Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra kybernetiky

Semestrální práce č. 1

Teorie odhadu a zpracování signálů

Zkratka katedry/zkratka předmětu (KKY/TOD)

Jan Burian
19. října 2022

Obsah

1 Zadání

Odhad konstantní veličiny

Zadání semestrální práce č. 1

Uvažujme objekt, který se pohybuje po přímce s náhodným zrychlením, zatímco je s konstantní periodou T měřena jeho poloha. Cílem je na základě měření a modelu systému odhadnout neznámou, ale konstantní počáteční polohu a rychlost objektu. V diskrétním případě můžeme uvažovat lineární dynamický systém s popisem

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k, \quad \mathbf{w}_k \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, q \begin{bmatrix} \frac{T^3}{3} & \frac{T^2}{2} \\ \frac{T^2}{2} & T \end{bmatrix}\right), \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \bar{x}_0^{\text{poloha}} \\ \bar{x}_0^{\text{rychlost}} \end{bmatrix},$$
$$z_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + v_k, \qquad v_k \sim \mathcal{N}(0, R),$$

kde q je intenzita šumu, R je variance chyby měření a procesy $[\mathbf{w}_k]_{k=1}^{+\infty}$ a $[v_k]_{k=1}^{+\infty}$ jsou vzájemně nezávislé bílé šumy. Počáteční stav $\mathbf{x}_0$ zvolte libovolně.

Teoretické úkoly: Odhad podle vážených nejmenších čtverců z prvních několika měření.

(i) Sestavte rovnici $\mathbf{z} = \mathbf{H}\mathbf{x}_0 + \mathbf{e}$, kde $\mathbf{z} = [z_0, \ldots, z_3]^{\mathrm{T}}$. Určete kovarianční matici $\mathbf{\Sigma} = E(\mathbf{e}\mathbf{e}^{\mathrm{T}})$ chyby $\mathbf{e}$ a formulujte problém odhadu $\mathbf{x}_0$ pomocí vážených nejmenších čtverců.

(ii) Pozorujte, co se stane, když budete využívat různá měření. Uvažujte A) z_0, z_1, B) z_0, z_2, C) z_1, z_2 a vyjádřete předpis pro odhady a kovarianční matice chyb odhadů obecně, tj. v závislosti jen na T, q, a R. Uvědomte si, že odhadujete-li konstantu, kovarianční matice odhadu a chyby odhadu jsou stejné. Jaké pravděpodobnostní rozdělení mají odhady a proč?

Nápověda: stačí vynechat některé řádky z původní rovnice $\mathbf{z} = \mathbf{H}\mathbf{x}_0 + \mathbf{e}$, z bodu (i).

Dosaďte do odhadů a kovariančních matic hodnoty $T = 1$, $q = 0.1$ a $R = 1$. S těmito parametry také vyjádřete odhady a kovarianční matice pro D) z_0, z_1, z_2 a E) z_0, z_1, z_2, z_3. Popište, co se děje, když některé měření chybí. Co kdyby bylo měření jenom jedno?

(iii) Interpretovat přesnost přímo z hodnot kovariančních matic může být obtížné. Lze ji ale znázornit graficky, pomocí 3-σ elips. Pro nestranný odhad s kovarianční maticí $\mathbf{P}$ se jedná o křivku $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^{\mathrm{T}}\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 9\}$. Porovnejte 3-$\sigma$ elipsy pro všechny případy A)–E). Lze odhady uspořádat od nejlepšího po nejhorší?

Návod: Najděte křivky $\{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{u} = 1\}$, pak použijte transformaci $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + 3\mathbf{S}\mathbf{u}$, kde $\mathbf{S}$ je maticová odmocnina matice $\mathbf{P}$ splňující $\mathbf{S}\mathbf{S}^{\mathrm{T}} = \mathbf{P}$, například Choleského faktor.

Simulační úkoly: Simulační ověření teoretických výsledků.
Pomocí funkce `randn` vygenerujte 1000 realizací náhodného vektoru $\mathbf{z}$. Pro každý nasimulovaný vektor měření $\mathbf{z}$ dopočtěte realizace odhadů $\hat{\mathbf{x}}_0$ pro varianty A)–E).

(i) Odhadněte hustoty jednotlivých odhadů *polohy* pomocí normalizovaných histogramů. Porovnejte je mezi sebou, a také je porovnejte s teoretickými hustotami – s marginálními hustotami odhadů polohy, tedy $\mathcal{N}(\bar{x}_0^{\text{poloha}}, \mathbf{P}^{[\text{daný případ}]}_{\text{na pozici } 1,1})$.

(ii) Pro variantu E) porovnejte "teoreticky odvozenou" 3-σ elipsu s příslušnými realizacemi odhadu a 3-sigma elipsou odpovídající výběrové kovarianční matici.

2 Vypracování

Semestrální práce byla z velké části řešena v programovém prostředí Matlab.

2.1 Teorerické úkoly

2.1.1 Úkol (i)

Nejdříve byla sestavena následující rovnice:

$$z = \boldsymbol{H}x_0 + e, \tag{1}$$

kde $z = [z_0, ..., z_3]^T$.

Pro získání $z = [z_0, ..., z_3]^T$ byl zadaný systém nejprve přepsán do následujícího tvaru:

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{G}\boldsymbol{w}_k, \quad w_k \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{Q}), \tag{2}$$

$$\boldsymbol{z}_k = \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{v}_k, \quad v_k \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{R}), \tag{3}$$

kde $\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{G} = I$, $\boldsymbol{Q} = q \begin{bmatrix} \frac{T^3}{3} & \frac{T^2}{2} \\ \frac{T^2}{2} & T \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Ze zadání je dále známo, že náhodné veličiny $\boldsymbol{w}_k$ a $\boldsymbol{v}_k$ jsou vzájemně nezávislé bílé šumy $\forall k \in \mathbb{N}$.

Následně již bylo možné začít sestavovat trajektorii stavu a měření.

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_0 \\ \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_0 \\ \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{w}_0 \\ \boldsymbol{F}^2\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{F}\boldsymbol{w}_0 + \boldsymbol{w}_1 \\ \boldsymbol{F}^3\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{F}^2\boldsymbol{w}_0 + \boldsymbol{F}\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{F}^2 \\ \boldsymbol{F}^3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_0 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{I} & 0 & 0 \\ \boldsymbol{F} & \boldsymbol{I} & 0 \\ \boldsymbol{F}^2 & \boldsymbol{F} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}_0 \\ \boldsymbol{w}_1 \\ \boldsymbol{w}_2 \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_0 \\ \boldsymbol{z}_1 \\ \boldsymbol{z}_2 \\ \boldsymbol{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{v}_0 \\ \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{v}_2 \\ \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}_3 + \boldsymbol{v}_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{H} \\ \boldsymbol{H}\boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{H}\boldsymbol{F}^2 \\ \boldsymbol{H}\boldsymbol{F}^3 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{J}} \boldsymbol{x}_0 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{H} & 0 & 0 \\ \boldsymbol{H}\boldsymbol{F} & \boldsymbol{H} & 0 \\ \boldsymbol{H}\boldsymbol{F}^2 & \boldsymbol{H}\boldsymbol{F} & \boldsymbol{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}_0 \\ \boldsymbol{w}_1 \\ \boldsymbol{w}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_0 \\ \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{v}_2 \\ \boldsymbol{v}_3 \end{bmatrix} \tag{5}$$

V dalším kroku mohla být zavedena chyba e, která je definována následovně:

$$e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{H} & 0 & 0 \\ \boldsymbol{H}\boldsymbol{F} & \boldsymbol{H} & 0 \\ \boldsymbol{H}\boldsymbol{F}^2 & \boldsymbol{H}\boldsymbol{F} & \boldsymbol{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}_0 \\ \boldsymbol{w}_1 \\ \boldsymbol{w}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_0 \\ \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{v}_2 \\ \boldsymbol{v}_3 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Zjednodušený zápis chyby e pomocí jednoho vektoru:

$$e = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_0 \\ \boldsymbol{H}\boldsymbol{w}_0 + \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{H}\boldsymbol{F}\boldsymbol{w}_0 + \boldsymbol{H}\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{v}_2 \\ \boldsymbol{H}\boldsymbol{F}^2\boldsymbol{w}_0 + \boldsymbol{H}\boldsymbol{F}\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{H}\boldsymbol{w}_2 + \boldsymbol{v}_3 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Nyní je potřeba vypočítat kovarianční matici $\mathbf{\Sigma} = E(ee^T)$ chyby e, která je potřebná k formulaci problému odhadu x_0 pomocí metody vážených nejmenších čtverců.

$$ee^T = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_0 \\ \boldsymbol{H}\boldsymbol{w}_0 + \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{H}\boldsymbol{F}\boldsymbol{w}_0 + \boldsymbol{H}\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{v}_2 \\ \boldsymbol{H}\boldsymbol{F}^2\boldsymbol{w}_0 + \boldsymbol{H}\boldsymbol{F}\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{H}\boldsymbol{w}_2 + \boldsymbol{v}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_0 \\ \boldsymbol{H}\boldsymbol{w}_0 + \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{H}\boldsymbol{F}\boldsymbol{w}_0 + \boldsymbol{H}\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{v}_2 \\ \boldsymbol{H}\boldsymbol{F}^2\boldsymbol{w}_0 + \boldsymbol{H}\boldsymbol{F}\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{H}\boldsymbol{w}_2 + \boldsymbol{v}_3 \end{bmatrix}^T \tag{8}$$

$$ee^T = \begin{bmatrix} {v_0}^2 & v_0\,(v_1 + H\,w_0) & v_0\,(v_2 + H\,w_1 + F\,H\,w_0) & v_0\,\left(H\,w_0\,F^2 + H\,w_1\,F + v_3 + H\,w_2\right) \\ v_0\,(v_1 + H\,w_0) & (v_1 + H\,w_0)^2 & (v_1 + H\,w_0)\,(v_2 + H\,w_1 + F\,H\,w_0) & (v_1 + H\,w_0)\,\left(H\,w_0\,F^2 + H\,w_1\,F + v_3 + H\,w_2\right) \\ v_0\,(v_2 + H\,w_1 + F\,H\,w_0) & (v_1 + H\,w_0)\,(v_2 + H\,w_1 + F\,H\,w_0) & (v_2 + H\,w_1 + F\,H\,w_0)^2 & (v_2 + H\,w_1 + F\,H\,w_0)\,\left(H\,w_0\,F^2 + H\,w_1\,F + v_3 + H\,w_2\right) \\ v_0\,\left(H\,w_0\,F^2 + H\,w_1\,F + v_3 + H\,w_2\right) & (v_1 + H\,w_0)\,\left(H\,w_0\,F^2 + H\,w_1\,F + v_3 + H\,w_2\right) & (v_2 + H\,w_1 + F\,H\,w_0)\,\left(H\,w_0\,F^2 + H\,w_1\,F + v_3 + H\,w_2\right) & \left(H\,w_0\,F^2 + H\,w_1\,F + v_3 + H\,w_2\right)^2 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Nyní aplikujeme na jednotlivé prvky právě vypočtené matice, která je výsledkem součinu ee^T, operátor střední hodnoty E. Získáme kovarianční matici $\mathbf{\Sigma}$ v tomto tvaru:

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{H}^2\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{R} & \boldsymbol{H}^2\boldsymbol{F}\boldsymbol{Q} & \boldsymbol{H}^2\boldsymbol{F}^2\boldsymbol{Q} \\ 0 & \boldsymbol{H}^2\boldsymbol{F}\boldsymbol{Q} & \boldsymbol{H}^2\boldsymbol{F}^2\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{H}^2\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{R} & \boldsymbol{H}^2\boldsymbol{F}^3\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{H}^2\boldsymbol{F}\boldsymbol{Q} \\ 0 & \boldsymbol{H}^2\boldsymbol{F}^2\boldsymbol{Q} & \boldsymbol{H}^2\boldsymbol{F}^3\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{H}^2\boldsymbol{F}\boldsymbol{Q} & \boldsymbol{H}^2\boldsymbol{F}^4\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{H}^2\boldsymbol{F}^2\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{H}^2\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{R} \end{bmatrix} \tag{10}$$

Po dosazení za matice $\boldsymbol{H}, \boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{Q}$ dostaneme:

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{qT^3}{3} + \boldsymbol{R} & \frac{5qT^3}{6} & \frac{4qT^3}{3} \\ 0 & \frac{5qT^3}{6} & \frac{8qT^3}{3} + \boldsymbol{R} & \frac{14qT^3}{3} \\ 0 & \frac{4qT^3}{3} & \frac{14qT^3}{3} & 9qT^3 + \boldsymbol{R} \end{bmatrix} \tag{11}$$

Následně je třeba právě vypočtenou kovarianční matici invertovat. Získaná invertovaná matice $\mathbf{\Sigma}^{-1}$ bude využita jako váhová matice ve formulaci problému odhadu $\boldsymbol{x}_0$ pomocí vážených nejmenších čtverců.

Metoda odhadu pomocí vážených nejmenších čtverců je definovaná následující rovnicí:

$$\hat{x}^{\mathrm{MVNČ}}(z_1 : z_3) = (\boldsymbol{J}^T\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{J})^{-1}\boldsymbol{J}^T\mathbf{\Sigma}^{-1}_{z_1:z_3} \tag{12}$$

Matice $\boldsymbol{J}$ je definována následovně:

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H} \\ \boldsymbol{H}\boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{H}\boldsymbol{F}^2 \\ \boldsymbol{H}\boldsymbol{F}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & T \\ 1 & 2T \\ 1 & 3T \end{bmatrix} \tag{13}$$

2.1.2 Úkol (ii)

Cílem druhého úkolu je pozorovat, co se stane pokud budou využívána různá měření. Pro pozorování budou uvažována měření A) z_0, z_1, B) z_0, z_2, C) z_1, z_2, C) z_0, z_1, z_2 a E) z_0, z_1, z_2, z_3. Dalším bodem je obecné vyjádření předpisu pro odhady a určení kovarianční matice chyb odhadů, taktéž obecně. V dalším kroku budou do odhadů a kovariančních matic dosazeny konkrétní hodnoty:

$$T = 1, q = 0.1 \text{ a } R = 1.$$

(A) **Měření** z_0, z_1

Pro získání obecného vyjádření předpisu pro odhad a určení kovarianční matice chyb odhadu budu využívat stejné kroky jako v teoretickém úkolu (i). Opět využiji rovnici (1). Následně začnu odvozovat trajektorii stavu a měření:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_0 \\ \boldsymbol{x}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_0 \\ \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{w}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{F} \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_0 + \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \boldsymbol{w}_0 \tag{14}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_0 \\ \boldsymbol{z}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{v}_0 \\ \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{v}_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{H} \\ \boldsymbol{H}\boldsymbol{F} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{J}} \boldsymbol{x}_0 + \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{H} \end{bmatrix} \boldsymbol{w}_0 + \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_0 \\ \boldsymbol{v}_1 \end{bmatrix} \tag{15}$$

Nyní mohu zavést chybu e, která je definována následovně:

$$e = \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{H} \end{bmatrix} \boldsymbol{w}_0 + \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_0 \\ \boldsymbol{v}_1 \end{bmatrix} \tag{16}$$

Zjednodušený zápis chyby e pomocí jednoho vektoru:

$$e = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_0 \\ \boldsymbol{H}\boldsymbol{w}_0 + \boldsymbol{v}_1 \end{bmatrix} \tag{17}$$

V dalším kroku je již možné vypočítat kovarianční matici $\boldsymbol{\Sigma} = E(ee^T)$ chyby e.

$$ee^T = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_0 \\ \boldsymbol{H}\boldsymbol{w}_0 + \boldsymbol{v}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_0 & \boldsymbol{H}\boldsymbol{w}_0 + \boldsymbol{v}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0^2 & v_0(v_1 + \boldsymbol{H}w_0) \\ v_0(v_1 + \boldsymbol{H}w_0) & (v_1 + \boldsymbol{H}w_0)^2 \end{bmatrix} \tag{18}$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{H}^2\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & 0 \\ 0 & \frac{qT^3}{3} + \boldsymbol{R} \end{bmatrix} \tag{19}$$

Po modifikaci rovnice (12) pro měření z_0, z_1 dostanu následující výsledek:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-1}{T} & \frac{1}{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \end{bmatrix} \tag{20}$$

Po dosazení za T, q a R dostanu:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{31}{30} \end{bmatrix}, \quad \hat{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \end{bmatrix} \tag{21}$$

(B) **Měření** z_0, z_2

Využiji stejný postup jako u předešlého měření z_0, z_1. Odvození trajektorie stavu a měření:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_0 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_0 \\ \boldsymbol{F}^2\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{F}\boldsymbol{w}_0 + \boldsymbol{w}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{F^2} \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_0 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \boldsymbol{F} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}_0 \\ \boldsymbol{w}_1 \end{bmatrix} \tag{22}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_0 \\ \boldsymbol{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{v}_0 \\ \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{H} \\ \boldsymbol{H}\boldsymbol{F^2} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{J}} \boldsymbol{x}_0 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \boldsymbol{H}\boldsymbol{F} & \boldsymbol{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}_0 \\ \boldsymbol{w}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_0 \\ \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix} \tag{23}$$

Nyní mohu zavést chybu e, která je definována následovně:

$$e = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \boldsymbol{H}\boldsymbol{F} & \boldsymbol{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}_0 \\ \boldsymbol{w}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_0 \\ \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix} \tag{24}$$

Zjednodušený zápis chyby e pomocí jednoho vektoru:

$$e = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_0 \\ \boldsymbol{H}\boldsymbol{F}\boldsymbol{w}_0 + \boldsymbol{H}\boldsymbol{F}\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix} \tag{25}$$

V dalším kroku je již možné vypočítat kovarianční matici $\boldsymbol{\Sigma} = E(ee^T)$ chyby e.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_0 \\ \boldsymbol{H}\boldsymbol{F}\boldsymbol{w}_0 + \boldsymbol{H}\boldsymbol{F}\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_0 & \boldsymbol{H}\boldsymbol{F}\boldsymbol{w}_0 + \boldsymbol{H}\boldsymbol{F}\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} {v_0}^2 & v_0(v_2 + H\,w_1 + F\,H\,w_0) \\ v_0(v_2 + Hw_1 + FHw_0) & (v_2 + Hw_1 + FHw_0{}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & 0 \\ 0 & \frac{8qT^3}{3} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{26}$$

Po modifikaci rovnice (12) pro měření z_0, z_2 dostanu následující výsledek:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-1}{2T} & \frac{1}{2T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ z_2 \end{bmatrix} \tag{27}$$

Po dosazení za T, q a R dostanu:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{19}{15} \end{bmatrix}, \quad \hat{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ z_2 \end{bmatrix} \tag{28}$$

(C) **Měření** z_1, z_2

Použiji stejný postup jako u předešlých měření. Odvození trajektorie stavu a měření:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{w}_0 \\ \boldsymbol{F}^2\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{F}\boldsymbol{w}_0 + \boldsymbol{w}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{F^2} \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_0 + \begin{bmatrix} I & 0 \\ \boldsymbol{F} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}_0 \\ \boldsymbol{w}_1 \end{bmatrix} \tag{29}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_1 \\ \boldsymbol{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{H}\boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{H}\boldsymbol{F^2} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{J}} \boldsymbol{x}_0 + \begin{bmatrix} H & 0 \\ \boldsymbol{H}\boldsymbol{F} & \boldsymbol{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}_0 \\ \boldsymbol{w}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix} \tag{30}$$

Nyní mohu opět zavést chybu e, která je definována následovně:

$$e = \begin{bmatrix} H & 0 \\ \boldsymbol{H}\boldsymbol{F} & \boldsymbol{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}_0 \\ \boldsymbol{w}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix} \tag{31}$$

Zjednodušený zápis chyby e pomocí jednoho vektoru:

$$e = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}\boldsymbol{w}_0 + \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{H}\boldsymbol{F}\boldsymbol{w}_0 + \boldsymbol{H}\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix} \tag{32}$$

V dalším kroku je již opět možné vypočítat kovarianční matici $\boldsymbol{\Sigma} = E(ee^T)$ chyby e.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}\boldsymbol{w}_0 + \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{H}\boldsymbol{F}\boldsymbol{w}_0 + \boldsymbol{H}\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}\boldsymbol{w}_0 + \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{H}\boldsymbol{F}\boldsymbol{w}_0 + \boldsymbol{H}\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} (v_1 + Hw_0)^2 & (v_1 + Hw_0)(v_2 + Hw_1 + FHw_0) \\ (v_1 + H\,w_0(v_2 + Hw_1 + FHw_0) & (v_2 + Hw_1 + FHw_0{}^2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{qT^3}{3} + \boldsymbol{R} & \frac{5qT^3}{6} \\ \frac{5qT^3}{6} & \frac{8qT^3}{3} + \boldsymbol{R} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{33}$$

Po modifikaci rovnice (12) pro měření z_1, z_2 dostanu následující výsledek:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ \frac{-1}{T} & \frac{1}{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \tag{34}$$

Po dosazení za T, q a R dostanu:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \frac{31}{30} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{19}{15} \end{bmatrix}, \quad \hat{x} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \tag{35}$$

(D) **Měření** z_0, z_1, z_2

Postup je obdobný jako u předchozích příkladů. Sestavení trajektorie stavu a měření:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_0 \\ \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_0 \\ \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{w}_0 \\ \boldsymbol{F}^2\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{F}\boldsymbol{w}_0 + \boldsymbol{w}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{F^2} \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_0 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \\ \boldsymbol{F} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}_0 \\ \boldsymbol{w}_1 \end{bmatrix} \tag{36}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_0 \\ \boldsymbol{z}_1 \\ \boldsymbol{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{v}_0 \\ \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{H} \\ \boldsymbol{H}\boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{H}\boldsymbol{F}^2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{J}} \boldsymbol{x}_0 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \boldsymbol{H} & 0 \\ \boldsymbol{H}\boldsymbol{F} & \boldsymbol{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}_0 \\ \boldsymbol{w}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_0 \\ \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix} \tag{37}$$

V dalším kroku mohla být opět zavedena chyba e, která je definována následovně:

$$e = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \boldsymbol{H} & 0 \\ \boldsymbol{H}\boldsymbol{F} & \boldsymbol{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}_0 \\ \boldsymbol{w}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_0 \\ \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix} \tag{38}$$

Zjednodušený zápis chyby e pomocí jednoho vektoru:

$$e = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_0 \\ \boldsymbol{H}\boldsymbol{w}_0 + \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{H}\boldsymbol{F}\boldsymbol{w}_0 + \boldsymbol{H}\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix} \tag{39}$$

Nyní je potřeba vypočítat kovarianční matici $\boldsymbol{\Sigma} = E(ee^T)$ chyby e, která je potřebná k formulaci problému odhadu x_0 pomocí metody vážených nejmenších čtverců.

$$ee^T = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_0 \\ \boldsymbol{H}\boldsymbol{w}_0 + \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{H}\boldsymbol{F}\boldsymbol{w}_0 + \boldsymbol{H}\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_0 & \boldsymbol{H}\boldsymbol{w}_0 + \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{H}\boldsymbol{F}\boldsymbol{w}_0 + \boldsymbol{H}\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix} \tag{40}$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{qT^3}{3} + \boldsymbol{R} & \frac{5qT^3}{6} \\ 0 & \frac{5qT^3}{6} & \frac{8qT^3}{3} + \boldsymbol{R} \end{bmatrix} \tag{41}$$

Po modifikaci rovnice (12) pro měření z_0, z_1, z_2 dostanu následující výsledek:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \frac{2qT^3+15R}{2qT^3+18R} & \frac{3R}{qT^3+9R} & -\frac{3R}{2qT^3+18R} \\ -\frac{5qT^3+18R}{4(qT^4+9RT} & \frac{3T^2q}{2qT^3+18R} & \frac{18R-T^3q}{4T(qT^3+9R)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \tag{42}$$

Po dosazení za T, q a R dostanu:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{31}{30} & \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{19}{15} \end{bmatrix}, \quad \hat{x} = \begin{bmatrix} \frac{76}{91} & \frac{30}{91} & \frac{-15}{91} \\ \frac{-185}{364} & \frac{3}{182} & \frac{179}{364} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \tag{43}$$

(E) **Měření** z_0, z_1, z_2, z_3

Obecné vyjádření pro odhad a určení obecné kovarianční matice chyb odhadů pro tohoto měření bylo kompletně řešeno v úkolu (i). V tomto bodě bude tedy pouze dosazeno do obecných předpisů za T, q a R v souladu se zadáním. Výsledná kovarianční matice a výsledný odhad pro měření z_0, z_1, z_2, z_3 budou vypadat následovně:

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{31}{30} & \frac{1}{12} & \frac{2}{15} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{19}{15} & \frac{7}{15} \\ 0 & \frac{2}{15} & \frac{7}{15} & \frac{19}{10} \end{bmatrix}, \quad \hat{x} = \begin{bmatrix} \frac{3569}{5025} & \frac{652}{1675} & \frac{152}{1675} & \frac{-956}{5025} \\ \frac{-24559}{75375} & \frac{-1772}{25125} & \frac{2978}{25125} & \frac{20941}{75375} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \tag{44}$$

Jednotlivé odhady mají normální (Gaussovo) pravděpodobnostní rozdělení, a to kvůli aditivním bílým šumům $\boldsymbol{w}_k$ a $\boldsymbol{v}_k$, které oba mají normální rozdělení a ovlivňují každé měření. Pokud chybí některá měření dojde k logickému snížení přesnosti, což způsobí horší odhad. Dále byla na počtu měření závislá velikost matice estimátorů, pokud např. byla k dispozici všechna měření, byla velikost matice 2×4. Na druhou stranu, pokud byla k dispozici pouze dvě měření, pak byla velikost matice 2×2. V případě, že by bylo k dispozici pouze jedno měření, pak by došlo k přímému ovlivnění odhadu veličiny.

2.1.3 Úkol (iii)

Cílem tohoto úkolu je zjištění přesnosti odhadů prostřednictvím grafického znázornění, pomocí 3-σ elips. Tento způsob byl zvolen, protože interpretovat přesnost přímo z hodnot kovariančních matic může být obtížné. Pro nestranný odhad s kovarianční maticí $\boldsymbol{P}$ se jedná o křivku definovanou následující rovnicí:

$$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 : (\mathbf{x} - \mathbf{x_0})^T \mathbf{P}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{x_0}) = 9 \tag{45}$$

Pro získání jednotlivých 3-σ elips je třeba nejprve nalézt křivky, které splňují následující předpis:

$$\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2 : \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{u} = 1, \tag{46}$$

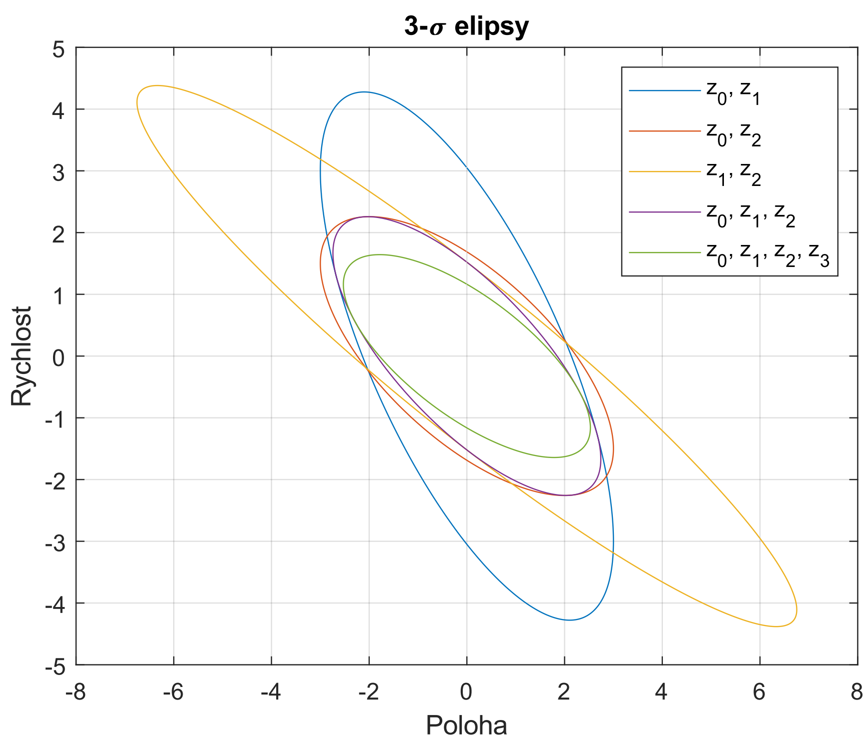
což je rovnice pomocí, které může být definována jednotková kružnice.
Na rovnici (46) je třeba následně použít transformaci, která je zadaná pomocí následující rovnice:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + 3\boldsymbol{S}\boldsymbol{u}, \tag{47}$$

kde $\boldsymbol{S}$ je maticová odmocnina matice $\boldsymbol{P}$ splňující kritérium $\boldsymbol{S}\boldsymbol{S}^T = \boldsymbol{P}$, což je např. Choleského faktor. V našem případě byla matice $\boldsymbol{S}$ kovarianční maticí chyby odhadu. V našem případě matice $\boldsymbol{S}$ reprezentuje kovarianční matici chyby odhadu jednotlivých měření. Kovarianční matice chyby odhadu byly vypočteny pomocí následujícího vzorce:

$$\operatorname{cov}[\tilde{\boldsymbol{x}}] = (\boldsymbol{J}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{J})^{-1}, \tag{48}$$

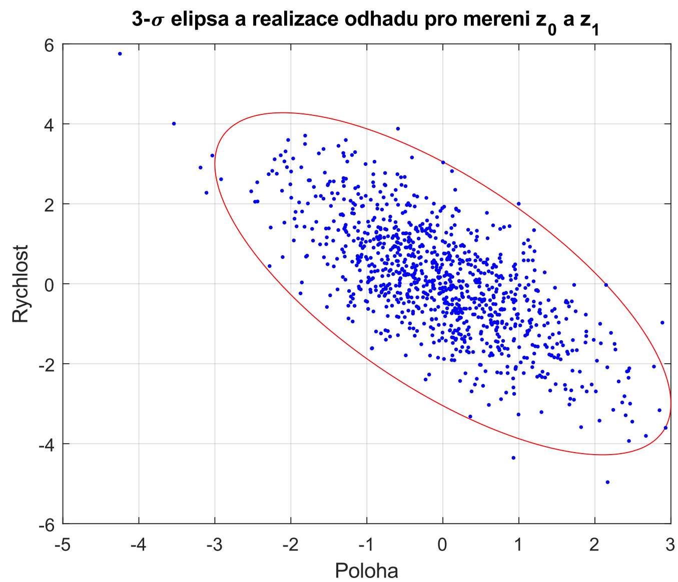
kde za $\boldsymbol{J}$ a $\boldsymbol{\Sigma}$ byly dosazovány již předtím získané matice $\boldsymbol{J}$ a $\boldsymbol{\Sigma}$ konkrétních měření A)-E).



Obrázek 1: Vykreslení jednotlivých 3-σ elips pro různá měření A)-E), kde $\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Nejhorší přesnost odhadu dostaneme, pokud není k dispozici první a poslední měření. Naopak nejlepší přesnost odhadu lze dostat, pokud jsou k dispozici všechna měření.

2.2 Simulační úkoly

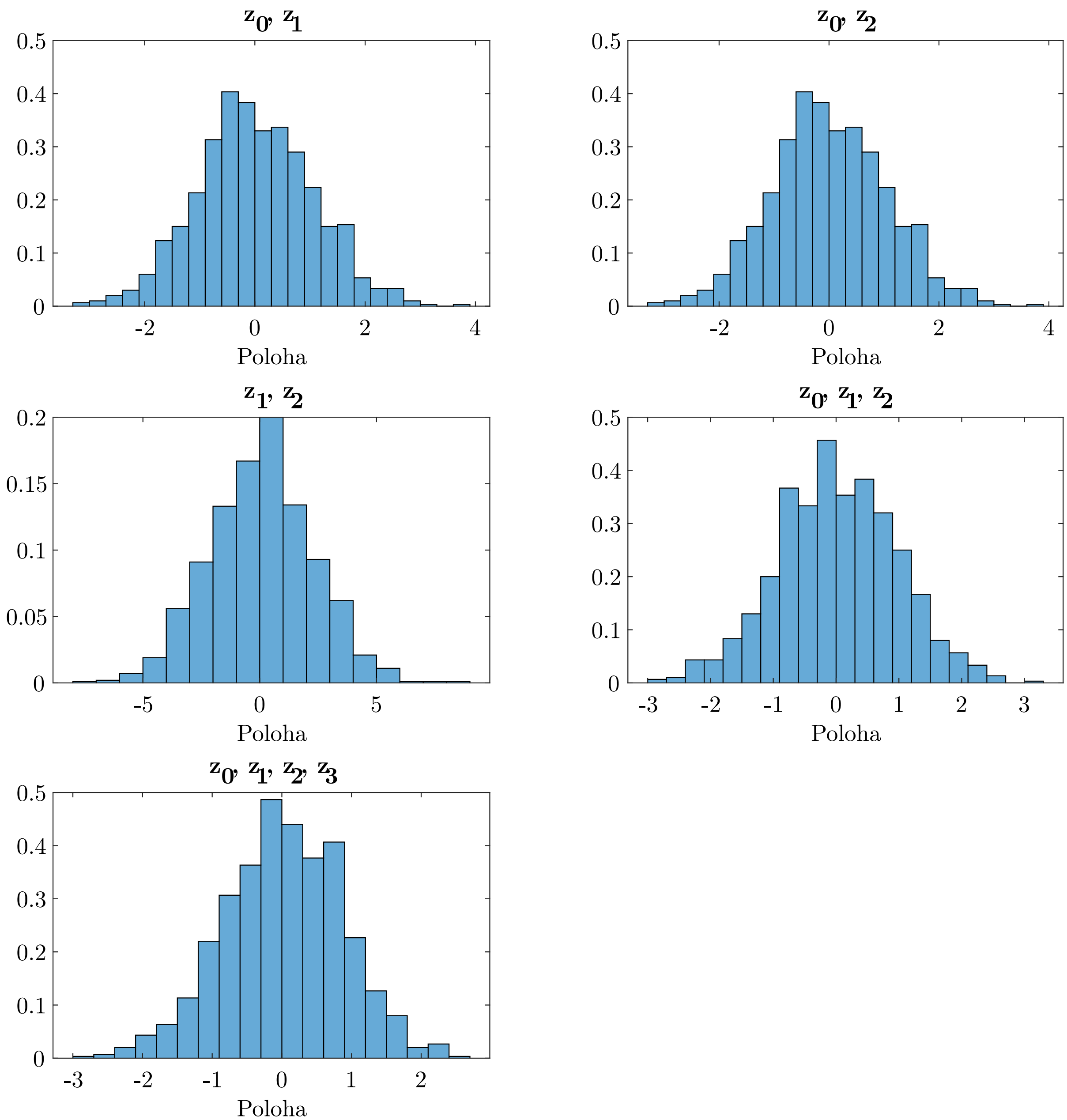
Nejprve bylo třeba pomocí funkce *randn* vygenerovat 1000 realizací náhodného vektoru $\boldsymbol{z}$. Následně byly pro každý vygenerovaný vektor měření $\boldsymbol{z}$ dopočítány realizace odhadů $\hat{\boldsymbol{x}}_0$ pro jednotlivé varianty A)-E).



Obrázek 2: Kontrolní vykreslení 3-σ elipsy společně s realizacemi odhadů pro měření z_0 a z_1, $\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

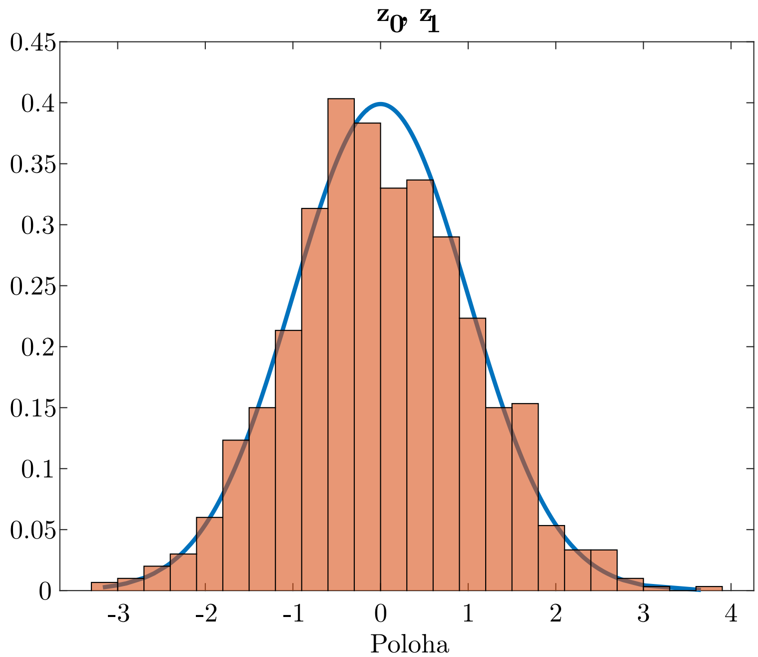
2.2.1 Úkol (i)

V této části byly nejprve odhadnuty hustoty jednotlivých odhadů *polohy* pomocí normalizovaných histogramů. Tyto histogramy byly mezi sebou následně porovnány.

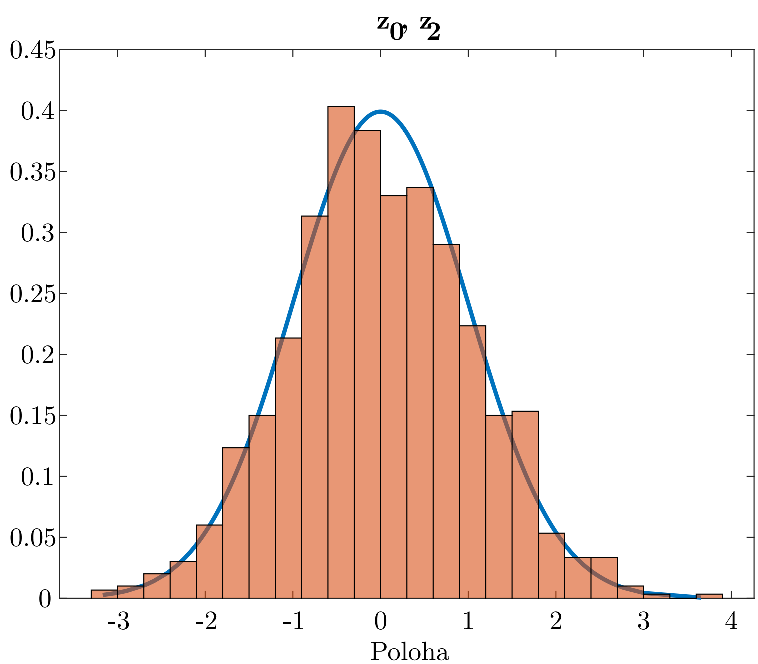


Obrázek 3: Vzájemné porovnání histogramů jednotlivých měření. Lze si povšimnout, že histogramy měření z_0, z_1 a z_0, z_2 jsou shodné.

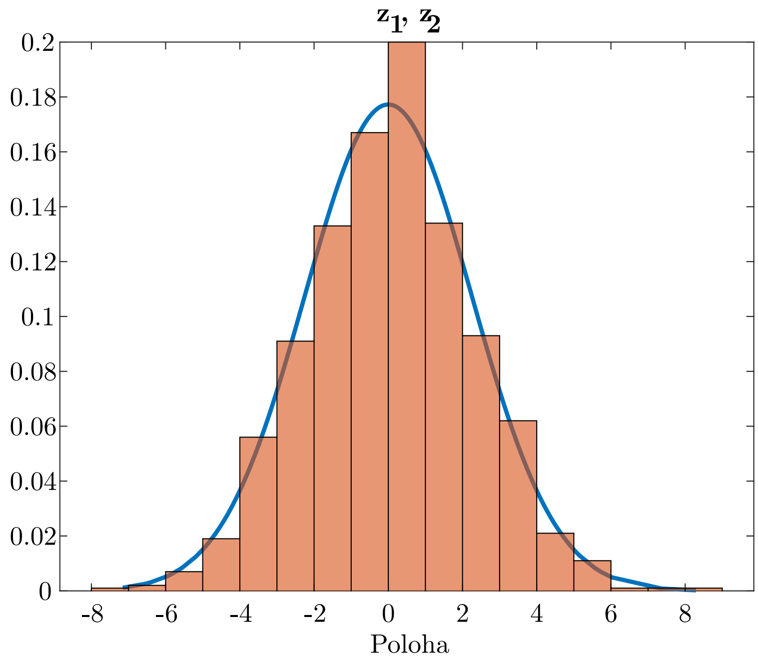
Poté byly získané normalizované histogramy byly porovnány s teoretickými hustotami $\mathcal{N}\{\overline{x}_0^{\text{poloha}}, \boldsymbol{P}_{\text{na pozici 1, 1}}^{[\text{daný případ}]}\}$. Teoretická střední hodnota $\overline{x}_0^{\text{poloha}}$ všech teoretických hustot byla zvolena rovna 0. Matice $\boldsymbol{P}$ byla rovna kovarianční matici chyb odhadu konkrétního měření.



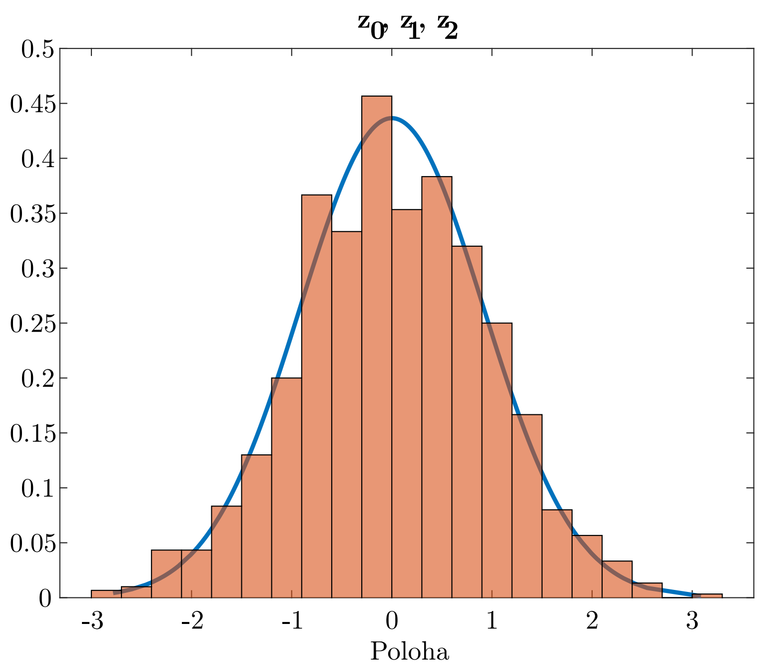
Obrázek 4: Porovnání získaného histogramu měření z_0, z_1 s příslušnou teoretickou hustotou.



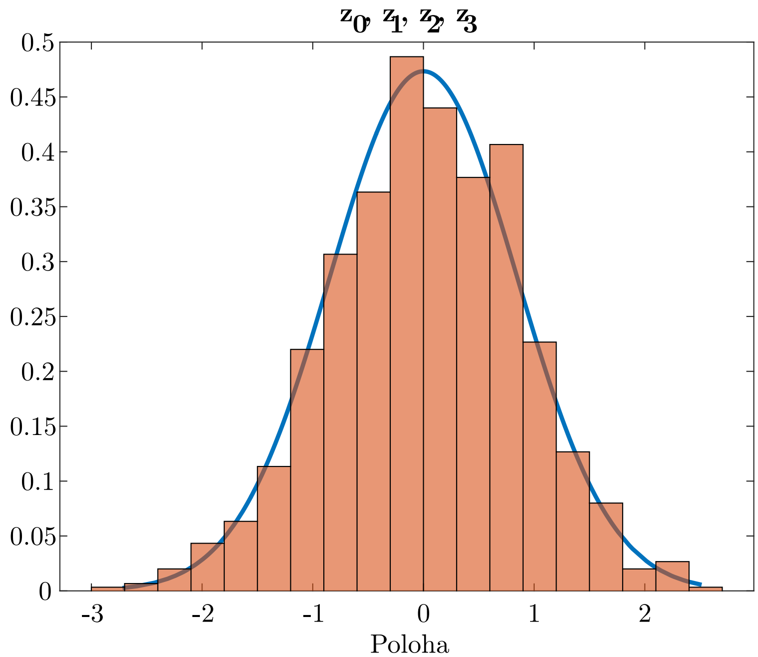
Obrázek 5: Porovnání získaného histogramu měření z_0, z_2 s příslušnou teoretickou hustotou.



Obrázek 6: Porovnání získaného histogramu měření z_1, z_2 s příslušnou teoretickou hustotou.



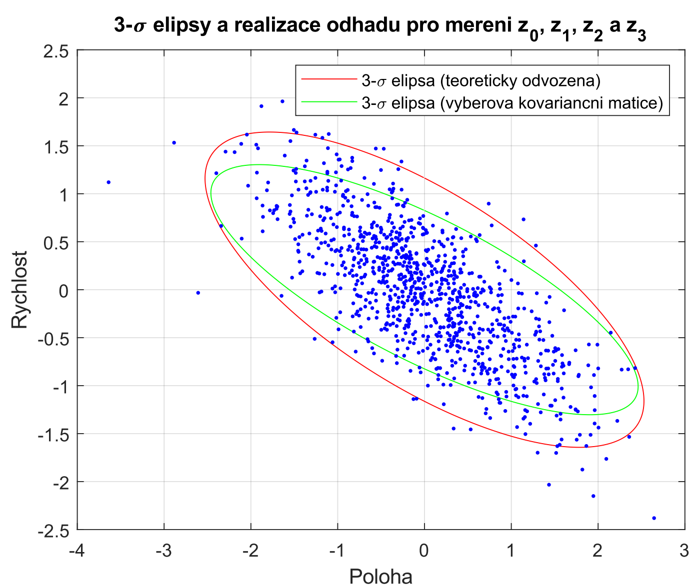
Obrázek 7: Porovnání získaného histogramu měření z_0, z_1, z_2 s příslušnou teoretickou hustotou.



Obrázek 8: Porovnání získaného histogramu měření z_0, z_1, z_2, z_3 s příslušnou teoretickou hustotou.

2.2.2 Úkol (ii)

V tomto úkolu byla pro variantu E) porovnána příslušná teoreticky odvozená 3-σ elipsa s 3-σ elipsou, odpovídající výběrové kovarianční matici. Výběrová kovarianční matice byla získána pomocí Matlab příkazu *cov()*.



Obrázek 9: Vykreslení teoreticky odvozené 3-σ elipsy a 3-σ elipsy, odpovídající výběrové kovarianční matici, společně s realizacemi odhadu pro měření pro měření z_0, z_1, z_2 a z_3.

3 Závěr

Tématem této semestrální práce byl odhad konstantní veličiny, který byl zjišťován pomocí metody odhadu podle vážených nejmenších čtverců. Byl uvažován objekt, pohybující se po přímce s náhodným zrychlením, zatímco jeho poloha byla měřena s konstantní periodou T. Hlavním cílem bylo na základě měření a modelu systému odhadnout neznámou, ale konstantní počáteční polohu a rychlost objektu.

V první fázi bylo třeba nejprve formulovat problém odhadu x_0 pomocí vážených nejmenších čtverců. Poté bylo pozorováno, co se stane, když budou využívána pouze některá měření. Jelikož zjistit přesnost rovnou z hodnot kovariančních matic může být obtížné, byly vykresleny tzv. 3-σ elipsy, pomocí kterých lze snadněji interpretovat přesnost.

Druhá fáze se týkala simulačních úloh. Nejprve bylo vygenerováno 1000 realizací náhodného vektoru z. Poté byly, pro každý vektor měření z, dopočteny realizace odhadů x_0. Na základě toho byly následně odhadnuty hustoty jednotlivých odhadů polohy pomocí normalizovaných histogramů, které byly porovnány, jak mezi sebou, tak s teoretickými hustotami. Na závěr byly pro variantu E) porovnány dvě 3-σ elipsy (teoreticky odvozená a odpovídající výběrové kovarianční matici) společně s příslušnými realizacemi.

A Zdrojový kód z Matlabu

```
clc
close all
clear all

%% Semestralni prace c. 1 - TOD
% Jan Burian

%% I. Teorericka cast
% Zadany system
%x_{k+1} = F*x_k + G*w_k, w_k ~ N(0,Q)
%z_{k} = H*x_k + v_k, v_k ~ N(0,R)

%% Ukol (i)
% Parametry systemu (zatim obecne)
syms T q R real
F = [1 T;
     0 1];
G = 1;
H = [1  0];
Q = q * [T^3/3    T^2/2;
         T^2/2    T];

%% Dosazeni do ziskane kovariancni matice Sigma
sigma = [R        0              0                              0;
         0        H*Q*H' + R     H*F*Q*H'                       H*F^2*Q*H';
         0        H*F*Q*H'       H*F*Q*(H*F)' + H*Q*H' + R      H*F*Q*(H*F^2)' + H*F*Q*H';
         0        H*F^2*Q*H'     H*F*Q*(H*F^2)' + H*F*Q*H'      H*F^2*Q*(H*F^2)' + H*F*Q*(H*F)' + H*Q*H' + R];

%% Metoda vazenych nejmensich ctvercu
J = [H; H*F; H*F^2; H*F^3];
J_T = J';
sigma_inv = inv(sigma);

x_mvnc = simplify(inv(J_T * sigma_inv * J) * J_T * sigma_inv);

%% Ukol(ii)
A_sigma = sigma([1,2],[1,2]); % mereni z0, z1
B_sigma = sigma([1,3],[1,3]);  % mereni z0, z2
C_sigma = sigma([2,3],[2,3]); % mereni z1, z2
D_sigma = sigma((1:3),(1:3)); % mereni z0, z1, z2

J_A = [H; H*F];
J_B = [H; H*F^2];
J_C = [H*F; H*F^2];
J_D = [H; H*F; H*F^2];

J_T_A = J_A';
J_T_B = J_B';
J_T_C = J_C';
```

```
J_T_D = J_D';

A_sigma_inv = inv(A_sigma);
B_sigma_inv = inv(B_sigma);
C_sigma_inv = inv(C_sigma);
D_sigma_inv = inv(D_sigma);

x_mvnc_A = simplify(inv(J_T_A * A_sigma_inv * J_A) * J_T_A * A_sigma_inv);
x_mvnc_B = simplify(inv(J_T_B * B_sigma_inv * J_B) * J_T_B * B_sigma_inv);
x_mvnc_C = simplify(inv(J_T_C * C_sigma_inv * J_C) * J_T_C * C_sigma_inv);
x_mvnc_D = simplify(inv(J_T_D * D_sigma_inv * J_D) * J_T_D * D_sigma_inv);

%% Dosazeni T = 1, q = 0.1, R = 1
subs_nezname = [T q R];
subs_nezname_hodnoty = [1 0.1 1];

A_odhad_subs = subs(x_mvnc_A, subs_nezname, subs_nezname_hodnoty);
B_odhad_subs = subs(x_mvnc_B, subs_nezname, subs_nezname_hodnoty);
C_odhad_subs = subs(x_mvnc_C, subs_nezname, subs_nezname_hodnoty);
D_odhad_subs = subs(x_mvnc_D, subs_nezname, subs_nezname_hodnoty);
E_odhad_subs = subs(x_mvnc, subs_nezname, subs_nezname_hodnoty);

A_sigma_subs = subs(A_sigma, subs_nezname, subs_nezname_hodnoty);
B_sigma_subs = subs(B_sigma, subs_nezname, subs_nezname_hodnoty);
C_sigma_subs = subs(C_sigma, subs_nezname, subs_nezname_hodnoty);
D_sigma_subs = subs(D_sigma, subs_nezname, subs_nezname_hodnoty);
E_sigma_subs = subs(sigma, subs_nezname, subs_nezname_hodnoty);

%% Vypocet kovariancnich matic chyby odhadu - potrebne na vykresleni elips
% (J^{T}WJ)^{-1}

covA = inv(J_T_A * A_sigma_inv * J_A);
covB = inv(J_T_B * B_sigma_inv * J_B);
covC = inv(J_T_C * C_sigma_inv * J_C);
covD = inv(J_T_D * D_sigma_inv * J_D);
covE = inv(J_T * sigma_inv * J);

%% Dosazeni T = 1, q = 0.1, R = 1 do matic covA, covB, covC, covD, covE
subs_nezname = [T q R];
subs_nezname_hodnoty = [1 0.1 1];

cov_A_subs = subs(covA, subs_nezname, subs_nezname_hodnoty);
cov_B_subs = subs(covB, subs_nezname, subs_nezname_hodnoty);
cov_C_subs = subs(covC, subs_nezname, subs_nezname_hodnoty);
cov_D_subs = subs(covD, subs_nezname, subs_nezname_hodnoty);
cov_E_subs = subs(covE, subs_nezname, subs_nezname_hodnoty);

%% Ukol (iii)
```

```
% Vykresleni elips
x0 = [0; 0];
t = 0:0.01:2*pi;

x = sin(t);
y = cos(t);

vector_xy = [x; y];
xy = zeros(2, length(t));

cells_cov = cell(1,5);
cells_cov{1} = cov_A_subs;
cells_cov{2} = cov_B_subs;
cells_cov{3} = cov_C_subs;
cells_cov{4} = cov_D_subs;
cells_cov{5} = cov_E_subs;

figure;
for i = 1:length(cells_cov)
    S = cells_cov{i};
    P = chol(S, 'lower');
    for j = 1:length(t)
        xy(:,j) = x0 + 3 * P * vector_xy(:,j);
    end
    plot(xy(1,:),xy(2,:));

    hold on;
end

title('3-\sigma elipsy');
xlabel('Poloha');
ylabel('Rychlost');
legend('z_0, z_1','z_0, z_2', 'z_1, z_2', 'z_0, z_1, z_2', 'z_0, z_1, z_2, z_3')
grid on;

%% II. Simulacni cast
%% Ukol (i)
% Vygenerovani 1000 realizaci nahodneho vektoru z
N = 1000;
pocet_mereni = 4;

Z = randn(N, pocet_mereni);

%% Vypoctene estimatory
est_z0_z1 = double(A_odhad_subs);
est_z0_z2 = double(B_odhad_subs);
est_z1_z2 = double(C_odhad_subs);
est_z0_z1_z2 = double(D_odhad_subs);
est_z0_z1_z2_z3 = double(E_odhad_subs);

%% Realizace odhadu
res_z0_z1 = zeros(2,N); %[poloha; rychlost]
```

```
res_z0_z2 = zeros(2,N); %[poloha; rychlost]
res_z1_z2 = zeros(2,N); %[poloha; rychlost]
res_z0_z1_z2 = zeros(2,N); %[poloha; rychlost]
res_z0_z1_z2_z3 = zeros(2,N); %[poloha; rychlost]

for m = 1:1:N
    mereni = Z(m,:);
    z0 = mereni(1);
    z1 = mereni(2);
    z2 = mereni(3);
    z3 = mereni(4);

    real_z0_z1 = est_z0_z1 * [z0; z1];
    real_z0_z2 = est_z0_z2 * [z0; z2];
    real_z1_z2 = est_z1_z2 * [z1; z2];
    real_z0_z1_z2 = est_z0_z1_z2 * [z0; z1; z2];
    real_z0_z1_z2_z3 = est_z0_z1_z2_z3 * [z0; z1; z2; z3];

    res_z0_z1(:,m) = real_z0_z1;
    res_z0_z2(:,m) = real_z0_z2;
    res_z1_z2(:,m) = real_z1_z2;
    res_z0_z1_z2(:,m) = real_z0_z1_z2;
    res_z0_z1_z2_z3(:,m) = real_z0_z1_z2_z3;
end

%% Histogramy - Ukol (ii)
subplot(3,2,1)
histogram(res_z0_z1(1,:), 'Normalization','pdf')
xlabel('Poloha');
title('z_0, z_1');

subplot(3,2,2)
histogram(res_z0_z2(1,:), 'Normalization','pdf');
xlabel('Poloha');
title('z_0, z_2');

subplot(3,2,3)
histogram(res_z1_z2(1,:), 'Normalization','pdf');
xlabel('Poloha');
title('z_1, z_2');

subplot(3,2,4)
histogram(res_z0_z1_z2(1,:), 'Normalization','pdf');
xlabel('Poloha');
title('z_0, z_1, z_2');

subplot(3,2,5)
histogram(res_z0_z1_z2_z3(1,:), 'Normalization','pdf');
xlabel('Poloha');
title('z_0, z_1, z_2, z_3');

%% Gaussovy krivky pro jednotliva mereni
var_z0_z1 = cov_A_subs(1, 1);
```

```
var_z0_z2 = cov_B_subs(1, 1);
var_z1_z2 = cov_C_subs(1, 1);
var_z0_z1_z2 = cov_D_subs(1, 1);
var_z0_z1_z2_z3 = cov_E_subs(1, 1);

mean_teo = 0;

x_z0_z1 = sort(res_z0_z1(1,:));
x_z0_z2 = sort(res_z0_z2(1,:));
x_z1_z2 = sort(res_z1_z2(1,:));
x_z0_z1_z2 = sort(res_z0_z1_z2(1,:));
x_z0_z1_z2_z3 = sort(res_z0_z1_z2_z3(1,:));

y_z0_z1 = normpdf(x_z0_z1, mean_teo, sqrt(var_z0_z1));
y_z0_z2 = normpdf(x_z0_z2, mean_teo, sqrt(var_z0_z2));
y_z1_z2 = normpdf(x_z1_z2, mean_teo, sqrt(var_z1_z2));
y_z0_z1_z2 = normpdf(x_z0_z1_z2, mean_teo, sqrt(var_z0_z1_z2));
y_z0_z1_z2_z3 = normpdf(x_z0_z1_z2_z3, mean_teo, sqrt(var_z0_z1_z2_z3));

% Vykresleni
figure;
plot(x_z0_z1, y_z0_z1, 'LineWidth', 2);
hold on;
histogram(res_z0_z1(1,:), 'Normalization','pdf');
title('z_0, z_1');
xlabel('Poloha');

figure;
plot(x_z0_z2, y_z0_z2, 'LineWidth', 2);
hold on;
histogram(res_z0_z2(1,:), 'Normalization','pdf');
title('z_0, z_2');
xlabel('Poloha');

figure;
plot(x_z1_z2, y_z1_z2, 'LineWidth', 2);
hold on;
histogram(res_z1_z2(1,:), 'Normalization','pdf');
title('z_1, z_2');
xlabel('Poloha');

figure;
plot(x_z0_z1_z2, y_z0_z1_z2, 'LineWidth', 2);
hold on;
histogram(res_z0_z1_z2(1,:), 'Normalization','pdf');
title('z_0, z_1, z_2');
xlabel('Poloha');

figure;
plot(x_z0_z1_z2_z3, y_z0_z1_z2_z3, 'LineWidth', 2);
hold on;
histogram(res_z0_z1_z2_z3(1,:), 'Normalization','pdf');
title('z_0, z_1, z_2, z_3');
```

```
xlabel('Poloha');

%% Ukol (ii)
vyber_cov = cov(res_z0_z1_z2_z3');

figure
P = chol(cov_E_subs, 'lower');
for j = 1:length(t)
    xy(:,j) = x0 + 3 * P * vector_xy(:,j);
end
plot(xy(1,:),xy(2,:),'r');
hold on;
P = chol(vyber_cov, 'lower');
for j = 1:length(t)
    xy(:,j) = x0 + 3 * P * vector_xy(:,j);
end
plot(xy(1,:),xy(2,:),'g');
hold on
scatter(res_z0_z1_z2(1,:), res_z0_z1_z2(2,:), '.', 'b');

title('3-\sigma elipsy a realizace odhadu pro mereni z_0, z_1, z_2 a z_3');
legend('3-\sigma elipsa (teoreticky odvozena)','3-\sigma elipsa (vyberova kovariancni matice)');
xlabel('Poloha');
ylabel('Rychlost');
grid on;
```

Seznam obrázků