AGH

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

Wydział Elektroniki, Informatyki i Telekomunikacji

Implementacja szeregu Taylora dla funkcji Sinus

Przedmiot: **Systemy Dedykowane W Układach Programowalnych**

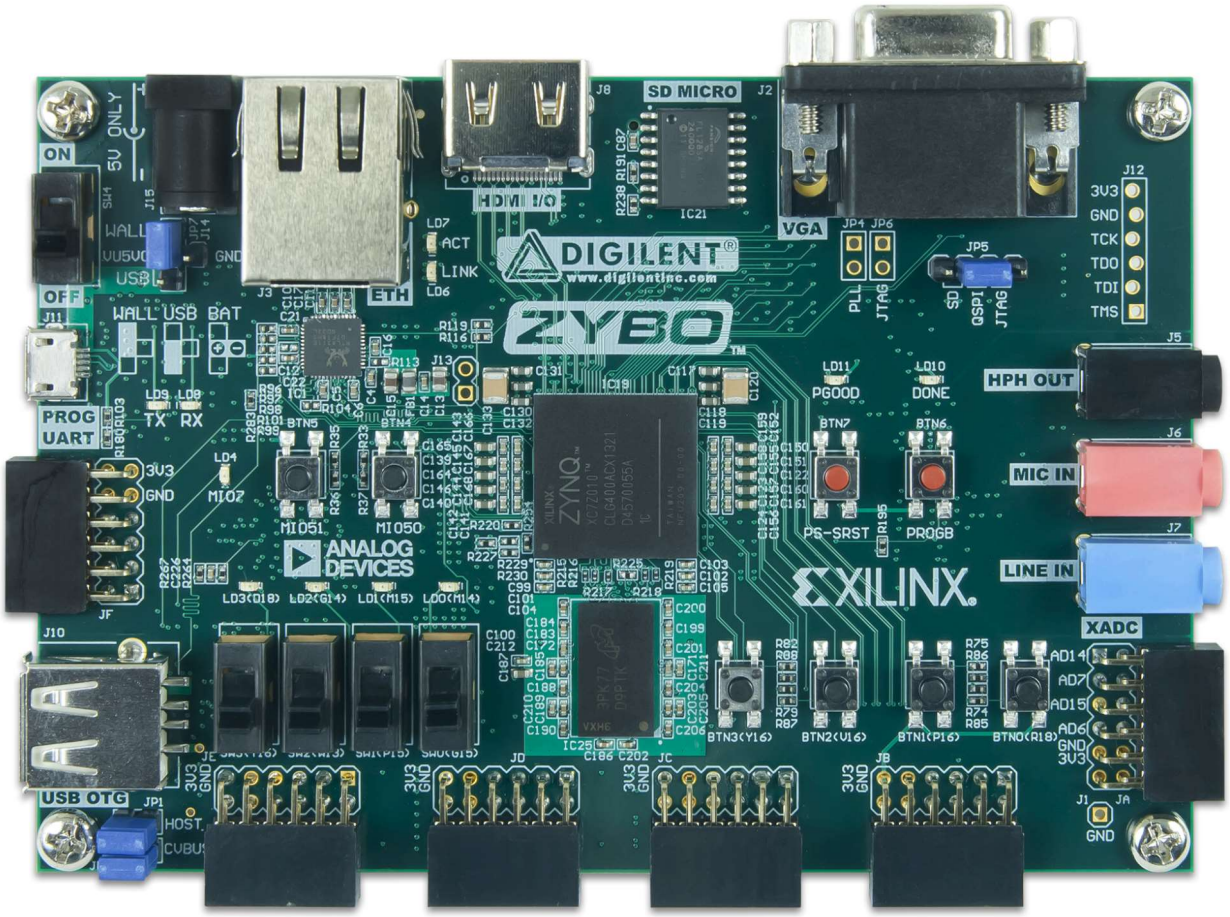
Autorzy:

- **Wiktor Pantak**
- **Jan Rudecki**

Wstęp

Celem projektu było zaimplementowanie **szeregu Taylora** dla funkcji Sinus na FPGA **Zybo Zynq-7000 ARM/FPGA SoC Trainer Board**. Wykorzystywanym oprogramowaniem było Vivado 2023.2.2 oraz środowisko Pynq przystosowane na używaną płytkę.

Płytka Zynq-7000 ARM/FPGA SoC Trainer Board



ZYBO (**ZY**nq **BO**ard) to bogate w funkcje, gotowe do użycia, podstawowe oprogramowanie wbudowane i platforma rozwoju obwodów cyfrowych, zbudowana wokół najmniejszego członka rodziny Xilinx Zynq-7000, Z-7010. Z-7010 jest oparty na architekturze Xilinx All Programmable System-on-Chip (AP SoC), która ściśle integruje dwurdzeniowy procesor ARM Cortex-A9 z logiką Xilinx 7-series Field Programmable Gate Array (FPGA).

Implementacja Szeregu Taylora

Szereg Taylora jest przedstawieniem funckji różniczkowalnej za pomocą sumy wielomianu n-tego stopnia. Poniżej znajduje się wykorzystany wzór szeregu Taylora dla Sinusa w naszej implementacji.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$$

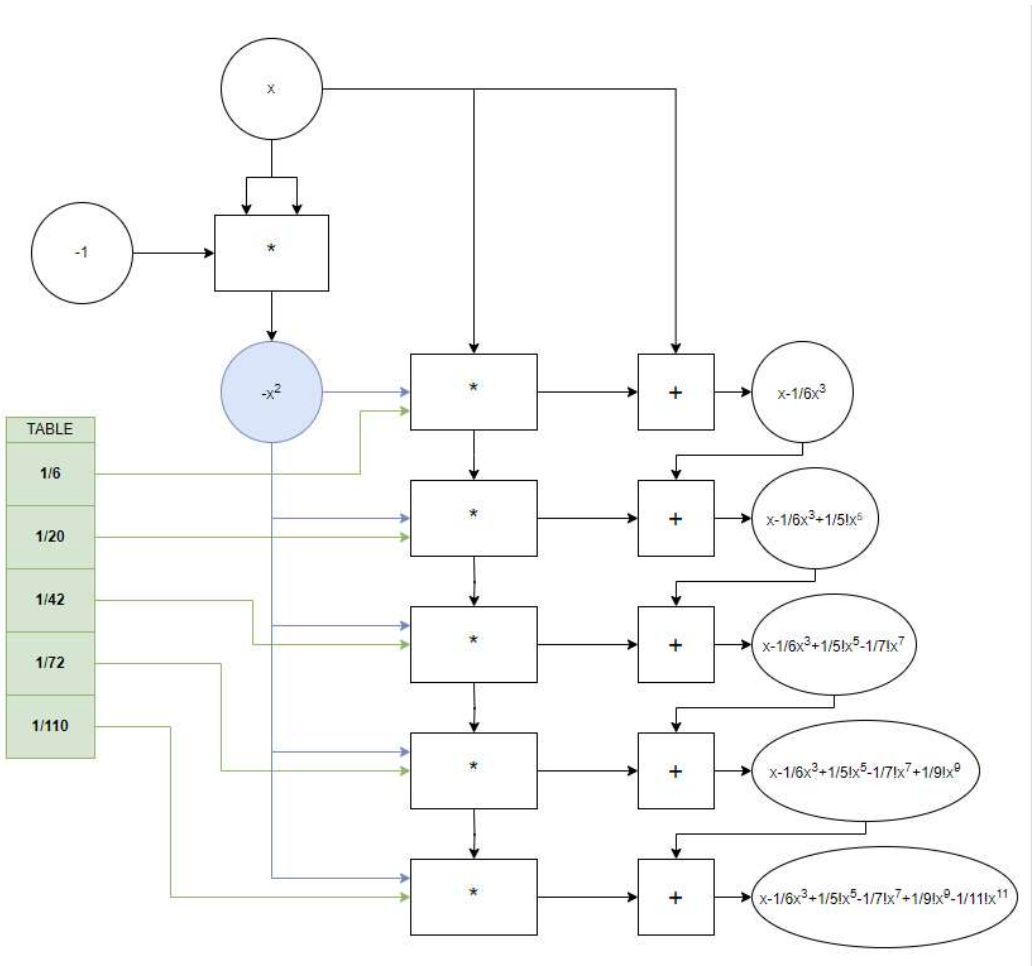
$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(n-1)} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \stackrel{\text{or}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad x \in \mathbb{R}$$

NOTE $y = \sin x$ IS AN ODD FUNCTION (I.E., $\sin(-x) = -\sin(x)$) AND THE TAYLOR SERIS OF $y = \sin x$ HAS ONLY ODD POWERS.

Pierwotny pomysł implementacji został pzedstawiony na poniższym schemacie, zawiera on nastepujące funkcjonalne bloki:

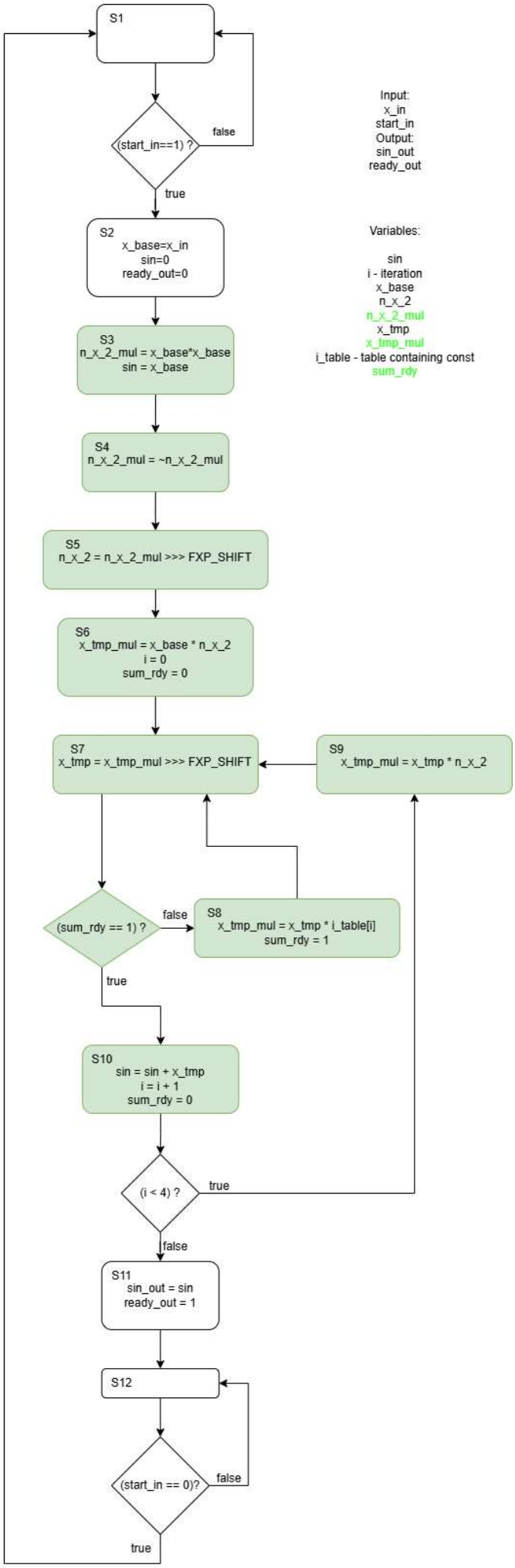
- * - Mnożenie
- + - Dodawanie

Dodatkowo w tabeli są przedstawione wartości początkowe potrzebne w kolejnych iteracjach algorytmu, zmienna x przedstawia dane wejściowe.



Ostatecznie w implementacji wykorzystano pierwsze 4 iteracje, jest to spowodowane precyzją zmiennych, gdyż wykorzystujemy fixed point[12:10] i po piątej iteracji traciliśmy dokładność.

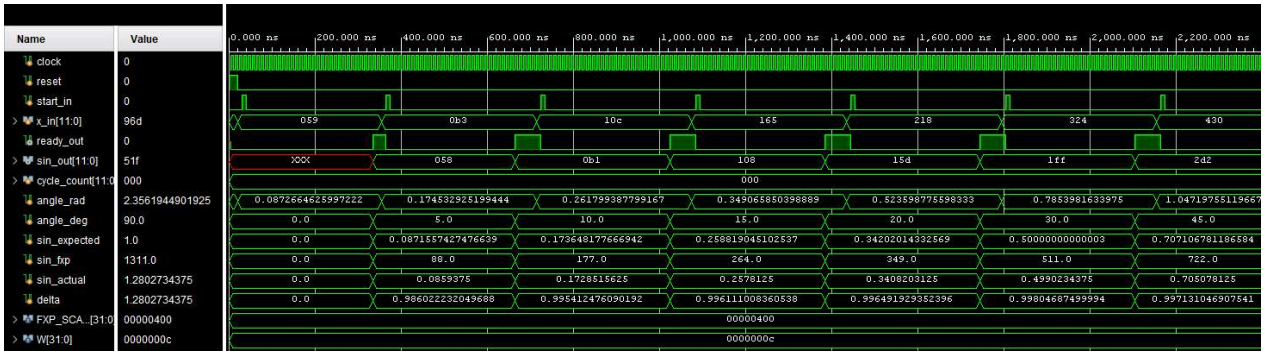
Ostateczna implementacja w języku System Verilog jest przedstawiona poprzez poniższą maszynę stanów:


S1
(start_in==1) ?
false
true
Input:
x_in
start_in
Output:
sin_out
ready_out
S2
x_base=x_in
sin=0
ready_out=0
Variables:
sin
i - iteration
x_base
n_x_2
n_x_2_mul
x_tmp
x_tmp_mul
i_table - table containing const
sum_rdy
S3
n_x_2_mul = x_base*x_base
sin = x_base
S4
n_x_2_mul = ~n_x_2_mul
S5
n_x_2 = n_x_2_mul >>> FXP_SHIFT
S6
x_tmp_mul = x_base * n_x_2
i = 0
sum_rdy = 0
S7
x_tmp = x_tmp_mul >>> FXP_SHIFT
S9
x_tmp_mul = x_tmp * n_x_2
(sum_rdy == 1) ?
false
S8
x_tmp_mul = x_tmp * i_table[i]
sum_rdy = 1
true
S10
sin = sin + x_tmp
i = i + 1
sum_rdy = 0
(i < 4) ?
true
false
S11
sin_out = sin
ready_out = 1
S12
(start_in == 0)?
false
true

Algorytm uruchamia się w momencie kiedy start_in wynosi 1, iteruje się łącznei 5 razy, z czego pierwsza iteracja następuje przed pętlą, są przygotowane zmienne, o dwa razy większej ilosci bitów, w celu przechowywania wyników mnożeń (zmienne _mul). Wartośc x_in jest przekazywana do algorytmu w formacie FXP[12:10], a następnie przypisywana do zmiennej x_base. Wynik końcowy jest przypisywany do zmiennej sin_out, zmienna ready_out ustawia stan na "1" przez co informuje o zakończeniu algorytmu.

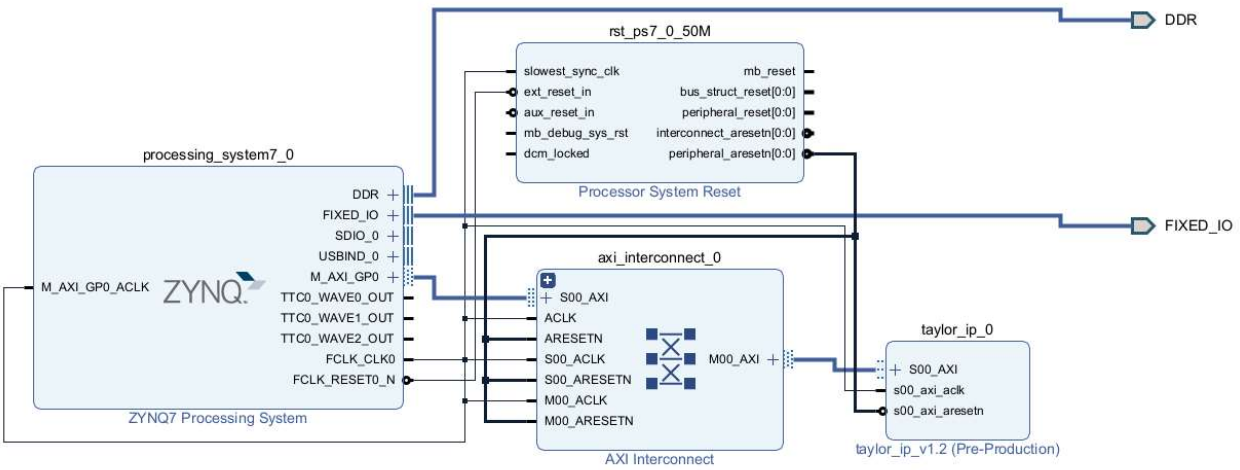
Całośc implementacji znajduje sie w repozytrium github, pod linkiem: https://github.com/janek252/FPGA_taylor_aproximation.git (https://github.com/janek252/FPGA_taylor_aproximation.git)

Wyniki symulacji algorytmu



Symulacja przedatwia zmiany kątów w zakresie od 0° do 45°, umożliwia to zaobserwowania rzeczywistej wartości sinusa (**sin_expected**) oraz implementacji sprzętowej sinusa (**sin_actual**). Przedstawiono również procentowe pokrycie **sin_actual** przez **sin_expected** poprzez zmienną **delta**.

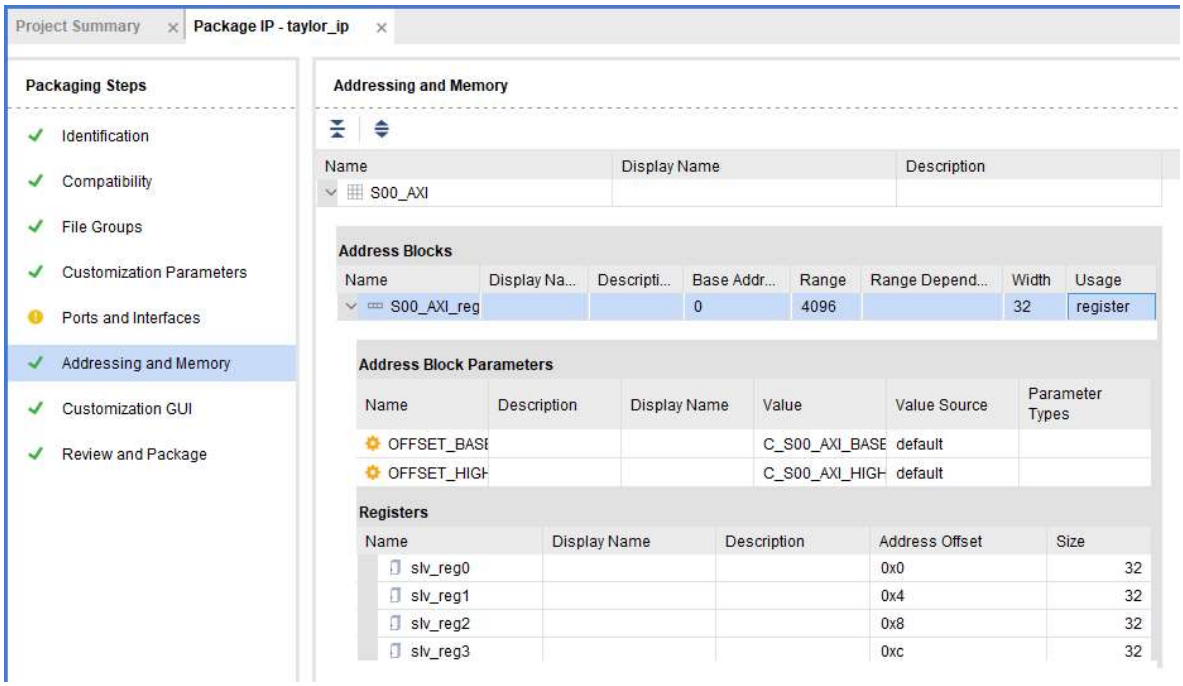
Implementacja sprzętowa



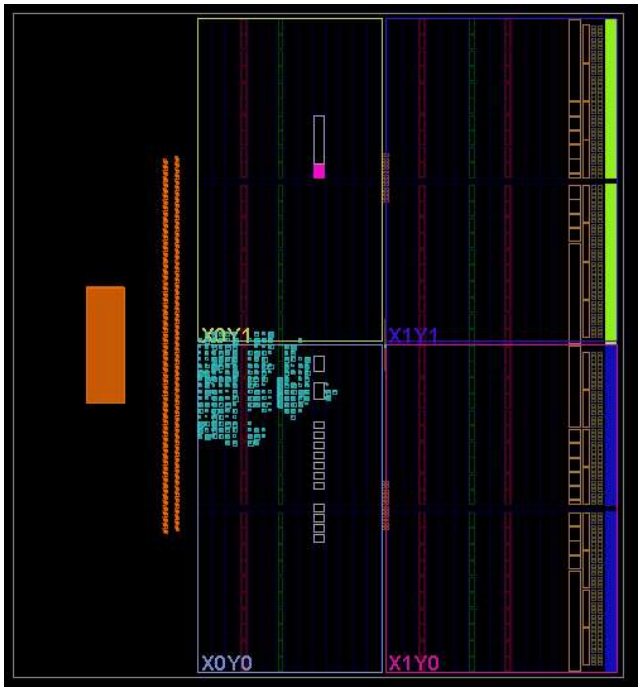
W implementacji sprzętowej wykorzystano wymagane bloki:

- **ZYNQ7 Processing System -** odpowiada za procesor ARM
- **AXI Interconnect -** magistrala AXI, wymagana do podłaczenia procesora do taylor_ip
- **Processor System Reset -** system resetowania procesora
- **taylor_ip_v1.2 -** implementacja hardware szeregu Taylora

W celu umożliwienia wykorzystania rejestrów w bloku taylor_ip_v1.2 konieczne było ręczne dodanie ich tak jak na zdjęciu poniżej:



Prezentacja layoutu implementacji bramek:



Implementacja w środowisku PYNQ

Import Bibliotek:

In [7]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import os
```

Załadowanie pliku .xsa

In [8]:
```
from pynq import Overlay
zybo_taylor_ov = Overlay("zybo_taylor_wrapper_final.xsa")
```

Przypisanie rejestrów do zmiennej oraz ich wyświetlenie:

In [9]:
```
taylor_seq = zybo_taylor_ov.taylor_ip_0.register_map
print(taylor_seq)
```

```
RegisterMap {
  slv_reg0 = Register(value=0),
  slv_reg1 = Register(value=0),
  slv_reg2 = Register(value=0),
  slv_reg3 = Register(value=0)
}
```

Następujące rejestry odpowiadają nastepującym zmiennym maszyny stanów implementacji:

- **slv_reg0** odpowiada start_in
- **slv_reg1** odpowiada x_in
- **slv_reg2** odpowiada ready_out
- **slv_reg3** odpowiada sin_out

Test Implementacji oraz wyświetlenie wyników:

Algorytm porównuje wartości funkcji sinus obliczane za pomocą biblioteki NumPy z wartościami obliczanymi przez sprzęt. Działa na kątach w zakresie od 5° do 60°, obliczając wartość sinus dla każdego kąta zarówno za pomocą NumPy, jak i sprzętu. Następnie porównuje wyniki, wyznaczając różnice procentowe i numeryczne.

Najważniejsze zmienne

- `angles_deg` : Tablica kątów w stopniach (od 5° do 60° z krokiem 5°).
- `sin_numpy` : Wartość sinusa obliczona za pomocą NumPy dla `angle_rad` .
- `angle_fxp` : Wartość kąta skonwertowana na wartość stałoprzecinkową.
- `sin` : Surowa wartość sinusa odczytana ze sprzętu.
- `sin_hardware` : Wartość sinusa obliczona przez sprzęt po przeskalowaniu.

Przebieg algorytmu

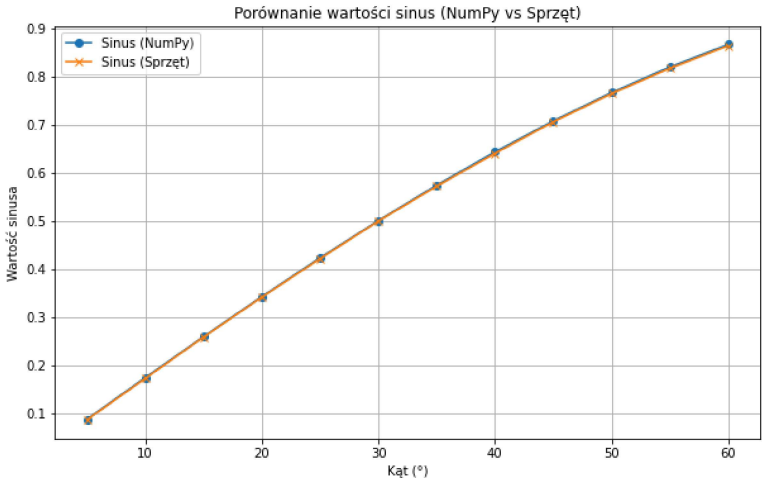
1. **Inicjalizacja**: Ustalenie list do przechowywania wyników.
2. **Pętla po kątach**:
   - Dla każdego kąta:
     - Obliczenie wartości sinus za pomocą NumPy.
     - Konwersja kąta na wartość stałoprzecinkową.
     - Ustawienie odpowiednich rejestrów sprzętowych.
     - Odczyt wartości sinus ze sprzętu.
     - Obliczenie różnic procentowych i numerycznych między wynikami NumPy a sprzętem.
     - Zapisanie wyników do list.
3. **Rysowanie wykresu**: Porównanie wyników za pomocą wykresu

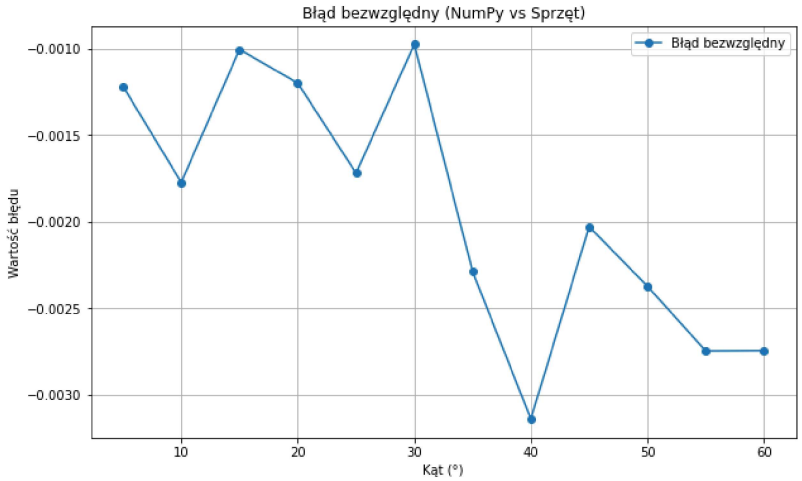
In [10]:

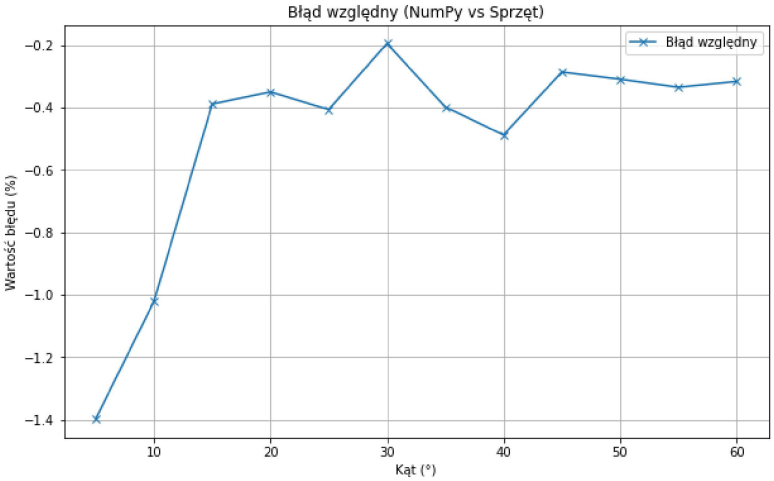
```
angles_deg = np.linspace(5, 60, 12).astype(int)

# Listy do przechowywania wyników
angles = []
sin_numpy_values = []
sin_hardware_values = []
blad_bezwzgledny_values = []
blad_wzgledny_values = []

for angle_deg in angles_deg:
    print("Badany kąt: ", angle_deg, "°")
    angle_rad = np.deg2rad(angle_deg)

    # Obliczanie wartości sinus za pomocą NumPy
    sin_numpy = np.sin(angle_rad)
    print("sin_numpy", sin_numpy)

    # Konwersja kąta na wartość stałoprzecinkową
    angle_fxp = (int(1024 * angle_deg * 1024 * np.pi) >> 10) / 180

    # Ustawienia rejestrów sprzętowych
    taylor_seq.slv_reg1 = angle_fxp + 0
    taylor_seq.slv_reg0 = 1

    # Odczyt wartości sinus ze sprzętu
    sin = ((int(taylor_seq.slv_reg3) & 0x00000FFF) << 20) >> 20
    sin_hardware = sin / 1024
    print("sin_taylor", sin_hardware)

    # Wyznaczanie błędu względnego i bezwzględnego
    taylor_seq.slv_reg0 = 0
    sin_blad_bezwzgledny = sin_hardware - sin_numpy
    sin_blad_wzgledny = sin_blad_bezwzgledny / sin_numpy * 100
    print("blad bezwzgledny = ", sin_blad_bezwzgledny)
    print("blad wzgledny = ", sin_blad_wzgledny)
    print("-----------------------------------")

    # Zapisanie wyników do list
    angles.append(angle_deg)
    sin_numpy_values.append(sin_numpy)
    sin_hardware_values.append(sin_hardware)
    blad_bezwzgledny_values.append(sin_blad_bezwzgledny)
    blad_wzgledny_values.append(sin_blad_wzgledny)
```

```
Badany kąt:  5 °
sin_numpy 0.08715574274765817
sin_taylor 0.0859375
blad bezwzgledny =  -0.0012182427476581659
blad wzgledny =  -1.3977767950246738
-----------------------------------
Badany kąt:  10 °
sin_numpy 0.17364817766693033
sin_taylor 0.171875
blad bezwzgledny =  -0.0017731776669303312
blad wzgledny =  -1.0211323209687884
-----------------------------------
Badany kąt:  15 °
sin_numpy 0.25881904510252074
sin_taylor 0.2578125
blad bezwzgledny =  -0.0010065451025207395
blad wzgledny =  -0.38889916393982416
-----------------------------------
Badany kąt:  20 °
sin_numpy 0.3420201433256687
sin_taylor 0.3408203125
blad bezwzgledny =  -0.001199830825668713
blad wzgledny =  -0.3508070647541493
-----------------------------------
Badany kąt:  25 °
sin_numpy 0.42261826174069944
sin_taylor 0.4208984375
blad bezwzgledny =  -0.0017198242406994413
blad wzgledny =  -0.40694508410870617
-----------------------------------
Badany kąt:  30 °
sin_numpy 0.49999999999999994
sin_taylor 0.4990234375
blad bezwzgledny =  -0.0009765624999999445
blad wzgledny =  -0.19531249999998893
-----------------------------------
Badany kąt:  35 °
sin_numpy 0.573576436351046
sin_taylor 0.5712890625
blad bezwzgledny =  -0.0022873738510460484
blad wzgledny =  -0.3987914610993724
-----------------------------------
Badany kąt:  40 °
sin_numpy 0.6427876096865393
sin_taylor 0.6396484375
blad bezwzgledny =  -0.003139172186539252
blad wzgledny =  -0.4883684967216613
-----------------------------------
Badany kąt:  45 °
sin_numpy 0.7071067811865475
sin_taylor 0.705078125
blad bezwzgledny =  -0.0020028561865474617
blad wzgledny =  -0.2868953092407504
-----------------------------------
Badany kąt:  50 °
sin_numpy 0.766044443118978
sin_taylor 0.763671875
blad bezwzgledny =  -0.0023725681189780135
blad wzgledny =  -0.3097167716951272
-----------------------------------
Badany kąt:  55 °
sin_numpy 0.8191520442889918
sin_taylor 0.81640625
blad bezwzgledny =  -0.0027457942889917986
blad wzgledny =  -0.33519958939675176
-----------------------------------
Badany kąt:  60 °
sin_numpy 0.8660254037844386
sin_taylor 0.86328125
blad bezwzgledny =  -0.0027441537844385966
blad wzgledny =  -0.3168675852286708
-----------------------------------
```

In [11]:
```
# Rysowanie wykresu
plt.figure(0,figsize=(10, 6))
plt.plot(angles, sin_numpy_values, label="Sinus (NumPy)", marker='o')
plt.plot(angles, sin_hardware_values, label="Sinus (Sprzęt)", marker='x')
plt.xlabel("Kąt (°)")
plt.ylabel("Wartość sinusa")
plt.title("Porównanie wartości sinus (NumPy vs Sprzęt)")
plt.legend()
plt.grid(True)

plt.figure(1, figsize=(10, 6))
plt.plot(angles, blad_bezwzgledny_values, label="Błąd bezwzględny", marker='o')
plt.xlabel("Kąt (°)")
plt.ylabel("Wartość błędu")
plt.title("Błąd bezwzględny (NumPy vs Sprzęt)")
plt.legend()
plt.grid(True)

plt.figure(2, figsize=(10, 6))
plt.plot(angles, blad_wzgledny_values, label="Błąd względny", marker='x')
plt.xlabel("Kąt (°)")
plt.ylabel("Wartość błędu (%)")
plt.title("Błąd względny (NumPy vs Sprzęt)")
plt.legend()
plt.grid(True)

plt.show()
```







Bibliografia

- https://digilent.com/reference/programmable-logic/zybo/start?redirect=1 (https://digilent.com/reference/programmable-logic/zybo/start?redirect=1)
- https://people.math.sc.edu/girardi/m142/handouts/10sTaylorPolySeries.pdf (https://people.math.sc.edu/girardi/m142/handouts/10sTaylorPolySeries.pdf)
- https://pl.wikipedia.org/wiki/Wz%C3%B3r_Taylora (https://pl.wikipedia.org/wiki/Wz%C3%B3r_Taylora)
- https://discuss.pynq.io/t/registers-addressing-for-hwh-file/1667 (https://discuss.pynq.io/t/registers-addressing-for-hwh-file/1667)
- Custom system design in FPGA laboratory Tutorial 2 Simulation of the AXI-based accelerated system - Paweł Russek ver. 2021.03.23
- CUSTOM SYSTEM DESIGN IN FPGA LABORATORY PYNQ - introduction ver 0.2.1