Kontekstno-neodvisne gramatike za kodiranje in stiskanje podatkov

Janez Podlogar

Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko

21. 11. 2022

Kodiranje in kod

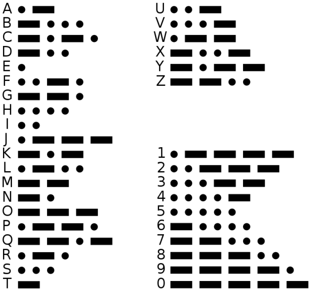
Zapis informacije v neki obliki ni primeren za vsakršno rabo. Spreminjanje zapisa sporočila imenujemo *kodiranje*, sistemu pravil, po katerem se kodiranje opravi, pa *kod*.

Morsejeva abeceda

Morsejeva abeceda je kodiranje črk, števil in ločil s pomočjo zaporedja kratkih in dolgih signalov:

- Dolžina kratkega signala je ena enota.
- Dolgi signal je trikrat daljši od kratkega signala.
- Razmik med signali znotraj črke je tišina dolžine kratkega signala.
- Razmik med črkami je tišina dolga tri kratke signale oz. en dolgi signal.
- Presledek med besedami je tišina dolga sedmih kratkih signalov.

Morsejeva abeceda



Slika: Mednarodna Morsejeva abeceda

Abeceda in nizi na abecedi

Definicija

Abeceda je končna neprazna množica Σ. Elementom abecede pravimo *črke*. *Množica vseh končnih nizov abecede* Σ označimo z Σ^* in vključuje tudi prazen niz, ki ga označimo z ε. *Dolžino niza* w označimo z $|w|$ in je enaka številu črk v nizu $w \in \Sigma^*$. *Jezik na abecedi* Σ je poljubna podmnožica množice Σ^*.

Abeceda in nizi na abecedi

Definicija

Abeceda je končna neprazna množica Σ. Elementom abecede pravimo *črke*. *Množica vseh končnih nizov abecede* Σ označimo z Σ^* in vključuje tudi prazen niz, ki ga označimo z ε. *Dolžino niza* w označimo z $|w|$ in je enaka številu črk v nizu $w \in \Sigma^*$. *Jezik na abecedi* Σ je poljubna podmnožica množice Σ^*.

Primer

Naj bo $\Sigma = \{a, b, c\}$ abeceda, potem je

$$ab \in \Sigma^*, \quad cababcccababcccab \in \Sigma^*.$$

Kodiranje in dekodiranje

Definicija

Kodiranje nizov abecede Σ je injektivna funkcija $\kappa\colon \Sigma^* \to \Sigma_c^*$, kjer je Σ_c *kodirna abeceda* in $\kappa(w)$ imenujemo *koda niza* w. *Dokodiranje kodiranja* κ je funkcija $\kappa^{-1}\colon C \subseteq \Sigma_c^* \to \Sigma^*$, da velja

$$\forall w \in \Sigma^*\colon \kappa^{-1}(\kappa(w)) = w$$

Formalizacija Morsejeve abecede

Abecedi sta

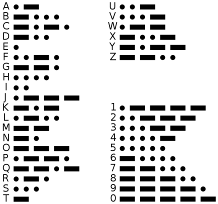
$$\Sigma = \{A, B, \ldots, Z\} \cup \{0, 1, \ldots, 9\} \cup \{\_\},$$
$$\Sigma_c = \{\cdot, -, \_\}.$$

Definirajmo kodno funkcijo črk abecede $\kappa\colon \Sigma \to \Sigma_c^*$, ki vsakei črki iz abecede Σ priredi niz črk kodirne abecede Σ_c. Za niz $w = a_1 a_2 \ldots a_n \in \Sigma^*$ definiramo kodirno funkcijo K po črkah

$$K(w) = \kappa(a_1)\_\kappa(a_2)\_ \cdots \kappa(a_n).$$

Formalizacija Morsejeve abecede

Vrednosti funkcije κ so določene s tabelo



Dodatno presledek med besedami _ kodiramo v šest kratkih enot tišine

$$\kappa(\_) = \underline{\hspace{3em}}$$

Stiskanje podatkov

Definicija

Stiskanje je kodiranje K za katerega velja

$$\exists n \in \mathbb{N}\ \forall w \in \Sigma^* \colon |w| \geq n \implies |K(w)| \ll |w|\,.$$

Zgled stiskanja niza w

Za abecedo vzemimo $\Sigma = \{a, b, c\}$ in poglejmo niz

$$w = cababcccababcccab.$$

Zgled stiskanja niza w

Za abecedo vzemimo $\Sigma = \{a, b, c\}$ in poglejmo niz

$$w = cababcccababcccab.$$

Uvedemo novi spremenljivki $A = ab$ in $B = ccc$.

Zgled stiskanja niza w

Za abecedo vzemimo $\Sigma = \{a, b, c\}$ in poglejmo niz

$$w = cababcccababcccab.$$

Uvedemo novi spremenljivki $A = ab$ in $B = ccc$. Potem je

$$w = cAABAABA.$$

Zgled stiskanja niza w

Za abecedo vzemimo $\Sigma = \{a, b, c\}$ in poglejmo niz

$$w = cababcccababcccab.$$

Uvedemo novi spremenljivki $A = ab$ in $B = ccc$. Potem je

$$w = cAABAABA.$$

Uvedemo novo spremeljivko $C = AAB$.

Zgled stiskanja niza w

Za abecedo vzemimo $\Sigma = \{a, b, c\}$ in poglejmo niz

$$w = cababcccababcccab.$$

Uvedemo novi spremenljivki $A = ab$ in $B = ccc$. Potem je

$$w = cAABAABA.$$

Uvedemo novo spremeljivko $C = AAB$. Potem je

$$w = cCCA.$$

Zgled stiskanja niza w

Prešnji postopek napišemo na sledeč način s pomočjo produkcijskih pravil

$$
\begin{aligned}
S &\to cCCA, \\
A &\to ab, \\
B &\to ccc, \\
C &\to AAB.
\end{aligned}
$$

Kontekstno-neodvisne gramatike

Definicija

Formalna gramatika G so pravila, ki nam iz abecede Σ tvorijo jezik, označimo ga z $L(G)$.

Kontekstno-neodvisne gramatike

Definicija

Formalna gramatika G so pravila, ki nam iz abecede Σ tvorijo jezik, označimo ga z $L(G)$.

Definicija

Kontektsno-neodvisna gramatika je četverica $G = (V, \Sigma, P, S)$, kjer je V končna množica *spremenljivk*, abeceda Σ množica *končnih simbolov* tako, da $\Sigma \cap V = \emptyset$, $P \subseteq V \times (V \cup \Sigma)^*$ relacija, ki ji pravimo *produkcijsko pravilo* in $S \in V$ *začetna spremenljivka*.

Kontekstno-neodvisne gramatike

Definicija

Naj bo $G = (V, \Sigma, P, S)$ kontekstno-neodvisna gramatika. Naj bodo α, $\beta, \gamma \in (V \cup \Sigma)^*$ nizi spremenljivk in končnih simbolov, $A \in V$ spremenljivka ter naj bo $(A, \beta) \in P$ produkcijsko pravilo, označimo ga z $A \to \beta$. Pravimo, da se $\alpha A \gamma$ *prepiše s pravilom* A v $\alpha\beta\gamma$, pišemo $\alpha A \gamma \Rightarrow \alpha\beta\gamma$. Pravimo, da α *porodi* β, če je $\alpha = \beta$ ali če za $k \geq 0$ obstaja zaporedje $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n \in (V \cup \Sigma)^*$ tako, da

$$\alpha \Rightarrow \alpha_1 \Rightarrow \alpha_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \alpha_n \Rightarrow \beta$$

in pišemo $\alpha \stackrel{*}{\Rightarrow} \beta$.

Kontekstno-neodvisne gramatike

Posledica

Jezik kontekstno neodvisne gramatike G je

$$L(G) = \{w \in \Sigma^* \mid S \stackrel{*}{\Rightarrow} w\}.$$

Zgled stiskanja niza w z gramatiko

Formalizirajmo gramatiko iz prejšnjega primera. Gramatiko smo generirali z nizom $w = cababcccababcccab$.

Zgled stiskanja niza w z gramatiko

Formalizirajmo gramatiko iz prejšnjega primera. Gramatiko smo generirali z nizom $w = cababcccababcccab$. Dobimo $G_w = (V, \Sigma, P, S)$, kjer je

$$\begin{aligned} V &= \{S, A, B, C\}, \\ \Sigma &= \{a, b, c\}, \\ P &= \{S \to cCCA, A \to ab, B \to ccc, C \to AAB\}, \\ S &= S. \end{aligned}$$

Zgled stiskanja niza w z gramatiko

Formalizirajmo gramatiko iz prejšnjega primera. Gramatiko smo generirali z nizom $w = cababcccababcccab$. Dobimo $G_w = (V, \Sigma, P, S)$, kjer je

$$V = \{S, A, B, C\},$$
$$\Sigma = \{a, b, c\},$$
$$P = \{S \to cCCA, A \to ab, B \to ccc, C \to AAB\},$$
$$S = S.$$

Vidimo, da G_w ustreza naši definiciji kontekstno-neodvisne gramatike in res kodira w, saj je

$$L(G_w) = \{w\}$$