Odhad konstantní veličiny

Zadání semestrální práce č. 1

Uvažujme objekt, který se pohybuje po přímce s náhodným zrychlením, zatímco je s konstantní periodou T měřena jeho poloha. Cílem je na základě měření a modelu systému odhadnout neznámou, ale konstantní počáteční polohu a rychlost objektu. V diskrétním případě můžeme uvažovat lineární dynamický systém s popisem

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k, \quad \mathbf{w}_k \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, q \begin{bmatrix} \frac{T^3}{3} & \frac{T^2}{2} \\ \frac{T^2}{2} & T \end{bmatrix} \right), \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \bar{x}_0^{\text{poloha}} \\ \bar{x}_0^{\text{rychlost}} \end{bmatrix},$$
$$z_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + v_k, \qquad v_k \sim \mathcal{N}(0, R),$$

kde q je intenzita šumu, R je variance chyby měření a procesy $[\mathbf{w}_k]_{k=1}^{+\infty}$ a $[v_k]_{k=1}^{+\infty}$ jsou vzájemně nezávislé bílé šumy. Počáteční stav $\mathbf{x}_0$ zvolte libovolně.

Teoretické úkoly: Odhad podle vážených nejmenších čtverců z prvních několika měření.

(i) Sestavte rovnici $\mathbf{z} = \mathbf{H}\mathbf{x}_0 + \mathbf{e}$, kde $\mathbf{z} = [z_0, \ldots, z_3]^{\mathrm{T}}$. Určete kovarianční matici $\mathbf{\Sigma} = E(\mathbf{e}\mathbf{e}^{\mathrm{T}})$ chyby $\mathbf{e}$ a formulujte problém odhadu $\mathbf{x}_0$ pomocí vážených nejmenších čtverců.

(ii) Pozorujte, co se stane, když budete využívat různá měření. Uvažujte A) z_0, z_1, B) z_0, z_2, C) z_1, z_2 a vyjádřete předpis pro odhady a kovarianční matice chyb odhadů obecně, tj. v závislosti jen na $T, q,$ a R. Uvědomte si, že odhadujete-li konstantu, kovarianční matice odhadu a chyby odhadu jsou stejné. Jaké pravděpodobnostní rozdělení mají odhady a proč?

Nápověda: stačí vynechat některé řádky z původní rovnice $\mathbf{z} = \mathbf{H}\mathbf{x}_0 + \mathbf{e}$, z bodu (i).

Dosaďte do odhadů a kovariančních matic hodnoty $T = 1$, $q = 0.1$ a $R = 1$. S těmito parametry také vyjádřete odhady a kovarianční matice pro D) z_0, z_1, z_2 a E) z_0, z_1, z_2, z_3. Popište, co se děje, když některé měření chybí. Co kdyby bylo měření jenom jedno?

(iii) Interpretovat přesnost přímo z hodnot kovariančních matic může být obtížné. Lze ji ale znázornit graficky, pomocí 3-σ elips. Pro nestranný odhad s kovarianční maticí $\mathbf{P}$ se jedná o křivku $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^{\mathrm{T}}\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 9\}$. Porovnejte 3-$\sigma$ elipsy pro všechny případy A)–E). Lze odhady uspořádat od nejlepšího po nejhorší?

Návod: Najděte křivky $\{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{u} = 1\}$, pak použijte transformaci $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + 3\mathbf{S}\mathbf{u}$, kde $\mathbf{S}$ je maticová odmocnina matice $\mathbf{P}$ splňující $\mathbf{S}\mathbf{S}^{\mathrm{T}} = \mathbf{P}$, například Choleského faktor.

Simulační úkoly: Simulační ověření teoretických výsledků.
Pomocí funkce `randn` vygenerujte 1000 realizací náhodného vektoru $\mathbf{z}$. Pro každý nasimulovaný vektor měření $\mathbf{z}$ dopočtěte realizace odhadů $\hat{\mathbf{x}}_0$ pro varianty A)–E).

(i) Odhadněte hustoty jednotlivých odhadů *polohy* pomocí normalizovaných histogramů. Porovnejte je mezi sebou, a také je porovnejte s teoretickými hustotami – s marginálními hustotami odhadů polohy, tedy $\mathcal{N}(\bar{x}_0^{\text{poloha}}, \mathbf{P}_{\text{na pozici 1,1}}^{[\text{daný případ}]})$.

(ii) Pro variantu E) porovnejte "teoreticky odvozenou" 3-σ elipsu s příslušnými realizacemi odhadu a 3-sigma elipsou odpovídající výběrové kovarianční matici.