Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra kybernetiky

Semestrální práce č. 3

Teorie odhadu a zpracování signálů

Zkratka katedry/zkratka předmětu (KKY/TOD)

Jan Burian
30. listopadu 2022

Obsah

1 Zadání **3**

2 Vypracování **4**
2.1 Úkol (i) . . . 4
2.1.1 Optimální deterministický rekonstruktor stavu . . . 4
2.1.2 Kalmanův filtr . . . 5
2.1.3 Ustálený Kalmanův filtr . . . 5
2.2 Úkol (ii) . . . 6
2.3 Úkol (iii) . . . 8
2.4 Úkol (iv) . . . 10
2.4.1 Optimální deterministický rekonstruktor stavu . . . 10
2.4.2 Kalmanův filtr . . . 10
2.4.3 Ustálený Kalmanův filtr . . . 11
2.4.4 Vykreslení . . . 11

3 Závěr **13**

1 Zadání

Odhad stavu lineárního systému

Zadání semestrální práce č. 3

Uvažujme objekt, který se pohybuje po přímce s náhodným zrychlením, zatímco je s konstantní periodou T měřena jeho poloha. Cílem je na základě měření a modelu systému rekurzivně odhadovat náhodný stav systému, v našem případě polohu a rychlost objektu. V diskrétním případě můžeme uvažovat lineární dynamický systém s popisem

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_{k+1} &= \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k, \quad \mathbf{w}_k \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{40} \begin{bmatrix} \frac{T^3}{3} & \frac{T^2}{2} \\ \frac{T^2}{2} & T \end{bmatrix} \right), \quad \mathbf{x}_0 \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right), \\
z_k &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + v_k, \qquad v_k \sim \mathcal{N}(0, 10),
\end{aligned}
$$

kde vzorkovací perioda je $T = 1$ a procesy $[\mathbf{w}_k]_{k=1}^{+\infty}$ a $[v_k]_{k=1}^{+\infty}$ jsou vzájemně nezávislé bílé šumy, nezávislé na počátečním stavu $\mathbf{x}_0$.

Úkoly: Rekonstruktor v porovnání s odhadem náhodného stavu Kalmanovým filtrem. Vygenerujte 1000 trajektorií stavu a měření pro $k = 0, \ldots, 25$.

(i) Pro porovnání nejprve ignorujte, že systém je stochastický, a navrhněte pro něj optimální rekonstruktor – navrhněte zisk $\mathbf{K}$ pro filtr ve tvaru $\hat{\mathbf{x}}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{KH})\mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{K}\mathbf{z}_k$ přiřazením pólů do nuly. V jakém smyslu je rekonstruktor optimální? Následně stochastický charakter systému vezměte v potaz a formulujte problém odhadu náhodného stavu pomocí Kalmanova filtru. Nakonec určete ustálenou hodnotu Kalmanova zisku $\mathbf{K}_\infty$. Pro každou trajektorii měření odhadněte stav pomocí:

   (a) optimálního deterministického rekonstruktoru stavu,

   (b) ustáleného Kalmanova filtru, tj. filtru s konstantním ziskem $\mathbf{K}_\infty$,

   (c) Kalmanova filtru.

(ii) Vykreslete první trajektorii stavu a porovnejte ji s příslušnými filtračními odhady a měřením. Pro první trajektorii dále vykreslete chyby filtračních odhadů. Lze něco říci jen z první trajektorie?

(iii) V případě (b) a (c) lze analyzovat inovační posloupnost, která musí splňovat určité vlastnosti. Ty lze monitorovat a brát jako nutnou podmínku správného chodu filtru. Pro oba filtry proto porovnejte následující ukazatele a zamyslete se, jestli vše funguje, jak má;

   - odhady středních hodnot inovací ve všech časech — v grafu,
   - odhady variancí inovací pro $k = 0, 1, 5, 25$ i kovariancí mezi těmito časy — v tabulce.

(iv) Když provádíte simulaci, máte přístup ke skutečnému stavu. Proto můžete vyhodnotit kvalitu odhadů přímo z pohledu střední kvadratické chyby. Odhadněte tedy střední hodnoty kvadratických chyb všech filtračních odhadů v závislosti na čase a získané křivky porovnejte s teoretickými hodnotami. Lze algoritmy (a), (b) a (c) uspořádat od nejlepšího po nejhorší?

   Nápověda: Pro porovnání simulace s teorií budete potřebovat kovarianční matice chyby: vývoj stopy filtrační kovarianční matice. Můžete využít Josephovu formu.

2 Vypracování

Semestrální práce byla z velké části řešena v programovém prostředí Matlab.

2.1 Úkol (i)

V první řadě byl zadaný systém nejprve přepsán do následujícího tvaru:

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{G}\boldsymbol{w}_k, \quad \boldsymbol{w}_k \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{Q}), \tag{1}$$

$$\boldsymbol{z}_k = \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}_k + v_k, \quad v_k \sim \mathcal{N}(0, R), \tag{2}$$

kde $\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{G} = I$, $\boldsymbol{Q} = \frac{1}{40}\begin{bmatrix} \frac{T^3}{3} & \frac{T^2}{2} \\ \frac{T^2}{2} & T \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ a R = 10.

Ze zadání je dále známo, že $T = 1$ a náhodné veličiny $\boldsymbol{w}_k$ a $\boldsymbol{v}_k$ jsou vzájemně nezávislé bílé šumy $\forall k \in \mathbb{N}$.

Dále známe střední hodnotu a kovarianční matici počátečního stavu $\boldsymbol{x}_0$; $\boldsymbol{x}_0 \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$.
Následně již bylo možné vygenerovat 1000 trajektorií stavu a měření pro $k = 0, \ldots, 25$. Postup generování byl podobný jako v minulé semestrální práci.

2.1.1 Optimální deterministický rekonstruktor stavu

Nyní jsme schopni navrhnout optimální rekonstruktor. Navrhneme zisk $\boldsymbol{K}$ pro filtr v následujícím tvaru:

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}\boldsymbol{H})\boldsymbol{F}\hat{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{k}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{z}_{k+1}, \tag{3}$$

a to přiřazením pólů do nuly.
Tohoto požadavku docílíme vyřešením rovnice pro získání nulových vlastních čísel charakteristického polynomu matice $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}\boldsymbol{H})\boldsymbol{F}$. Dostaneme tedy následující rovnici:

$$\det[\lambda\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}\boldsymbol{H})\boldsymbol{F}] = 0 \tag{4}$$

Po dosazení do rovnice (4) dostaneme:

$$\lambda^2 + (k_1 + k_2 - 2)\lambda + (1 - k_1) = 0 \tag{5}$$

Pro zjištění k_1 a k_2 dostaneme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

$$\begin{cases} k_1 + k_2 - 2 = 0 \\ 1 - k_1 = 0 \end{cases} \tag{6}$$

Po vyřešení soustavy rovnic (6) dostaneme:

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Nyní můžeme definovat odhad stavu pomocí optimálního rekonstruktoru:

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\hat{\boldsymbol{x}}_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{z}_k, \tag{8}$$

Rekonstruktor je optimální, jelikož se vlastní čísla/póly matice $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}\boldsymbol{H})\boldsymbol{F}$ nachází více vlevo, než vlastní čísla matice $\boldsymbol{F}$.

2.1.2 Kalmanův filtr

Nyní vezmeme v potaz stochastický charakter systému a formulujeme problém odhadu náhodného stavu pomocí Kalmanova filtru. Budeme využívat algoritmus prediktor - korektor, definujme tedy následující vztahy, které byly odvozeny na přednášce:

1. Inicializace
$$\hat{\boldsymbol{x}}_0 = \bar{\boldsymbol{x}}_0 \tag{9}$$
$$\boldsymbol{P}_0 = \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{x}_0} \tag{10}$$

2. Predikce (časový krok)
$$\hat{\boldsymbol{x}}'_{k+1} = \boldsymbol{F}\hat{\boldsymbol{x}}_k \tag{11}$$
$$\boldsymbol{P}'_{k+1} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{P}_k\boldsymbol{F}^T + \boldsymbol{G}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{G}^T \tag{12}$$

3. Korekce (začlenění měření/filtrace)
$$\boldsymbol{K}_{k+1} = \boldsymbol{P}'_{k+1}\boldsymbol{H}^T_{k+1}(\boldsymbol{H}_{k+1}\boldsymbol{P}'_{k+1}\boldsymbol{H}^T_{k+1} + \boldsymbol{R}_{k+1})^{-1} \tag{13}$$

$$\boldsymbol{P}_{k+1} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}_{k+1}\boldsymbol{H}_{k+1})\boldsymbol{P}'_{k+1}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}_{k+1}\boldsymbol{H}_{k+1})^T + \boldsymbol{K}_{k+1}\boldsymbol{R}_{k+1}\boldsymbol{K}^T_{k+1} \tag{14}$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1} = \hat{\boldsymbol{x}}'_{k+1} + \boldsymbol{K}_{k+1}(\boldsymbol{z}_{k+1} - \boldsymbol{H}_{k+1}\hat{\boldsymbol{x}}'_{k+1}) \tag{15}$$

2.1.3 Ustálený Kalmanův filtr

Jedná se o stejný typ filtru jako v předchozím případě. Výjimku tvoří pouze hodnota zisku $\boldsymbol{K}_{k+1}$, která je v tomto případě konstantní. Hodnotu této konstanty lze určit jako tzv. ustálený Kalmanův zisk, který je definován pomocí následujícího vztahu:

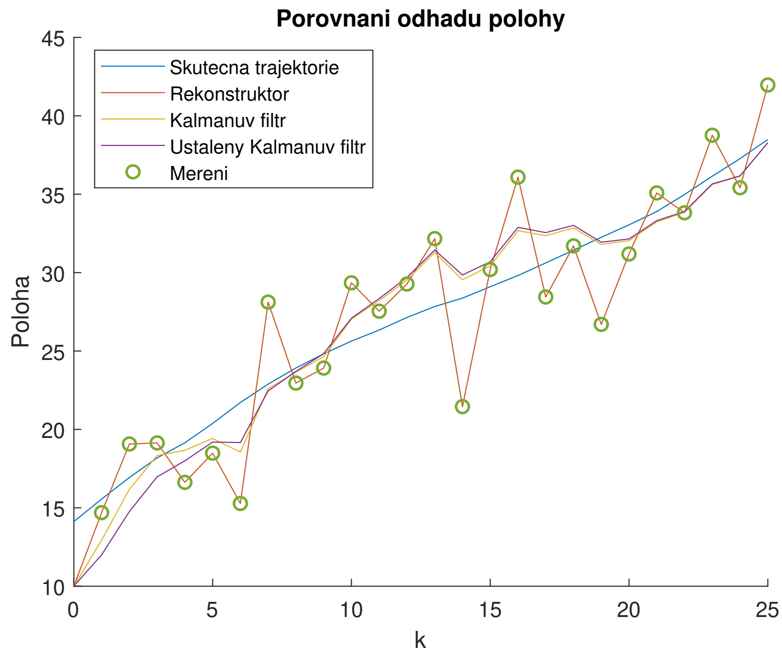
$$\boldsymbol{K}_\infty = \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{K}_{k+1} \tag{16}$$

Hodnotu $\boldsymbol{K}_\infty$ jsme vypočetli numericky s využitím vztahů (12), (13) a (14). Dostali jsme tento výsledek:

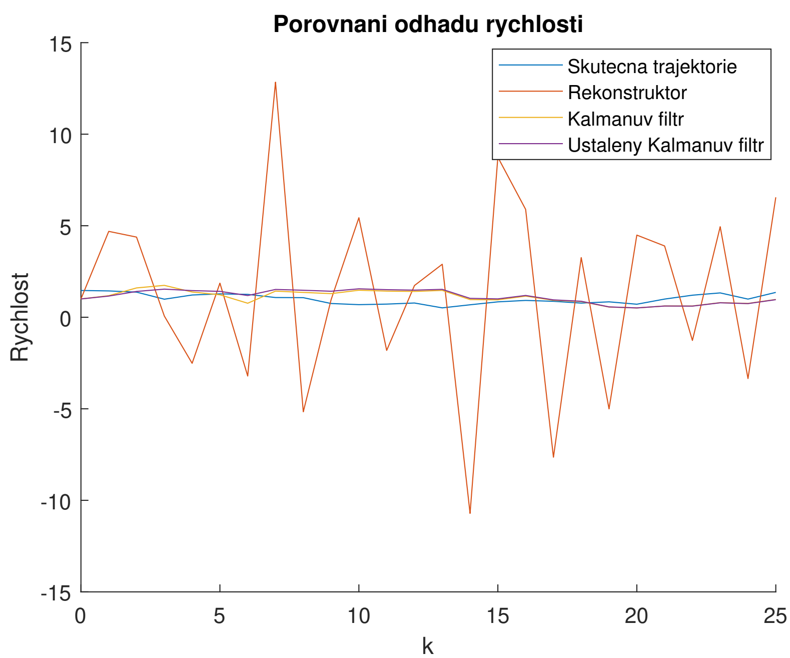
$$\boldsymbol{K}_\infty = \begin{bmatrix} 0.2711 \\ 0.0427 \end{bmatrix} \tag{17}$$

2.2 Úkol (ii)

V tomto úkolu jsme nejprve vykreslili první trajektorii stavu a porovnali ji s příslušnými filtračními odhady a měřením.

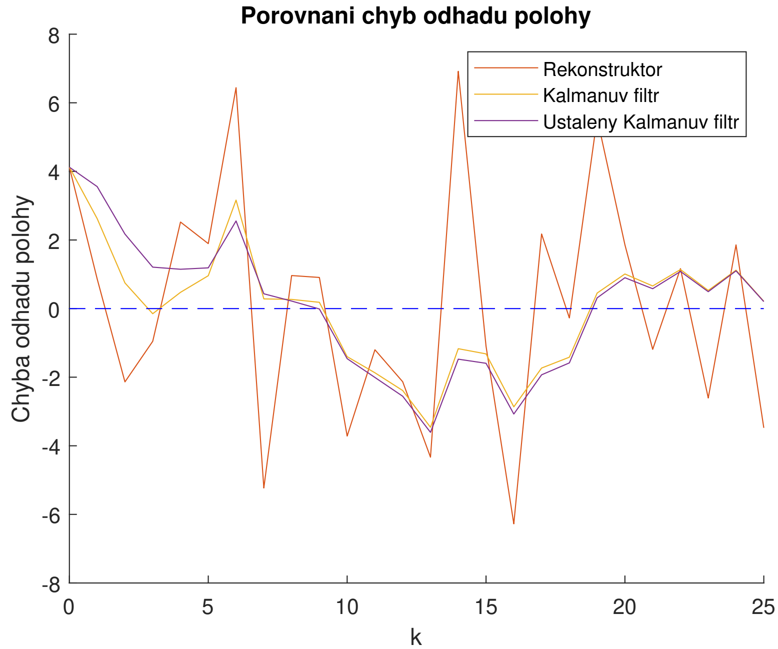


Obrázek 1: Porovnání první trajektorie polohy a příslušných filtračních odhadů.

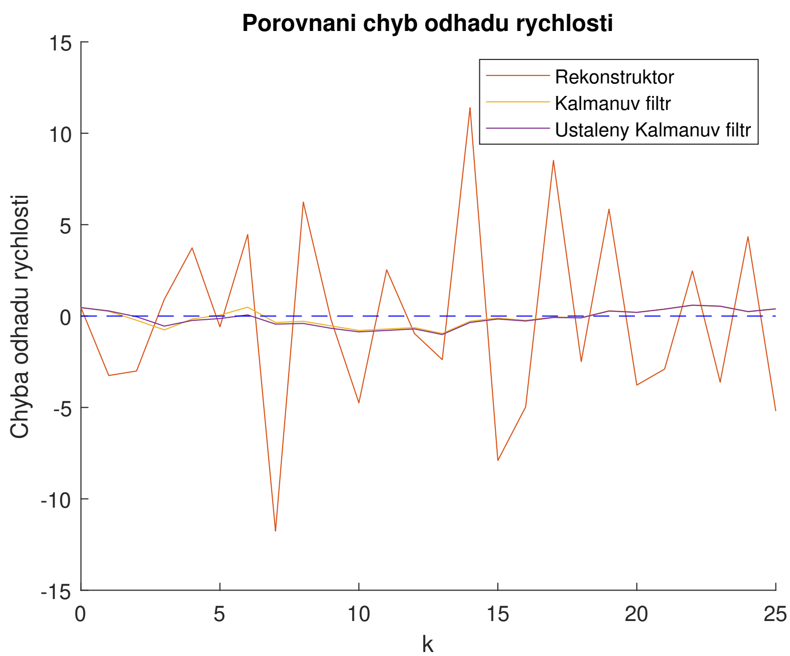


Obrázek 2: Porovnání první trajektorie rychlosti a příslušných filtračních odhadů.

Dále jsme vykreslili chyby filtračních odhadů polohy a rychlosti.



Obrázek 3: Porovnání chyb odhadu polohy příslušných filtračních odhadů.



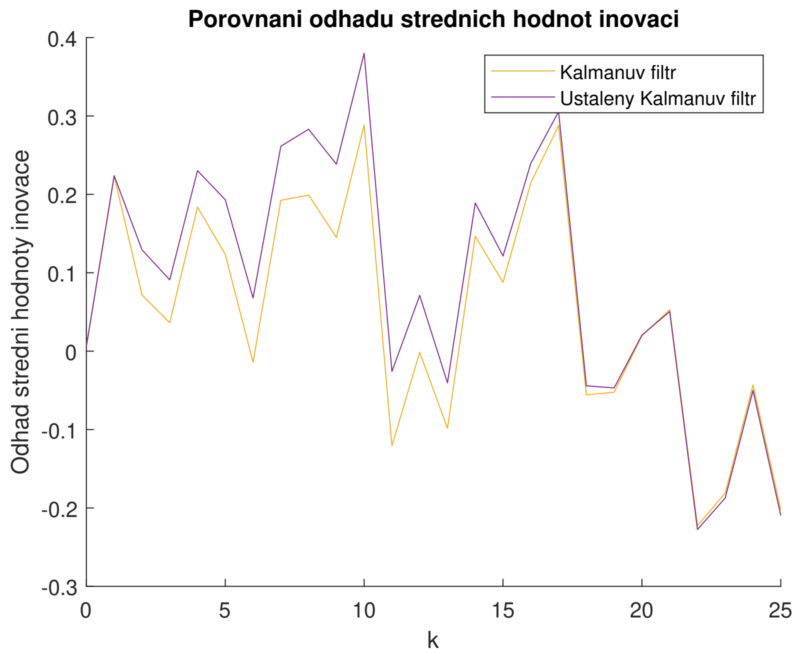
Obrázek 4: Porovnání chyb odhadu rychlosti příslušných filtračních odhadů.

Jelikož generujeme náhodně všechny trajektorie pro $k = 0, 1, \dots 25$, tak z pohledu první trajektorie nemohu říci nic.

2.3 Úkol (iii)

Cílem tohoto úkolu bylo analyzovat inovační posloupnost u případů (b) a (c). Zadefinujme inovační posloupnost pomocí následujícího vztahu:

$$\tilde{z}_k = z_k - \mathrm{E}[z_k|z_{k-1}] = z_k - \boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{x}}'_k \tag{18}$$



Obrázek 5: Porovnání odhadů středních hodnot inovací. Lze si povšimnout, že odhady středních hodnot inovací nabývají hodnot kolem nuly, což splňuje předpoklad, že inovace, v obecném případě, je bílý proces nulovou střední hodnotou.

Dále byla vytvořeny dvě tabulky sloužící pro porovnání hodnot odhadů variancí a kovariancí inovací Kalmanových filtrů pro předem definované časové okamžiky $k = 0, 1, 5$ a 25.

Kalmanův filtr

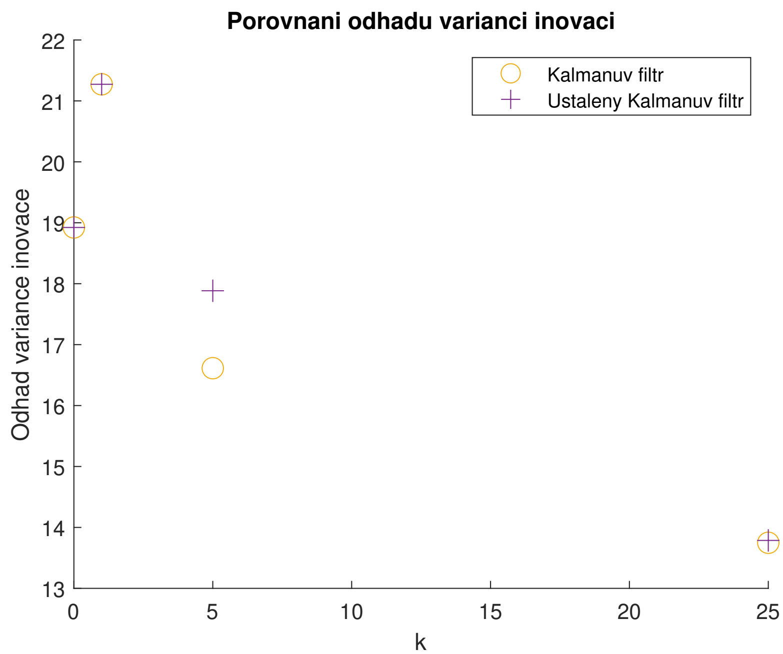
$\mathrm{cov}[\tilde{z}_k,\ \tilde{z}_n]$	k = 0	k = 1	k = 5	k = 25
n = 0	18.9227	9.4837	-1.4297	0.0641
n = 1	9.4837	21.2728	-0.7197	-0.1242
n = 5	-1.4297	-0.7197	16.6134	-0.8226
n = 25	0.0641	-0.1242	-0.8226	13.7480

Tabulka 1: Tabulka obsahující hodnoty kovariancí (variancí) inovací Kalmanova filtru pro vybrané časy k.

Ustálený Kalmanův filtr				
cov$[\tilde{z}_k, \tilde{z}_n]$	k = 0	k = 1	k = 5	k = 25
n = 0	18.9227	9.4837	0.2065	0.0623
n = 1	9.4837	21.2728	0.7865	-0.1743
n = 5	0.2065	0.7865	17.8841	-1.1523
n = 25	0.0623	-0.1743	-1.1523	13.7866

Tabulka 2: Tabulka obsahující hodnoty kovariancí (variancí) inovací ustáleného Kalmanova filtru pro vybrané časy k.

Variance inovací obou Kalmanových filtrů jsou rovny prvkům na hlavních diagonálách vytvořených tabulek. Hodnoty variancí obou filtrů jsme zanesli do následujícího grafu:



Obrázek 6: Porovnání variancí inovací Kalmanova filtru a Kalmanova ustáleného filtru.

Z obrázku (6) a tabulek (1) (2) je patrné, že hodnoty variancí v časových okamžicích $k = 0$ a $k = 1$ jsou ekvivalentní pro oba filtry. Je to dáno tím, že v obou případech uvažujeme neznalost měření v prvním okamžiku, kvůli čemuž se shodují počáteční prediktivní odhady. V čase $k = 5$ dojde k rozdílu mezi hodnotami variancí, hodnota variance Kalmanova filtru je menší než hodnota variance ustáleného Kalmanova filtru. S přibývajícím časem se hodnoty variancí budou opět shodovat, což je způsobeno vzájemnou konvergencí mezi oběma filtry. Důkazem je hodnota variance Kalmanova i ustáleného Kalmanova filtru v čase $k = 25$.

2.4 Úkol (iv)

V tomto úkolu bylo cílem vyhodnotit kvalitu odhadů z pohledu střední kvadratické chyby (MSE). Střední kvadratická chyba je definována následovně:

$$\mathrm{E}[(\boldsymbol{x}_{k+1} - \hat{\boldsymbol{x}})^T(\boldsymbol{x}_{k+1} - \hat{\boldsymbol{x}})] = \mathrm{E}[\tilde{\boldsymbol{x}}_{k+1}^T \tilde{\boldsymbol{x}}_{k+1}] \tag{19}$$

2.4.1 Optimální deterministický rekonstruktor stavu

Nejprve zopakujme obecný vztah pro deterministický rekonstruktor:

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{KH})\boldsymbol{F}\hat{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{k}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{z}_{k+1}, \tag{20}$$

Rovnici (20) upravíme do následujícího tvaru:

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1} = (\boldsymbol{F} - \boldsymbol{KHF})\hat{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{k}} + \boldsymbol{KHF}\boldsymbol{x}_k, \tag{21}$$

Nyní vypočteme estimační chybu $\tilde{\boldsymbol{x}}_k$, která je definována následovně:

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_{k+1} = \boldsymbol{x}_{k+1} - \hat{\boldsymbol{x}}_{k+1} \tag{22}$$

Dosadíme do rovnice (22), dostaneme:

$$\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{x}}_{k+1} &= \underbrace{\boldsymbol{Fx} + \boldsymbol{w}_k}_{\boldsymbol{x}_{k+1}} - \underbrace{[(\boldsymbol{F} - \boldsymbol{KHF})\hat{\boldsymbol{x}}_k + \boldsymbol{KHF}\boldsymbol{x}_k]}_{\hat{\boldsymbol{x}}_{k+1}} = \\
&= \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{w}_k - (\boldsymbol{F} - \boldsymbol{KHF})\hat{\boldsymbol{x}}_k - \boldsymbol{KHF}\boldsymbol{x}_k = \\
&= \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{KHF}\boldsymbol{x}_k - (\boldsymbol{F} - \boldsymbol{KHF})\hat{\boldsymbol{x}}_k + \boldsymbol{w}_k = \\
&= (\boldsymbol{F} - \boldsymbol{KHF})\boldsymbol{x}_k - (\boldsymbol{F} - \boldsymbol{KHF})\hat{\boldsymbol{x}}_k + \boldsymbol{w}_k = \\
&= (\boldsymbol{F} - \boldsymbol{KHF})\tilde{\boldsymbol{x}}_k + \boldsymbol{w}_k - \boldsymbol{KH}\boldsymbol{w}_k + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{KH})\boldsymbol{w}_k - \boldsymbol{K}v_{k+1} = \\
&= (\boldsymbol{F} - \boldsymbol{KHF})\tilde{\boldsymbol{x}}_k + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{KH})\boldsymbol{w}_{k+1} - \boldsymbol{K}v_{k+1}
\end{aligned} \tag{23}$$

Dosadíme výslednou rovnici (23) do rovnice (19), čímž dostaneme vztah pro výpočet střední kvadratické chyby deterministického rekonstruktoru:

$$\mathrm{E}[\tilde{\boldsymbol{x}}_{k+1}^T \tilde{\boldsymbol{x}}_{k+1}] = (\boldsymbol{F} - \boldsymbol{KHF})\mathrm{E}[\tilde{\boldsymbol{x}}_k^T \tilde{\boldsymbol{x}}_k](\boldsymbol{F^T} - \boldsymbol{F^T}\boldsymbol{H^T}\boldsymbol{K^T}) + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{KH})\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{H^T}\boldsymbol{K^T}) + \boldsymbol{K}R\boldsymbol{K^T} \tag{24}$$

Pro tento algoritmus je třeba stanovit počáteční podmínku:

$$\mathrm{E}[\tilde{\boldsymbol{x}}_0^T \tilde{\boldsymbol{x}}_0] = \mathrm{var}[\boldsymbol{x}_0] = \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{x_0}} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{25}$$

2.4.2 Kalmanův filtr

Vztah pro výpočet střední kvadratické chyby Kalmanova filtru je totožný se vztahem pro výpočet kovarianční matice chyby po začlenění měření. Pouze místo apriorní kovarianční matice chyby $\boldsymbol{P_k}$ dosadíme $\mathrm{E}[\tilde{\boldsymbol{x}}_k^T \tilde{\boldsymbol{x}}_k]$. Dostaneme tedy následující rovnici:

$$\mathrm{E}[\tilde{\boldsymbol{x}}_{k+1}^T \tilde{\boldsymbol{x}}_{k+1}] = \Big[(\boldsymbol{F}\mathrm{E}[\tilde{\boldsymbol{x}}_k^T \tilde{\boldsymbol{x}}_k]\boldsymbol{F}^T + \boldsymbol{Q})^{-1} + \boldsymbol{H}^T R^{-1} \boldsymbol{H}\Big]^{-1} \tag{26}$$

Počáteční podmínka bude opět:

$$\mathrm{E}[\tilde{\boldsymbol{x}}_0^T \tilde{\boldsymbol{x}}_0] = \mathrm{var}[\boldsymbol{x}_0] = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{27}$$

2.4.3 Ustálený Kalmanův filtr

I v případě ustáleného Kalmanova filtru je vztah pro výpočet střední kvadratické chyby totožný se vztahem pro výpočet kovarianční matice chyby. V tomto případě však využijeme Josephovu formu. Dostaneme tedy:

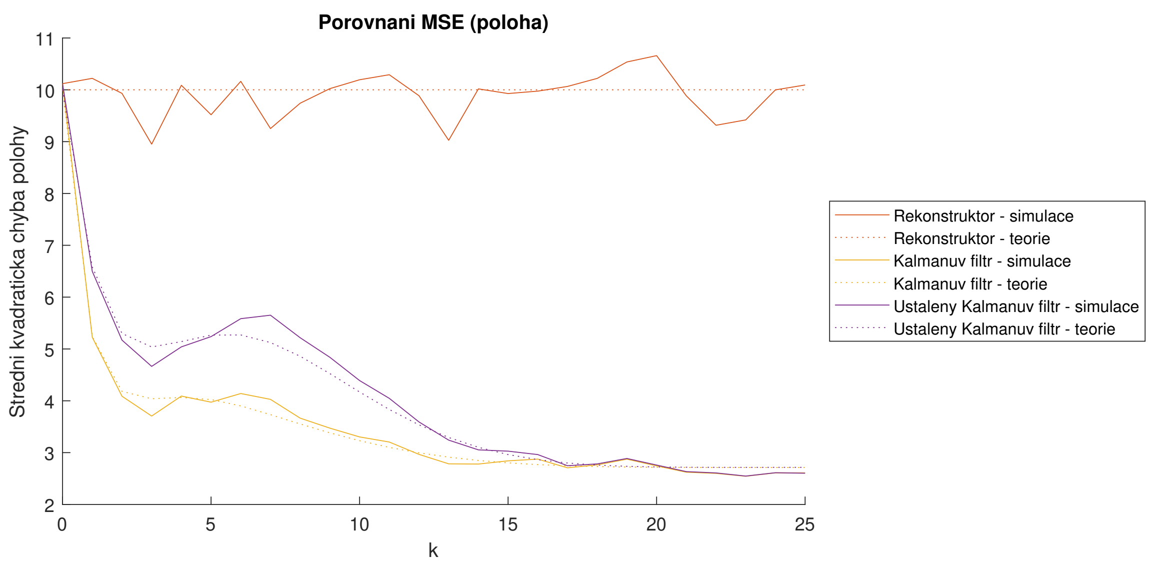
$$\mathrm{E}[\tilde{\boldsymbol{x}}_{k+1}^T \tilde{\boldsymbol{x}}_{k+1}] = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}\boldsymbol{H})(\boldsymbol{F}\mathrm{E}[\tilde{\boldsymbol{x}}_k^T \tilde{\boldsymbol{x}}_k]\boldsymbol{F}^T + \boldsymbol{Q})(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}\boldsymbol{H})^T + \boldsymbol{K}R\boldsymbol{K}^T \tag{28}$$

Počáteční podmínku opět volíme:

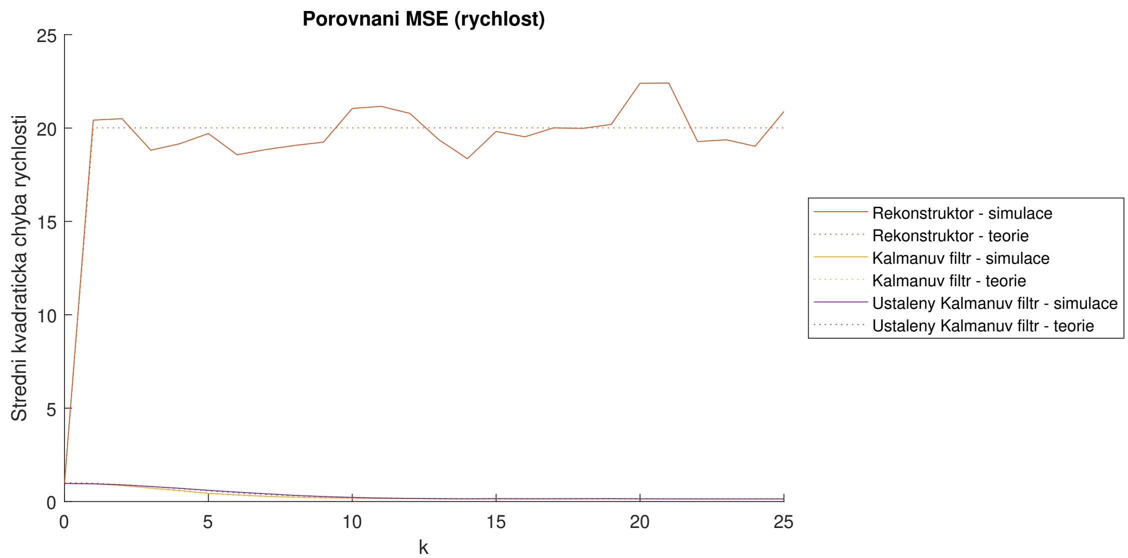
$$\mathrm{E}[\tilde{\boldsymbol{x}}_0^T \tilde{\boldsymbol{x}}_0] = \mathrm{var}[\boldsymbol{x}_0] = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{29}$$

2.4.4 Vykreslení

V této části jsme vykreslili simulačně získané střední hodnoty středních kvadratických chyb všech filtračních odhadů v závislosti na čase. Nejprve jsme vykreslili střední kvadratické chyby pro polohu a následně pro rychlost. Hodnoty středních kvadratických chyb *poloh* odpovídaly prvku na pozici (1,1) v příslušných maticích $\mathrm{E}[\tilde{\boldsymbol{x}}_{k+1}^T \tilde{\boldsymbol{x}}_{k+1}]$ o velikosti 2×2. Naopak hodnoty středních kvadratických chyb *rychlostí* odpovídaly prvku na pozici (2,2).



Obrázek 7: Porovnání středních kvadratických chyb polohy.

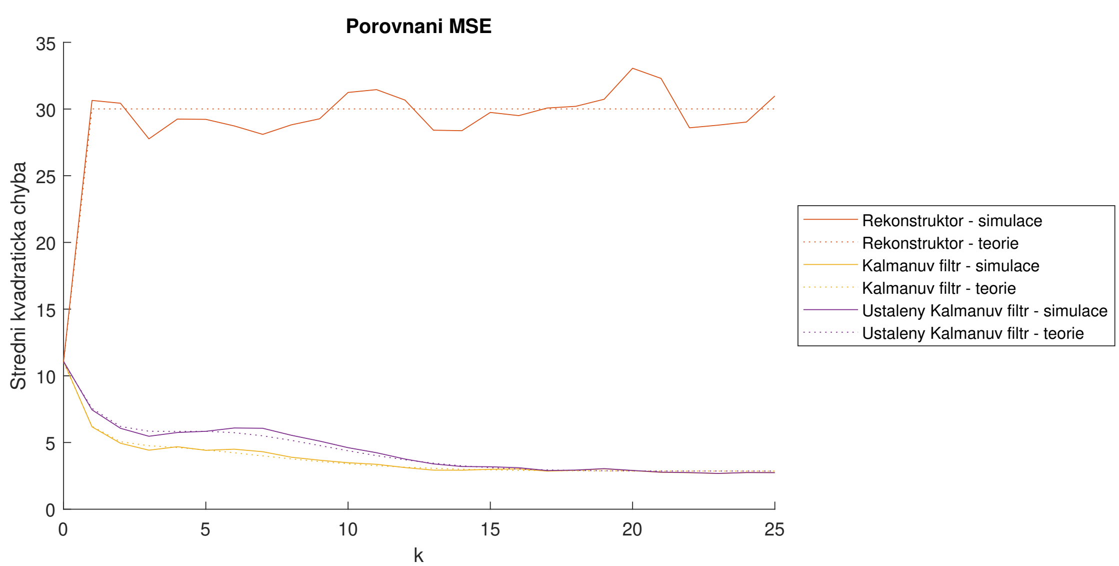


Obrázek 8: Porovnání středních kvadratických chyb rychlosti.

Pro střední kvadratickou chybu $\mathrm{E}[\tilde{\boldsymbol{x}}_{k+1}^T\tilde{\boldsymbol{x}}_{k+1}]$ platí, že je rovna stopě příslušné kovarianční matice. Platí tedy:

$$\mathrm{E}[\tilde{\boldsymbol{x}}_{k+1}^T\tilde{\boldsymbol{x}}_{k+1}] = tr(\mathrm{E}[\tilde{\boldsymbol{x}}_{k+1}^T\tilde{\boldsymbol{x}}_{k+1}]), \tag{30}$$

kde *tr()* značí součet všech prvků na hlavní diagonále (= stopa matice).



Obrázek 9: Porovnání středních kvadratických chyb rychlosti.

Z pohledu MSE se jako nejlepší algoritmus jeví Kalmanův filtr (c), následovaný ustáleným Kalmanovým filtrem (b). Naopak nejhorším algoritmem, který poskytuje největší chybu, je optimální deterministický rekonstruktor (a), jelikož nebere v potaz informace týkající se přítomných šumů.

3 Závěr

Hlavním cílem této semestrální práce bylo rekurzivně odhadovat polohu a rychlost objektu. Pro rekurzivní odhad jsme nejprve využili optimální deterministický rekonstruktor a následně pak Kalmanův a Kalmanův ustálený filtr. Následně jsme vykreslili první trajektorii stavu a porovnali ji s příslušnými filtračními měřeními. Dále jsme vykreslili chyby filtračních odhadů. V dalším úkolu jsme se zabývali analýzou inovační posloupnosti u Kalmanova a Kalmanova ustáleného filtru. Porovnali jsme odhady středních hodnot inovací ve všech časech a odhady variancí inovací pro $k = 0, 1, 5, 25$. V závěru jsme se věnovali vyhodnocení kvality odhadů z pohledu střední kvadratické chyby (MSE). Odhadli jsme střední hodnoty kvadratických chyb všech filtračních odhadů v závislosti na čase a získané křivky porovnali s teoretickými hodnotami.

Seznam obrázků

1 Porovnání první trajektorie polohy a příslušných filtračních odhadů. 6
2 Porovnání první trajektorie rychlosti a příslušných filtračních odhadů. 6
3 Porovnání chyb odhadu polohy příslušných filtračních odhadů. 7
4 Porovnání chyb odhadu rychlosti příslušných filtračních odhadů. 7
5 Porovnání odhadů středních hodnot inovací. Lze si povšimnout, že odhady středních hodnot inovací nabývají hodnot kolem nuly, což splňuje předpoklad, že inovace, v obecném případě, je bílý proces nulovou střední hodnotou. 8
6 Porovnání variancí inovací Kalmanova filtru a Kalmanova ustáleného filtru. 9
7 Porovnání středních kvadratických chyb polohy. 11
8 Porovnání středních kvadratických chyb rychlosti. 12
9 Porovnání středních kvadratických chyb rychlosti. 12