

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

1. SEMESTRÁLNÍ PRÁCE - KKY/TOD

Odhad stavu lineárního systému

Tomáš Honzík

Obsah

Zadání	1
1 Značení	2
2 Odhad stavu lineárního systému	3
2.1 Kalmanův filtr	3
2.2 Ustálený Kalmanův filtr	3
2.3 Deterministický rekonstruktor	4
3 Porovnání filtrů	5
4 Chyby odhadů	6
5 Inovační posloupnosti	7
6 Odhady kovariancí inovací	8
7 Střední kvadratické chyby filtračních odhadů	9
7.1 Deterministický rekonstruktor	9
7.2 Kalmanův filtr	9
7.3 Ustálený Kalmanův filtr	10
7.4 Simulace	10
Závěr	12

Odhad stavu lineárního systému

Zadání semestrální práce č. 3

Obecná formulace úlohy:

Necht' se zkoumaný objekt pohybuje po přímce s náhodným zrychlením. S danou periodou T je měřena poloha objektu. Hlavním úkolem je průběžně odhadovat polohu a rychlost objektu.

Podrobné zadání:

Uvažujte lineární dynamický systém

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k, & \mathbf{w}_k &\sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{40} \begin{bmatrix} \frac{T^3}{3} & \frac{T^2}{2} \\ \frac{T^2}{2} & T \end{bmatrix}\right), & \mathbf{x}_0 &\sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right), \\ z_k &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}_k + v_k, & v_k &\sim \mathcal{N}(0, 10), \end{aligned}$$

kde $T = 1$ a \mathbf{w}_k, v_k jsou nezávislé bílé šумы nekorelované s \mathbf{x}_0 .

Úkoly: Vygenerujte 1000 trajektorií stavu a měření pro $k = 0, \dots, 25$.

- (i) Pro každou trajektorii měření použijte Kalmanův filtr k nalezení odhadu stavu a určete ustálenou hodnotu Kalmanova zisku K_∞ . Dále také odhadněte stav pomocí ustáleného Kalmanova filtru a pomocí optimálního deterministického rekonstruktoru (filtru s nulovými póly ve tvaru $\hat{\mathbf{x}}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{KH})\mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{K}\mathbf{z}_k$).
- (ii) Vykreslete první trajektorii stavu a porovnejte ji s příslušnými filtračními odhady a měřením. Pro první trajektorii dále vykreslete chyby filtračních odhadů a inovační posloupnosti.
- (iii) Pro dané filtry porovnejte odhady variancí inovací v časech $k = 0, k = 1, k = 5$ a $k = 25$. Dále pro oba filtry proveďte odhady kovariancí mezi inovacemi v daných časech.
- (iv) Odhadněte střední hodnoty kvadratických chyb filtračních odhadů v závislosti na čase. Získané křivky porovnejte s teoretickými hodnotami.

Obrázek 1: Zadání

1 Značení

Úvodem si zavedeme značení pro obecné výpočty:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{Q} = \text{Var}[\mathbf{w}_k] &= \frac{1}{40} \begin{bmatrix} \frac{T^3}{3} & \frac{T^2}{2} \\ \frac{T^2}{2} & T \end{bmatrix} \\ R = \text{Var}[v_k] &= 10 \\ \bar{\mathbf{x}}_0 = \text{E}[x_0] &= \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \text{Var}[x_0] &= \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_k &\triangleq \text{Kalmanův zisk} \end{aligned} \tag{1}$$

2 Odhad stavu lineárního systému

Dle zadání bylo vygenerováno 1000 simulací zadaného lineárního systému. V první části se budeme věnovat jednou z vygenerovaných simulací, pro kterou provedeme odhad pomocí Kalmanova filtru, ustáleného Kalmanova filtru a deterministického rekonstruktoru stavu (filtru s nulovými póly).

2.1 Kalmanův filr

Jako první se budeme zabývat odhadem pomocí Kalmanova filtru. Použijeme Kalmanův filtr ve tvaru prediktor-korektor, než se celkem skládá ze dvou fází:

Predikce:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{x}}'_{k+1} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_k \\ \mathbf{P}'_{k+1} &= \mathbf{A}\mathbf{P}_k\mathbf{A}^T + \mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^T\end{aligned}\tag{2}$$

Korekce:

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_k &= \mathbf{P}'_k\mathbf{C}^T(\mathbf{R} + \mathbf{C}\mathbf{P}'_k\mathbf{C}^T)^{-1} \\ \mathbf{P}_k &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{C})\mathbf{P}'_k(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{C})^T + \mathbf{K}_k\mathbf{R}\mathbf{K}_k^T \\ \hat{\mathbf{x}}_k &= \bar{\mathbf{x}}'_k + \mathbf{P}_k\mathbf{C}^T\mathbf{R}^{-1}(z_k - \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}'_k)\end{aligned}\tag{3}$$

A pro odstartování algoritmu je zapotřebí ještě inicializace:

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = \bar{\mathbf{x}}_0\tag{4}$$

Poznámka: V jednotlivých odhadech nebudeme uvažovat znalost měření v prvním kroku z_0 (prezentace 7 strana 31).

2.2 Ustálený Kalmanův filtr

Ustálený kalmanův filtr je ekvivalentní s předchozím Kalmanovým filtrem, s výjimkou hodnoty kalmanova zisku \mathbf{K}_k , která se nemění dynamicky, ale je konstantní. Tuto konstantu určíme jako tzv. ustálený Kalmanův zisk:

$$\mathbf{K}_\infty \triangleq \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{K}_k\tag{5}$$

Tuto hodnotu spočteme numericky pomocí rekurentních vztahů (3):

$$\mathbf{K}_\infty \simeq [0.2711 \quad 0.0427]^T\tag{6}$$

2.3 Deterministický rekonstruktor

Nakonec určíme odhad stavu pomocí deterministického rekonstruktoru (filtru s nulovými póly). Tento odhad má dle zadání tvar:

$$\hat{\mathbf{x}}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{C})\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{K}\mathbf{z}_k \quad (7)$$

Nyní nalezneme takové \mathbf{K} , pro které bude splněn požadavek na filtr s nulovými póly. Toho docílíme vyřešením rovnice pro získání nulových vlastních čísel charakteristického polynomu matice $(\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{C})\mathbf{A}$:

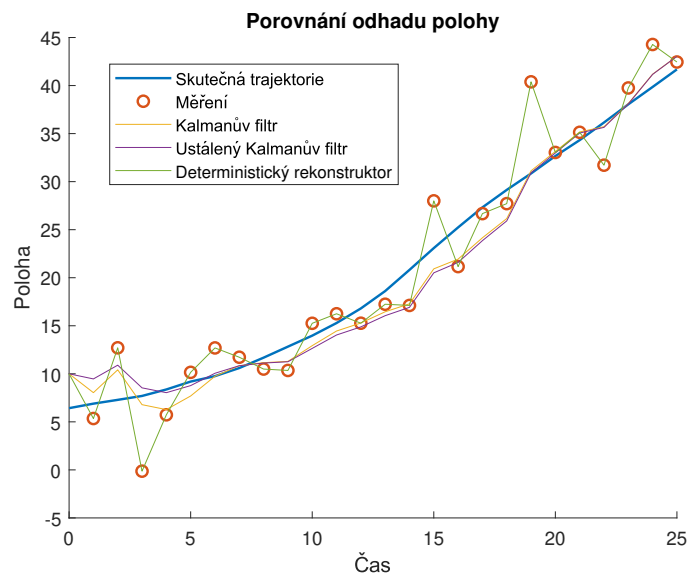
$$\det[\lambda\mathbf{I} - (\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{C})\mathbf{A}] = 0 = \lambda^2 + (k_1 + Tk_2 - 2)\lambda + (1 - k_1) \quad (8)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{T} \end{bmatrix}^T = [1 \quad 1]^T \quad (9)$$

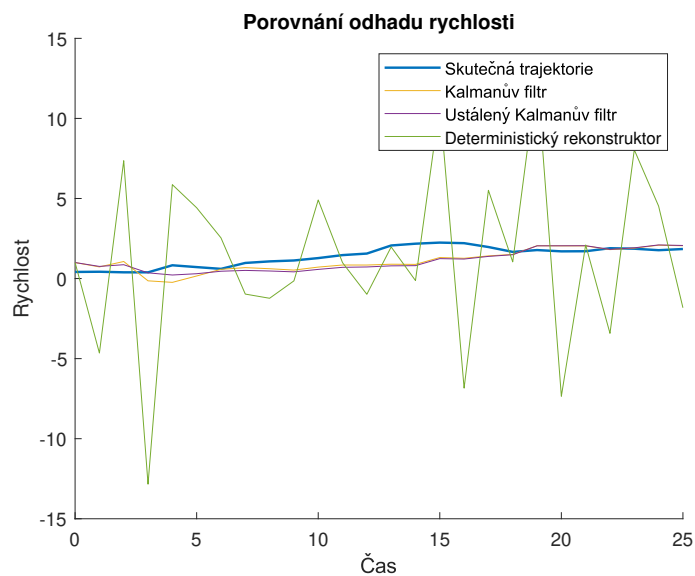
$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} z_k \quad (10)$$

3 Porovnání filtrů

Následuje porovnání všech třech odvozených filtrů. Dle zadání jsou pro jednu ze simulací srovnány samotné odhady se skutečnou trajektorií.



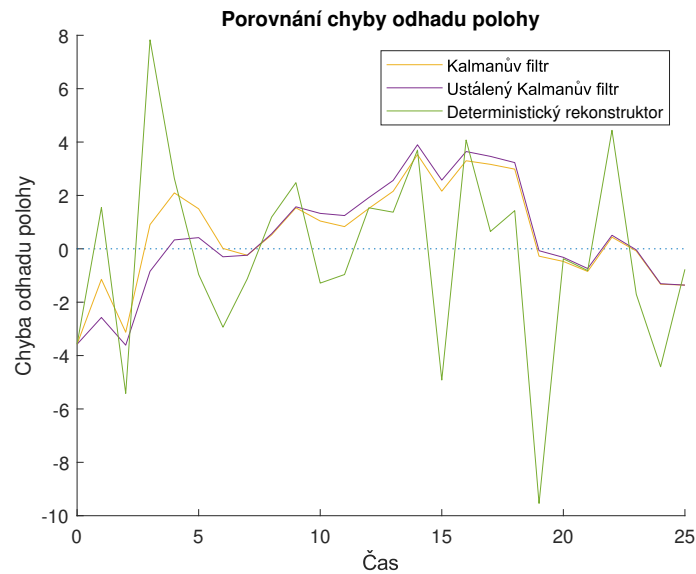
Obrázek 2: Porovnání odhadu polohy



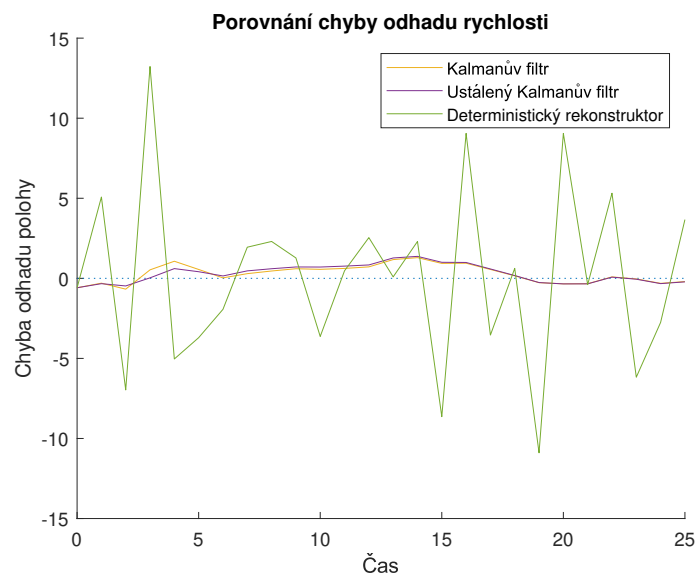
Obrázek 3: Porovnání odhadu rychlosti

4 Chyby odhadů

Na následující dvojici grafů je průběh chyb odhadů:



Obrázek 4: Porovnání chyb odhadu polohy



Obrázek 5: Porovnání chyb odhadu rychlosti

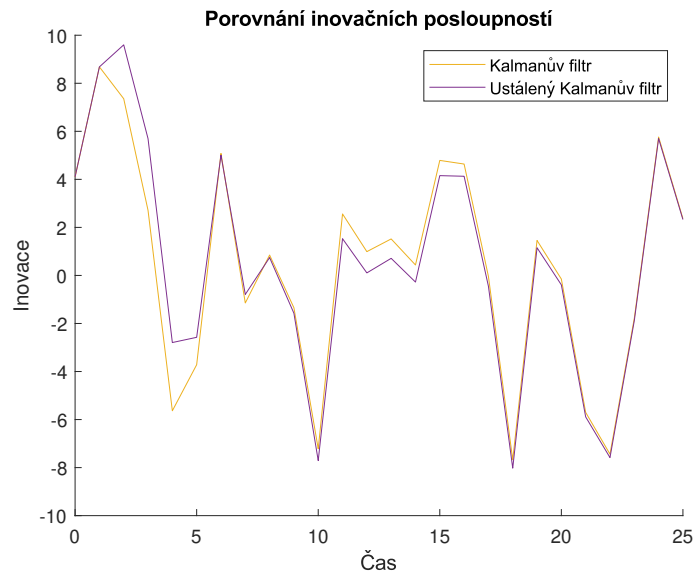
Jako nejlepší z porovnaných estimátorů se dle očekávání jeví Kalmanův filtr a jako nejhorší deterministický rekonstruktor, jenž nevyužívá informace o vlastnostech šumů. Dále můžeme pozorovat, že ustálený Kalmanův filtr postupně konverguje ke "klasickému" Kalmanovu filtru.

5 Inovační posloupnosti

Označme inovaci:

$$\tilde{z}_k = z_k - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_k \quad (11)$$

Zde je srovnání inovačních posloupností pro oba Kalmanovy filtry:



Obrázek 6: Inovační posloupnosti

Opět pozorujeme o něco lepší odhad ze strany "klasického" Kalmanova filtru a vzájemné konvergenci obou inovačních posloupností.

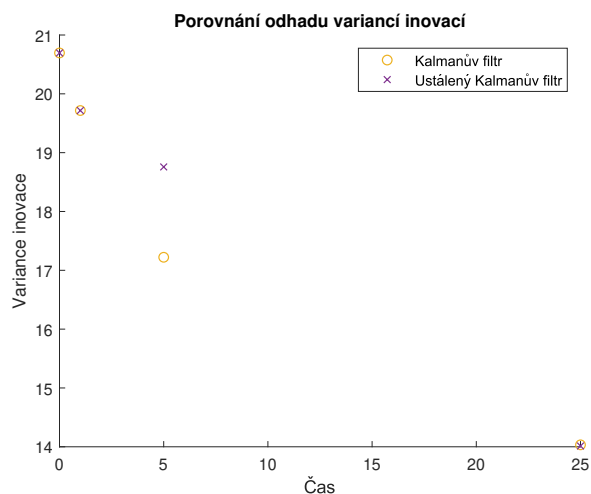
6 Odhady kovariancí inovací

Z tisíce simulací byly odhadnuty kovariance obou Kalmanových filtrů pro vybrané časové okamžiky, zde je tabulka získaných odhadů:

Kalmanův filtr				
Cov[\tilde{z}_k, \tilde{z}_n]	k=0	k=1	k=6	k=25
n=0	20.6951	9.8184	-0.9102	0.3658
n=1	9.818	19.7162	0.2150	-0.7098
n=6	-0.9102	0.2150	17.2217	0.8591
n=25	0.3658	-0.7098	0.8591	14.0331

Ustálený Kalmanův filtr				
Cov[\tilde{z}_k, \tilde{z}_n]	k=0	k=1	k=6	k=25
n=0	20.6951	9.8184	0.7623	0.3576
n=1	9.8184	19.7162	1.5177	-0.7580
n=6	0.7623	1.5177	18.7574	0.6135
n=25	0.3576	-0.7580	0.6135	14.0137

Jednotlivé variance jsou rovny prvkům na diaognálách tabulek a zde je jejich grafické znázornění:



Obrázek 7: Odhady variancí inovací

Variance v časových okamžicích 0 a 1 jsou shodné pro oba filtry, jelikož uvažujeme neznalost měření v prvním okamžiku a prediktivní odhady se tedy shodují. V čase 5 se již filtry rozcházejí s tím, že Kalmanův filtr má pochopitelně varianci inovace menší nežli ustálený Kalmanův filtr. Po určité době je variance opět shodná kvůli vzájemné konvergenci filtrů (viz časový okamžik 25).

7 Střední kvadratické chyby filtračních odhadů

Cílem tohoto úkolu je porovnat časový vývoj střední kvadratické chyby odhadů:

$$\mathbb{E}[\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^T] = ? \quad (12)$$

7.1 Deterministický rekonstruktor

Potřebné vztahy:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{w}_{k+1} \\ z_{k+1} &= \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{C}\mathbf{w}_{k+1} + v_k \\ \hat{\mathbf{x}}_{k+1} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{w}_{k+1} + \mathbf{K}v_{k+1} \\ \tilde{\mathbf{x}}_{k+1} &= (\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{A})\tilde{\mathbf{x}}_k + (\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{C})\mathbf{w}_{k+1} - \mathbf{K}v_{k+1} \end{aligned} \quad (13)$$

Dosažením dostaneme rekurentní vztah pro střední kvadratickou chybu deterministického rekonstruktoru:

$$\mathbb{E}[\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^T] = (\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{A})\mathbb{E}[\tilde{\mathbf{x}}_k\tilde{\mathbf{x}}_k^T](\mathbf{A}^T - \mathbf{A}^T\mathbf{C}^T\mathbf{K}^T) + (\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{C})\mathbf{Q}(\mathbf{I} - \mathbf{C}^T\mathbf{K}^T) + \mathbf{K}\mathbf{R}\mathbf{K}^T \quad (14)$$

Pro který potřebujeme ještě určit počáteční podmínku:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_0 &= \bar{\mathbf{x}}_0 \\ \tilde{\mathbf{x}}_0 &= \mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0 \end{aligned} \quad (15)$$

$$\mathbb{E}[\tilde{\mathbf{x}}_0\tilde{\mathbf{x}}_0^T] = \mathbb{E}[\mathbf{x}_0\mathbf{x}_0^T] - \bar{\mathbf{x}}_0\bar{\mathbf{x}}_0^T = \text{Var}[\mathbf{x}_0] = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7.2 Kalmanův filtr

V případě Kalmanova filtru je střední kvadratická chyba shodná s kovarianční maticí estimatoru.

$$\mathbb{E}[\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^T] = \left[(\mathbf{A}\mathbb{E}[\tilde{\mathbf{x}}_k\tilde{\mathbf{x}}_k^T]\mathbf{A}^T + \mathbf{Q})^{-1} + \mathbf{C}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C} \right]^{-1} \quad (16)$$

Počáteční podmínka:

$$\mathbb{E}[\tilde{\mathbf{x}}_0\tilde{\mathbf{x}}_0^T] = \text{Var}[\mathbf{x}_0] \quad (17)$$

7.3 Ustálený Kalmanův filtr

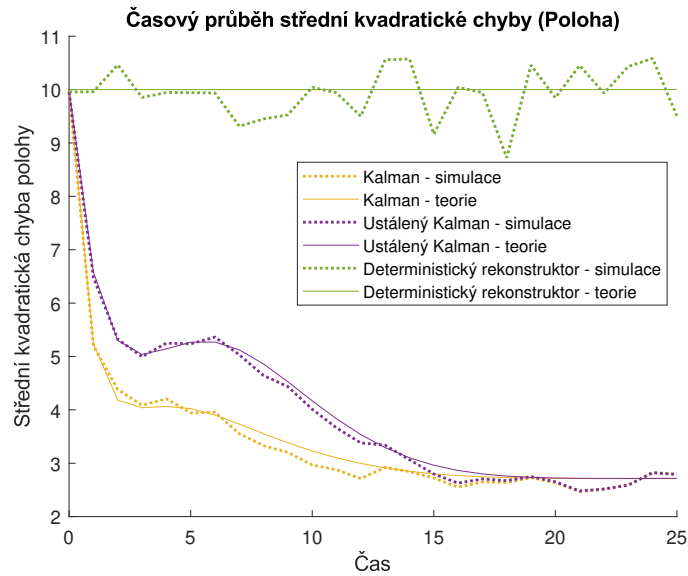
$$E[\tilde{x}_{k+1}\tilde{x}_{k+1}^T] = (I - KC)(AE[\tilde{x}_k\tilde{x}_k^T]A^T + Q)(I - KC)^T + K RK^T \quad (18)$$

Počáteční podmínka:

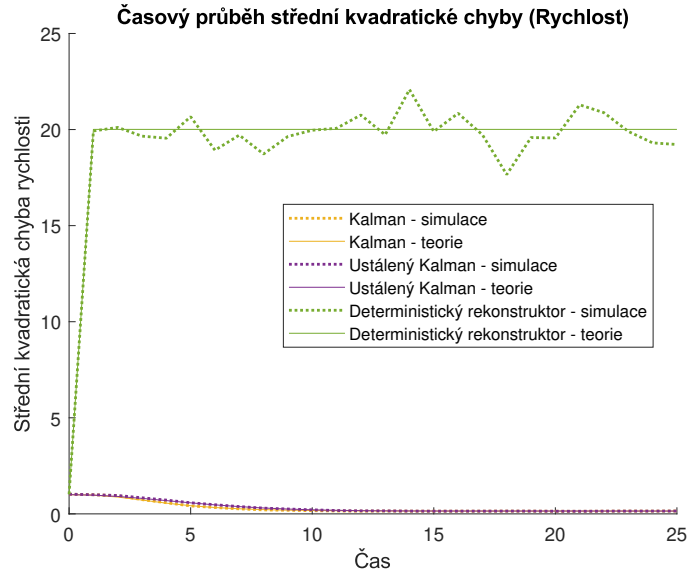
$$E[\tilde{x}_0\tilde{x}_0^T] = \text{Var}[x_0] \quad (19)$$

7.4 Simulace

Vypočtené teoretické průběhy středních kvadratických chyb byly porovnány se simulačními výsledky. V rámci simulací byly spočteny střední kvadratické chyby zvlášť pro polohu a pro rychlost, tzn. hodnoty odpovídající prvkům na diagonále teoretických výsledků.



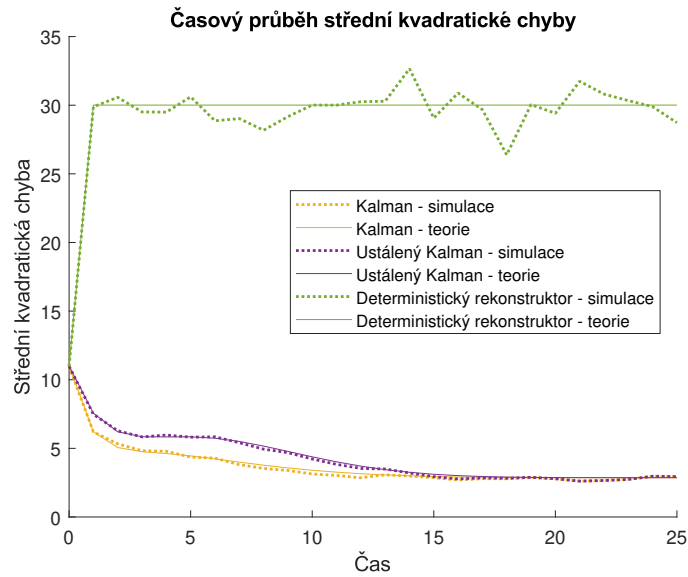
Obrázek 8: Střední kvadratické chyby polohy



Obrázek 9: Střední kvadratické chyby rychlosti

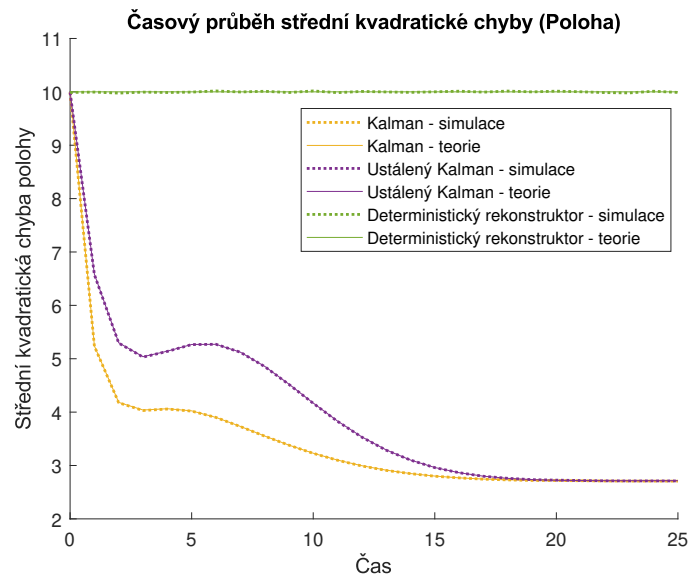
Pro střední kvadratickou chybu ve smyslu $E[\tilde{\mathbf{x}}_0^T \tilde{\mathbf{x}}_0]$ nám vyjde skalární výsledek, který je roven stopě předešlého maticového výsledku:

$$E[\tilde{\mathbf{x}}_0^T \tilde{\mathbf{x}}_0] = \text{tr} (E[\tilde{\mathbf{x}}_0 \tilde{\mathbf{x}}_0^T]) \quad (20)$$



Obrázek 10: Střední kvadratické chyby

Pro ověření shody teoretických a simulovaných výsledků bylo provedeno navyšování počtu simulací, kdy byla pozorována čím dál větší shoda teoretických a simulovaných hodnot. Zde je pro ilustraci graf střední kvadratické chyby pro 10^6 spuštěných simulací:



Obrázek 11: Střední kvadratické chyby polohy (10^6 simulací)

Závěr

Pro zadaný systém byli odvozené odhady stavů (trajektorií) pomocí Kalmanova filtru, ustáleného Kalmanova filtru a deterministického rekonstruktoru stavu s nulovými póly. Bylo ukázáno, že Kalmanův filtr je nejlepším estimátorem, že odhad dle ustáleného Kalmanova filtru konverguje k odhadu dle "klasického" Kalmanova filtru a že oba dokáží zásadně zlepšit odhad ve srovnání s deterministickým rekonstruktorem nepracujícím s informací o přítomných šumech.

Jednotlivé estimátory byly navzájem důkladně porovnány. Rovněž proběhlo srovnání teoretických výsledků se simulacemi. Simulované hodnoty vždy odpovídali hodnotám teoretickým.