Odhad stavu lineárního systému

Zadání semestrální práce č. 3

Uvažujme objekt, který se pohybuje po přímce s náhodným zrychlením, zatímco je s konstantní periodou T měřena jeho poloha. Cílem je na základě měření a modelu systému rekurzivně odhadovat náhodný stav systému, v našem případě polohu a rychlost objektu. V diskrétním případě můžeme uvažovat lineární dynamický systém s popisem

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k, \quad \mathbf{w}_k \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{40} \begin{bmatrix} \frac{T^3}{3} & \frac{T^2}{2} \\ \frac{T^2}{2} & T \end{bmatrix} \right), \quad \mathbf{x}_0 \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right),$$
$$z_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + v_k, \qquad v_k \sim \mathcal{N}(0, 10),$$

kde vzorkovací perioda je $T = 1$ a procesy $[\mathbf{w}_k]_{k=1}^{+\infty}$ a $[v_k]_{k=1}^{+\infty}$ jsou vzájemně nezávislé bílé šumy, nezávislé na počátečním stavu $\mathbf{x}_0$.

Úkoly: Rekonstruktor v porovnání s odhadem náhodného stavu Kalmanovým filtrem. Vygenerujte 1000 trajektorií stavu a měření pro $k = 0, \ldots, 25$.

(i) Pro porovnání nejprve ignorujte, že systém je stochastický, a navrhněte pro něj optimální rekonstruktor – navrhněte zisk $\mathbf{K}$ pro filtr ve tvaru $\hat{\mathbf{x}}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{KH})\mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{K}\mathbf{z}_k$ přiřazením pólů do nuly. V jakém smyslu je rekonstruktor optimální? Následně stochastický charakter systému vezměte v potaz a formulujte problém odhadu náhodného stavu pomocí Kalmanova filtru. Nakonec určete ustálenou hodnotu Kalmanova zisku $\mathbf{K}_\infty$. Pro každou trajektorii měření odhadněte stav pomocí:

   (a) optimálního deterministického rekonstruktoru stavu,

   (b) ustáleného Kalmanova filtru, tj. filtru s konstantním ziskem $\mathbf{K}_\infty$,

   (c) Kalmanova filtru.

(ii) Vykreslete první trajektorii stavu a porovnejte ji s příslušnými filtračními odhady a měřením. Pro první trajektorii dále vykreslete chyby filtračních odhadů. Lze něco říci jen z první trajektorie?

(iii) V případě (b) a (c) lze analyzovat inovační posloupnost, která musí splňovat určité vlastnosti. Ty lze monitorovat a brát jako nutnou podmínku správného chodu filtru. Pro oba filtry proto porovnejte následující ukazatele a zamyslete se, jestli vše funguje, jak má;

   - odhady středních hodnot inovací ve všech časech — v grafu,
   - odhady variancí inovací pro $k = 0, 1, 5, 25$ i kovariancí mezi těmito časy — v tabulce.

(iv) Když provádíte simulaci, máte přístup ke skutečnému stavu. Proto můžete vyhodnotit kvalitu odhadů přímo z pohledu střední kvadratické chyby. Odhadněte tedy střední hodnoty kvadratických chyb všech filtračních odhadů v závislosti na čase a získané křivky porovnejte s teoretickými hodnotami. Lze algoritmy (a), (b) a (c) uspořádat od nejlepšího po nejhorší?

   Nápověda: Pro porovnání simulace s teorií budete potřebovat kovarianční matice chyby: vývoj stopy filtrační kovarianční matice. Můžete využít Josephovu formu.