Jan Kaleba
Równania różniczkowe i różnicowe
Informatyka, grupa nr 5

Równanie transportu ciepła

Równanie różniczkowe:

$$-k(x)\frac{d^2u(x)}{dx^2} = 0$$

Warunek Dirichleta w $x = 2$:

$$u(2) = 0$$

Warunek Cauchy'ego w $x = 0$:

$$\frac{du(0)}{dx} + v(0) = 20$$

Funkcja $k(x)$:

$$k(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in [0, 1] \\ 2 & \text{dla } x \in (1, 2] \end{cases}$$

Granice całkowania:

$$x \in [0, 2] \quad \Omega = (0, 2)$$

Mnożenie równania przez funkcje v:

$$-k(x) \cdot u'' \cdot v = 0$$

$$\int_0^2 -k(x) \cdot u'' \cdot v \, dx = 0$$

$$| - k(x) \cdot u' \cdot v|_0^2 + \int_0^2 u' \cdot v' \, dx = 0$$

$$\int_0^2 k(x) \cdot u' \cdot v' \, dx - 2u'(2) \cdot v(2) + u'(0) \cdot v(0) = 0$$

$$v(2) = 0$$

$$u'(0) + u(0) = 20 \implies u'(0) = 20 - u(0)$$

$$\int_0^2 k(x) \cdot u' \cdot v' \, dx + v(0) \cdot (20 - u(0)) = 0$$

$$\int_0^2 k(x) \cdot u' \cdot v' \, dx + 20 \cdot v(0) - v(0) \cdot u(0) = 0$$

$$\int_0^2 k(x) \cdot u' \cdot v' \, dx - v(0) \cdot u(0) = -20 \cdot v(0)$$

$$
\begin{aligned}
B(u, v) &= \int_0^2 k(x) \cdot u' \cdot v' \, dx - v(0) \cdot u(0) \\
L(v) &= -20 \cdot v(0)
\end{aligned}
$$