

Линеарна алгебра и примени

1 07.10.2022

1.1 Линеарни равенки

Равенка која може да се изрази како: $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ каде x_i се **променливи или слободни членови**, а a_i се **коэффициенти** се нарекува линеарна равенка. *a_i може да бидат реални или комплексни и често се знае нивниот тип претходно.*

a_i исто така се нарекуваат и параметри, можат да бидат и изрази под услов да не содржат променливи (слободни членови) во себе. За да се добие корисна равенка, потребно е сите коэффициенти да не се нули.

1.2 Систем од линеарни равенки

Систем од линеарни равенки (или линеарен систем) претставува колекција на една или повеќе линеарни равенки кои вклучуваат исти променливи. Пример:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 1.5x_3 = 8 \\ x_1 - 4x_3 = -7 \end{cases} \quad (1)$$

Решение на системот е **листа** (s_1, s_2, \dots, s_n) од броеви кои кога ќе се заменат со сите x -овци во секоја од равенките левата и десната страна ќе бидат исти.

Решението на системот (1) е листата $(5, 6.3, 3)$ бидејќи кога вредностите од листата ќе се постават наместо x -овците, левите и десните страни и кај двете равенки стануваат исти.

Подредената n -торка која ја задоволува секоја равенка во системот се нарекува **решение (партикуларно решение)**. Множество решенија на системот се нарекува **општо решение**. Да се реши системот значи да се најде општо решение на системот, односно множество од сите n -торки кои ја задоволуваат равенката.

Два линеарни система се **еквивалентни** ако го содржат истото множество на решенија (општото решение).

Бидејќи систем линеарни равенки со две непознати содржи информации за две линии, пронаоѓањето на множеството решенија (**општо решение**) на дадениот линеарен систем се сведува на пронаоѓање на сите пресеци на двете линии.

- Доколку линиите се сечат **точно** во една точка, тогаш системот има точно едно решение.

- Доколку линиите се **паралелни**, тогаш системот нема решенија.
- Доколку линиите **лежат една на друга**, тогаш системот има бесконечно многу решенија.

За еден систем се вели дека е **конзистентен** доколку има или едно или бесконечно многу решенија, аналогно на тоа, **неконзистентен** систем е оној кој нема решенија.

1.3 Изразување на линеарна равенки со матрица

Сите потребни информации за линеарен систем може да се претстават користејќи матрица. Пример, системот:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ 5x_1 - 5x_3 = 10 \end{cases} \quad (2)$$

може да се претстави како **матрица на коефициенти**:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \\ 5 & 0 & -5 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Дополнително може да се претстави како **проширена матрица**:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & -8 \\ 5 & 0 & -5 & -5 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Проширената матрица се состои од матрица на коефициенти со дополнителна колона (Матрица, вектор, од резултати) која ја претставува константата од десна страна на секоја од равенките.

Големината на матрицата ни кажува колку редови и колони има. Проширената матрица има 3 реда и 4 колони, односно претставува 3 x 4 матрица.

Бројот на редици се појавува пред бројот на колони.

1.4 Решавање на линеарен систем

Едноставната стратегија за решавање на линеарен систем е да се замени системот со еквивалентен систем (со исто множество на решенија) кој е поедноставен за решавање. Ако на еден систем од линеарни равенки се применат следните трансформации се добива систем еквивалентен со провобитниот:

- Замена на местата на две равенки од системот.
- Множење на една равенка со ненулта број.
- Множење на една равенка од системот со ненулта број и додавање на друга равенка од системот.

1.4.1 Пример: решавање на линеарен систем преку елиминирање на членови

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ 5x_1 - 5x_3 = 10 \end{cases} \quad \text{Претставен како матрица на коефициенти:} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 5 & 0 & -5 & 10 \end{array} \right] \quad (5)$$

Најпрактично е кај линеарната равенка со која ќе работиме (одземаме или додаваме на друга равенка) да се доведе коефициентот пред променливата, онаа која ни е од корист, на единица со цел да поедноставиме во пресметките, односно целата равенка да ја поделиме со вредноста на константата пред променливата.

Нека остане x_1 присутен само во првата равенка, а елиминиран во сите останати.

Постапка на елиминирање на x_1 :

Бидејќи x_1 во системот се појавува во две линеарни равенки од кои во една се појавува со коефициент 1 паметниот пристап ќе биде да ја искористиме наведената равенка (со коефициент 1) како основа за множење со чија помош ќе го елиминираме x_1 од другите равенки.

$$\frac{\begin{array}{l} \text{[Равенка 3]} \\ -(5 * \text{[Равенка 1]}) \end{array}}{\text{[Нова 3 равенка]}} \quad (6)$$

$$\frac{\begin{array}{l} 5x_1 - 5x_3 = 10 \\ -(5x_1 - 10x_2 + 5x_3 = 0) \end{array}}{10x_2 - 10x_3 = 10} \quad (7)$$

Линеарниот систем по извршената операција:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ 10x_2 - 10x_3 = 10 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & 10 & -10 & 10 \end{array} \right] \quad (8)$$

Се цел да си ги поедноставиме пресметките константата пред x_2 во вториот ред ќе ја доведеме до единица. Тоа ќе го постигнеме со множење на целата равенка со **1/[константа пред променлива]**. Во овој пример равенката врз која ќе ја примениме оваа операција ќе биде втората.

$$\frac{1}{2} \cdot (2x_2 - 8x_3 = 8) \rightarrow x_2 - 4x_3 = 4 \quad (9)$$

Линеарниот систем по извршената операција:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - 4x_3 = 4 \\ 10x_2 - 10x_3 = 10 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 10 & -10 & 10 \end{array} \right] \quad (10)$$

Постапка на елиминирање на x_2

Ја множиме втората равенка по 10 и резултатот го одземаме од третата равенка со цел да се ослободиме од x_2 .

$$\frac{\begin{array}{l} \text{[Равенка 3]} \\ -(10 * \text{[Равенка 2]}) \end{array}}{\text{[Нова 3 равенка]}} \quad (11)$$

$$\frac{\begin{array}{l} 10x_2 - 10x_3 = 10 \\ +(-10x_2 + 40x_3 = -40) \end{array}}{30x_3 = -30} \quad (12)$$

Линеарниот систем по извршената операција:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - 4x_3 = 4 \\ 30x_3 = 30 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 30 & -30 \end{array} \right] \quad (13)$$

Преку префрлување на коефициентот пред x_3 (во трета равенка) од друга страна на еднакво добиваме дека $x_3 = -1$. Со зема на x_3 со нејзината вредност во вториот ред (втората равенка) добиваме дека $x_2 = 0$. Преку замена на x_2 и x_3 со нивните вредности во првиот ред (првата равенка) добиваме дека $x_1 = 1$.

Добиеното решение ни кажува дека единственото решение на овој систем е **(1, 0, -1)**. Преку проверка се добива дека резултатот е точен.