Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra kybernetiky

FAKULTA
APLIKOVANÝCH VĚD
ZÁPADOČESKÉ
UNIVERZITY
V PLZNI

Semestrální práce č. 2

Teorie odhadu a zpracování signálů

Zkratka katedry/zkratka předmětu (KKY/TOD)

Jan Burian
16. listopadu 2022

Obsah

1 Zadání

Optimální odhad náhodné proměnné

Zadání semestrální práce č. 2

Uvažujme objekt, který se pohybuje po přímce s náhodným zrychlením, zatímco je s konstantní periodou T měřena jeho poloha. Cílem je na základě měření a modelu systému odhadnout neznámou počáteční polohu a rychlost objektu, se známou apriorní informací ve formě náhodné veličiny. V diskrétním případě můžeme uvažovat lineární dynamický systém s popisem

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_{k+1} &= \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k, \quad \mathbf{w}_k \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{10} \begin{bmatrix} \frac{T^3}{3} & \frac{T^2}{2} \\ \frac{T^2}{2} & T \end{bmatrix} \right), \quad \mathbf{x}_0 \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} \bar{x}_0^{\text{poloha}} \\ \bar{x}_0^{\text{rychlost}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \right), \\
z_k &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + v_k, \qquad v_k \sim \mathcal{N}(0, 1),
\end{aligned}
$$

kde vzorkovací perioda je $T = 1$, a procesy $[\mathbf{w}_k]_{k=1}^{+\infty}$ a $[v_k]_{k=1}^{+\infty}$ jsou vzájemně nezávislé bílé šumy, nezávislé na počátečním stavu $\mathbf{x}_0$. Stav $\mathbf{x}_0$ zvolte libovolně.

Teoretické úkoly: Odhad ve smyslu ML a LMSE z prvních několika měření.

(i) Pro porovnání nejprve apriorní informaci ignorujte a navrhněte odhad $\hat{\mathbf{x}}_0$ počátečního stavu $\mathbf{x}_0$ ve smyslu maximální věrohodnosti při použití měření $\mathbf{z} = [z_0, z_1]^{\mathrm{T}}$. Dále apriorní informaci v potaz vezměte, a určete nejlepší lineární odhad ve smyslu střední kvadratické chyby při použití měření A) z_0 B) z_1 a C) $\mathbf{z}$. Co o veličině $\mathbf{x}_0$ říká konkrétně zadaná apriorní informace a jak se projeví v rovnicích?

Dále vyjádřete kovarianční matice chyb odhadů pro všechny případy. Všimněte si, že kovarianční matice odhadu a chyby odhadu se v případě odhadu náhodné veličiny liší.

(ii) Pozorujte, co se může stát, když estimátor bude navržen za špatné znalosti parametrů systému. Pro jednoduchost uvažujte jen LMSE případ C). Sestrojte odhady, kde při návrhu uvažujete hodnoty parametrů Ca) $R = \frac{1}{4}$, Cb) $R = 4$ a Cc) $\bar{x}_0^{\text{poloha}} := \bar{x}_0^{\text{poloha}} - 5$, ale ve skutečnosti jsou všechny parametry stejné jako v předchozím bodě. Dopočtěte kovarianční matice chyb poskytované algoritmem odhadu, tj. založené na nesprávných hodnotách parametrů, a skutečné kovarianční matice chyb odhadů. Diskutujte strannost těchto odhadů.

(iii) Pro všechny odhady vykreslete 3-σ elipsy odpovídající chybám odhadů. Pro odhad s kovarianční maticí chyby odhadu $\mathbf{P}$ uvažujte křivku $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : (\mathbf{x} - \mathbf{b})^{\mathrm{T}} \mathbf{P}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{b}) = 9\}$, kde $\mathbf{b} = E(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)$. Pro odhady Ca), Cb), Cc) dále vykreslete elipsy pro matice poskytované algoritmem odhadu a diskutujte vztahy mezi skutečnými a poskytovanými kovariačními maticemi chyb odhadů.

Simulační úkoly: Simulační ověření teoretických výsledků.
Pomocí funkce `randn` vygenerujte 1000 simulací vektoru $[\mathbf{x}_0^{\mathrm{T}}, \mathbf{z}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ a pro každý nasimulovaný vektor dopočtěte realizace odhadů $\hat{\mathbf{x}}_0$ a chyb odhadů $\tilde{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0$.

(i) Odhadněte hustoty *chyb* jednotlivých odhadů *polohy* pomocí normalizovaných histogramů a porovnejte je mezi sebou. Dále pomocí techniky přiřazení momentů proložte normalizované histogramy gaussovskými hustotami. Proložené hustoty porovnejte s teoretickými.

2 Vypracování

Semestrální práce byla z velké části řešena v programovém prostředí Matlab.

2.1 Teorerické úkoly

2.1.1 Úkol (i)

Prvním bodem tohoto úkolu je navrhnout odhad $\hat{\boldsymbol{x}}_0$ počátečního stavu $\boldsymbol{x}_0 \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}\overline{x}_0^{\text{poloha}} \\ \overline{x}_0^{\text{rychlost}}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 1 \\ 1 & 4\end{bmatrix}\right)$ ve smyslu maximální věrohodnosti při použití měření $\boldsymbol{z} = [z_0, z_1]^T$. Nejprve byl zadaný systém přepsán do následujícího tvaru:

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{G}\boldsymbol{w}_k, \quad \boldsymbol{w}_k \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{Q}), \tag{1}$$

$$\boldsymbol{z}_k = \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}_k + v_k, \quad v_k \sim \mathcal{N}(0, R), \tag{2}$$

kde $\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix}1 & T \\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{G} = I$, $\boldsymbol{Q} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix}\frac{T^3}{3} & \frac{T^2}{2} \\ \frac{T^2}{2} & T\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$ a R = 1.

Ze zadání je dále známo, že náhodné veličiny $\boldsymbol{w}_k$ a $\boldsymbol{v}_k$ jsou vzájemně nezávislé bílé šumy $\forall k \in \mathbb{N}$.

Následně již bylo možné začít sestavovat trajektorii stavu a měření.

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_0 \\ \boldsymbol{x}_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_0 \\ \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{w}_0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{F}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}_0 + \begin{bmatrix}0 \\ \boldsymbol{I}\end{bmatrix}\boldsymbol{w}_0 \tag{3}$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{z}_0 \\ \boldsymbol{z}_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{v}_0 \\ \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{v}_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{H} \\ \boldsymbol{H}\boldsymbol{F}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}_0 + \begin{bmatrix}0 \\ \boldsymbol{H}\end{bmatrix}\boldsymbol{w}_0 + \begin{bmatrix}\boldsymbol{v}_0 \\ \boldsymbol{v}_1\end{bmatrix} \tag{4}$$

Obecná rovnice pro měření je definována následovně:

$$\boldsymbol{z}_k = \boldsymbol{H}_k\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v} \tag{5}$$

V dalším kroku definujeme metodu maximální věrohodnosti (z angl. *maximum likelihood*), zkratka ML. Odhad budeme volit jako takovou hodnotu parametru $\boldsymbol{x}$, při které má dané měření největší pravděpodobnost (resp. hodnotu hustoty). Dostaneme tedy následující vztah:

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{\text{ML}}(\boldsymbol{z}) = \underset{\boldsymbol{x}}{\operatorname{argmax}}\, p_{\boldsymbol{z};\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{z};\boldsymbol{x}), \tag{6}$$

kde $\boldsymbol{z}$ reprezentuje měření, která chceme použít, a $p_{\boldsymbol{z};\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{z};\boldsymbol{x})$ (věrohodnostní funkce) je hustota pravděpodobnosti měření závislá na hledaném parametru $\boldsymbol{x}$. Jelikož v praxi bývá $p_{\boldsymbol{z};\boldsymbol{x}}$ často v exponenciálním tvaru, je možné využít přirozený logaritmus, což je monotónní rostoucí funkce. Metodu maximální věrohodnosti lze tedy rovněž definovat následujícím způsobem:

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{\text{ML}}(\boldsymbol{z}) = \underset{\boldsymbol{x}}{\operatorname{argmax}}\, \ln p_{\boldsymbol{z};\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{z};\boldsymbol{x}), \tag{7}$$

Pro získání věrohodnostní funkce $p_{\boldsymbol{z};\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{z};\boldsymbol{x})$, která je potřeba pro využití metody ML, využijeme transformaci náhodných veličin. V některých případech je možné charakterizovat vztah mezi měřením $\boldsymbol{z}$ a parametrem $\boldsymbol{x}$ funkční závislostí (náhodná veličina $\boldsymbol{z}$ daná transformací parametru $\boldsymbol{x}$). Tím pádem ale nedošlo ke vzniku "náhody", z důvodu, že $\boldsymbol{x}$ je konstantní nenáhodný vektor. Do procesu měření přispívá tedy ještě nějaká konkrétní veličina $\boldsymbol{v}$. Z toho vyplývá, že se budeme zabývat transformací náhodné veličiny $\boldsymbol{v}$ na veličinu $\boldsymbol{z}$ v následujícím tvaru:

$$\boldsymbol{z} = f(\boldsymbol{v};\boldsymbol{x}), \tag{8}$$

kde f je funkcí zobrazení parametru $\boldsymbol{x}$. Pokud platí $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$ a zobrazení $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ prosté, pak lze pro transformaci využít následující rovnici:

$$p_{\boldsymbol{z};\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{z};\boldsymbol{x}) = p_{\boldsymbol{v}}(f^{-1}(\boldsymbol{z};\boldsymbol{x})) \cdot |\det(\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{f}^{-1}}(\boldsymbol{z};\boldsymbol{x}))| = \frac{p_{\boldsymbol{v}}(f^{-1}(\boldsymbol{z};\boldsymbol{x}))}{|\det(\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{v};\boldsymbol{x})|}, \tag{9}$$

kde f^{-1} je inverzní zobrazení k f a $\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{f}} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{z}}$ je Jakobiova matice zobrazení f.

Jestliže existuje lineární vztah ve tvaru:

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}, \tag{10}$$

pak lze aplikovat vztah (9).

$$f(\boldsymbol{v};\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{I}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}) \implies f^{-1}(\boldsymbol{z};\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{I}\boldsymbol{z} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}) \tag{11}$$

$$\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{v};\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{I} \implies \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{f}^{-1}}(\boldsymbol{v};\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{I} \tag{12}$$

Po dosazení do rovnice (9) dostaneme hustotu pravděpodobnosti pro $\boldsymbol{z}$:

$$p_{\boldsymbol{z};\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{z};\boldsymbol{x}) = p_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}) \cdot 1 \tag{13}$$

Pokud je navíc veličina $\boldsymbol{v}$ gaussovská, což v našem případě je, dostaneme $p_{\boldsymbol{z};\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{z};\boldsymbol{x}) = \mathcal{N}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}; \boldsymbol{0}, \boldsymbol{R}) = \mathcal{N}(\boldsymbol{z}; \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{R})$. Odhad ve smyslu ML je pak definován jako:

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{ML}}(\boldsymbol{z}) &= \operatorname*{argmax}_{\boldsymbol{x}} p_{\boldsymbol{z};\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{z};\boldsymbol{x}) \\
&= \operatorname*{argmax}_{\boldsymbol{x}} \ln p_{\boldsymbol{z};\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{z};\boldsymbol{x}) \\
&= \operatorname*{argmax}_{\boldsymbol{x}} \ln \left(\frac{1}{\sqrt{\det(2\pi \cdot \boldsymbol{R})}} \exp\left(-\frac{1}{2} (\boldsymbol{z} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{x})^T \boldsymbol{R}^{-1} (\boldsymbol{z} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}) \right) \right) \\
&= \operatorname*{argmax}_{\boldsymbol{x}} \ln \left(\frac{1}{\sqrt{\det(2\pi \cdot \boldsymbol{R})}} \right) + \left(-\frac{1}{2} (\boldsymbol{z} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{x})^T \boldsymbol{R}^{-1} (\boldsymbol{z} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}) \right) \\
&= \operatorname*{argmax}_{\boldsymbol{x}} -(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{x})^T \boldsymbol{R}^{-1} (\boldsymbol{z} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}) \\
&= \operatorname*{argmin}_{\boldsymbol{x}} (\boldsymbol{z} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{x})^T \boldsymbol{R}^{-1} (\boldsymbol{z} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{x})
\end{aligned} \tag{14}$$

Po parciální derivaci věrohodnostní funkce podle $\boldsymbol{x}$ a změně značení matice $\boldsymbol{R}$ na $\boldsymbol{\Sigma}$ dostaneme kritérium maximální věrohodnosti v následujícím tvaru:

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{ML}}(\boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{H}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{H})^{-1} \boldsymbol{H}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{z} \tag{15}$$

Nyní zavedeme chybu e, která je definována následovně:

$$e = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_0 \\ \boldsymbol{H}\boldsymbol{w}_0 + \boldsymbol{v}_1 \end{bmatrix} \tag{16}$$

V dalším kroku je již možné vypočítat kovarianční matici $\boldsymbol{\Sigma} = E(ee^T)$ chyby e.

$$ee^T = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_0 \\ \boldsymbol{H}\boldsymbol{w}_0 + \boldsymbol{v}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_0 & \boldsymbol{H}\boldsymbol{w}_0 + \boldsymbol{v}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0^2 & v_0(v_1 + \boldsymbol{H}w_0) \\ v_0(v_1 + \boldsymbol{H}w_0) & (v_1 + \boldsymbol{H}w_0)^2 \end{bmatrix} \tag{17}$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{H}^2\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & 0 \\ 0 & \frac{T^3}{30} + \boldsymbol{R} \end{bmatrix} \tag{18}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{HF} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & T \end{bmatrix} \tag{19}$$

Nyní je možné dosadit do rovnice (15). Po dosazení dostaneme obecný tvar:

$$\hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{ML}}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{T} & \frac{30\left(\frac{T^3+60}{30\,T} - \frac{1}{T}\right)}{T^3+30} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \end{bmatrix} \tag{20}$$

Po dosazení do rovnice (20) za $T = 1$ dostaneme:

$$\hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{ML}}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \end{bmatrix} \tag{21}$$

Dále byla vypočtena kovarianční matice (chyby) ML odhadu. V případě, že je ignorována apriorní informace je kovarianční matice ML odhadu totožná s kovarianční maticí chyby ML odhadu. Stačilo tedy vypočítat pouze jednu matici pomocí následujícího vzorce:

$$\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{ML}}} = \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{ML}}} = (\mathbf{H}^T \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \tag{22}$$

Po dosazení do rovnice (22) jsme dostali následující výsledek:

$$\mathbf{P}_{\tilde{\mathbf{x}}_{\mathrm{ML}}} = \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{ML}}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{61}{30} \end{bmatrix} \tag{23}$$

V prvním případě jsme ignorovali zadanou apriorní informaci. Nyní ji vezmeme v potaz a určíme nejlepší lineární odhad ve smyslu střední kvadratické chyby při použití měření A) z_0, B) z_1 a C) $\mathbf{z}$. Optimální lineární odhad ve smyslu střední kvadratické chyby (LMSE odhad) je možné vypočítat pomocí následující rovnice, která byla definována na přednášce:

$$\hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{LMSE}}(\mathbf{z}) = \mathrm{E}[\mathbf{x}] + \mathbf{P}_{\mathbf{xz}} \mathbf{P}_{\mathbf{z}}^{-1} (\mathbf{z} - \mathrm{E}[\mathbf{z}]), \tag{24}$$

kde rozdíl $\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{z} - \mathrm{E}[\mathbf{z}]$ označujeme jako rezidua, střední hodnota $\mathrm{E}[\mathbf{x}]$ je apriorní odhad $\mathbf{x}$, $\mathbf{P}_{\mathbf{xz}} \mathbf{P}_{\mathbf{z}}^{-1} (\mathbf{z} - \mathrm{E}[\mathbf{z}])$ je korekce založená na reziduu a $\mathrm{E}[\mathbf{z}]$ je odhad měření $\mathbf{z}$.

Jednotlivé členy lze získat následovně pomocí následujících vztahů (výsledné vztahy byly odvozeny na přednášce):

$$\mathbf{P}_{\mathbf{xz}} = \mathbf{P}_{\mathbf{x}} \mathbf{H}^T \tag{25}$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{z}} = \mathbf{H} \mathbf{P}_{\mathbf{x}} \mathbf{H}^T + \mathbf{\Sigma} \tag{26}$$

$$\mathrm{E}[\mathbf{z}] = \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}} \tag{27}$$

Nyní můžeme určit lineární odhady ve smyslu střední kvadratické chyby pro jednotlivá měření.

(A) **Měření z_0**
Pro vypočtení optimálního lineárního odhadu využijeme rovnic (25), (26) a (27). V tomto případě $\mathbf{P}_x = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ a $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{R} = 1$.

$$\hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{LMSE}}(z_0) = \begin{bmatrix} \frac{\bar{x}_0^{\mathrm{poloha}}}{2} + \frac{z_0}{2} \\ \bar{x}_0^{\mathrm{rychlost}} - \frac{\bar{x}_0^{\mathrm{poloha}}}{2} + \frac{z_0}{2} \end{bmatrix} \tag{28}$$

(B) **Měření** z_1

Opět začneme postupně dosazovat do rovnic (25), (26) a (27). V tomto případě $\boldsymbol{P}_x = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & T \end{bmatrix}$ a $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{R} + \frac{T^3}{30} = 1 + \frac{T^3}{30} = \frac{31}{30}$.

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{\text{LMSE}}(z_1) = \frac{1}{241} \begin{bmatrix} 181\bar{x}_0^{\text{poloha}} - 60\bar{x}_0^{\text{rychlost}} + 60z_1 \\ 91\bar{x}_0^{\text{rychlost}} - 150\bar{x}_0^{\text{poloha}} + 150z_1 \end{bmatrix} \tag{29}$$

(C) **Měření** $\boldsymbol{z}$

Opět začneme postupně dosazovat do rovnic (25), (26) a (27). V tomto případě $\boldsymbol{P}_x = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & T \end{bmatrix}$ a $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & 0 \\ 0 & \frac{T^3}{30} + \boldsymbol{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{31}{30} \end{bmatrix}$

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{\text{LMSE}}(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{362} \begin{bmatrix} 181\bar{x}_0^{\text{poloha}} - 60\bar{x}_0^{\text{rychlost}} + 121z_0 + 60z_1 \\ 122\bar{x}_0^{\text{rychlost}} - 181\bar{x}_0^{\text{poloha}} - 59z_0 + 240z_1 \end{bmatrix} \tag{30}$$

V další části byly vyjádřeny kovarianční matice chyb odhadů, jinak také míry důvěry, pro všechny případy. K výpočtu jednotlivých kovariančních matic chyb odhadů byl použit následující konečný vzorec, který byl odvozen na přednášce:

$$\boldsymbol{P}_{\tilde{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{xz}} \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{z}}{}^{-1} \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{zx}}, \tag{31}$$

kde $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{x}}$ představuje apriorní kovarianci chyby a člen $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{z}}{}^{-1} \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{zx}} \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{z}}{}^{-1} \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{zx}}$ reprezentuje redukci neurčitosti díky měření.

(A) **Měření** z_0

Pro vypočtení kovarianční matice chyby odhadu byl využit vztah (31). Dostali jsme matici v následujícím tvaru:

$$\boldsymbol{P}_{\tilde{\boldsymbol{x}}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \tag{32}$$

(B) **Měření** z_1

Pro vypočtení kovarianční matice chyby odhadu byl opět využit vztah (31). Dostali jsme matici v následujícím tvaru:

$$\boldsymbol{P}_{\tilde{\boldsymbol{x}}} = \frac{1}{241} \begin{bmatrix} 121 & -59 \\ -59 & 214 \end{bmatrix} \tag{33}$$

(C) **Měření** $\boldsymbol{z}$

Pro vypočtení kovarianční matice chyby odhadu byl opět využit vztah (31). Dostali jsme matici v následujícím tvaru:

$$\boldsymbol{P}_{\tilde{\boldsymbol{x}}} = \frac{1}{362} \begin{bmatrix} 121 & -59 \\ -59 & 307 \end{bmatrix} \tag{34}$$

Apriorní informace nám říká, že se veličina $\boldsymbol{x}_0$ řídí podle normálního rozdělení o dané střední hodnotě a dané vzájemné kovarianci mezi polohou a zrychlením. Z kovarianční matice je dále možné vypozorovat závislost mezi polohou a zrychlením, a to jelikož cov[poloha, rychlost] $\neq 0$. Apriorní informace byla nejprve využita v rovnici pro výpočet odhadu ve smyslu LMSE (24), kde byla využita pro získání apriorního odhadu $\boldsymbol{x}$ ve tvaru střední hodnoty E[$\boldsymbol{x}$]. Dále se apriorní informace projevila ve formě apriorní kovariance $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{x}}$ v rovnicích (25), (26) a (31)

Následně byly vypočteny jednotlivé kovarianční matice odhadu LMSE opět pro všechna měření. K výpočtu byl použit následující vzorec:

$$\boldsymbol{P}_{\hat{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{xz}} \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{z}}{}^{-1} \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{zx}} \tag{35}$$

(A) **Měření** z_0

Pro vypočtení kovarianční matice odhadu byl využit vztah (35). Dostali jsme matici v následujícím tvaru:

$$\boldsymbol{P}_{\hat{\boldsymbol{x}}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{36}$$

(B) **Měření** z_1

Pro vypočtení kovarianční matice odhadu byl opět využit vztah (35). Dostali jsme matici v následujícím tvaru:

$$\boldsymbol{P}_{\hat{\boldsymbol{x}}} = \frac{1}{241}\begin{bmatrix} 120 & 300 \\ 300 & 750 \end{bmatrix} \tag{37}$$

(C) **Měření** $\boldsymbol{z}$

Pro vypočtení kovarianční matice odhadu byl opět využit vztah (35). Dostali jsme matici v následujícím tvaru:

$$\boldsymbol{P}_{\hat{\boldsymbol{x}}} = \frac{1}{362}\begin{bmatrix} 241 & 421 \\ 421 & 1141 \end{bmatrix} \tag{38}$$

2.1.2 Úkol (ii)

Cílem druhého úkolu je pozorovat, co se může stát, pokud k návrhu estimátoru budou použity špatné znalosti parametrů systému. K tomuto účelu byl uvažován pouze LMSE případ C), tj. měření $\boldsymbol{z}$. Postupně byly sestrojeny odhady s následujícími hodnotami parametrů: a) $R = \frac{1}{4}$, b) $R = 4$ a c) $\overline{x}_0^{\text{poloha}} := \overline{x}_0^{\text{poloha}} - 5$.

a) $R = \frac{1}{4}$

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{\text{LMSE}}(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{1225}\begin{bmatrix} 317\overline{x}_0^{\text{poloha}} - 120\overline{x}_0^{\text{rychlost}} + 788z_0 + 120z_1 \\ 205\overline{x}_0^{\text{rychlost}} - 368\overline{x}_0^{\text{poloha}} - 652z_0 + 1020z_1 \end{bmatrix} \tag{39}$$

b) $R = 4$

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{\text{LMSE}}(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{1535}\begin{bmatrix} 1084\overline{x}_0^{\text{poloha}} - 240\overline{x}_0^{\text{rychlost}} + 211z_0 + 240z_1 \\ 845\overline{x}_0^{\text{rychlost}} - 721\overline{x}_0^{\text{poloha}} + 31z_0 + 690z_1 \end{bmatrix} \tag{40}$$

c) $\overline{x}_0^{\text{poloha}} := \overline{x}_0^{\text{poloha}} - 5$

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{\text{LMSE}}(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{362}\begin{bmatrix} 181\overline{x}_0^{\text{poloha}} - 60\overline{x}_0^{\text{rychlost}} + 121z_0 + 60z_1 - 905 \\ 122\overline{x}_0^{\text{rychlost}} - 181\overline{x}_0^{\text{poloha}} - 59z_0 + 240z_1 + 905 \end{bmatrix} \tag{41}$$

Dále byly dopočítány kovarianční matice chyb založené na nesprávných hodnotách parametrů. K výpočtu kovariančních matic chyb byl použit vztah (31).

a) $R = \frac{1}{4}$

$$\boldsymbol{P}_{\tilde{\boldsymbol{x}}} = \frac{1}{1225}\begin{bmatrix} 197 & -163 \\ -163 & 452 \end{bmatrix} \tag{42}$$

b) $R = 4$

$$\boldsymbol{P}_{\tilde{\boldsymbol{x}}} = \begin{bmatrix} \frac{844}{1535} & \frac{124}{1535} \\ \frac{124}{1535} & \frac{1171}{676} \end{bmatrix} \tag{43}$$

c) $\overline{x}_0^{\text{poloha}} := \overline{x}_0^{\text{poloha}} - 5$

$$\boldsymbol{P}_{\tilde{\boldsymbol{x}}} = \frac{1}{362}\begin{bmatrix} 121 & -59 \\ -59 & 307 \end{bmatrix} \tag{44}$$

Lze si povšimnout, že kovarianční matice chyby, poskytnutá algoritmem odhadu, pro případ c) je ekvivalentní se skutečnou kovarianční maticí chyby odhadu (34) pro měření $\boldsymbol{z}$, která již byla vypočtena výše. Naopak v obou zbylých případech a) a b) získané kovarianční matice chyb odhadu nejsou ekvivalentní se skutečnou kovarianční maticí chyby odhadu, jelikož volba nesprávného parametru R ovlivní výpočet $\boldsymbol{P}_{\tilde{\boldsymbol{x}}}$.
Z přednášky víme, že nestrannost odhadu lze určit použitím následujícího vztahu:

$$\begin{aligned} \text{E}[\hat{\boldsymbol{x}}_{\text{LMSE}}] &= \text{E}[\text{E}[\boldsymbol{x}] + \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{xz}}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{z}}^{-1}(\boldsymbol{z} - \text{E}[z])] = \\ &= \text{E}[\text{E}[\boldsymbol{x}]] + \text{E}[\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{xz}}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{z}}^{-1}(\boldsymbol{z} - \text{E}[z])] = \\ &= \text{E}[\boldsymbol{x}] + \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{xz}}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{z}}^{-1}(\text{E}[z] - \text{E}[z]) \end{aligned} \tag{45}$$

Odhady $\hat{\boldsymbol{x}}_{\text{LMSE}}(\boldsymbol{z})$ získané pro případy a) a b) budou nestranné, protože volba parametru R ovlivní pouze matici P_z^{-1}. Tím pádem v těchto případech platí: $\text{E}[\hat{\boldsymbol{x}}_{\text{LMSE}}(\boldsymbol{z})] = \text{E}[\boldsymbol{x}]$, a tudíž:

$$\text{E}[\tilde{\boldsymbol{x}}] = \text{E}[\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}_{\text{LMSE}}] = \text{E}[\boldsymbol{x}] - \text{E}[\boldsymbol{x}] = 0. \tag{46}$$

Naopak odhad pro případ c) bude stranný, jelikož posun počáteční střední hodnoty $\overline{x}_0^{\text{poloha}}$ o -5 ovlivní nejen matici $\boldsymbol{P_{xz}}$, ale i střední hodnotu $\mathrm{E}[\boldsymbol{z}]$ (rovnice (27)), kde vektor $\hat{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \overline{x}_0^{\text{poloha}} := \overline{x}_0^{\text{poloha}} - 5 \\ \overline{x}_0^{\text{rychlost}} \end{bmatrix}$.
Pro případ c) tedy platí s využitím rovnic (45) a (46):

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[\tilde{\boldsymbol{x}_0}] &= \mathrm{E}[\boldsymbol{x}_0 - \hat{\boldsymbol{x}}] = \\
&= \mathrm{E}\left[\boldsymbol{x}_0 - \mathrm{E}[\hat{\boldsymbol{x}}] - \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{z}}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{z}}^{-1}(\underbrace{\boldsymbol{z}}_{\boldsymbol{Hx}} - \mathrm{E}[z])\right] = \\
&= \mathrm{E}\left[\boldsymbol{x}_0 - \mathrm{E}[\hat{\boldsymbol{x}}]\right] - \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{z}}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{z}}^{-1}\boldsymbol{H}\mathrm{E}[\boldsymbol{x}] + \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{z}}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{z}}^{-1}\boldsymbol{H}\mathrm{E}[\hat{\boldsymbol{x}}] = \\
&= \mathrm{E}[\boldsymbol{x}_0] - \mathrm{E}[\hat{\boldsymbol{x}}] - \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{z}}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{z}}^{-1}\boldsymbol{H}\mathrm{E}[\boldsymbol{x}] + \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{z}}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{z}}^{-1}\boldsymbol{H}\mathrm{E}[\hat{\boldsymbol{x}}] = \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2.5 \\ -2.5 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 2.5 \\ -2.5 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{47}
$$

2.1.3 Úkol (iii)

Cílem tohoto úkolu bylo vykreslení 3-σ elips, které odpovídají chybám odhadu. Pro odhad s kovarianční maticí chyby odhadu $\boldsymbol{P}$ se jedná o křivku definovanou následující rovnicí:

$$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 : (\mathbf{x} - \mathbf{b})^T \mathbf{P}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{b}) = 9, \tag{48}$$

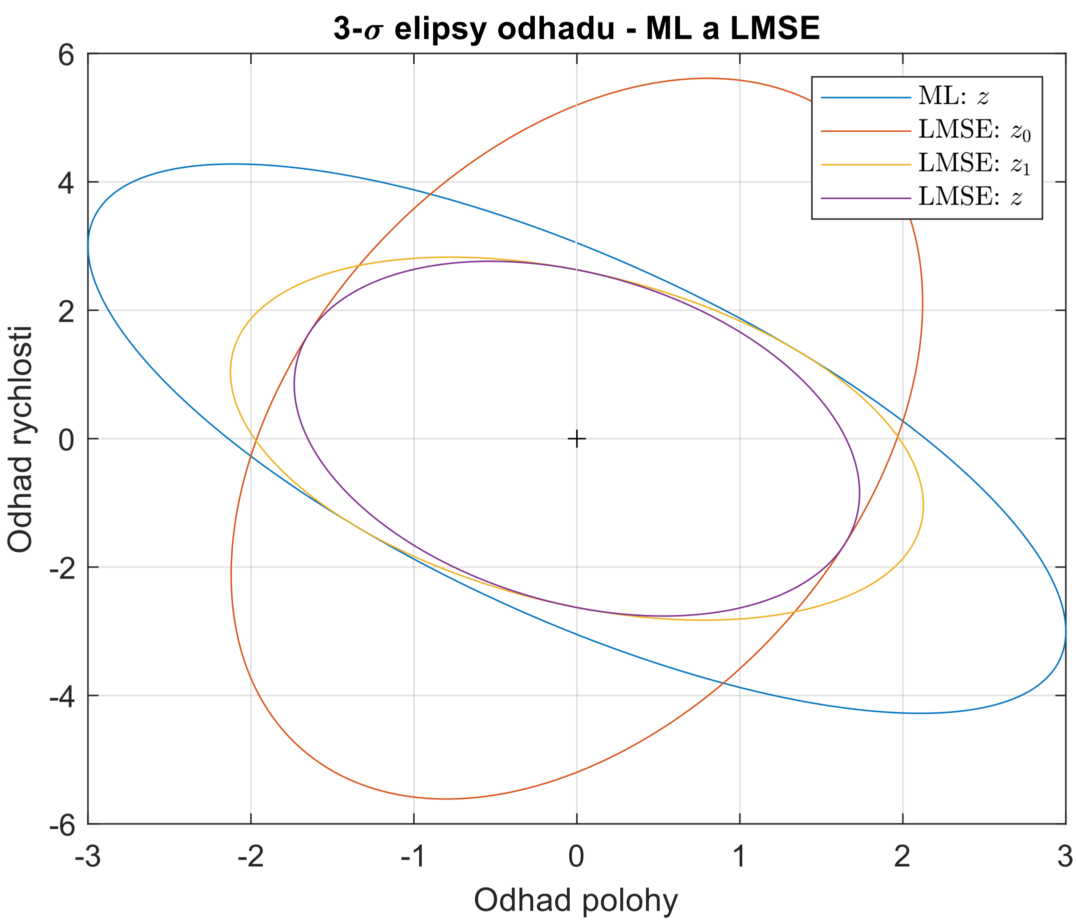
kde $\boldsymbol{b} = \mathrm{E}(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)$. Pro získání jednotlivých 3-σ elips bylo třeba nejprve nalézt křivky, které splňují následující předpis:

$$\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 : \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{u} = 1, \tag{49}$$

což je rovnice, pomocí které může být definována jednotková kružnice.
Na rovnici (49) je třeba následně použít transformaci, která je zadaná pomocí následující rovnice:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + 3\boldsymbol{S}\boldsymbol{u}, \tag{50}$$

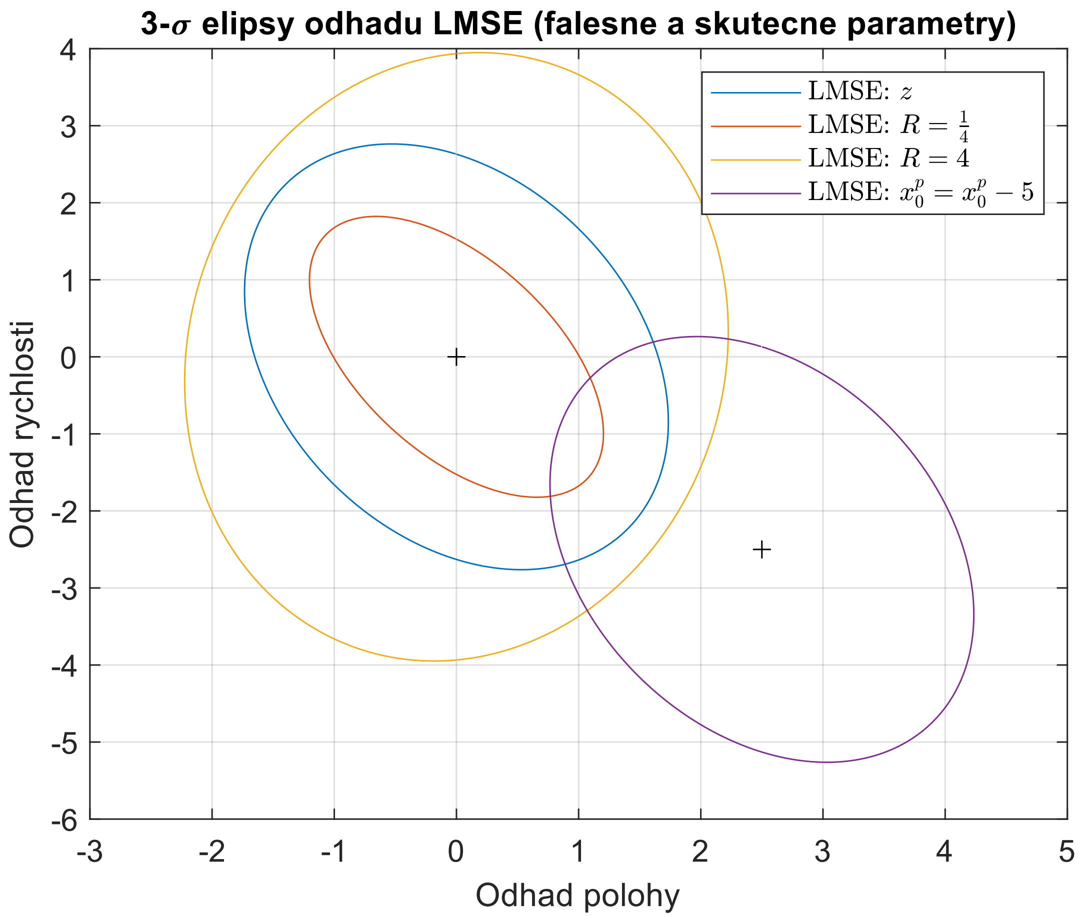
kde $\boldsymbol{S}$ je maticová odmocnina matice $\boldsymbol{P}$ splňující kritérium $\boldsymbol{S}\boldsymbol{S}^T = \boldsymbol{P}$, což je např. Choleského faktor. V našem případě byla matice $\boldsymbol{S}$ kovarianční maticí chyby odhadu.



Obrázek 1: Vykreslení 3-σ elips, které odpovídající chybám odhadů, kde $\mathrm{E}[\boldsymbol{x}_0] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Z obrázku (1) je patrné, že pokud využíváme k odhadu ve smyslu LMSE všechna dostupná měření, pak bude daná 3-σ elipsa nejmenší. Tento poznatek nám indikuje, že daný odhad bude nejpřesnější a bude

mít nejmenší varianci. Tato elipsa se navíc nachází uvnitř obou elips, které obsahují pouze jedno ze dvou měření. Dále je možné z obrázku (1) zjistit, že největší 3-σ elipsou je elipsa reprezentující chybu odhadu ve smyslu ML, což je způsobeno tím, že při odhadování pomocí ML nepoužíváme apriorní informaci.
Dále byly vykresleny 3-σ elipsy pro kovarianční matice chyb odhadu s nesprávnými parametry systému (matice získané v teoretickém úkolu (ii)) poskytované algoritmem odhadu, společně s 3-σ elipsou reprezentující skutečnou kovarianční matici chyby odhadu (34).



Obrázek 2: Vykreslení 3-σ elips, které odpovídají kovariančním maticím chyb s falešnými parametry, společně s 3-σ elipsou odpovídající skutečné kovarianční matici chyby odhadu LMSE: $\boldsymbol{z}$.

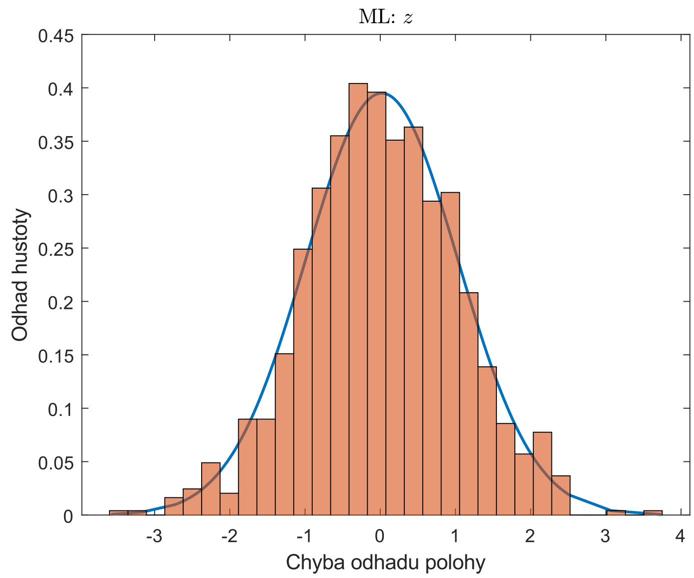
Z obrázku (2) vyplývá, že elipsa reprezentující odhad LMSE (měření $\boldsymbol{z}$) s parametrem $\overline{x}_0^{\text{poloha}} := \overline{x}_0^{\text{poloha}} - 5$ bude totožná jako elipsa reprezentující odhad LMSE (měření $\boldsymbol{z}$), pouze bude posunut její střed do bodu $[2.5, -2.5]^T$ (viz vyšetřování strannosti odhadů). Dále je možné vypozorovat, že při volbě parametru $R = 4$ dojde ke zvětšení elipsy (oproti základní elipse LMSE: $\boldsymbol{z}$), jelikož dáváme měření menší váhu. Naopak volbou parametru $R = \frac{1}{4}$ říkáme, že věříme získanému měření, tj. dáváme měření větší váhu, a tím pádem je daná elipsa menší než základní elipsa LMSE: $\boldsymbol{z}$.

2.2 Simulační úkoly

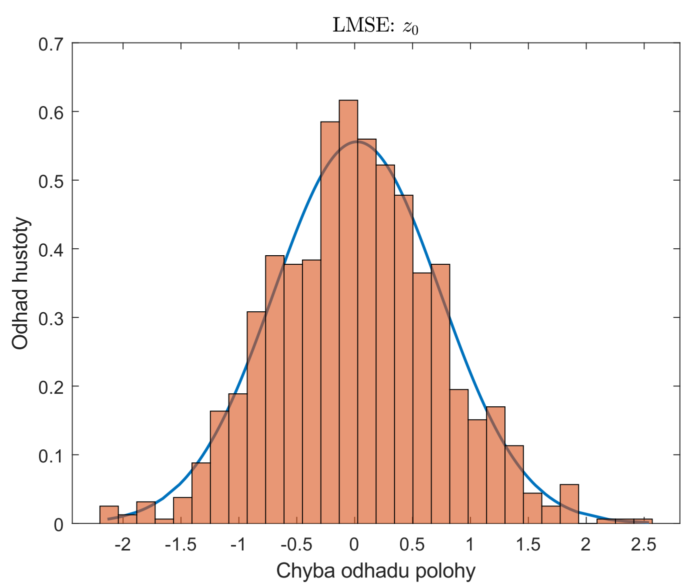
Nejprve bylo třeba pomocí funkce *randn* vygenerovat 1000 simulací vektoru $[\boldsymbol{x}_0^T, \boldsymbol{z}^T]^T$. Následně byly pro každý nasimulovaný vektor dopočítány realizace odhadů $\hat{\boldsymbol{x}}_0$ a rovněž chyby odhadů $\tilde{\mathbf{x}_0} = \mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0$.

2.2.1 Úkol (i)

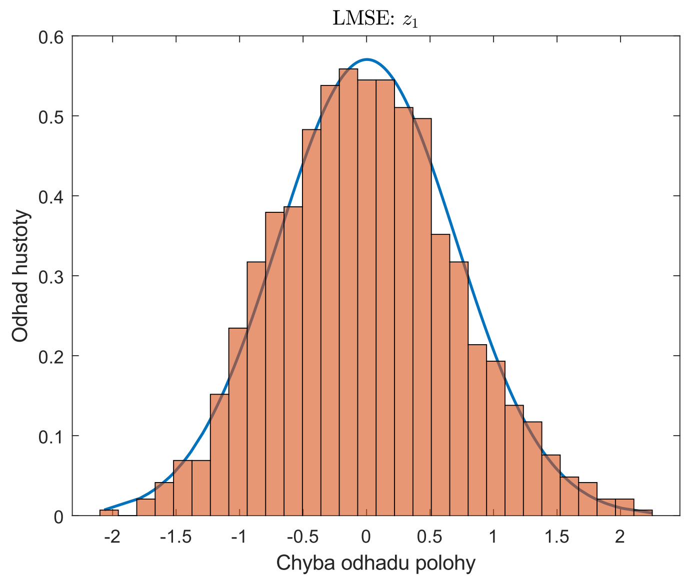
V této části byly nejprve odhadnuty hustoty jednotlivých odhadů *polohy* pomocí normalizovaných histogramů. V dalším kroku byly jednotlivé histogramy proloženy, pomocí techniky přiřazení momentů, gaussovskými hustotami.



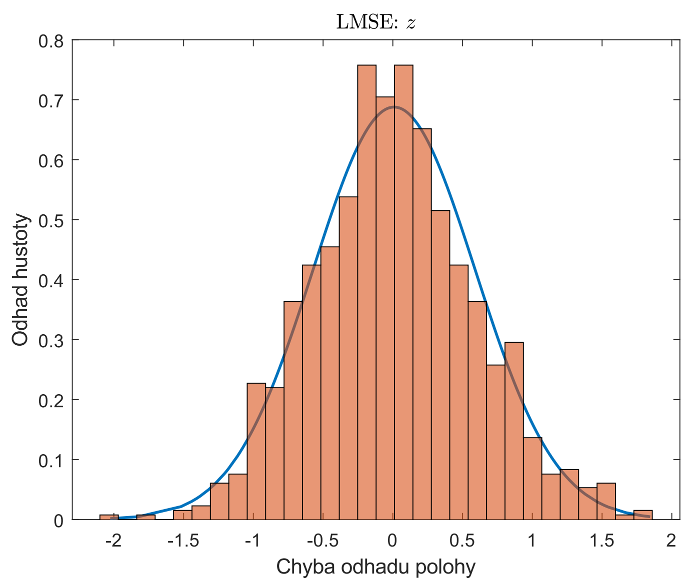
Obrázek 3: Normalizovaný histogram proložený hustotou pro metodu ML (měření $\boldsymbol{z}$).



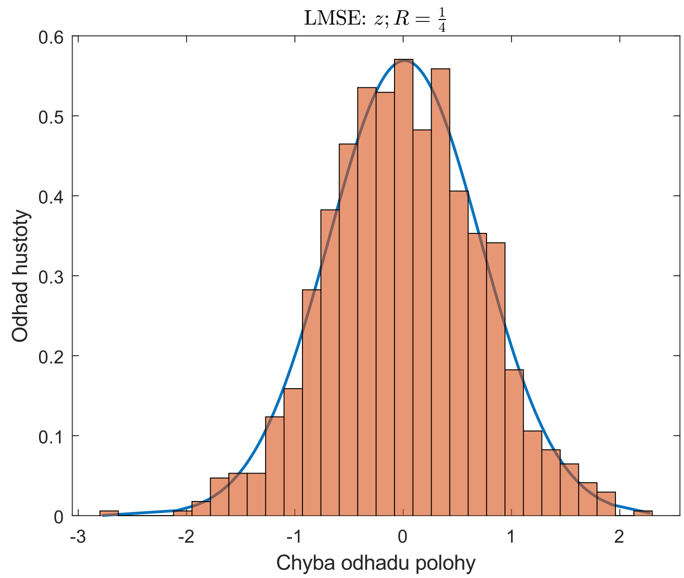
Obrázek 4: Normalizovaný histogram proložený hustotou pro metodu LMSE (měření z_0).



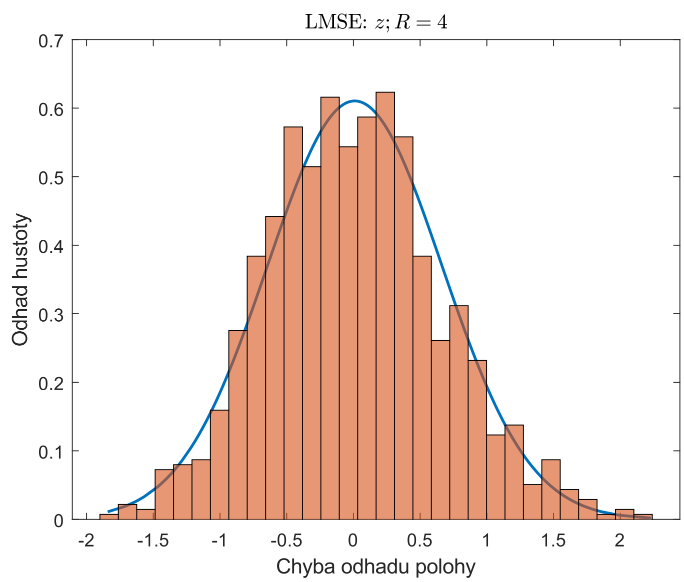
Obrázek 5: Normalizovaný histogram proložený hustotou pro metodu LMSE (měření z_1).



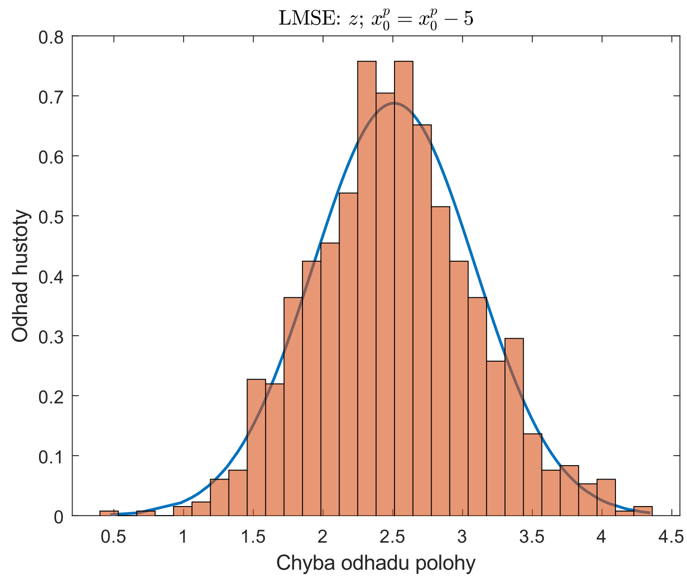
Obrázek 6: Normalizovaný histogram proložený hustotou pro metodu LMSE (měření $\boldsymbol{z}$).



Obrázek 7: Normalizovaný histogram proložený hustotou pro metodu LMSE (měření $\boldsymbol{z}$) s falešným parametrem $R = \frac{1}{4}$.

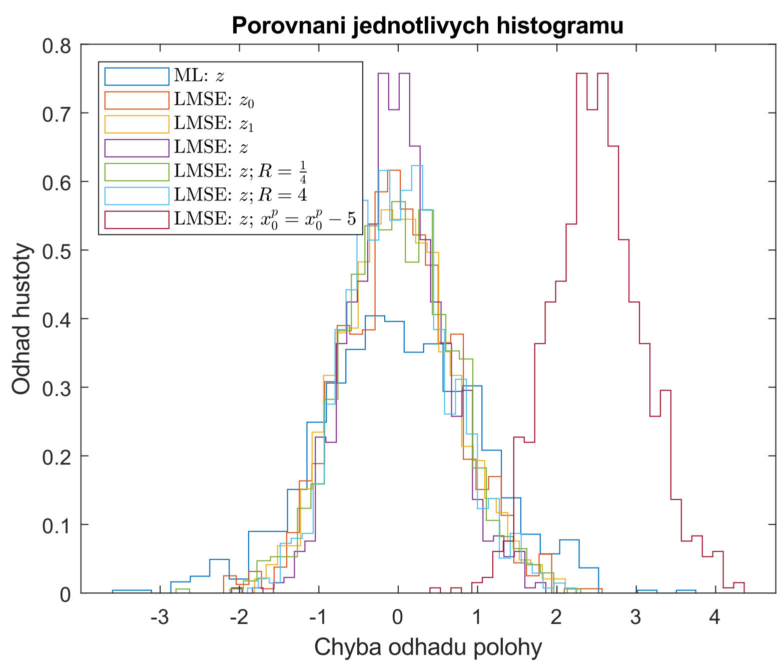


Obrázek 8: Normalizovaný histogram proložený hustotou pro metodu LMSE (měření $\boldsymbol{z}$) s falešným parametrem $R = 4$.

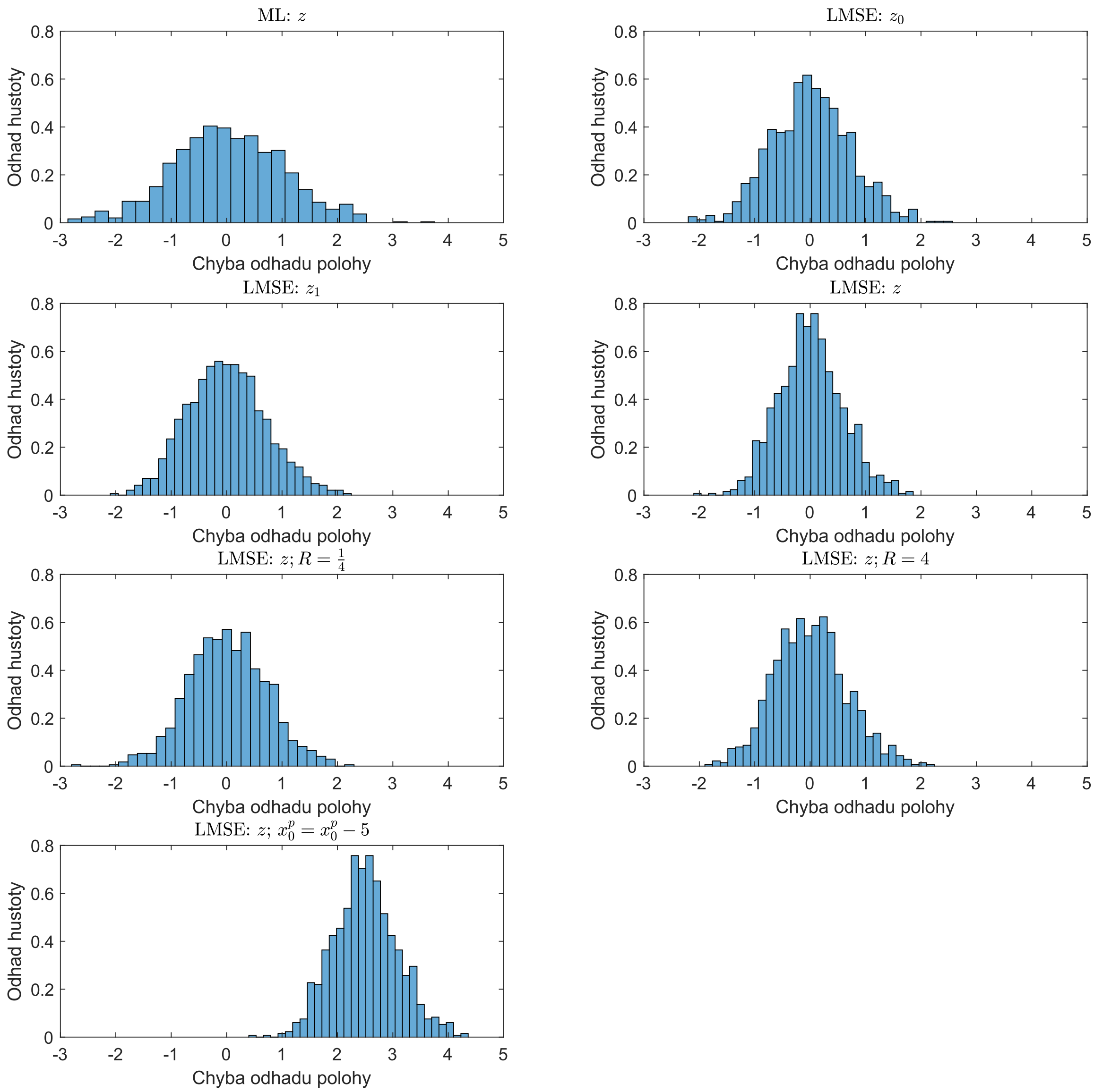


Obrázek 9: Normalizovaný histogram proložený hustotou pro metodu LMSE (měření $\boldsymbol{z}$) s počáteční střední hodnotu $\overline{x}_0^{\text{poloha}} := \overline{x}_0^{\text{poloha}} - 5$

V dalším kroku byly mezi sebou porovnány jednotlivé histogramy, nejprve jsme si vykreslili pouze obrysy jednotlivých histogramů a v dalším kroku byly histogramy vykresleny pomocí *subplotu*.

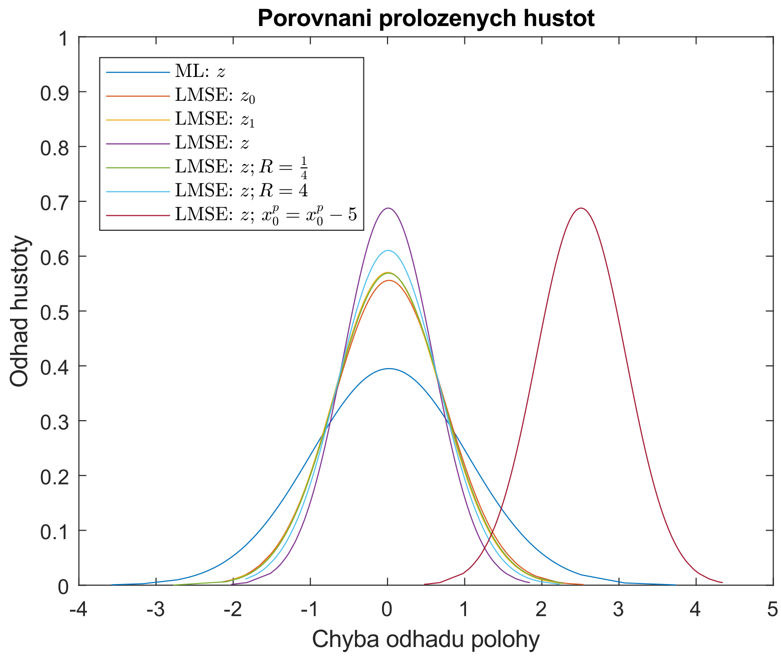


Obrázek 10: Porovnání obrysů jednotlivých normalizovaných histogramů.

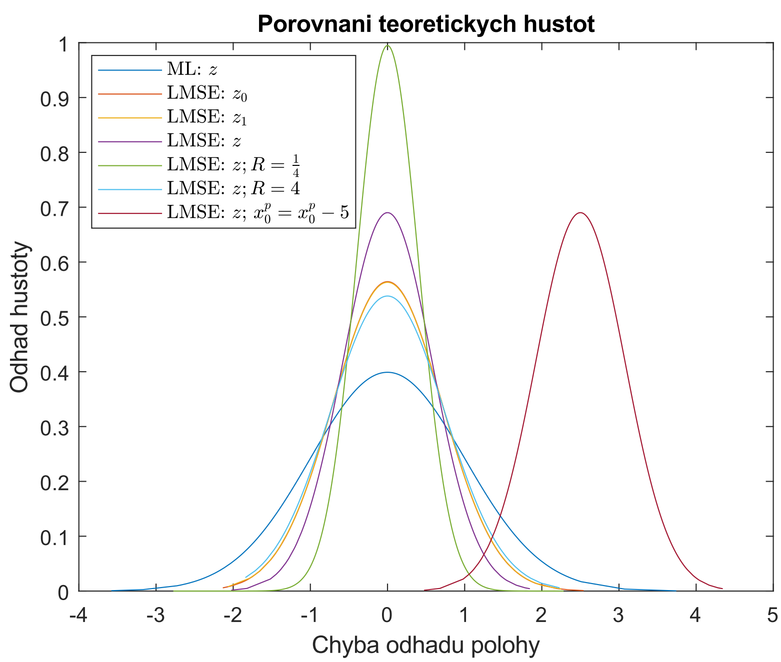


Obrázek 11: Porovnání normalizovaných histogramů pomocí *subplotu*.

Dále byly mezi sebou vzájemně porovnány jednotlivé proložené hustoty a rovněž teoretické hustoty.



Obrázek 12: Porovnání proložených hustot.



Obrázek 13: Porovnání teoretických hustot.

Z histogramů a vykreslených proložených hustot si lze povšimnout, že téměř všechny odhady jsou nestranné a jejich střední hodnota je přibližně rovna 0. Pouze odhad pomocí LMSE, který využívá měření $\boldsymbol{z}$, a jehož počáteční střední hodnota $\overline{x}_0^{\text{poloha}} := \overline{x}_0^{\text{poloha}} - 5$, je stranný. Střední hodnota odhadu je v tomto případě rovna 2.5, což koresponduje s teoretickou částí. Co se týče variancí, tak ty jsou téměř ve všech případech téměř totožné. Pouze v případě metody LMSE (měření $\boldsymbol{z}$) s falešným parametrem $R = \frac{1}{4}$ dojde ke značnému rozdílu mezi teoretickou variancí a variancí získanou pomocí simulace. Hodnoty prvních dvou momentů získaných ze simulace byly zaneseny do následující tabulky:

	$\mathrm{E}[\tilde{\boldsymbol{x}}]$	$\mathrm{var}[\tilde{\boldsymbol{x}}]$
ML: $\boldsymbol{z}$	0.0202	1.0203
LMSE: z_0	0.0205	0.5151
LMSE: z_1	0.0035	0.4892
LMSE: $\boldsymbol{z}$	0.0091	0.3366
LMSE: $\boldsymbol{z}; R = \frac{1}{4}$	0.0136	0.4916
LMSE: $\boldsymbol{z}; R = 4$	0.0098	0.4271
LMSE: $\boldsymbol{z}; \overline{x}_0^{\text{poloha}} := \overline{x}_0^{\text{poloha}} - 5$	2.5091	0.3366

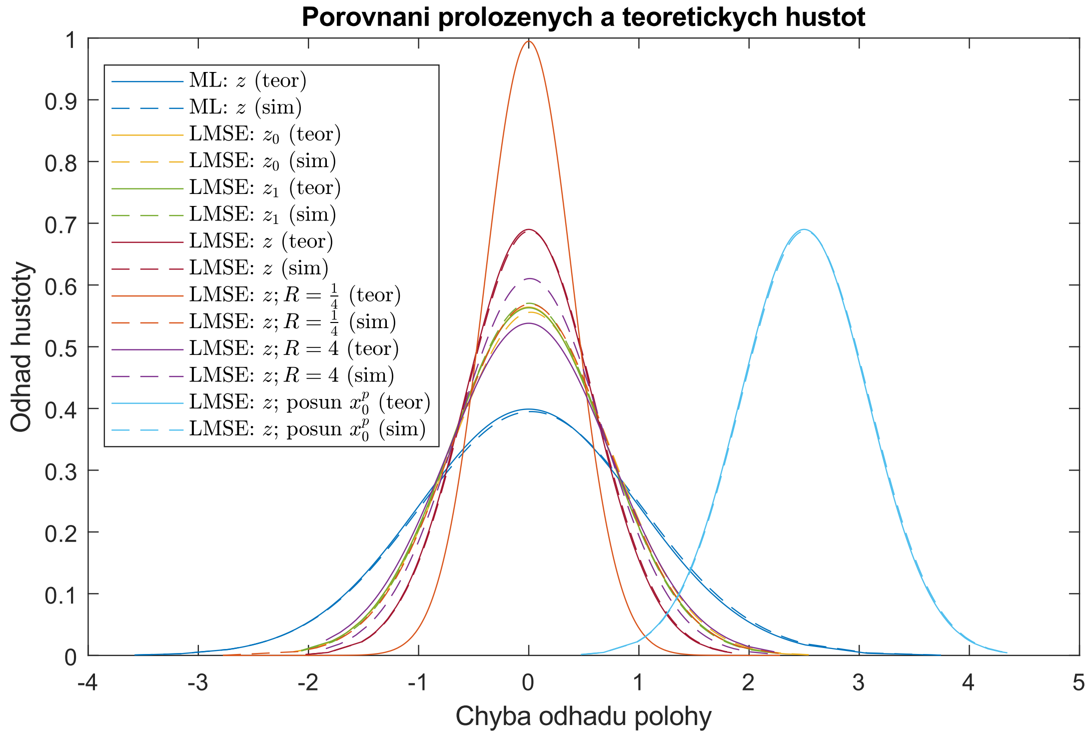
Tabulka 1: Tabulka s hodnotami středních hodnot a variancemi proložených hustot odhadů.

Do další tabulky byly zaneseny teoretické hodnoty prvních dvou momentů.

	$\mathrm{E}[\tilde{\boldsymbol{x}}]$	$\mathrm{var}[\tilde{\boldsymbol{x}}] = \boldsymbol{P}_{\tilde{\boldsymbol{x}}}(\text{pozice 1,1})]$
ML: $\boldsymbol{z}$	0	1
LMSE: z_0	0	$\frac{1}{2}$
LMSE: z_1	0	$\frac{121}{241} \doteq 0.5021$
LMSE: $\boldsymbol{z}$	0	$\frac{121}{362} \doteq 0.3343$
LMSE: $\boldsymbol{z}; R = \frac{1}{4}$	0	$\frac{197}{1225} \doteq 0.1608$
LMSE: $\boldsymbol{z}; R = 4$	0	$\frac{844}{1535} \doteq 0.5498$
LMSE: $\boldsymbol{z}; \overline{x}_0^{\text{poloha}} := \overline{x}_0^{\text{poloha}} - 5$	2.5	$\frac{121}{362} \doteq 0.3343$

Tabulka 2: Tabulka s hodnotami středních hodnot a variancemi teoretických hustot odhadů.

Na závěr byly mezi sebou porovnány proložené a teoretické hustoty.



Obrázek 14: Vzájemné porovnání teoretických a proložených hustot.

Lze si povšimnout, že téměř ve všech případech se simulace shoduje s teorií, jelikož teoretické střední hodnoty a k nim příslušné střední hodnoty, získané pomocí simulace, jsou téměř ekvivalentní. To samé lze prohlásit i o varianci. Pouze pro případ LMSE (měření $\boldsymbol{z}$) s falešným parametrem $R = \frac{1}{4}$ dojde k většímu rozporu mezi teorií a simulací.

3 Závěr

Tématem této semestrální práce byl optimální odhad náhodné proměnné. Hlavním cílem bylo na základě měření a modelu systému odhadnout neznámou počáteční polohu a rychlost objektu, se známou apriorní informací ve formě náhodné veličiny. Pro stanovení odhadů byly v této semestrální práci použity metody odhadu ve smyslu ML a LMSE za použití prvních několika měření.
Nejprve byla zadaná apriorní informace ignorována a byl navržen odhad $\hat{\boldsymbol{x}}_0$ ve smyslu maximální věrohodnosti (ML). V další části již byla znalost apriorní informace využita a byl určen nejlepší lineární odhad ve smyslu střední kvadratické chyby při použití různých měření. Následně byly vyjádřeny kovarianční matice chyb odhadů pro všechny případy. Bylo si možné povšimnout, že v případě odhadu ve smyslu LMSE se příslušné kovarianční matice odhadů a kovarianční matice chyb odhadů mezi sebou lišily. V dalším kroku jsme zkoumali, co se stane, pokud bude estimátor navržen za špatné znalosti parametrů systému. Na závěr teoretické části byly, stejně jako v minulé semestrální práci, vykresleny 3-σ elipsy odpovídající chybám odhadů.
Druhá část této semestrální práce se týkala simulačních úloh. Nejprve bylo vygenerováno 1000 simulací vektoru $[\boldsymbol{x}_0^T, \boldsymbol{z}^T]^T$. Poté byly, pro každý vektor, dopočteny realizace odhadů $\hat{\boldsymbol{x}}_0$ a chyby odhadů $\tilde{\mathbf{x}_0} = \mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0$. Na základě toho byly následně odhadnuty hustoty chyb jednotlivých odhadů polohy pomocí normalizovaných histogramů, které byly porovnány mezi sebou. Získané histogramy byly proloženy, pomocí techniky přiřazení momentů, gaussovskými hustotami. Na závěr byly proložené hustoty porovnány s teoretickými.

A Zdrojový kód z Matlabu

```
clc
close all
clear all

%% Semestralni prace c. 2 - TOD
% Jan Burian

%% I. Teorericka cast
% Zadany system
%x_{k+1} = F*x_k + G*w_k, w_k ~ N(0,Q)
%z_{k} = H*x_k + v_k, v_k ~ N(0,R)

%% Ukol (i)
% Parametry systemu
syms T R real
q = 0.1;
F = [1 T;
     0 1];
G = 1;
H = [1 0];
Q = q * [T^3/3   T^2/2;
         T^2/2   T];
R = 1;
%% Metoda maximalni verohodnosti pro mereni z_0, z_1
H = [1 0; 1 T];
sigma = [R 0; 0 (q*(T^3)/ 3) + R];

ML_odhad = inv(H' * inv(sigma) * H) * H' * inv(sigma);
ML_odhad_subs = subs(ML_odhad, T, 1);

% kovariancni matice (chyby) odhadu
cov_odhad_ML = inv(H' * inv(sigma) * H);
cov_odhad_ML_subs = subs(cov_odhad_ML, T, 1);

%% Linearni odhady ve smyslu stredni kvadraticke chyby pro jednotliva
    mereni
% mereni z0
syms x_poloha x_rychlost z0
x_odhad = [x_poloha; x_rychlost];
H_z0 = [1 0];
R_z0 = R;
Px = [1 1; 1 4];

P_x_z0 = Px * H_z0';
P_z0 = H_z0 * Px * H_z0' + R_z0;
E_z0 = H_z0 * x_odhad;

LMSE_odhad_z0 = x_odhad + P_x_z0 * inv(P_z0) * (z0 - E_z0);

% mereni z1
syms x_poloha x_rychlost z1
```

```
T = 1;

x_odhad = [x_poloha; x_rychlost];
H_z1 = [1 T];
R_z1 = R + q*((T^3)/3);
Px = [1 1; 1 4];

P_x_z1 = Px * H_z1';
P_z1 = H_z1 * Px * H_z1' + R_z1;
E_z1 = H_z1 * x_odhad;

LMSE_odhad_z1 = x_odhad + P_x_z1 * inv(P_z1) * (z1 - E_z1);

% mereni z = [z0; z1]
syms x_poloha x_rychlost z0 z1
x_odhad = [x_poloha; x_rychlost];
H_z = [1 0; 1 1];
R_z = [R 0; 0 R + q*((T^3)/3)];
Px = [1 1; 1 4];

P_x_z = Px * H_z';
P_z = H_z * Px * H_z' + R_z;
E_z = H_z * x_odhad;

LMSE_odhad_z = x_odhad + P_x_z * inv(P_z) * ([z0; z1] - E_z);

%% Miry duvery (kovariancni matice chyb odhadu)
format rational
% mereni z0
P_z0_x = H_z0*Px;
mira_duvery_z0 = Px - P_x_z0 * inv(P_z0) * P_z0_x;

% mereni z1
P_z1_x = H_z1*Px;
mira_duvery_z1 = Px - P_x_z1 * inv(P_z1) * P_z1_x;

% mereni z
P_z_x = H_z*Px;
mira_duvery_z = Px - P_x_z * inv(P_z) * P_z_x;

%% Kovariancni matice odhadu
cov_LMSE_z0 = P_x_z0 * inv(P_z0) * P_z0_x;
cov_LMSE_z1 = P_x_z1 * inv(P_z1) * P_z1_x;
cov_LMSE_z = P_x_z * inv(P_z) * P_z_x;

%% Navrzeni estimatoru se spatnymi parametry
% R = 1/4
clear R
R = 1/4;
syms x_poloha x_rychlost z0 z1
x_odhad = [x_poloha; x_rychlost];
H_z = [1 0; 1 1];
R_z_wrong_1 = [R 0; 0 R + q*((T^3)/3)];
```

```
Px = [1 1; 1 4];

P_x_z = Px * H_z';
P_z_wrong_R_1 = H_z * Px * H_z' + R_z_wrong_1;
E_z = H_z * x_odhad;

LMSE_odhad_z_wrong_R_1 = x_odhad + P_x_z * inv(P_z_wrong_R_1) * ([z0; z1]
    - E_z);

% R = 4
clear R
R = 4;
syms x_poloha x_rychlost z0 z1
x_odhad = [x_poloha; x_rychlost];
H_z = [1 0; 1 1];
R_z_wrong_2 = [R 0; 0 R + q*((T^3)/3)];
Px = [1 1; 1 4];

P_x_z = Px * H_z';
P_z_wrong_R_2 = H_z * Px * H_z' + R_z_wrong_2;
E_z = H_z * x_odhad;

LMSE_odhad_z_wrong_R_2 = x_odhad + P_x_z * inv(P_z_wrong_R_2) * ([z0; z1]
    - E_z);

% x0^p := x0^p - 5
clear R
R = 1;
x_odhad = [x_poloha-5; x_rychlost];
H_z = [1 0; 1 1];
R_z = [R 0; 0 R + q*((T^3)/3)];
Px = [1 1; 1 4];

P_x_z = Px * H_z';
P_z = H_z * Px * H_z' + R_z;
E_z = H_z * x_odhad;

LMSE_odhad_z_posun_x_poloha = x_odhad + P_x_z * inv(P_z) * ([z0; z1] -
    E_z);

%% Strannost odhadu
E_x = [x_poloha; x_rychlost];
E_x_odhad = [x_poloha-5; x_rychlost]; % odhad s posunutou polohou o -5

strannost = E_x - E_x_odhad - P_x_z * inv(P_z) * H_z * E_x + P_x_z * inv(
    P_z) * H_z * E_x_odhad;

%% Miry duvery (kovariancni matice chyb odhadu) - nespravne parametry
format rational
% R = 1/4
mira_duvery_wrong_R_1 = Px - P_x_z * inv(P_z_wrong_R_1) * P_z_x;

% R = 4
```

```
mira_duvery_wrong_R_2 = Px - P_x_z * inv(P_z_wrong_R_2) * P_z_x;

% x0^p := x0^p - 5
mira_duvery_posun_x_poloha = Px - P_x_z * inv(P_z) * P_z_x;

%% Vykresleni elips pro kovariancni matice chyb odhadu
x0 = [0; 0];
t = 0:0.01:2*pi;

x = sin(t);
y = cos(t);

vector_xy = [x; y];
xy = zeros(2, length(t));

cells_cov = cell(1,4);
cells_cov{1} = cov_odhad_ML_subs;
cells_cov{2} = mira_duvery_z0;
cells_cov{3} = mira_duvery_z1;
cells_cov{4} = mira_duvery_z;

figure;
for i = 1:length(cells_cov)
    S = cells_cov{i};
    P = chol(S, 'lower');
    for j = 1:length(t)
        xy(:,j) = x0 + 3 * P * vector_xy(:,j);
    end
    plot(xy(1,:),xy(2,:));
    hold on;
end
scatter(x0(1), x0(2), '+', 'k');

title('3-\sigma elipsy odhadu - ML a LMSE');
xlabel('Odhad polohy');
ylabel('Odhad rychlosti');
legend('ML: $z$','LMSE: $z_0$', 'LMSE: $z_1$', 'LMSE: $z$', 'Interpreter', 'latex')
grid on;

%% Vykresleni elips pro kovariancni matice chyb odhadu zalozene na nespr. hodnotach parametru
cells_cov = cell(1,4);
cells_cov{1} = mira_duvery_z;
cells_cov{2} = mira_duvery_wrong_R_1;
cells_cov{3} = mira_duvery_wrong_R_2;
cells_cov{4} = mira_duvery_posun_x_poloha;

figure;
for i = 1:length(cells_cov)
    S = cells_cov{i};
    P = chol(S, 'lower');
    if i == 4
```

```
        x0 = [2.5; -2.5];
        for j = 1:length(t)
            xy(:,j) = x0 + 3 * P * vector_xy(:,j);
        end
        plot(xy(1,:), xy(2,:));
        scatter(x0(1), x0(2), '+', 'k');
        hold on;
    else
        x0 = [0; 0];
        for j = 1:length(t)
            xy(:,j) = x0 + 3 * P * vector_xy(:,j);
        end
        plot(xy(1,:), xy(2,:));
        hold on;
    end
end
scatter(0, 0, '+', 'k');

title('3-\sigma elipsy odhadu LMSE (falesne a skutecne parametry)');
xlabel('Odhad polohy');
ylabel('Odhad rychlosti');
legend('LMSE: $z$','LMSE: $R = \frac{1}{4}$', 'LMSE: $R = 4$', 'LMSE:
    $x_0^p = x_0^p - 5$', 'Interpreter', 'latex')
grid on;


%% II. Simulacni cast
% Parametry
T = 1;
Px = [1 1;
      1 4];
q = 0.1;
Q = q * [T^3/3   T^2/2;
         T^2/2   T];
R = 1;
x0 = [0; 0]; % pocatecni podminka - radek = vektor x, sloupec =k, hloubka
    = iterace

F = [1 T;
     0 1];
H = [1 0];

%% Definice promennych
pocet_simulaci = 1000;
Z = zeros(2, pocet_simulaci); % radek = k, sloupec = iterace

% Odhady
odhad_ML_z = zeros(2,pocet_simulaci);

odhad_LMSE_z0 = zeros(2,pocet_simulaci);
odhad_LMSE_z1 = zeros(2,pocet_simulaci);
odhad_LMSE_z = zeros(2,pocet_simulaci);

```

```
odhad_LMSE_z_wrong_R_1 = zeros(2,pocet_simulaci);
odhad_LMSE_z_wrong_R_2 = zeros(2,pocet_simulaci);
odhad_LMSE_z_posun_x_poloha = zeros(2,pocet_simulaci);

% Chyby odhadu
chyba_odhadu_ML_z = zeros(2,pocet_simulaci);

chyba_odhadu_LMSE_z0 = zeros(2,pocet_simulaci);
chyba_odhadu_LMSE_z1 = zeros(2,pocet_simulaci);
chyba_odhadu_LMSE_z = zeros(2,pocet_simulaci);

chyba_odhadu_LMSE_z_wrong_R_1 = zeros(2,pocet_simulaci);
chyba_odhadu_LMSE_z_wrong_R_2 = zeros(2,pocet_simulaci);
chyba_odhadu_LMSE_z_posun_x_poloha = zeros(2,pocet_simulaci);

%% Generovani simulaci vektoru
for i = 1:pocet_simulaci
    X(:,1,i) = x0 + (randn(1,2) * chol(Px))'; % x0
    Z(1,i) = H * X(:,1,i) + randn * sqrt(R); % z0 = Hx0 + v0

    X(:,2,i) = F * X(:,1,i) + (randn(1,2) * chol(Q))'; % x1 = Fx0 + w0
    Z(2,i) = H * X(:,2,i) + randn * sqrt(R); % z1 = Hx1 + v1

    % Odhady
    odhad_ML_z(:,i) = [1 0; -1 1] * Z([1,2],i);

    odhad_LMSE_z0(:,i) = [x0(1)/2 + Z(1,i)/2; x0(2) - x0(1)/2 + Z(1,i)/2];
    odhad_LMSE_z1(:,i) = 1/241 * [181*x0(1) - 60*x0(2) + 60*Z(2,i); 91*x0(2) - 150*x0(1) + 150*Z(2,i)];
    odhad_LMSE_z(:,i) = 1/362 * [181*x0(1) - 60*x0(2) + 121*Z(1,i) + 60*Z(2,i); 122*x0(2) - 181*x0(1) - 59*Z(1,i) + 240*Z(2,i)];

    odhad_LMSE_z_wrong_R_1(:,i) = 1/1225 * [317*x0(1) - 120*x0(2) + 788*Z(1,i) + 120*Z(2,i); 205*x0(2) - 368*x0(1) - 652*Z(1,i) + 1020*Z(2,i)];
    odhad_LMSE_z_wrong_R_2(:,i) = 1/1535 * [1084*x0(1) - 240*x0(2) + 211*Z(1,i) + 240*Z(2,i); 845*x0(2) - 721*x0(1) + 31*Z(1,i) + 690*Z(2,i)];
    odhad_LMSE_z_posun_x_poloha(:,i) = 1/362 * [181*x0(1) - 60*x0(2) + 121*Z(1,i) + 60*Z(2,i) - 905; 122*x0(2) - 181*x0(1) - 59*Z(1,i) + 240*Z(2,i) + 905];

    % Vypocet chyb odhadu
    chyba_odhadu_ML_z(:,i) = X(:,1,i) - odhad_ML_z(:,i);
    chyba_odhadu_LMSE_z0(:,i) = X(:,1,i) - odhad_LMSE_z0(:,i);
    chyba_odhadu_LMSE_z1(:,i) = X(:,1,i) - odhad_LMSE_z1(:,i);
    chyba_odhadu_LMSE_z(:,i) = X(:,1,i) - odhad_LMSE_z(:,i);
    chyba_odhadu_LMSE_z_wrong_R_1(:,i) = X(:,1,i) - odhad_LMSE_z_wrong_R_1(:,i);
    chyba_odhadu_LMSE_z_wrong_R_2(:,i) = X(:,1,i) - odhad_LMSE_z_wrong_R_2(:,i);
```

```
    chyba_odhadu_LMSE_z_posun_x_poloha(:,i) = X(:,1,i) - odhad_LMSE_z_posun_x_poloha(:,i);
end

chyby_odhadu = cell(1,7);
chyby_odhadu{1} = chyba_odhadu_ML_z;
chyby_odhadu{2} = chyba_odhadu_LMSE_z0;
chyby_odhadu{3} = chyba_odhadu_LMSE_z1;
chyby_odhadu{4} = chyba_odhadu_LMSE_z;
chyby_odhadu{5} = chyba_odhadu_LMSE_z_wrong_R_1;
chyby_odhadu{6} = chyba_odhadu_LMSE_z_wrong_R_2;
chyby_odhadu{7} = chyba_odhadu_LMSE_z_posun_x_poloha;

%% Histogramy
nbins = 30;
titles = ["ML: $z$", "LMSE: $z_0$", "LMSE: $z_1$", "LMSE: $z$", "LMSE: $z; R = \frac{1}{4}$", "LMSE: $z; R = 4$", "LMSE: $z$; $x_0^{p} = x_0^{p} - 5$"];
for i = 1:length(chyby_odhadu)
    chyba_odhadu = chyby_odhadu{i};
    figure;
    histogram(chyba_odhadu(1,:), nbins, 'Normalization','pdf');
    xlabel('Chyba odhadu polohy');
    ylabel('Odhad hustoty');
    title(titles(i), 'Interpreter','latex');
end

figure;
for j = 1:length(chyby_odhadu)
    chyba_odhadu = chyby_odhadu{j};
    subplot(4,2,j)
    histogram(chyba_odhadu(1,:), nbins, 'Normalization','pdf')
    xlabel('Chyba odhadu polohy');
    ylabel('Odhad hustoty')
    title(titles(j), 'Interpreter','latex');
    xlim([-3 5])
    ylim([0 0.8])
end

%% Teoreticke Gaussovy krivky pro jednotlive pripady
var_ML_z = cov_odhad_ML_subs(1,1);
var_LMSE_z0 = mira_duvery_z0(1,1);
var_LMSE_z1 = mira_duvery_z1(1,1);
var_LMSE_z = mira_duvery_z(1,1);
var_LMSE_z_wrong_R_1 = mira_duvery_wrong_R_1(1,1);
var_LMSE_z_wrong_R_2 = mira_duvery_wrong_R_2(1,1);
var_LMSE_z_posun_x_poloha = mira_duvery_posun_x_poloha(1,1);

cell_varis = cell(1,7);
cell_varis{1} = var_ML_z;
cell_varis{2} = var_LMSE_z0;
cell_varis{3} = var_LMSE_z1;
cell_varis{4} = var_LMSE_z;
```

```
cell_varis{5} = var_LMSE_z_wrong_R_1;
cell_varis{6} = var_LMSE_z_wrong_R_2;
cell_varis{7} = var_LMSE_z_posun_x_poloha;

mean_teo = [0 0 0 0 0 0 2.5];
cell_y_teo = cell(1,7);
figure;
for j = 1:length(chyby_odhadu)
    chyba_odhadu = chyby_odhadu{j};
    variance = cell_varis{j};
    y_teo = normpdf(sort(chyba_odhadu(1,:)), mean_teo(j), sqrt(variance))
        ;
    cell_y_teo{j} = y_teo;
    plot(sort(chyba_odhadu(1,:)), y_teo);
    hold on;
end
title("Porovnani teoretickych hustot");
xlabel('Chyba odhadu polohy');
ylabel('Odhad hustoty');
legend(titles, 'Interpreter', 'latex')

%% Gaussovy krivky ze simulace pro jednotlive pripady
cell_y_sim = cell(1,7);
for i = 1:length(chyby_odhadu)
    chyba_odhadu = chyby_odhadu{i};
    y_sim = normpdf(sort(chyba_odhadu(1,:)), mean(chyba_odhadu(1,:)),
        sqrt(var(chyba_odhadu(1,:))));
    cell_y_sim{i} = y_sim;
end

%% Variance ze simulace
for u = 1:length(chyby_odhadu)
    chyba_odhadu = chyby_odhadu{u};
    variance_test = var(chyba_odhadu(1,:));
end

%% Porovnani jednotlivych krivek mezi sebou
for j = 1:length(chyby_odhadu)
    chyba_odhadu = chyby_odhadu{j};
    figure;
    plot(sort(chyba_odhadu(1,:)), cell_y_teo{j});
    hold on;
    plot(sort(chyba_odhadu(1,:)), cell_y_sim{j});
end

%% Porovnani prolozenych Gaussovych krivek mezi sebou
figure;
for j = 1:length(chyby_odhadu)
    chyba_odhadu = chyby_odhadu{j};
    plot(sort(chyba_odhadu(1,:)), cell_y_sim{j});
    hold on;
end
title("Porovnani prolozenych hustot");
```

```
xlabel('Chyba odhadu polohy');
ylabel('Odhad hustoty');
legend(titles, 'Interpreter', 'latex')
ylim([0 1])

%% Gaussovy krivky (metoda prirazeni momentu) a histogramy
%titles = ["ML (mereni z)", "LMSE (mereni z_0)", "LMSE (mereni z_1)", "
    LMSE (mereni z)", "LMSE (mereni z s parametrem R = 1/4)", "LMSE (
    mereni z s parametrem R = 4)", "LMSE (mereni z s posunutym parametrem
    x_0^{poloha})"];
for i = 1:length(chyby_odhadu)
    figure;
    chyba_odhadu = chyby_odhadu{i};
    y_sim = cell_y_sim{i};
    plot(sort(chyba_odhadu(1,:)), y_sim, 'LineWidth', 1.5);
    hold on;
    histogram(chyba_odhadu(1,:), nbins, 'Normalization','pdf');
    xlabel('Chyba odhadu polohy');
    ylabel('Odhad hustoty');
    title(titles(i), 'Interpreter', 'latex');
end

%% Celkove porovnani krivek (prolozene a teoreticke)
figure;
for i = 1:length(chyby_odhadu)
    chyba_odhadu = chyby_odhadu{i};
    p = plot(sort(chyba_odhadu(1,:)), cell_y_teo{i});
    c = p.Color;
    hold on
    plot(sort(chyba_odhadu(1,:)), cell_y_sim{i}, '--', 'Color', c);
    hold on
end

legend('ML: $z$ (teor)', 'ML: $z$ (sim)', 'LMSE: $z_0$ (teor)', 'LMSE:
    $z_0$ (sim)', 'LMSE: $z_1$ (teor)', 'LMSE: $z_1$ (sim)', 'LMSE: $z$ (
    teor)', 'LMSE: $z$ (sim)', 'LMSE: $z; R = \frac{1}{4}$ (teor)', 'LMSE:
     $z; R = \frac{1}{4}$ (sim)', 'LMSE: $z; R = 4$ (teor)', 'LMSE: $z; R
    = 4$ (sim)', 'LMSE: $z$; posun $x_0^{p}$ (teor)', 'LMSE: $z$; posun
    $x_0^{p}$ (sim)', 'Interpreter', 'latex')
title("Porovnani prolozenych a teoretickych hustot");
xlabel('Chyba odhadu polohy');
ylabel('Odhad hustoty');

%% Histogramy
figure
for i = 1:length(chyby_odhadu)
    chyba_odhadu = chyby_odhadu{i};
    histogram(chyba_odhadu(1,:), nbins, 'Normalization','pdf', '
        DisplayStyle', 'stairs');
    %histogram(chyba_odhadu(1,:), nbins, 'Normalization','pdf');
    hold on
    xlabel('Chyba odhadu polohy');
    ylabel('Odhad hustoty');
```

```
end
legend("ML: $z$", "LMSE: $z_0$", "LMSE: $z_1$", "LMSE: $z$", "LMSE: $z; R = \frac{1}{4}$", "LMSE: $z; R = 4$", "LMSE: $z$; $x_0^{p} = x_0^{p} - 5$", 'Location','northwest', 'Interpreter','latex');
title("Porovnani jednotlivych histogramu");

%% Stredni hodnoty a variance ze simulace
result_means = zeros(1,7);
result_varis = zeros(1,7);

for i = 1:length(chyby_odhadu)
    chyba_odhadu = chyby_odhadu{i};
    result_means(1, i) = mean(chyba_odhadu(1,:));
    result_varis(1, i) = var(chyba_odhadu(1,:));
end
```

Seznam obrázků