Kontekstno-neodvisne gramatike za kodiranje in stiskanje podatkov

Janez Podlogar

Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko

16. 9. 2024

Kontekstno-neodvisne gramatike za kodiranje in stiskanje podatkov

Janez Podlogar

Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko

16. 9. 2024

Razdeljamo pojme v naslovu.

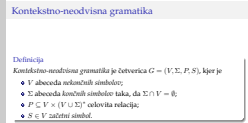
- Kodiranje je spreminjanje zapisa sporočila.
- Stiskanje podatkov je kodiranje, katerega cilj je zapisati sporočilo v zgoščeni obliki.

Kontekstno-neodvisna gramatika

Definicija

Kontekstno-neodvisna gramatika je četverica $G = (V, \Sigma, P, S)$, kjer je

- V abeceda *nekončnih simbolov*;
- Σ abeceda *končnih simbolov* taka, da $\Sigma \cap V = \emptyset$;
- $P \subseteq V \times (V \cup \Sigma)^*$ celovita relacija;
- $S \in V$ *začetni simbol*.



- Abeceda je končna neprazna množica.
- Relacija $R \subseteq A \times B$ je *celovita*, če velja $\forall x \in A\ \exists y \in B \colon (x, y) \in R$.
- $(V \cup \Sigma)^*$ je množica vseh nizov končne dolžine končnih in nekončnih simbolov. Vsebuje tudi prazen niz ε, saj je to niz dolžine 0.
- Prazen niz ε je enota za operacijo stik.
- Okrajšamo z KNG.

Primer

Naj bo $V = \{S\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$, $P = \{(S, aSb), (S, \epsilon)\}$ in $S = S$.

- Elementom relacije P pravimo *prepisovalna pravila*.
- Prepisovalno pravilo $(A, \beta) \in P$ pišemo $A \to \beta$.
- Niz $\alpha A \gamma$ se *prepiše s pravilom* $A \to \beta$ v $\alpha\beta\gamma$, pišemo $\alpha A \gamma \Rightarrow \alpha\beta\gamma$.
- Niz α *izpelje* niz β, če lahko α prepišemo v β z uporabo končno mnogo prepisovalnih pravil.

- Elementom relacije P pravimo *prepisovalna pravila*.
- Prepisovalno pravilo $(A, \beta) \in P$ pišemo $A \to \beta$.
- Niz $\alpha A \gamma$ se *prepiše s pravilom* $A \to \beta$ v $\alpha\beta\gamma$, pišemo $\alpha A \gamma \Rightarrow \alpha\beta\gamma$.
- Niz α *izpelje* niz β, če lahko α prepišemo v β z uporabo končno mnogo prepisovalnih pravil.

- *Leva stran prepisovalnega pravila* $A \to \beta$ je A in *desna stran prepisovalnega pravila* je β.

Primer

prepisovalna pravila zapišemo kot $P = \{S \to aSb, S \to \epsilon\}$. Izpeljemo nize

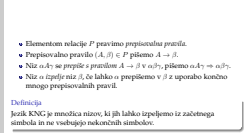
$$S \Rightarrow \epsilon,\ S \Rightarrow aSb \Rightarrow ab,\ S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow aabb,\ \ldots$$

Jezik je $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$.

- Elementom relacije P pravimo *prepisovalna pravila*.
- Prepisovalno pravilo $(A, \beta) \in P$ pišemo $A \to \beta$.
- Niz $\alpha A \gamma$ se *prepiše s pravilom* $A \to \beta$ v $\alpha\beta\gamma$, pišemo $\alpha A \gamma \Rightarrow \alpha\beta\gamma$.
- Niz α *izpelje* niz β, če lahko α prepišemo v β z uporabo končno mnogo prepisovalnih pravil.

Definicija

Jezik KNG je množica nizov, ki jih lahko izpeljemo iz začetnega simbola in ne vsebujejo nekončnih simbolov.



- *Leva stran prepisovalnega pravila* $A \to \beta$ je A in *desna stran prepisovalnega pravila* je β.

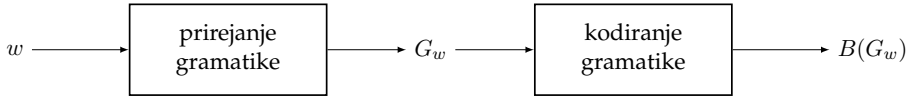
Primer

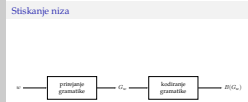
prepisovalna pravila zapišemo kot $P = \{S \to aSb, S \to \epsilon\}$. Izpeljemo nize

$$S \Rightarrow \epsilon,\ S \Rightarrow aSb \Rightarrow ab,\ S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow aabb,\ \ldots$$

Jezik je $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$.

Stiskanje niza





- Glavna ideja je, da je jezik G_w je $\{w\}$, saj lahko enolično rekonstruramo niz w.
- Alternativni pristop: KNG G je poznana tako kodirniku kot dekodirniku in jezik KNG G vsebuje vse nize, ki jih želimo stistniti. Posamezni niz stisnemo tako, da stistnemo izpeljavo niza iz začetnega simbola.

Dopustna gramatika

Definicija

KNG je *deterministična*, če vsak nekončen simbol $A \in V$ nastopa natanko enkrat kot leva stran nekega prepisovalnega pravila.

Dopustna gramatika
Definicija
KNG je *deterministična*, če vsak nekončen simbol $A \in V$ nastopa natanko enkrat kot leva stran nekega prepisovalnega pravila.

- Prejšnji primer ni deterministična gramatika.
- Če odstranimo odstarnimo pravilo $S \to aSb$, postane deterministična, a je jezik $\{\varepsilon\}$.
- Če odstranimo $S \to \varepsilon$ postane deterministična, a je njen jezik prazna množica.
- Determinizem sam po sebi ni dovolj močan, da prepreči praznost jezika. Zato bomo od dopustnih gramatik zahtevali, da je njihov jezik neprazen in da ne vsebuje pravila oblike $A \to \varepsilon$.

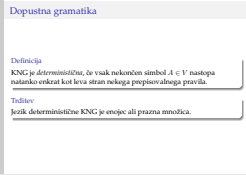
Dopustna gramatika

Definicija

KNG je *deterministična*, če vsak nekončen simbol $A \in V$ nastopa natanko enkrat kot leva stran nekega prepisovalnega pravila.

Trditev

Jezik deterministične KNG je enojec ali prazna množica.



- Prejšnji primer ni deterministična gramatika.
- Če odstranimo odstarnimo pravilo $S \to aSb$, postane deterministična, a je jezik $\{\varepsilon\}$.
- Če odstranimo $S \to \varepsilon$ postane deterministična, a je njen jezik prazna množica.
- Determinizem sam po sebi ni dovolj močan, da prepreči praznost jezika. Zato bomo od dopustnih gramatik zahtevali, da je njihov jezik neprazen in da ne vsebuje pravila oblike $A \to \varepsilon$.

Definicija

KNG *ne vsebuje neuporabnih simbolov*, če se vsak simbol $y \in V \cup \Sigma,\ y \neq S$ pojavi vsaj enkrat v izpeljavi niza, ki je v jeziku KNG.

Definicija
KNG *ne vsebuje neuporabnih simbolov*, če se vsak simbol $y \in V \cup \Sigma,\ y \neq S$ pojavi vsaj enkrat v izpeljavi niza, ki je v jeziku KNG.

- Povedano drugače: simbol je neupraven, če se ne pojavi v nobeni izpeljavi niza, ki je v jeziku KNG.

Definicija

KNG je *dopustna gramatika*, če je:

- deterministična,
- ne vsebuje neuporabnih simbolov,
- ima neprazen jezik,
- prazen niz ne nastopa kot desna stran kateregakoli prepisovalnega pravila.

Definicija
KNG je *dopustna gramatika*, če je:
- deterministična,
- ne vsebuje neuporabnih simbolov,
- ima neprazen jezik,
- prazen niz ne nastopa kot desna stran kateregakoli prepisovalnega pravila.

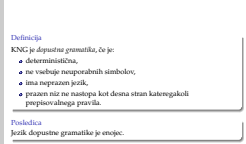
Definicija

KNG je *dopustna gramatika*, če je:

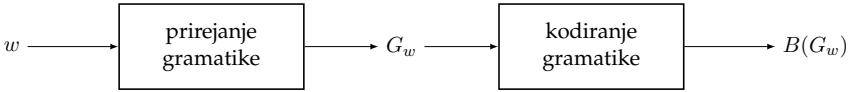
- deterministična,
- ne vsebuje neuporabnih simbolov,
- ima neprazen jezik,
- prazen niz ne nastopa kot desna stran kateregakoli prepisovalnega pravila.

Posledica

Jezik dopustne gramatike je enojec.



Prirejanje gramatike



Od tu naprej naj bo:

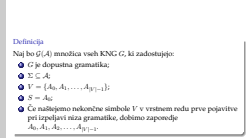
- $\mathcal{A}$ poljubna abeceda , $|\mathcal{A}| \geq 2$;
- $\{A_0, A_1, \ldots\}$ končna množica , $\mathcal{A} \cap \{A_0, A_1, \ldots\} = \emptyset$.

Prirejanje gramatike

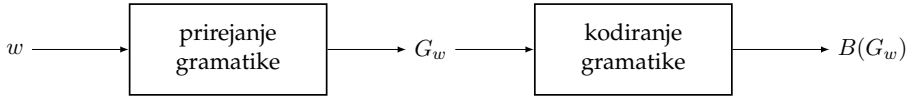
Definicija

Naj bo $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ množica vseh KNG G, ki zadostujejo:

1. G je dopustna gramatika;
2. $\Sigma \subseteq \mathcal{A}$;
3. $V = \{A_0, A_1, \ldots, A_{|V|-1}\}$;
4. $S = A_0$;
5. Če naštejemo nekončne simbole V v vrstnem redu prve pojavitve pri izpeljavi niza gramatike, dobimo zaporedje $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{|V|-1}$.



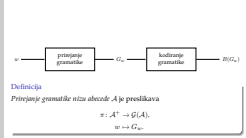
- Z zahtevo 5. so nekončni simboli poimenovani po edinstvem vrstnem redu. Ta vrstni red omogoča pravilno dekodiranje.
- KNG $G \notin \mathcal{G}(\mathcal{A})$, ki izpolnjuje zahtevi 1. in 2., preimenujmo nekončne simbole tako, da izpolnimo 5. zahtevo. Potem izpolnimo tudi 3. in 4. zahtevi. Dobimo $[G] \in \mathcal{G}(\mathcal{A})$, ki jo imenujemo *kanonično oblika* G, in velja da sta jezika $[G]$ in G enaka.



Definicija

Prirejanje gramatike nizu abecede $\mathcal{A}$ je preslikava

$$\pi\colon \mathcal{A}^+ \to \mathcal{G}(\mathcal{A}),$$
$$w \mapsto G_w.$$



Definicija

Z $\mathcal{G}^*(\mathcal{A})$ označimo pravo podmnožico množice $\mathcal{G}(\mathcal{A})$, da za vsak $G \in \mathcal{G}^*(\mathcal{A})$ velja

$$\forall A, B \in V,\ A \neq B\colon f_G^\infty(A) \neq f_G^\infty(B).$$

Definicija
Z $\mathcal{G}^*(\mathcal{A})$ označimo pravo podmnožico množice $\mathcal{G}(\mathcal{A})$, da za vsak $G \in \mathcal{G}^*(\mathcal{A})$ velja
$\forall A, B \in V,\ A \neq B\colon f_G^\infty(A) \neq f_G^\infty(B)$.

- Za prirejanja, ki jih predstavimo potrebujemo še eno omejitev s katero se v predstavitvi ne obremenjujemo.

Definicija

Z $\mathcal{G}^*(\mathcal{A})$ označimo pravo podmnožico množice $\mathcal{G}(\mathcal{A})$, da za vsak $G \in \mathcal{G}^*(\mathcal{A})$ velja

$$\forall A, B \in V,\ A \neq B\colon f_G^\infty(A) \neq f_G^\infty(B).$$

Definicija

Z $|G|$ označimo vsoto dolžin desnih strani prepisovalnih pravil KNG G.

Definicija
Z $\mathcal{G}^*(\mathcal{A})$ označimo pravo podmnožico množice $\mathcal{G}(\mathcal{A})$, da za vsak $G \in \mathcal{G}^*(\mathcal{A})$ velja
$\forall A, B \in V,\ A \neq B\colon f_G^\infty(A) \neq f_G^\infty(B)$.
Definicija
Z $|G|$ označimo vsoto dolžin desnih strani prepisovalnih pravil KNG G.

- Za prirejanja, ki jih predstavimo potrebujemo še eno omejitev s katero se v predstavitvi ne obremenjujemo.

Asimptotsko kompaktno prirejanje gramatike

Definicija

Prirejanje gramatike nizu abecede $\mathcal{A}$ je *asimptotsko kompaktno*, če za vsak niz $w \in \mathcal{A}^+$ velja $G_w \in \mathcal{G}^*(\mathcal{A})$ in je

$$\lim_{n\to\infty} \max_{w\in\mathcal{A}^n} \frac{|G_w|}{|w|} = 0.$$

Asimptotsko kompaktno prirejanje gramatike

Definicija
Prirejanje gramatike nizu abecede $\mathcal{A}$ je *asimptotsko kompaktno*, če za vsak niz $w \in \mathcal{A}^+$ velja $G_w \in \mathcal{G}^*(\mathcal{A})$ in je
$\lim_{n\to\infty} \max_{w\in\mathcal{A}^n} \frac{|G_w|}{|w|} = 0.$

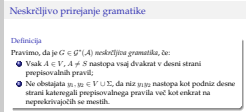
- Primer je bisekcijsko prirejanje gramatike.

Neskrčljivo prirejanje gramatike

Definicija

Pravimo, da je $G \in \mathcal{G}^*(\mathcal{A})$ *neskrčljiva gramatika*, če:

1. Vsak $A \in V$, $A \neq S$ nastopa vsaj dvakrat v desni strani prepisovalnih pravil;
2. Ne obstajata $y_1, y_2 \in V \cup \Sigma$, da niz $y_1 y_2$ nastopa kot podniz desne strani kateregali prepisovalnega pravila več kot enkrat na neprekrivajočih se mestih.



- Primer prekrivajočih mest je $\underline{111}$ in $1\underline{11}$.
- Primer neprekriavjočih mest je $\underline{11}\ \underline{11}$.
- Različna neskrčjiva prirejanja gramatike dobimo tako, da izvajamo različne nabore skrčitvenih pravil.
- Primer je metodo najdaljšega ujemajočega podniza.

Neskrčljivo prirejanje gramatike

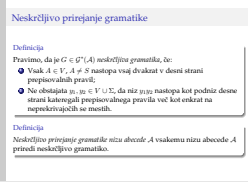
Definicija

Pravimo, da je $G \in \mathcal{G}^*(\mathcal{A})$ *neskrčljiva gramatika*, če:

1. Vsak $A \in V$, $A \neq S$ nastopa vsaj dvakrat v desni strani prepisovalnih pravil;
2. Ne obstajata $y_1, y_2 \in V \cup \Sigma$, da niz y_1y_2 nastopa kot podniz desne strani kateregali prepisovalnega pravila več kot enkrat na neprekrivajočih se mestih.

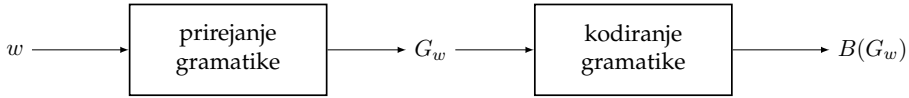
Definicija

Neskrčljivo prirejanje gramatike nizu abecede $\mathcal{A}$ vsakemu nizu abecede $\mathcal{A}$ priredi neskrčljivo gramatiko.



- Primer prekrivajočih mest je $\underline{111}1$ in $1\underline{111}$.
- Primer neprekriavjočih mest je $\underline{11}\ \underline{11}$.
- Različna neskrčjiva prirejanja gramatike dobimo tako, da izvajamo različne nabore skrčitvenih pravil.
- Primer je metodo najdaljšega ujemajočega podniza.

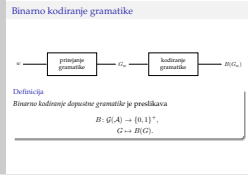
Binarno kodiranje gramatike



Definicija

Binarno kodiranje dopustne gramatike je preslikava

$$B\colon \mathcal{G}(\mathcal{A}) \to \{0,1\}^+,$$
$$G \mapsto B(G).$$



Izrek

Obstaja bijektivno binarno kodiranje dopustne gramatike, da

1. $\forall G_1, G_2 \in \mathcal{G}(\mathcal{A}), G_1 \neq G_2$ niz $B(G_1)$ ni predpona niza $B(G_2)$,
2. $\forall G \in \mathcal{G}(\mathcal{A})\colon\ |B(G)| \leq |\mathcal{A}| + 4\,|G| + \lceil H(G) \rceil$.

Izrek
Obstaja bijektivno binarno kodiranje dopustne gramatike, da
$\forall G_1, G_2 \in \mathcal{G}(\mathcal{A}), G_1 \neq G_2$ niz $B(G_1)$ ni predpona niza $B(G_2)$,
$\forall G \in \mathcal{G}(\mathcal{A})\colon\ |B(G)| \leq |\mathcal{A}| + 4\,|G| + \lceil H(G) \rceil$.

- Abeceda je poznana tako kodirniku kot dekodirniku.

Definicija

Stiskanje niza abecede $\mathcal{A}$ z gramatikami $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ je par preslikav kodne in dekodne preslikave $\Phi = (\kappa, \delta)$. Kodna preslikava je

$$\begin{aligned} \kappa \colon \mathcal{A}^+ &\to \{0,1\}^+, \\ w &\mapsto B(\pi(w)), \end{aligned}$$

kjer je π prirejanje gramatike nizu abecede $\mathcal{A}$ in B binarno kodiranje dopustne gramatike.

Definicija
Stiskanje niza abecede $\mathcal{A}$ z gramatikami $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ je par preslikav kodne in dekodne preslikave $\Phi = (\kappa, \delta)$. Kodna preslikava je
$\kappa \colon \mathcal{A}^+ \to \{0,1\}^+, \quad w \mapsto B(\pi(w)),$
kjer je π prirejanje gramatike nizu abecede $\mathcal{A}$ in B binarno kodiranje dopustne gramatike.

- Odvečnost meri količino ponavljajočih se ali predvidljivih podatkov znotraj sporočila, ki jih je mogoče odstraniti, da se prihrani prostor, brez izgube informacije.
- Odvečnost stiskanja z asimptotsko kompaktnim prirejanjem konvergira proti 0 v odvisnosti od izbire kodiranja znotraj razreda.
- Stiskanje z neskrčljivim prirejanjem tudi stiskanje z asimptotsko kompaktnim prirejanjem in odvečnost konvergira enakomerno proti 0 za vsa stiskanja z neskrčljivim prirejanjem, vsaj tako hitro kot $\frac{\log_2 \log_2(n)}{\log_2(n)}$ pomnoženo z neko konstanto.