat{\text{COV}}[X_k, X_{k+\tau}]$  pro  $\tau \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  a  $k \in \{0, 1, 2, \dots, 94\}$ . Vykreslete a porovnejte tyto odhady s teoreticky vypočítanou autokovarianční funkcí  $\text{COV}[X_k, X_{k+\tau}]$ . Určete, zda je proces stacionární v širším smyslu.

### Příklad č. 2

Hodnotu Wienerova procesu v diskretních časových okamžicích lze generovat pomocí vztahu

$$X_{k+1} = X_k + W_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

kde počáteční podmínka je  $X_0 = 0$ , interval mezi časovými okamžiky je roven jedné a  $W_k$  je bílý šum a  $p(W_k) = \mathcal{N}\{W_k; 0, 1\}$ . Vygenerujte  $M = 10^4$  realizací Wienerova procesu pro  $N=100$  časových okamžiků. Vykreslete 8 realizací a všimněte si nestacionarity procesu. Vypočítejte teoretickou hodnotu autokovarianční funkce procesu  $\text{COV}[X_{k+\tau}, X_k]$  a její odhad  $\widehat{\text{COV}}[X_{k+\tau}, X_k]$  pro  $\tau \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  a  $k \in \{0, 1, 2, \dots, 94\}$  vypočítaný z realizací. Obojí vykreslete s porovnejte.

### Příklad č. 3

Uvažujte následující Gauss-Markovův model systému

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= 0.95X_k + 0.5W_k \\ Z_k &= 5X_k + V_k, \end{aligned}$$

kde  $p(W_k) = \mathcal{N}\{W_k; 0, 3\}$  a  $p(V_k) = \mathcal{N}\{V_k; 0, 2\}$  jsou bílé šумы vzájemně nezávislé a nezávislé na počáteční podmínce  $p(X_0) = \mathcal{N}\{X_0; 1, 5\}$ . Vygenerujte  $M = 10^4$  realizací modelu pro  $N=100$  časových okamžiků. Vypočítejte teoretickou střední hodnotu procesů  $E[X_k]$ ,  $E[Z_k]$ , jejich odhadů  $\widehat{E}[X_k]$ ,  $\widehat{E}[Z_k]$  pro  $k \in \{0, 1, 2, \dots, 99\}$  a ustálené hodnoty  $E[X_k]$ ,  $E[Z_k]$  pro  $k \rightarrow \infty$ . Výsledky vykreslete s porovnejte. Vypočítejte teoretickou hodnotu variance procesů  $\text{VAR}[X_k]$ ,  $\text{VAR}[Z_k]$ , jejich odhadů  $\widehat{\text{VAR}}[X_k]$ ,  $\widehat{\text{VAR}}[Z_k]$  pro  $k \in \{0, 1, 2, \dots, 99\}$  a ustálené hodnoty  $\text{VAR}[X_k]$ ,  $\text{VAR}[Z_k]$  pro  $k \rightarrow \infty$ . Výsledky opět vykreslete s porovnejte.