Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Procesamiento Digital de Imágenes

Práctica 4
Trasformación discreta de Fourier en 2D y .
Filtrado en el espacio de la frecuencia

6 de noviembre de 2023

PROFESORA:
Dra. María Elena Martíiez Pérez
AYUDANTE:
Miguel Angel Veloz Lucas

ALUMNA:
Janet Illescas Coria

Objetivo

- Calcular la transformada discreta directa e inversa de Fourier de una imagen manipulando sus componentes.
- Realizar operaciones de suavizado y de reducción de ruido en imágenes utilizando filtros en frecuencia.
- Realizar operaciones de detección de bordes en imágenes, tanto limpias como ruidosas, utilizando filtros en frecuencia.

Introducción

La contribución Joseph Fourier (1822) establece que cualquier función que se repite de manera periódica puede ser expresada como la suma de senos y/o cosenos de diferentes frecuencias cada una multiplicada por un coeficiente diferente. A lo anterior se le conoce como "series de Fourier".

- Transformada discreta de Fourier en 2D.

  Las funciones pares que no son periódicas (pero cuya área bajo la curva es finita) pueden ser expresadas como la integral de senos y/o cosenos multiplicados por una función ponderada (pesos). A esta formulación se la conoce como "transformada de Fourier".

  La transformada de Fourier discreta de una función (imagen) $f(x, y)$ de tamaño MxN está dada por la ecuación:

$$F(u,v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

  para $u = 0, 1, 2, ..., M-1$ y $v = 0, 1, 2, ..., N-1$

  Las ecuaciones anteriores comprenden al par de transformadas discretas de Fourier bi-dimensionales (DFT). Las variables u y v son las variables de la transformada o variables de frecuencia, mientras que x y y son las variables espaciales o variables de la imagen.

  Se definen al espectro de Fourier, al ángulo de fase y al espectro de potencia de la siguiente manera, respectivamente:

$$f(x,y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u,v) e^{j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

  para $x = 0, 1, 2, ..., M-1$ y $y = 0, 1, 2, ..., N-1$

  Las ecuaciones anteriores comprenden al par de transformadas discretas de Fourier bi-dimensionales (DFT). Las variables u y v son las variables de la transformada o variables de frecuencia, mientras que x y y son las variables espaciales o variables de la imagen.

  Se definen al espectro de Fourier, al ángulo de fase y al espectro de potencia de la siguiente manera, respectivamente:

$$|F(u,v)| = [R^2(u,v) + I^2(u,v)]^{1/2}$$

$$\phi(u,v) = tan^{-1}\left[\frac{I(u,v)}{R(u,v)}\right]$$

$$P(u,v) = |F(u,v)|^2 = R^2(u,v) + I^2(u,v)$$

donde $R(u,v)$ e $I(u,v)$ son las partes real e imaginaria de $F(u,v)$ respectivamente.

Es de práctica común multiplicar la función de entrada $(f(x,y))$ por $(-1)^{x+y}$ antes de calcular la transformada de Fourier. De las propiedades de los exponentes tenemos:

$$\Im[f(x,y)(-1)^{x+y}] = F(u - M/2, v - N/2)$$

donde $\Im = [\bullet]$ denota la transformada de Fourier del argumento. Esta ecuación establece que el origen de la transformada de Fourier de $f(x,y)(-1)^{x+y}$ [que es $F(0,0)$] está localizada en $u = M-1$ y $v = N-1$. En otras palabras multiplicando $f(x,y)$ por $(-1)^{x+y}$ hace que $F(u,v)$ se recorra a las coordenadas de frecuencia $(M/2, N/2)$ que es el centro del área 2D ocupada por la DFT.

- Filtrado en frecuencia

  Generalmente es imposible hacer relaciones directas entre los componentes de los dominios del espacio de la imagen y de la frecuencia. Sin embargo, se pueden encontrar algunas relaciones entre los componentes de la frecuencia y algunas características de la imagen.

  Por ejemplo, se pueden asociar las frecuencias de la transformada de Fourier con patrones de variación de las intensidades de la imagen. La frecuencia más baja ($u = v = 0$) corresponde al promedio de los valores de gris de la imagen. Mientras nos alejamos del origen ,las frecuencias corresponden a variaciones suaves en los tonos de gris. Conforme nos alejamos más las frecuencias altas empiezan a corresponder a cambios rápidos o abruptos en los tonos de gris como son por ejemplo los bordes de los objetos y/o el ruido.

  Filtrar en el dominio de la frecuencia consiste en los siguientes pasos:

  1. Multiplicar la imagen de entrada por $(-1)^{x+y}$ para centrar la transformación.
  2. Calcular, $F(u,v)$, la TDF de la imagen resultado de 1.
  3. Multiplicar $F(u,v)$ por la función filtro $H(u,v)$.
  4. Calcular la TDF inversa del resultado de 3.
  5. Obtener la parte real del resultado de 4.
  6. Multiplicar el resultado de 5 por $(-1)^{x+y}$.

  La razón por la cual $H(u,v)$ se llama filtro (también se llama filtro de función de transferencia) es porque suprime ciertas frecuencias en la transformada y deja otras sin cambio.

  Sea f(x,y) la imagen de entrada y $F(u,v)$ su transformada discreta de Fourier. La transformada de Fourier de la imagen de salida después de aplicar el filtro está dada por:

  donde la multiplicación de H por F involucra funciones bidimensionales y está definida elemento a elemento.

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v)$$

Desarrollo

Resuelve los problemas de la lista siguiente y describe tu solución en cada inciso. Los incisos en donde únicamente tengas que desplegar imágenes no requieren de ninguna descripción.

1. Calcular la transformada discreta de Fourier a la imagen del Sr. Fourier y generar el ejemplo visto del libro Castleman, 1996, figura 10.10 (ver la figura al final de esta práctica).

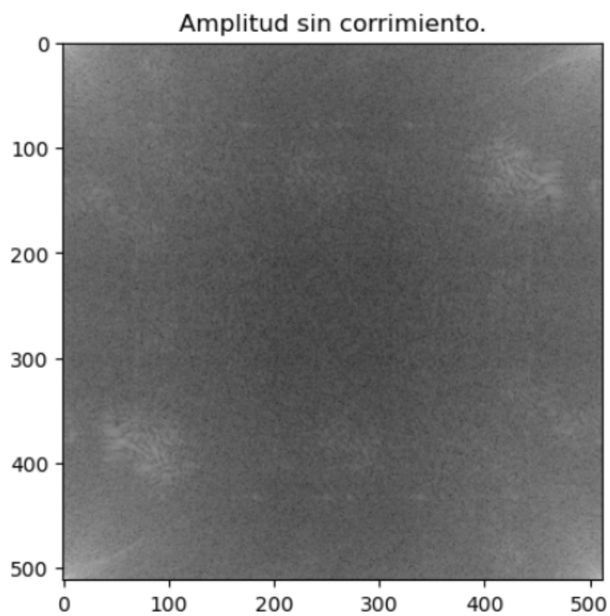
   La función para calcular la transformada discreta de Fourier `transf_fourier`, que recibe una imagen y opcionalmente un filtro que deba aplicarse, nos apoyamos en las funciones fft2, fftshift, ifft2 y angle.

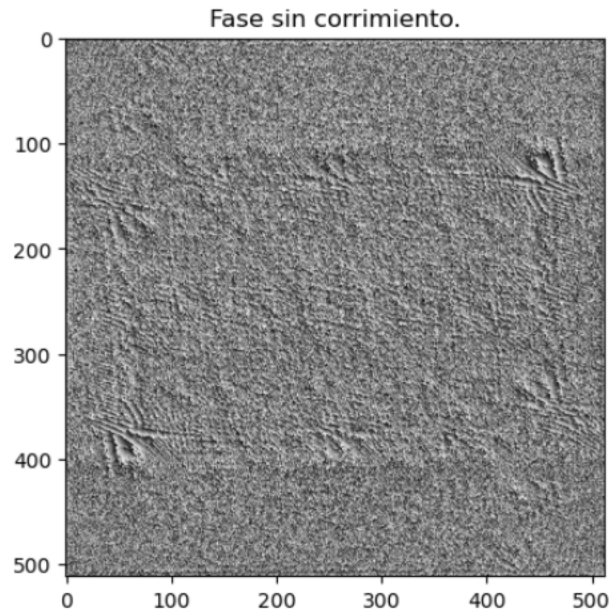
   Donde trabajo a la par los pasos con la imagen con corrimiento y sin corrimiento, obteniendo la amplitud con log(1+magnitud) y fase con angle, y si se recibió un filtro multiplicar la transformada con corrimiento por el filtro (que debe ser del mismo tamaño).

   Para la transformación en espacio sacamos la transformada inversa, en el caso de la amplitud la inversa de la magnitud y para la fase su exponencial multiplicado por un complejo, y obtenemos su absoluto.

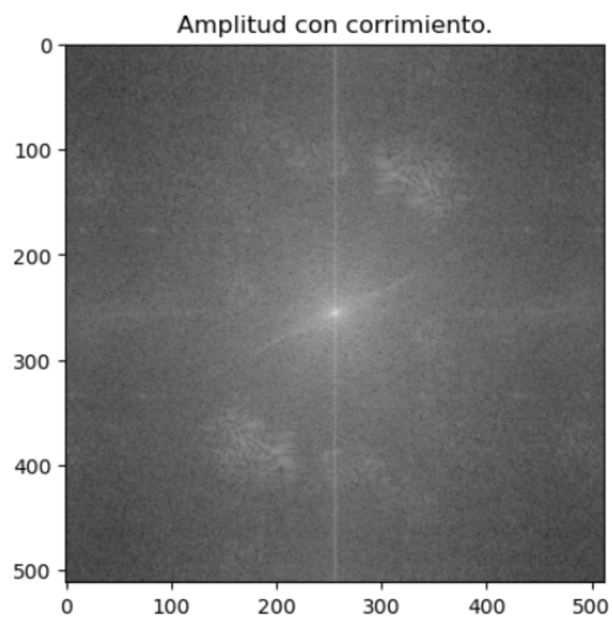
   La función devuelve una lista con la amplitud y fase (con y sin corrimiento), la transformada inversa de la imagen, la inversa sólo con amplitud y sólo con fase, y adicionalmente el filtro aplicado a la trasformada.

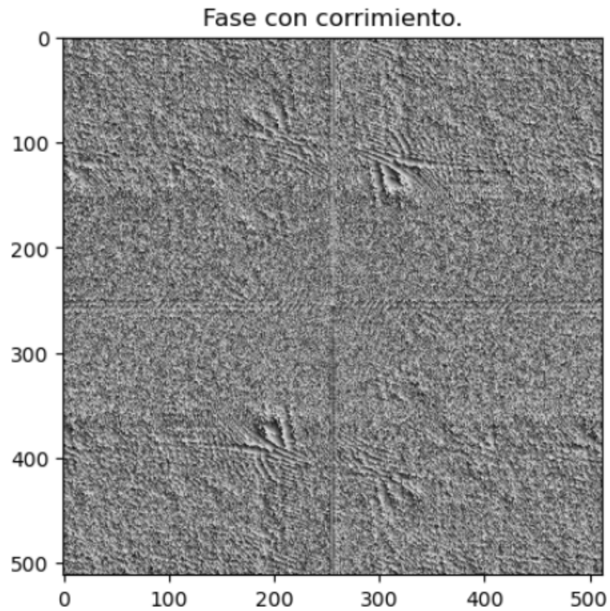
   a) La versión sin corrimiento de la amplitud y la fase de la imagen de entrada I.





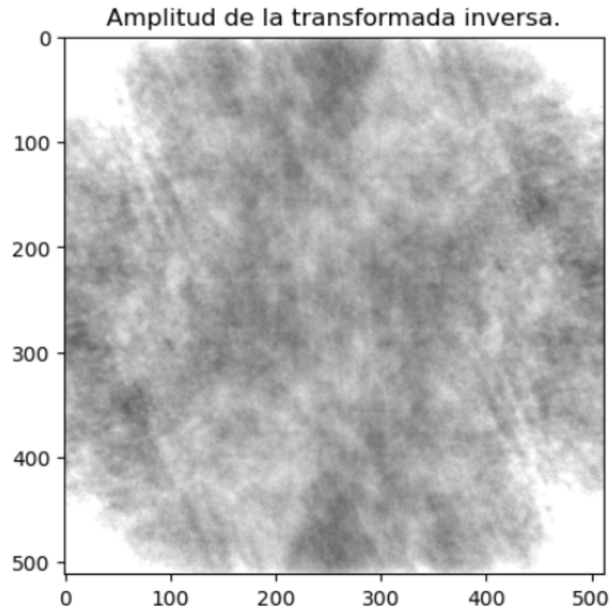
b) La versión con corrimiento de la amplitud y la fase de la imagen de entrada I.



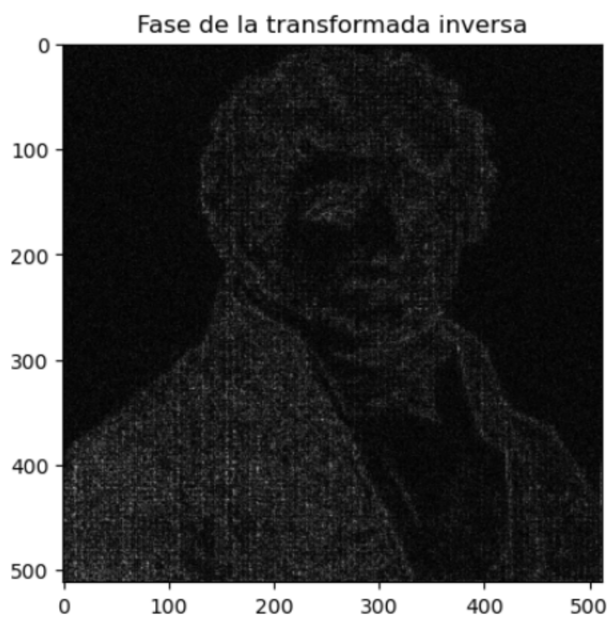


c) Regresar con la transformada inversa completa a la imagen original.

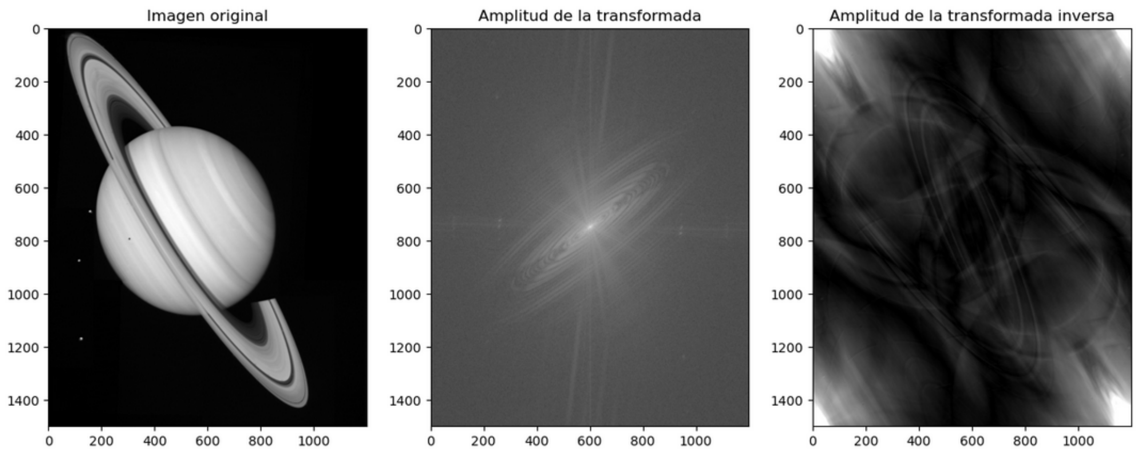
d) Regresar con la transformada inversa sólo con amplitud.

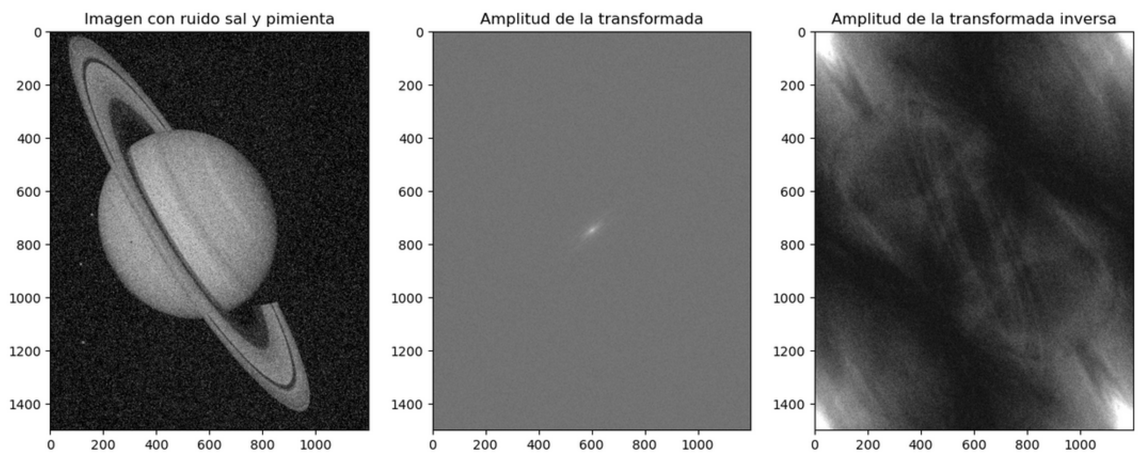


e) Regresar con la transformada inversa sólo con la fase.



2. Aplicar a una imagen sin ruido y la misma imagen con ruido “sal y pimienta” filtros de suavizamiento y realce.





Creamos una función para aplicar el filtro butterworth `filtro_butterworth` que recibe una imagen, la frecuencia de corte d, orden n y si es aplicado como filtro paso bajas o paso altas.

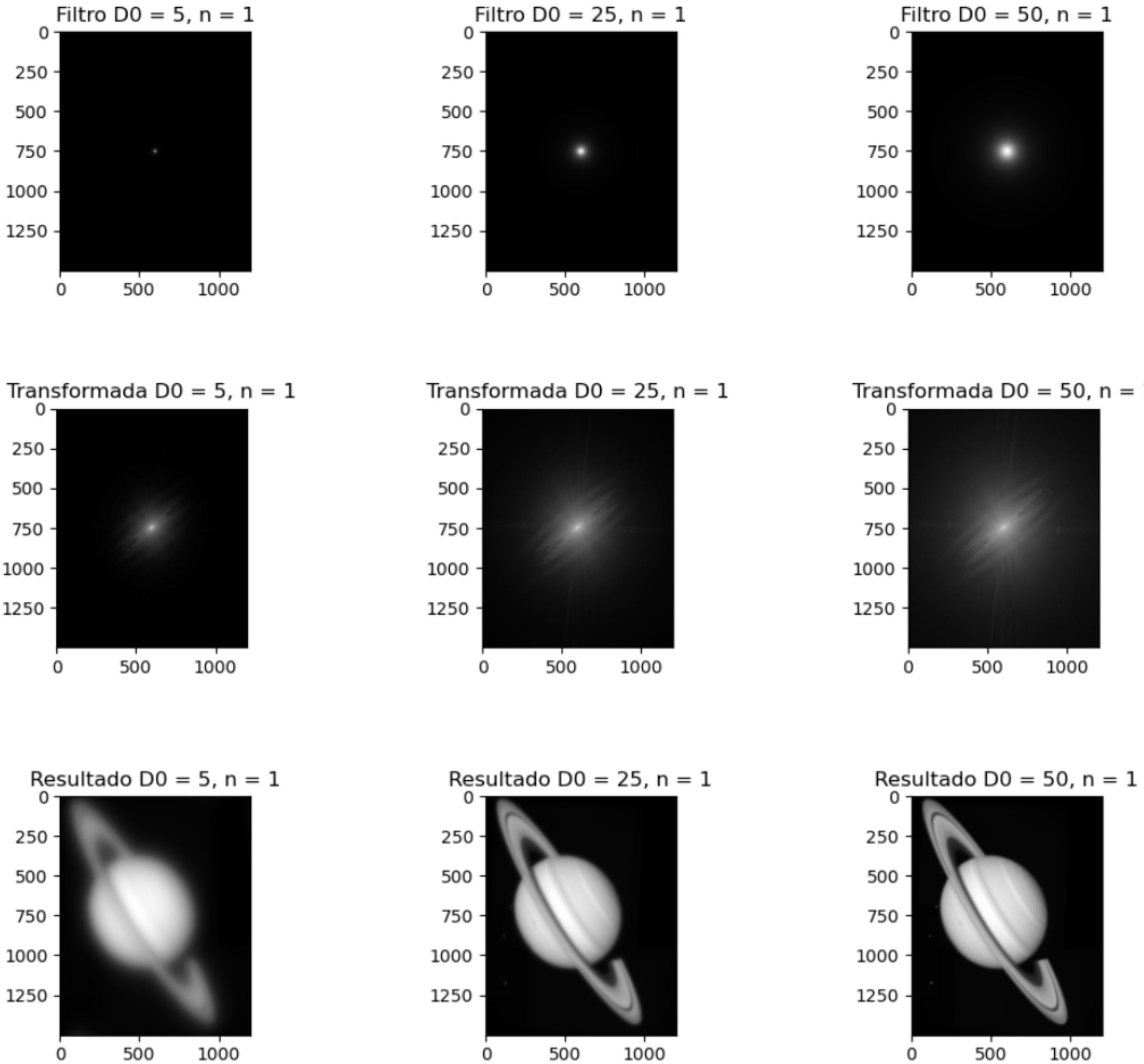
Se crean dos arreglos, uno que represente las coordenadas en el eje horizontal de la imagen y otro que represente las coordenadas en el eje vertical. Con la función meshgrid creamos dos matrices bidimensionales con todas las combinaciones de coordenadas (x, y) en la imagen.

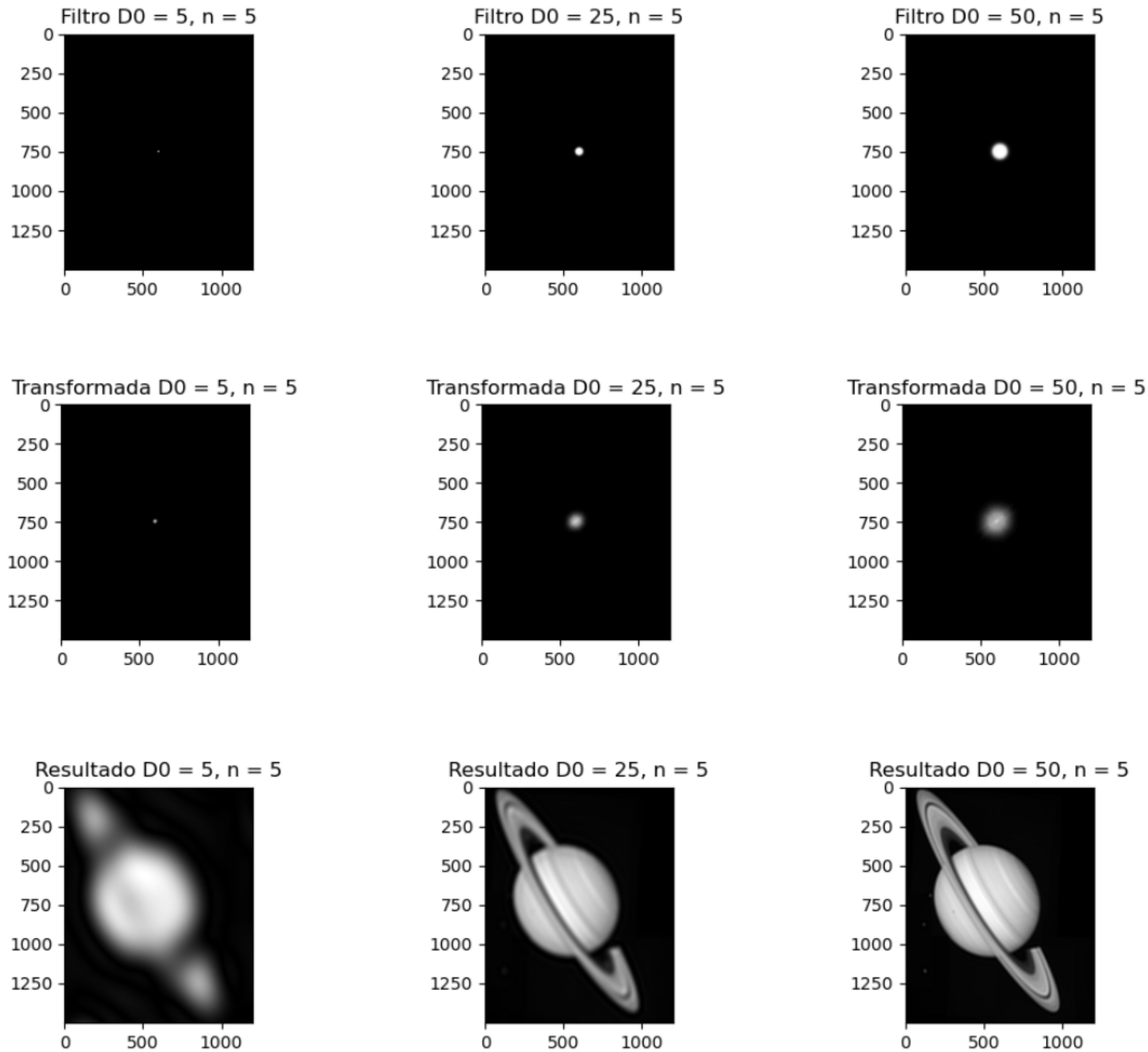
Con los valores de las matrices anteriores podemos calcular la distancia euclidiana desde el centro a cada punto en la imagen. Calculamos la matriz que representará nuestro con D_0 y n, y obtenemos su inversa para obtener el filtro final, y en caso de que se desee el filtro paso altas nuestro filtro se obtiene simplemente restando a uno el filtro.

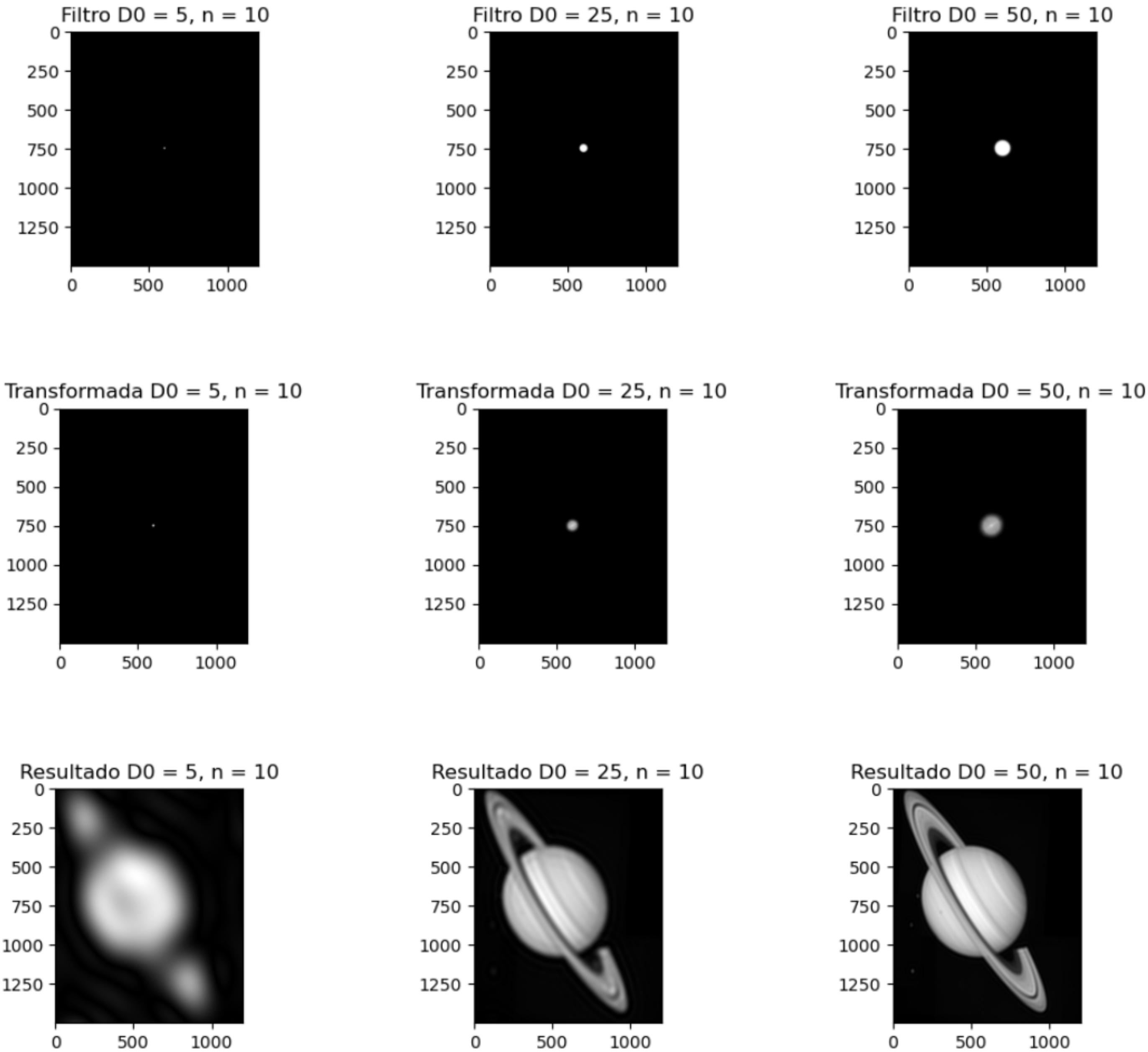
Aplicamos la transformada de Fourier con el filtro y regresamos el filtro, el filtro aplicado a la transformada de Fourier y el resultado de la imagen.

a) Aplicar el filtro paso bajas Butterworth, para eliminación de ruido. Prueba para varios valores de frecuencia de corte D_0 y para varios valores de orden n y establece cuales valores son mejores para la imagen en cuestión. Realiza el ejercicio para la imagen con y sin ruido.

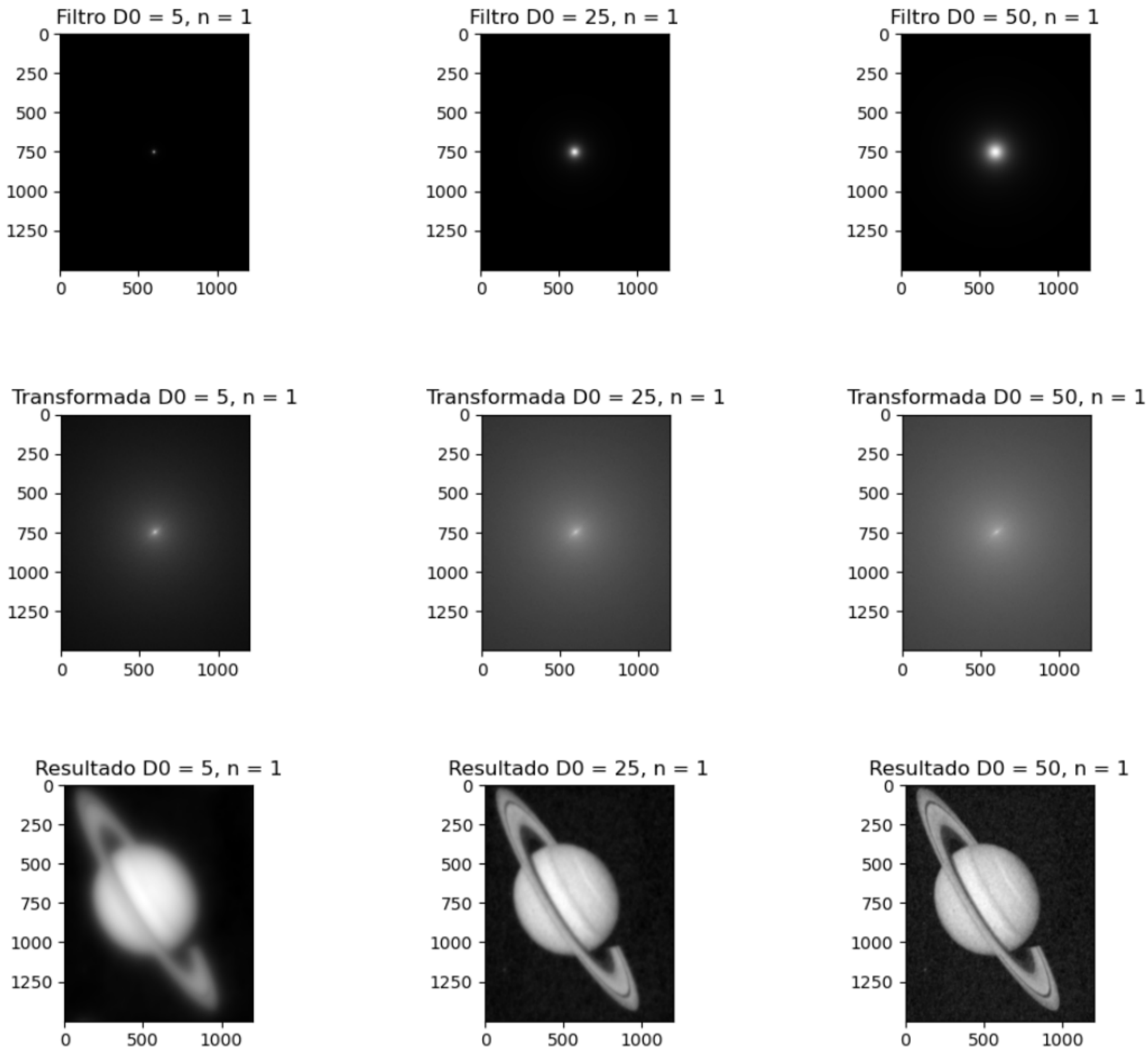
Para la imagen original:

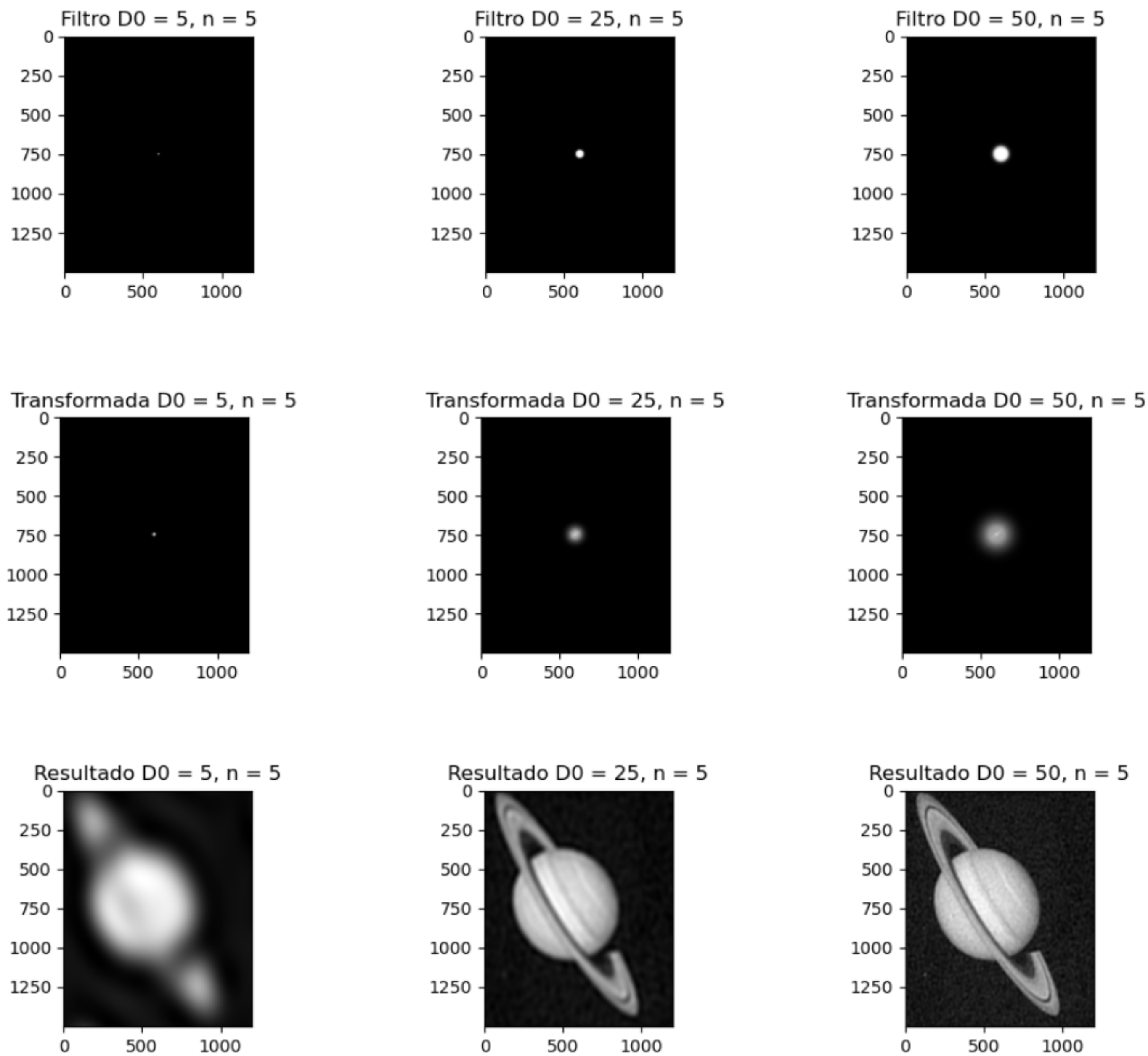


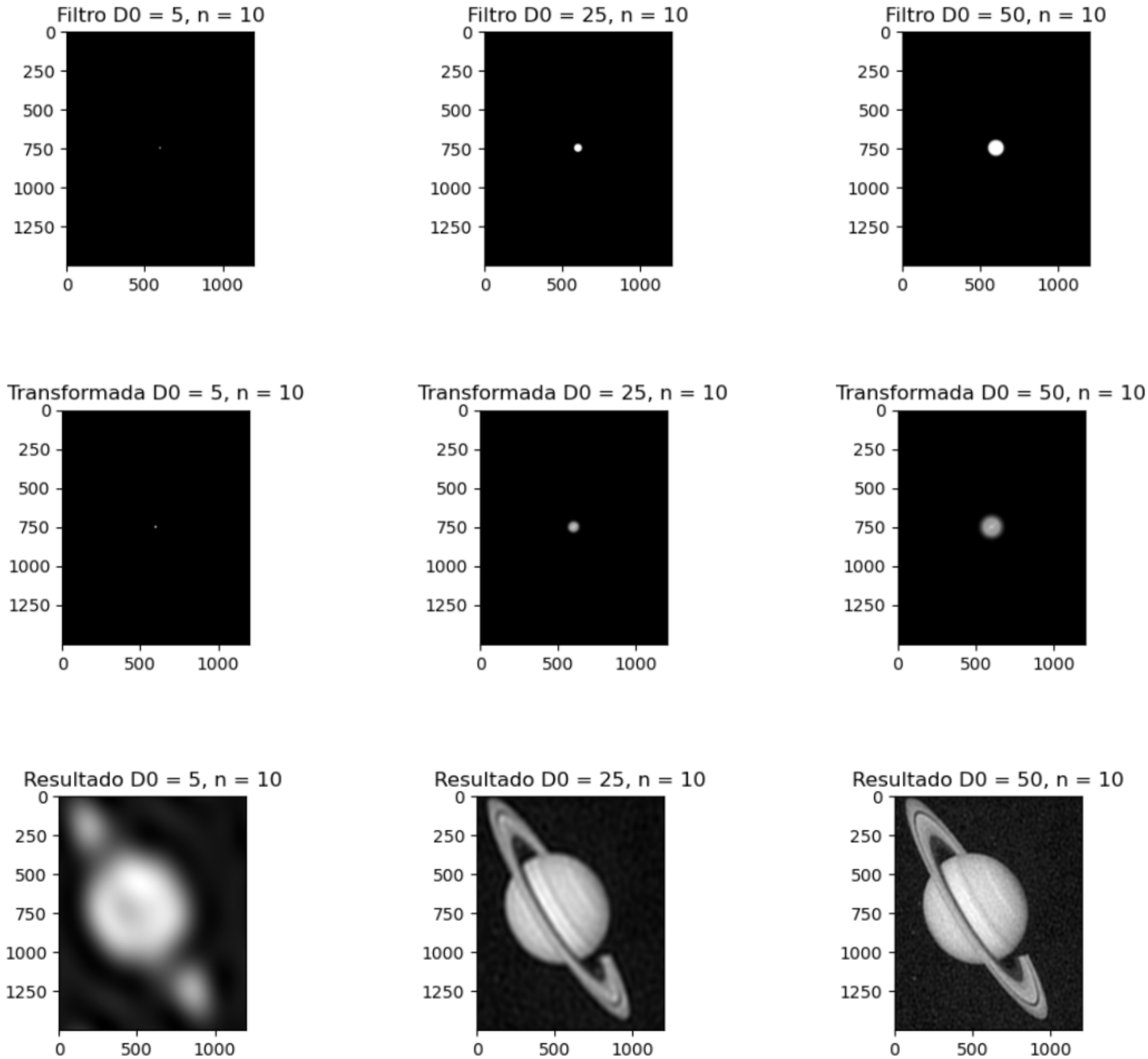

Filtro D0 = 5, n = 5
Filtro D0 = 25, n = 5
Filtro D0 = 50, n = 5
Transformada D0 = 5, n = 5
Transformada D0 = 25, n = 5
Transformada D0 = 50, n = 5
Resultado D0 = 5, n = 5
Resultado D0 = 25, n = 5
Resultado D0 = 50, n = 5
0
250
500
750
1000
1250
0
500
1000


Filtro D0 = 5, n = 10
Filtro D0 = 25, n = 10
Filtro D0 = 50, n = 10
Transformada D0 = 5, n = 10
Transformada D0 = 25, n = 10
Transformada D0 = 50, n = 10
Resultado D0 = 5, n = 10
Resultado D0 = 25, n = 10
Resultado D0 = 50, n = 10
0
250
500
750
1000
1250
0
500
1000

Para la imagen con ruido:

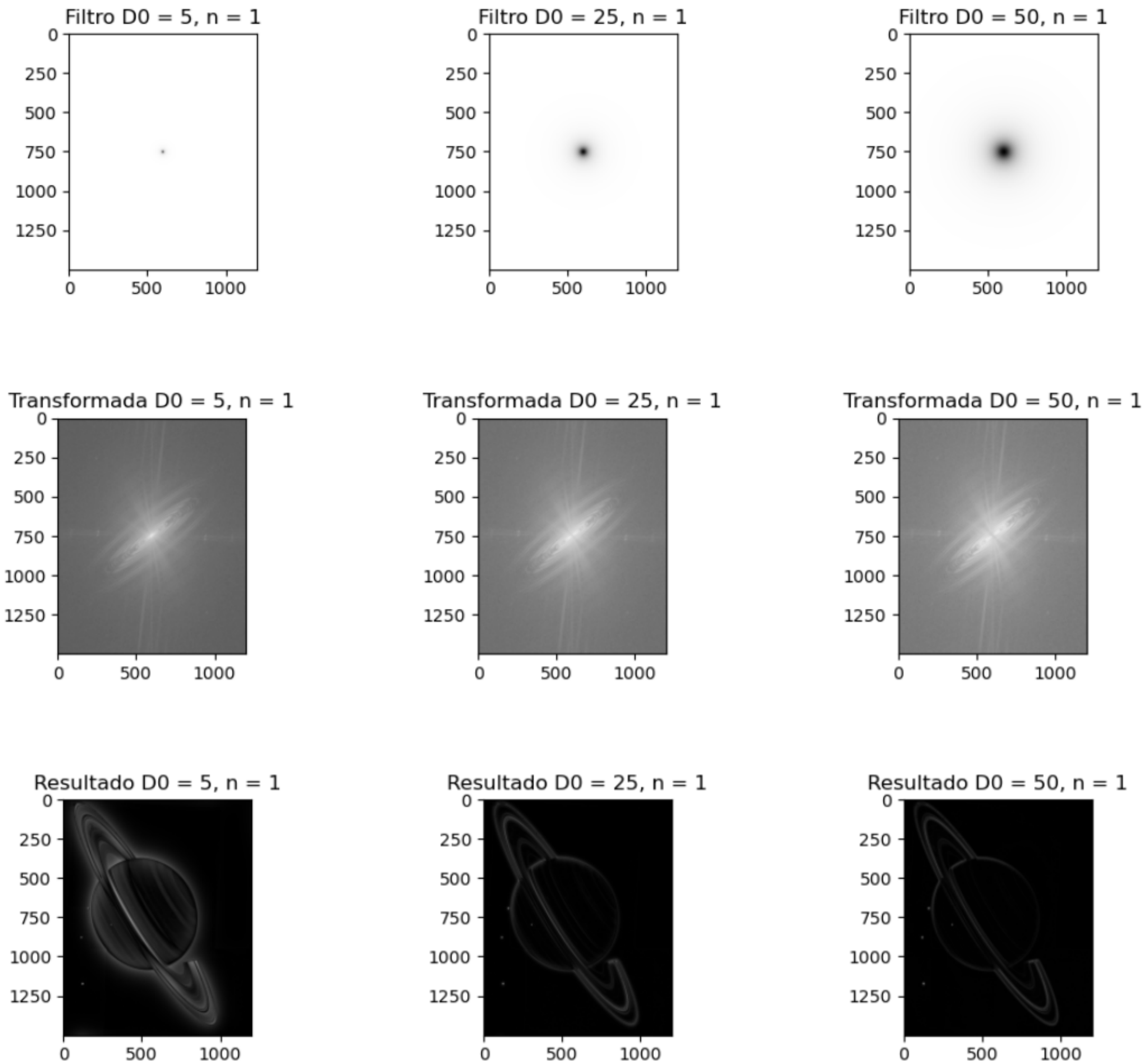


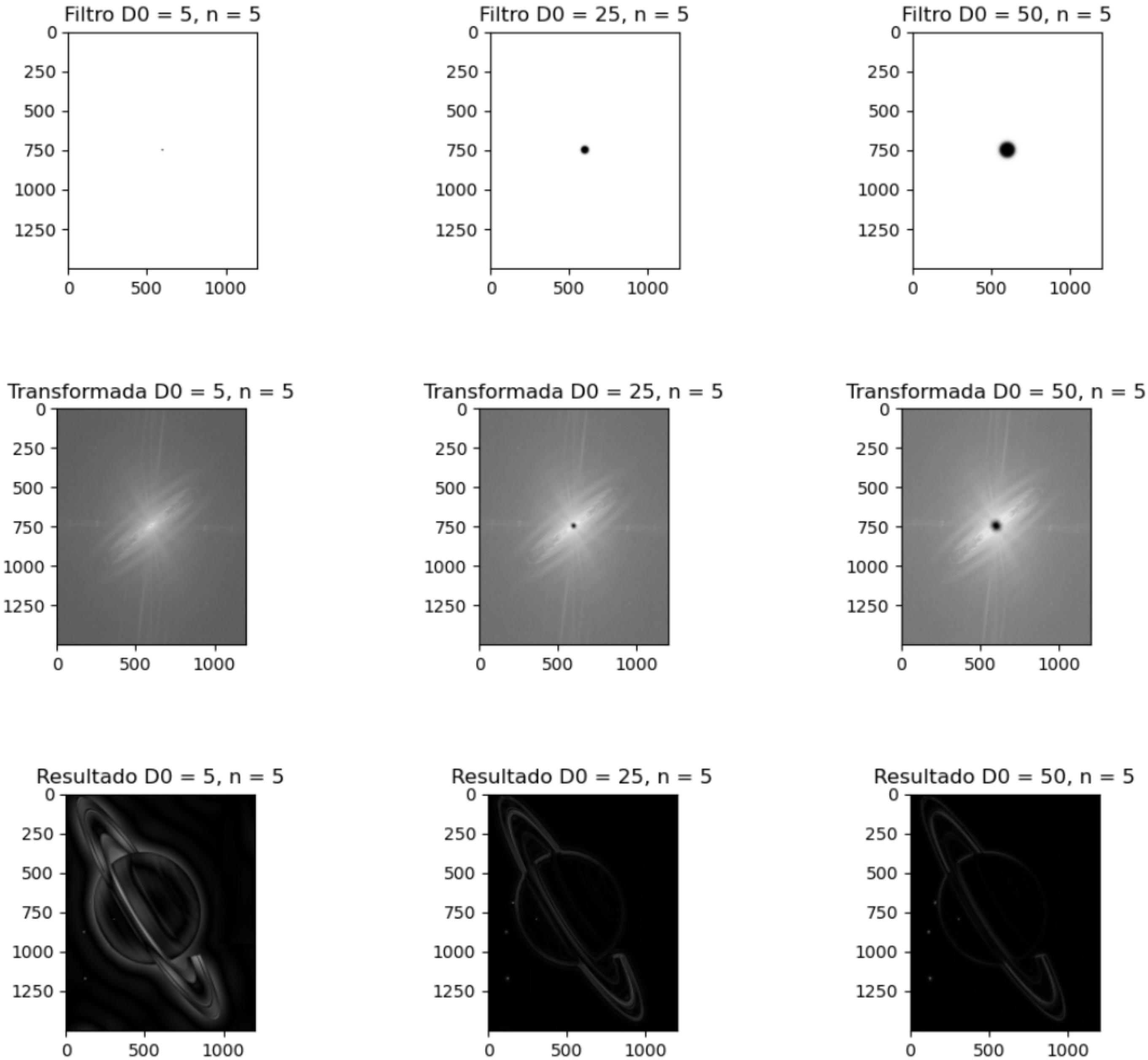

Filtro D0 = 5, n = 5
Filtro D0 = 25, n = 5
Filtro D0 = 50, n = 5
Transformada D0 = 5, n = 5
Transformada D0 = 25, n = 5
Transformada D0 = 50, n = 5
Resultado D0 = 5, n = 5
Resultado D0 = 25, n = 5
Resultado D0 = 50, n = 5

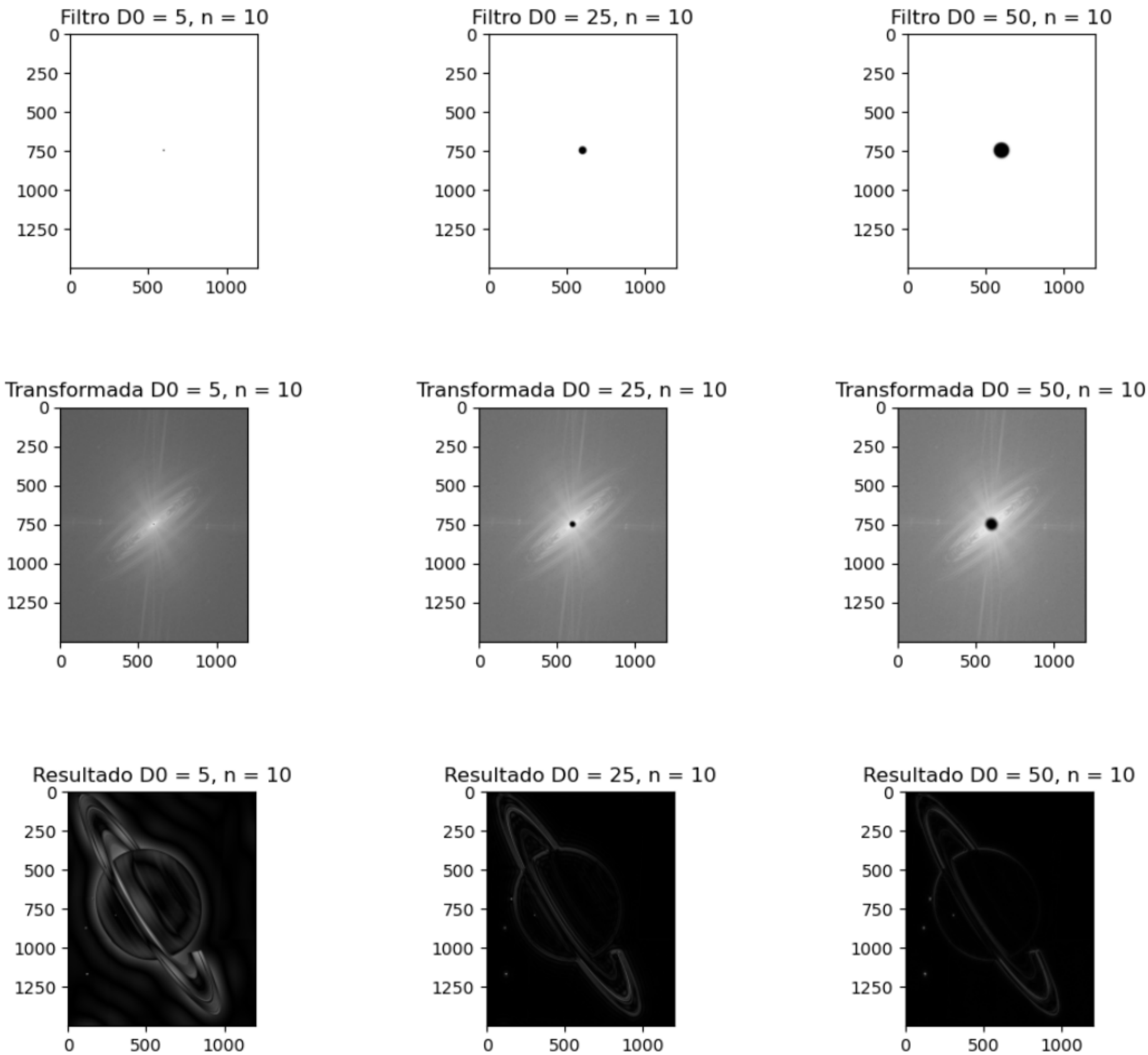

Filtro D0 = 5, n = 10
Filtro D0 = 25, n = 10
Filtro D0 = 50, n = 10
Transformada D0 = 5, n = 10
Transformada D0 = 25, n = 10
Transformada D0 = 50, n = 10
Resultado D0 = 5, n = 10
Resultado D0 = 25, n = 10
Resultado D0 = 50, n = 10

b) Aplicar el filtro paso altas Butterworth para el realce de bordes. Prueba para varios valores de frecuencia de corte D_0 y para varios valores de orden n y establece cuales valores son mejores para la imagen en cuestión.

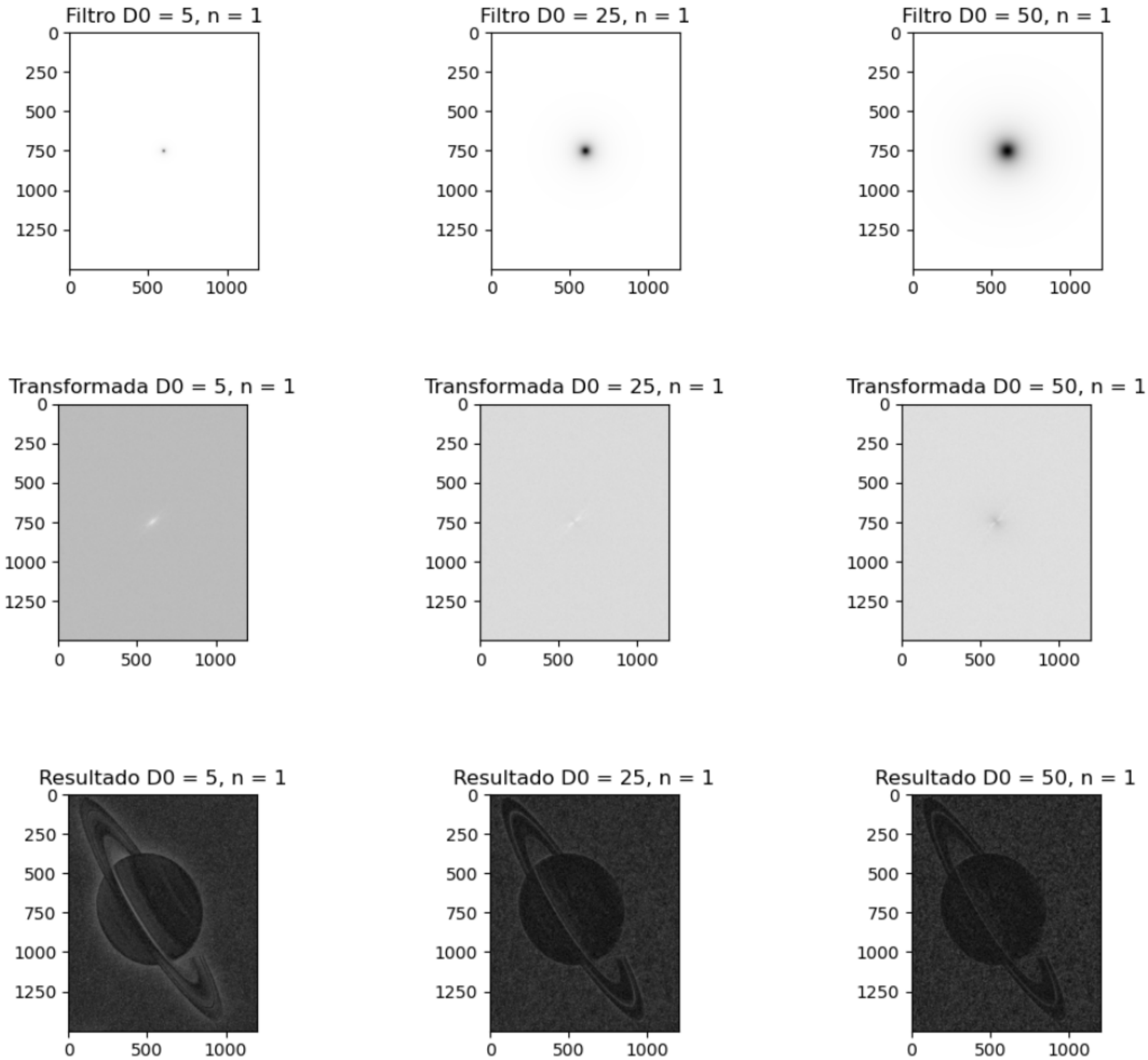
Para la imagen original:

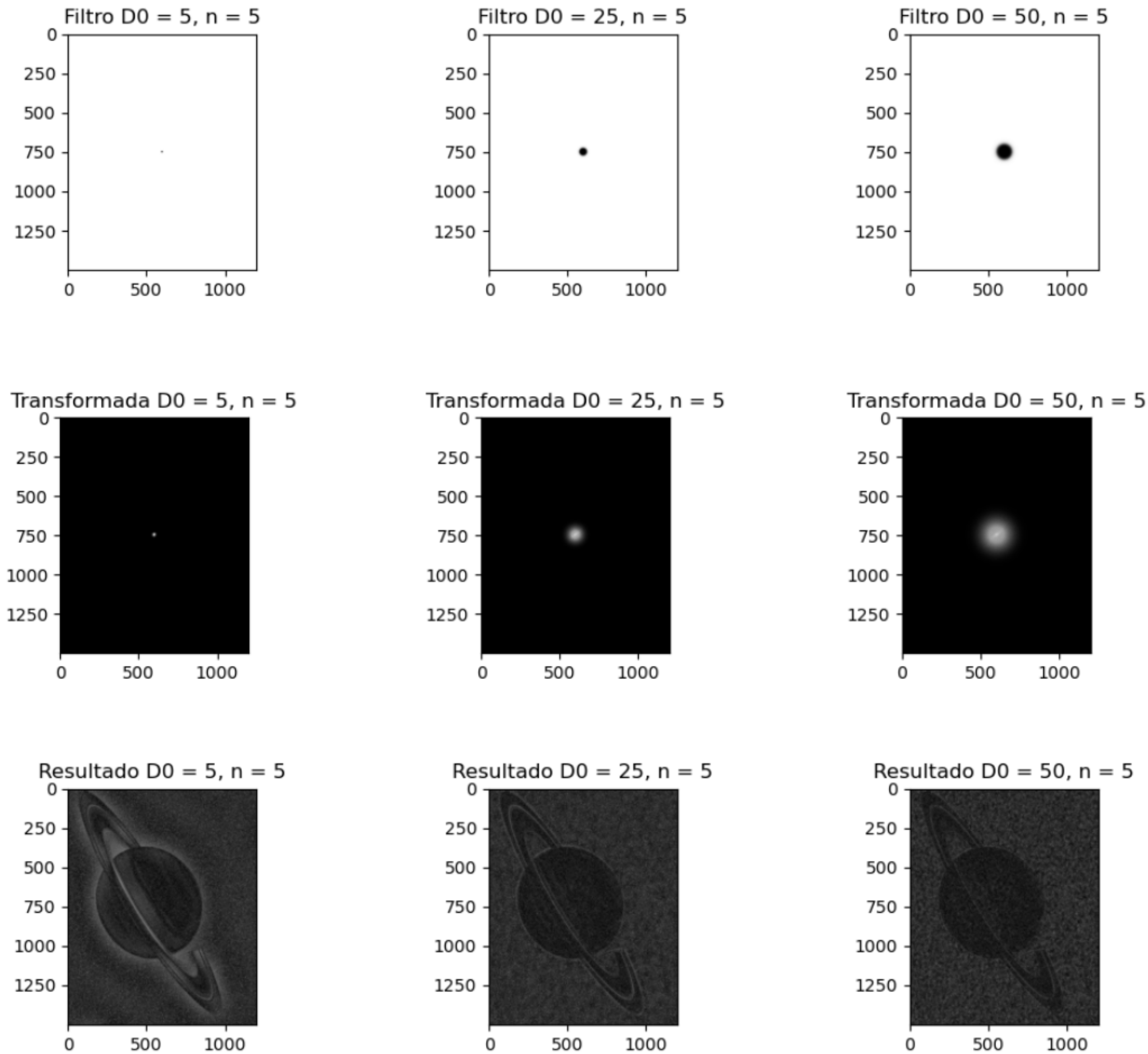


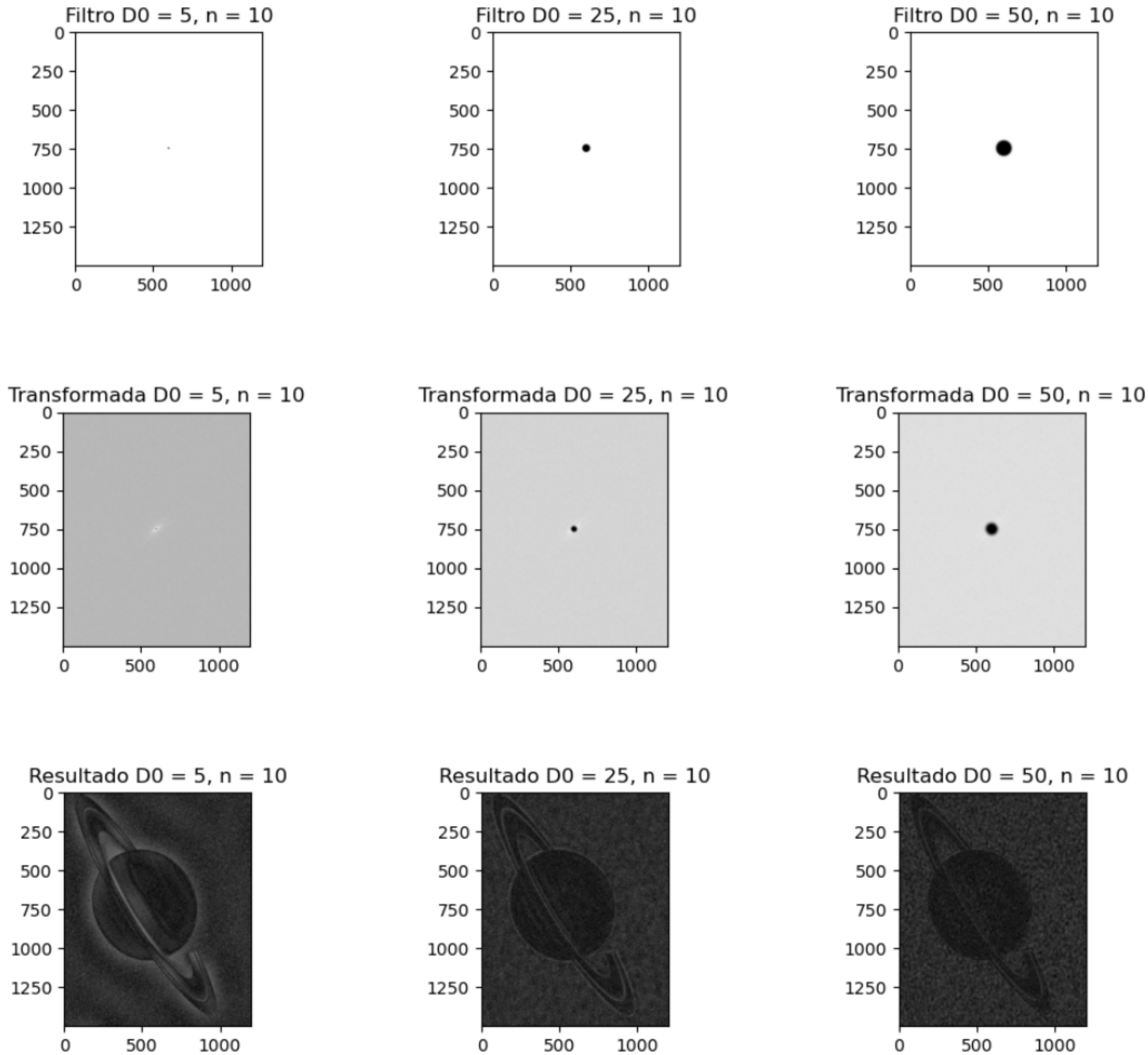

Filtro D0 = 5, n = 5
Filtro D0 = 25, n = 5
Filtro D0 = 50, n = 5
Transformada D0 = 5, n = 5
Transformada D0 = 25, n = 5
Transformada D0 = 50, n = 5
Resultado D0 = 5, n = 5
Resultado D0 = 25, n = 5
Resultado D0 = 50, n = 5


Filtro D0 = 5, n = 10
Filtro D0 = 25, n = 10
Filtro D0 = 50, n = 10
Transformada D0 = 5, n = 10
Transformada D0 = 25, n = 10
Transformada D0 = 50, n = 10
Resultado D0 = 5, n = 10
Resultado D0 = 25, n = 10
Resultado D0 = 50, n = 10
0
250
500
750
1000
1250
0
500
1000

Para la imagen con ruido:




Filtro D0 = 5, n = 5
Filtro D0 = 25, n = 5
Filtro D0 = 50, n = 5
Transformada D0 = 5, n = 5
Transformada D0 = 25, n = 5
Transformada D0 = 50, n = 5
Resultado D0 = 5, n = 5
Resultado D0 = 25, n = 5
Resultado D0 = 50, n = 5


Filtro D0 = 5, n = 10
Filtro D0 = 25, n = 10
Filtro D0 = 50, n = 10
Transformada D0 = 5, n = 10
Transformada D0 = 25, n = 10
Transformada D0 = 50, n = 10
Resultado D0 = 5, n = 10
Resultado D0 = 25, n = 10
Resultado D0 = 50, n = 10

Conclusiones

En esta práctica pude comprender y diferenciar más lo que significa obtener la transformada de Fourier, la transformada inversa, la transformada sólo con amplitud y la transformada sólo con la fase. Aparte de que las imágenes ayudan a comprender que es lo que gráficamente pasa por detrás y para qué nos puede servir, puesto que me parecía un poco más complejo entender el procesamiento de una imagen a través de la frecuencia.

Para el caso de el filtro butterworth, gracias a las diferentes pruebas y juego de valores que se aplicaron se puede notar que:

- Para el filtro paso bajas, mientras se incremente el valor de D_0 mayor es el diámetro del filtro y por lo tanto dejamos pasar más información de la imagen. Y mientras más aumenta el valor del orden n más se acerca a la frecuencia de corte y por lo tanto se acerca más a un filtro ideal, por lo cuál se nota más definido pero con ciertos artefactos como áreas concéntricas (siendo mejor aplicar un D_0 mayor para difuminar esos artefactos).

- Para el filtro paso altas, de forma contraria mientras se incremente el valor de D_0 mayor es el diámetro del filtro y perdemos más información de los valores de frecuencia altos (del centro) de la imagen y por lo tanto se pierden detalles. Y Para n ocurre lo mismo que en el paso bajas, mientras mayor sea n se verán más artefactos pero, como en este caso es preferible un valor más pequeño de D_0 para apreciar los detalles del realce que se perderían en otro caso, no es conveniente eliminarlo aumentando D_0.

Finalmente para la imagen con ruido notamos que el filtro paso bajas ayuda a disminuir el ruido sal ya que es de frecuencia alta pero aún persiste el ruido pimienta, y con el filtro paso altas de forma análoga. Aunque ambos continuarán con ruido, me parece que en ambos casos se pudo seguir apreciando la figura.

Referencias

1. Gonzalez, R., Woods, R., Digital Image Processing, Prentice Hall, 2008.