# Optimální odhad náhodné proměnné

*Zadání semestrální práce č. 2*

Uvažujme objekt, který se pohybuje po přímce s náhodným zrychlením, zatímco je s konstantní periodou $T$ měřena jeho poloha. Cílem je na základě měření a modelu systému odhadnout neznámou počáteční polohu a rychlost objektu, se známou apriorní informací ve formě náhodné veličiny. V diskrétním případě můžeme uvažovat lineární dynamický systém s popisem

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k, \quad \mathbf{w}_k \sim \mathcal{N}\left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{10} \begin{bmatrix} \frac{T^3}{3} & \frac{T^2}{2} \\ \frac{T^2}{2} & T \end{bmatrix} \right), \quad \mathbf{x}_0 \sim \mathcal{N}\left( \begin{bmatrix} \bar{x}_0^{\text{poloha}} \\ \bar{x}_0^{\text{rychlost}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \right),$$
$$z_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + v_k, \qquad v_k \sim \mathcal{N}(0, 1),$$

kde vzorkovací perioda je $T = 1$, a procesy $[\mathbf{w}_k]_{k=1}^{+\infty}$ a $[v_k]_{k=1}^{+\infty}$ jsou vzájemně nezávislé bílé šumy, nezávislé na počátečním stavu $\mathbf{x}_0$. Stav $\mathbf{x}_0$ zvolte libovolně.

**Teoretické úkoly:** Odhad ve smyslu ML a LMSE z prvních několika měření.

(i) Pro porovnání nejprve apriorní informaci ignorujte a navrhněte odhad $\hat{\mathbf{x}}_0$ počátečního stavu $\mathbf{x}_0$ ve smyslu maximální věrohodnosti při použití měření $\mathbf{z} = [z_0, z_1]^{\mathrm{T}}$. Dále apriorní informaci v potaz vezměte, a určete nejlepší lineární odhad ve smyslu střední kvadratické chyby při použití měření A) $z_0$ B) $z_1$ a C) $\mathbf{z}$. Co o veličině $\mathbf{x}_0$ říká konkrétně zadaná apriorní informace a jak se projeví v rovnicích?

Dále vyjádřete kovarianční matice chyb odhadů pro všechny případy. Všimněte si, že kovarianční matice odhadu a chyby odhadu se v případě odhadu náhodné veličiny liší.

(ii) Pozorujte, co se může stát, když estimátor bude navržen za špatné znalosti parametrů systému. Pro jednoduchost uvažujte jen LMSE případ C). Sestrojte odhady, kde při návrhu uvažujete hodnoty parametrů Ca) $R = \frac{1}{4}$, Cb) $R = 4$ a Cc) $\bar{x}_0^{\text{poloha}} := \bar{x}_0^{\text{poloha}} - 5$, ale ve skutečnosti jsou všechny parametry stejné jako v předchozím bodě. Dopočtěte kovarianční matice chyb poskytované algoritmem odhadu, tj. založené na nesprávných hodnotách parametrů, a skutečné kovarianční matice chyb odhadů. Diskutujte strannost těchto odhadů.

(iii) Pro všechny odhady vykreslete 3-$\sigma$ elipsy odpovídající chybám odhadů. Pro odhad s kovarianční maticí chyby odhadu $\mathbf{P}$ uvažujte křivku $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : (\mathbf{x} - \mathbf{b})^{\mathrm{T}} \mathbf{P}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{b}) = 9\}$, kde $\mathbf{b} = E(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)$. Pro odhady Ca), Cb), Cc) dále vykreslete elipsy pro matice poskytované algoritmem odhadu a diskutujte vztahy mezi skutečnými a poskytovanými kovariačními maticemi chyb odhadů.

**Simulační úkoly:** Simulační ověření teoretických výsledků.
Pomocí funkce `randn` vygenerujte 1000 simulací vektoru $[\mathbf{x}_0^{\mathrm{T}}, \mathbf{z}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ a pro každý nasimulovaný vektor dopočtěte realizace odhadů $\hat{\mathbf{x}}_0$ a chyb odhadů $\tilde{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0$.

(i) Odhadněte hustoty *chyb* jednotlivých odhadů *polohy* pomocí normalizovaných histogramů a porovnejte je mezi sebou. Dále pomocí techniky přiřazení momentů proložte normalizované histogramy gaussovskými hustotami. Proložené hustoty porovnejte s teoretickými.