Sterowanie Procesami Ciągłymi i Dyskretnymi

Politechnika Poznańska
Instytut Automatyki i Robotyki

ĆWICZENIE 1

Częstotliwościowe kryterium stabilności Nyquist'a.

Celem ćwiczenia jest analiza stabilności układów liniowych na podstawie częstotliwościowego kryterium Nyquist'a. Ponadto ćwiczenie ma zapoznać z pojęciem zapasów stabilności (modułu i fazy) oraz ich wyznaczeniem na podstawie charakterystyk amplitudowo-fazowych (Nyquist'a) oraz logarytmicznych modułu i fazy (wykresy Bode'go).

W ramach przygotowania do ćwiczenia należy:

→ Przypomnieć wiadomości z zakresu:

- transmitancje operatorowe podstawowych członów dynamicznych,
- zapasy stabilności,
- transmitancja toru otwartego i zamkniętego,
- kryterium Nyquist'a oraz zalety jego stosowania,
- skala logarytmiczna wzmocnienia.

→ Obliczyć wartość wzmocnienia k z zadania 3.2.

1 Wyznaczanie charakterystyki Nyquist'a

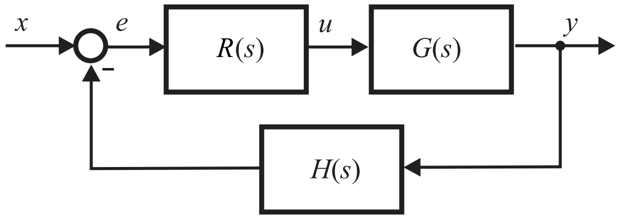
Stabilność jest pojęciem określającym zdolność układu do zachowania pewnego stanu. Układ stabilny to taki, który po wyprowadzeniu go ze stanu równowagi oraz pozbawiony sterowania sam powraca do tego stanu. Zgodnie z definicją Laplace'a układ liniowy jest stabilny, jeżeli jego odpowiedź na wymuszenie o ograniczonej wartości jest ograniczona.

Ogólne zachowanie liniowego układu dynamicznego można zapisać za pomocą równania różniczkowego:

$$\begin{aligned} a_n \tfrac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \tfrac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 y(t) = \\ = b_m \tfrac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \tfrac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_0 x(t), \end{aligned} \tag{1}$$

przy czym $m \leqslant n$ oraz $y(t)$ jest wyjściem układu, natomiast $x(t)$ jest sygnałem wejściowym. Rozwiązanie równania jest sumą dwóch rozwiązań: ogólnego $y_s(t)$ i szczególnego $y_w(t)$. Można zatem napisać, że $y(t) = y_s(t) + y_w(t)$. Rozwiązanie ogólne otrzymuje się przez porównanie lewej strony równania do zera (składowa swobodna), natomiast rozwiązanie szczególne jest zależne od rodzaju wymuszenia (składowa wymuszona). Układ jest stabilny jeżeli dla $t \to \infty$ składowa swobodna będzie zanikać. Oznacza to, że rozwiązanie wymuszone będzie ograniczone nawet przy wymuszeniu (ograniczonym) trwającym dość długo. Stabilność w tym sensie jest nazywana asymptotyczną.

Jedną z metod, które są wykorzystywane do analizy stabilności jest, omawiane w ramach niniejszego ćwiczenia, kryterium Nyquist'a. Pozwala ono określić stabilność układu zamkniętego (z ujemnym sprzężeniem zwrotnym – rys. 1) na podstawie charakterystyk częstotliwościowych



Rysunek 1: Schemat blokowy URA.

układu otwartego. Kryterium można stosować dla układów zawierających człony opóźniające, co nie jest możliwe w przypadku np. kryterium stabilności Hurwitza. Charakterystyki częstotliwościowe układu otwartego zazwyczaj można wyznaczyć eksperymentalnie, dlatego metoda Nyquist'a ma duże znaczenie praktyczne. Doświadczalne wyznaczenie charakterystyki Nyquist'a[1] polega na pobudzaniu obiektu sygnałami sinusoidalnymi o różnych wartościach pulsacji oraz odczytaniu amplitudy i przesunięcia fazowego sygnału wyjściowego, zgodnie z przyjętą notacją:

$$\text{sygnał wejściowy:} \quad x(t) = A_x \sin(\omega t), \tag{2}$$

$$\text{sygnał wyjściowy:} \quad y(t) = A_y \sin(\omega t + \phi), \tag{3}$$

gdzie przez A_x i A_y opisano amplitudy sygnałów harmonicznych, $\omega[rad/s]$ oznacza pulsację, a $\phi[rad]$ przesunięcie fazowe sygnału wyjściowego względem wejściowego.

1.1 W środowisku Matlab zamodelować transmitancję $G_1(s) = \dfrac{1}{s^2 + 3s + 2}$ (polecenie `tf`).

1.2 Utworzyć wejściowy sygnał sinusoidalny postaci $x(t) = sin(\omega t)$, przy czym zmienna t odpowiada zmiennej czasu i powinna być kolumnowym wektorem z równo rozłożonymi wartościami (polecenie `linspace`). Przyjąć początkową wartość $\omega = 1.4$[rad/s].

1.3 Przeprowadzić symulację odpowiedzi obiektu $G_1(s)$ na wymuszenie sinusoidalne (polecenie `lsim`).

1.4 Odczytać z nałożonych wykresów sygnałów $x(t)$ i $y(t)$ wartości amplitudy i przesunięcia fazowego sygnału wyjściowego, zgodnie z opisem zawartym w Dodatku A. Przed procedurą aproksymacji, należy usunąć z wektora wyjść wartości odpowiadające stanom przejściowym. **UWAGA: ustawić graniczną wartość wektora czasu tak, aby obejmował co najmniej jeden pełen okres sinusoidy.**

1.5 Powtórzyć kroki 1.2 - 1.3 dla różnych wartości pulsacji sygnału wejściowego, tj.

$$\omega = \{0.002,\ 0.2,\ 0.5,\ 1.4,\ 2.5,\ 5\}[rad/s].$$

Tym razem przeprowadzić dopasowanie sygnału wyjściowego do krzywej sinusoidalnej (polecenie `fit` z opcją `'sin1'`). Odczytać wartości amplitudy i przesunięcia fazowego dopasowanego sygnału.

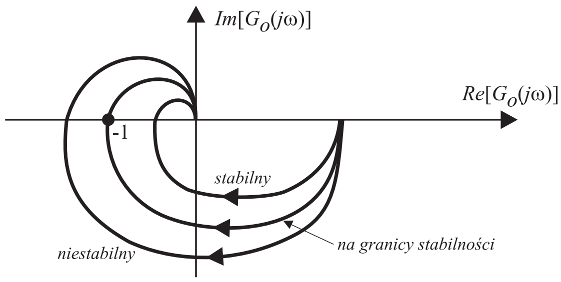
1.6 Nanieść odczytane punkty na wykres amplitudowo-fazowy i porównać z wykresem uzyskanym w wyniku symulacji w środowisku Matlab (polecenie `nyquist`).

[1] Patrz 4 ćwiczenie laboratoryjne z przedmiotu Podstawy Automatyki.

2 Kryterium stabilności Nyquist'a

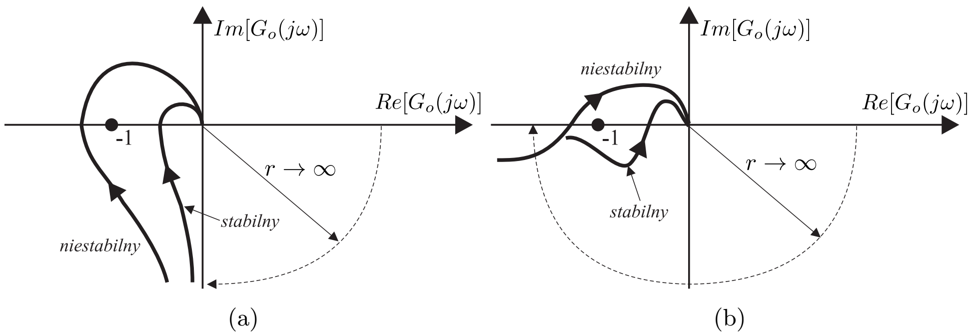
Twierdzenie 1 (Kryterium Nyquist'a) *Jeżeli układ otwarty jest **stabilny** asymptotycznie to układ zamknięty jest również stabilny asymptotycznie, wtedy i tylko wtedy, gdy charakterystyka amplitudowo-fazowa $G_o(j\omega)$ układu otwartego przy zmianie pulsacji ω od 0 do $+\infty$ nie obejmuje punktu $(-1, j0)$ (rys. 2)*[2].

*Jeżeli układ otwarty jest **niestabilny** i jego transmitancja $G_o(s)$ ma l biegunów w prawej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej s, to układ zamknięty jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy charakterystyka amplitudowo-fazowa układu otwartego przy zmianie pulsacji ω od 0 do $+\infty$ obejmuje punkt $(-1, j0)$ $l/2$ razy*[2].



Rysunek 2: Kryterium Nyquist'a w przypadku układów otwartych stabilnych.

W przypadku układów otwartych na granicy stabilności, z pojedynczym biegunem zerowym, należy poprowadzić łuk o promieniu $r \to \infty$ wychodząc z dodatniej części osi rzeczywistej do początku charakterystyki aplitudowo-fazowej układu otwartego (rys. 3). Gdy transmitancja układu otwartego ma więcej biegunów równych zeru, a pozostałe jej bieguny znajdują się w lewej półpłaszczyźnie, wówczas wykres uzupełniany jest przez łuk o promieniu $r \to \infty$ przechodzący przez tyle ćwiartek układu, ile jest biegunów zerowych.



Rysunek 3: Kryterium Nyquist'a w przypadku układów otwartych na granicy stabilności: (a) układ z jednym biegunem zerowym, (b) układ z dwoma biegunami zerowymi.

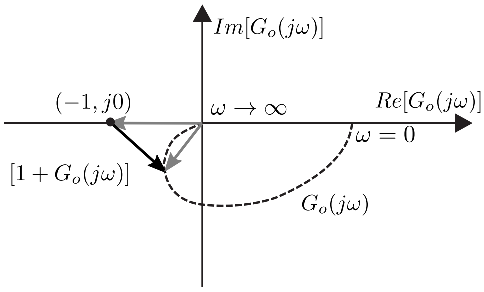
Stabilność układu zamkniętego dogodnie jest sprawdzać na podstawie liczby przecięć charakterystyki $G_o(j\omega)$ z osią rzeczywistą z lewej strony punktu $(-1, j0)$, gdzie dodatnimi nazywamy przejścia $G_o(j\omega)$ *z góry na dół* (kąt przesunięcia ϕ wzrasta), a ujemnymi *z dołu do góry.* Ponadto przyjmuje się także, że jeżeli krzywa $G_o(j\omega)$ wychodzi przy $\omega = 0$ z punktu położonego z lewej strony punktu $(-1, j0)$ to w miejscu tym występuje połowa przecięcia $G_o(j\omega)$ z osią rzeczywistą. Wówczas kryterium Nyquist'a można sformułować w sposób alternatywny:

Twierdzenie 2 (Alternatywne kryterium Nyquist'a) *Jeżeli układ otwarty jest **stabilny** asymptotycznie to układ zamknięty jest również stabilny asymptotycznie, wtedy i tylko wtedy, gdy różnica liczby przecięć dodatnich i ujemnych charakterystyki $G_o(j\omega)$ z częścią osi rzeczywistej z lewej strony punktu $(-1, j0)$ jest równa 0 przy zmianie pulsacji ω od 0 do $+\infty$.*

[2]Patrz Dodatek B do ćwiczenia.

Jeżeli układ otwarty jest ***niestabilny*** *i jego transmitancja $G_o(s)$ ma l biegunów w prawej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej s, to układ zamknięty będzie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy różnica liczby przecięć dodatnich i ujemnych charakterystyki $G_o(j\omega)$ z cześcią osi rzeczywistej z lewej strony punktu $(-1, j0)$ jest równa $l/2$ przy zmianie pulsacji ω od 0 do $+\infty$.*

Istnieje również geometryczna interpretacja kryterium Nyquist'a. Polega na analizie przebiegu wektora $(1 + G_o(j\omega))$, którego początek pokrywa się z punktem $(-1, j0)$, a koniec umieszczony jest na charakterystyce amplitudowo-fazowej (zgodnie z oznaczeniem umieszczonym na rys. 4). Koniec wektora przy zmianie pulsacji ω od 0 do $+\infty$ *ślizga się* po charakterystyce Nyquist'a. Jeżeli całkowity kąt obrotu wektora $(1+G_o(j\omega))$ jest równy zero, wówczas punkt $(-1, j0)$ nie jest objęty charakterystyką amplitudowo-fazową. Gdyby charakterystyka obejmowała punkt $(-1, j0)$ wówczas wektor wykonywałby obrót o wielokrotność 2π.



Rysunek 4: Oznaczenie wektora $(1 + G_o(j\omega))$ na charakterystyce Nyquist'a toru otwartego.

2.1 W środowisku Matlab zamodelować przedstawione poniżej transmitancje (wykorzystać polecenie `tf`). Zamodelować transmitancje torów otwartego i zamkniętego (polecenie `feedback`). Oznaczenia są zgodne z rys. 1. Początkowo przyjąć $k = 1$.

a) $R_a(s) = k,\quad G_a(s) = \dfrac{1}{s^2+3s+2},\quad H_a(s) = 1,$

b) $R_b(s) = k,\quad G_b(s) = \dfrac{1}{s^2+2s},\quad H_b(s) = \dfrac{1}{s+0.5},$

c) $R_c(s) = k,\quad G_c(s) = \dfrac{10}{s^2+2.5s+1},\quad H_c(s) = \dfrac{1}{s+1},$

d) $R_d(s) = k\,(1+3s)\,,\quad G_d(s) = \dfrac{1}{s^2-2s+1},\quad H_d(s) = 1,$

e) $R_e(s) = k,\quad G_e(s) = \dfrac{10s^2+s+1}{s^4+4s^3+5s^2+2s},\quad H_e(s) = \dfrac{1}{s}.$

2.2 Wykonać polecenia 2.3 - 2.7 dla każdego z powyższych zestawów transmitancji i na podstawie uzyskanych wyników wypełnić tabelę 1.

2.3 Wyznaczyć bieguny układu otwartego (polecenie `roots`).

- *Czy układ otwarty jest stabilny?*
- *Jaki jest przypuszczalny charakter odpowiedzi skokowej (przebieg aperiodyczny, przebieg oscylacyjny, przebieg nieograniczony)?*

2.4 Zweryfikować symulacyjnie rzeczywiste przebiegi odpowiedzi skokowej otwartego URA (polecenie `ltiview`).

2.5 Wyznaczyć charakterystykę amplitudowo-fazową otwartego URA i na tej podstawie ocenić stabilność zamkniętego układu korzystając z kryterium Nyquist'a.

- *Czy układ zamknięty jest strukturalnie stabilny?*

2.6 Wykreślić odpowiedź skokową zamkniętego URA.

- *Czy uzyskane wyniki potwierdzają wnioski dotyczące stabilności wyciągnięte w oparciu na kryterium Nyquist'a?*

2.7 Zbadać wpływ wartości wzmocnienia transmitancji regulatora na stabilność zamkniętego URA. Wykreślić odpowiedzi skokowe układu zamkniętego dla wartości $k = \{0.25,\ 0.5,\ 1,\ 1.5,\ 5\}$.

- *Jak zmiana wzmocnienia wpływa na stabilność układu zamkniętego?*
- *Czy zmiana wartości wzmocnienia k wpływa na charakter stanów przejściowych odpowiedzi skokowej?*

	a)	b)	c)	d)	e)
Jakie są pierwiastki układu otwartego?					
Jaki jest charakter odpowiedzi skokowej układu otwartego?					
Czy układ otwarty jest stabilny?					
Czy układ zamknięty jest stabilny (Nyquist)?					
Czy układ zamknięty jest strukturalnie stabilny?					
Jaki jest charakter odpowiedzi skokowej układu zamkniętego?					
Jak zmiana k wpływa na stabilność układu?					

Tablica 1: Zestawienie właściwości badanych URA, do ćwiczenia 2.

3 Zapasy stabilności

Zapasy stabilności stanowią miarę *oddalenia* układu zamkniętego od granicy stabilności. Odpowiednie zapasy stabilności określa się następująco:

Definicja 1 (Zapas wzmocnienia modułu) *Zapas wzmocnienia modułu*[3] λ *jest to krotność, o którą można zwiększyć wzmocnienie układu otwartego (bez zmiany przesunięcia fazowego), aby układ zamknięty znalazł się na granicy stabilności:*

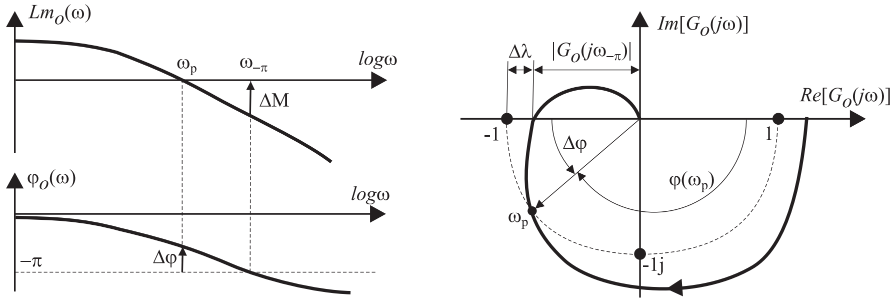
$$\lambda = \frac{1}{|G_o(j\omega_{-\pi})|} \quad \Rightarrow \quad M = 20 \log \lambda \, [dB].$$

Definicja 2 (Zapas fazy) *Zapas fazy $\Delta\phi$ jest to wartość przesunięcia fazowego, które można dodatkowo wprowadzić w układzie otwartym (bez zmiany wzmocnienia), aby układ zamknięty znalazł się na granicy stabilności:*

$$\Delta\phi = \phi(\omega_p) + \pi.$$

Sposób określania zapasów stabilności na charakterystykach Nyquist'a oraz Bode'go został pokazany na rys. 5.

[3]Uwaga: zapasu wzmocnienia modułu λ nie należy mylić z zapasem modułu $\Delta\lambda$, który definiuje się jako $\Delta\lambda = 1 - |G_o(j\omega_{-\pi})|$.



Rysunek 5: Określanie zapasów stabilności na charakterystykach Bode'go i Nyquist'a.

3.1 Wyznaczyć charakterystyki Bode'go i Nyquist'a toru otwartego URA z rys. 1 dla wszystkich zestawów transmitancji a) - e) podanych w punkcie 2.1 i przeanalizować występujące zapasy stabilności.

- *Jaki jest wpływ wartości wzmocnienia k na zapasy stabilności (wykreślić stosowne charakterystyki w funkcji wartości wzmocnienia k przyjmując $k = \{0.5,\ 1,\ 5\}$)?*
- *Czy zmiana wartości zapasów stabilności wpływa na charakter stanów przejściowych w odpowiedzi skokowej zamkniętego URA (wykonać stosowne symulacje)?*

3.2 Dana jest transmitancja toru otwartego URA $G_2(s) = \frac{k}{(2s+1)^3}$. Wyznaczyć analitycznie wartość wzmocnienia k, tak aby zapas wzmocnienia modułu wynosił 6dB.

- *Ile wynosi zapas fazy dla podanej transmitancji i wyliczonego wzmocnienia k?*

3.3 Wykreślić charakterystyki częstotliwościowe Bode'go i Nyquist'a transmitancji $G_2(s)$ dla wyliczonej wartości wzmocnienia k.

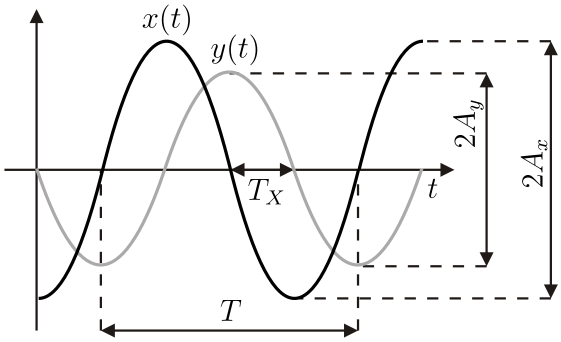
- *Czy uzyskane wyniki (uzyskane zapasy stabilności) są zgodne z wykonanymi obliczeniami analitycznymi?*

□

Dodatek A

Wyznaczanie modułu i przesunięcia fazowego na podstawie sygnałów harmonicznych

Charakterystyka częstotliwościowa opisuje odpowiedź układu na wymuszenie harmoniczne (sinusoidalne) o częstotliwości zmieniającej się w określonym zakresie (charakter fizyczny sygnału wejściowego i wyjściowego może być różny). Przykładowe sygnały wejściowe i wyjściowe przedstawiono na rys. 6. Sygnał harmoniczny jest szczególnie przydatny jako sygnał testowy, ponieważ kolejne punkty charakterystyki wyznaczane są oddzielnie, za każdym razem używając pełnej dopuszczalnej (ze względu na nieliniowość) amplitudy sygnału pomiarowego. Wpływ zakłóceń jest zatem mniejszy niż przy metodach czasowych.



Rysunek 6: Wyznaczanie modułu i przesunięcia fazowego na podstawie oscylogramów.

Doświadczalne wyznaczanie charakterystyk częstotliwościowych polega na znalezieniu zależności między amplitudami i fazami sygnałów wejściowego i wyjściowego w stanie ustalonym, gdy na wejście doprowadzony jest pomiarowy sygnał sinusoidalny o stałej amplitudzie i częstotliwości. Dokonanie tego rodzaju pomiarów przy różnych częstotliwościach pozwala znaleźć kolejne punkty charakterystyki. Dla pomiarów wykonanych w odpowiednim paśmie częstotliwości (teoretycznie w paśmie $\omega \in (0, \infty)$), otrzymana charakterystyka w pełni scharakteryzuje własności obiektu. Stosunek amplitud $|G(j\omega)|$ oraz przesunięcie fazowe ϕ można wyznaczyć na podstawie poniższych relacji:

$$|G(j\omega)| = M(j\omega) = \frac{2A_y}{2A_x}, \tag{4}$$

$$\phi(\omega) = \arg G(j\omega) = -2\pi\frac{T_X}{T} = -\omega T_X, \tag{5}$$

gdzie T_x oznacza czas opóźnienia, zgodnie z oznaczeniem na rys. 6. Wyprowadzone zależności (4) i (5) dotyczą przebiegów, dla których składowa stała jest równa 0.

Dodatek B

Wyprowadzenie warunków kryterium Nyquist'a

Kryterium Nyquist'a opiera się na założeniu, że gdy wszystkie pierwiastki leżą w lewej półpłaszczyźnie zespolonej wówczas następująca zależność jest prawdziwa (zgodnie z kryterium Michajłowa):

$$\underset{0<\omega<\infty}{\Delta \arg} M_0(j\omega) = n\frac{\pi}{2}. \tag{6}$$

Zakładając, że układ otwarty będzie opisany transmitancją $G_o(j\omega)$, a zamknięty transmitancją $G_z(j\omega)$ można zapisać:

$$G_o(j\omega) = \frac{L_o(j\omega)}{M_o(j\omega)}, \quad G_z(j\omega) = \frac{L(j\omega)}{M(j\omega)} = \frac{G_o(j\omega)}{1 + G_o(j\omega)} = \frac{L_o(j\omega)}{M_o(j\omega) + L_o(j\omega)}. \tag{7}$$

Na tej podstawie możliwe jest wyznaczenie następujących relacji:

$$\frac{L(j\omega)}{M(j\omega)} = \frac{G_o(j\omega)}{1+G_o(j\omega)} \Rightarrow 1+G_o(j\omega) = \frac{G_o(j\omega)M(j\omega)}{L(j\omega)} = \frac{L_o(j\omega)M(j\omega)}{M_o(j\omega)L(j\omega)} = \frac{M(j\omega)}{M_o(j\omega)}. \quad (8)$$

Wówczas dla układu zamkniętego, analogicznie do (6), stabilność może być oceniana na bazie poniższego równania:

$$\underset{0<\omega<\infty}{\Delta \arg}\,(1+G_o(j\omega)) = \underset{0<\omega<\infty}{\Delta \arg}\,M(j\omega) - \underset{0<\omega<\infty}{\Delta \arg}\,M_o(j\omega) = 0. \quad (9)$$

Zatem zmiana argumentu wektora $(1+G_o(j\omega))$ jest uzależniona zarówno od zmiany argumentu mianownika układu otwartego jak i zamkniętego. Kolejne rozważania należy rozdzielić na dwa przypadki:

A. Układ otwarty jest stabilny - zatem spełniona jest zależność (6). Aby układ zamknięty również był stabilny konieczne jest zachowanie następującej relacji:

$$\underset{0<\omega<\infty}{\Delta \arg}\,M(j\omega) = n\frac{\pi}{2} \Rightarrow \underset{0<\omega<\infty}{\Delta \arg}\,(1+G_o(j\omega)) = \underbrace{n\frac{\pi}{2}}_{\substack{\text{układ}\\ \text{zamk.}}} - \underbrace{n\frac{\pi}{2}}_{\substack{\text{układ}\\ \text{otw.}}} = 0. \quad (10)$$

Wynika stąd, że układ zamknięty regulacji automatycznej jest stabilny, jeżeli zmiana argumentu wektora $(1+G_o(j\omega))$ dla pulsacji ω od 0 do $+\infty$ wynosi 0, czyli gdy charakterystyka amplitudowo-fazowa układu otwartego nie obejmuje punktu $(-1, j0)$.

B. Układ otwarty nie jest stabilny, a równanie charakterystyczne układu otwartego posiada l pierwiastków w prawej półpłaszczyźnie - zatem dla układu otwartego można zapisać, że

$$\underset{0<\omega<\infty}{\Delta \arg}\,M_o(j\omega) = \underbrace{(n-l)}_{\substack{\text{l. biegunów}\\ \text{stabilnych}}}\frac{\pi}{2} - l\frac{\pi}{2} = (n-2l)\frac{\pi}{2}. \quad (11)$$

W takim przypadku, aby układ zamknięty był stabilny musi być spełniony następujący warunek:

$$\underset{0<\omega<\infty}{\Delta \arg}\,(1+G_o(j\omega)) = \underbrace{n\frac{\pi}{2}}_{\substack{\text{układ}\\ \text{zamk.}}} - \underbrace{(n-2l)\frac{\pi}{2}}_{\substack{\text{układ}\\ \text{otw.}}} = \frac{l}{2}2\pi. \quad (12)$$

Stąd układ zamknięty jest stabilny, jeżeli charakterystyka amplitudowo-fazowa układu otwartego okrąża punkt $(-1, j0)$ $\frac{l}{2}$ razy dla pulsacji $\omega \in (0, \infty)$.