

## Vaje 13.10.2025: Aproksimacijski operatorji

1. *Bernsteinov operator.* Bernsteinov operator

$$(B_n f)(x) = \sum_{i=0}^n f\left(\frac{i}{n}\right) B_i^n(x)$$

funkciji  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  priredi polinom stopnje manjše ali enake  $n$ . Dokažite, da je

$$(B_n f)'(x) = n \sum_{i=0}^{n-1} \Delta f\left(\frac{i}{n}\right) B_i^{n-1}(x), \quad \Delta f\left(\frac{i}{n}\right) = f\left(\frac{i+1}{n}\right) - f\left(\frac{i}{n}\right),$$

in utemeljite, da za zvezno odvedljivo funkcijo  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f' - (B_n f)'\|_{\infty, [0,1]} = 0.$$

2. *Kantorovičev operator.* Naj bo  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  integrabilna funkcija in  $K_n f$  operator, ki funkciji  $f$  priredi Kantorovičev polinom

$$K_n f(x) = \sum_{i=0}^n f_{n,i} B_i^n(x), \quad f_{n,i} = (n+1) \int_{\frac{i}{n+1}}^{\frac{i+1}{n+1}} f(t) dt.$$

Vrednost  $f_{n,i}$  ustreza ravno povprečni vrednosti funkcije  $f$  na intervalu  $[\frac{i}{n+1}, \frac{i+1}{n+1}]$ .

- (a) Dokažite, da za  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  velja  $(B_{n+1} F)' = K_n f$ .
  - (b) Naj bo  $f$  zvezna. Dokažite, da tedaj velja  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - K_n f\|_{\infty, [0,1]} = 0$ .
3. *Zvezni odsekoma linearen interpolant.* Naj bo

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

delitev intervala  $[a, b]$  in  $\mathbf{x} = (x_i)_{i=0}^n$  vektor delilnih točk.

- (a) Dokažite, da funkcije

$$\begin{aligned} H_0(x) &= \begin{cases} \frac{x_1-x}{x_1-x_0}, & x \in [x_0, x_1) \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}, \\ H_i(x) &= \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}, & x \in [x_{i-1}, x_i) \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}, & x \in [x_i, x_{i+1}), \quad i = 1, \dots, n-1, \\ 0, & \text{sicer} \end{cases} \\ H_n(x) &= \begin{cases} \frac{x-x_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}, & x \in [x_{n-1}, x_n] \\ 0, & \text{sicer} \end{cases} \end{aligned}$$

sestavlja bazo prostora zveznih odsekoma linearnih funkcij

$$S_{1,\mathbf{x}} = \{f \in C([a, b]) \ ; \ f|_{(x_i, x_{i+1})} \in \mathbb{P}_1\}.$$

- (b) Naj bo  $I_{1,\mathbf{x}}$  operator, ki funkciji  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  priredi zvezno odsekoma linearne funkcije

$$I_{1,\mathbf{x}} f(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) H_i(x).$$

Preverite, da zožitev  $I_{1,\mathbf{x}} f$  na interval  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , ustreza premici

$$x \mapsto f(x_{i-1}) \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} + f(x_i) \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}.$$

4. *Primerjava aproksimacijskih operatorjev.* V Matlabu pripravite spodaj opisane metode za aproksimacijo funkcije. Vse metode vračajo seznam  $y$ , ki vsebuje vrednosti aproksimacije funkcije v točkah iz vhodnega seznama  $\mathbf{x}$ . Pri vseh metodah parametra  $\mathbf{a}$  in  $\mathbf{b}$  predstavlja levi in desni rob intervala, na katerem je funkcija aproksimirana.

- $y = \text{bernsteinovaAproksimacija}(f, a, b, n, x)$  izračuna vrednosti (reparametriziranega) Bernsteinovega polinoma stopnje  $n$  za funkcijo  $f$ .
- $y = \text{kantorovicevaAproksimacija}(F, a, b, n, x)$  izračuna vrednosti (reparametriziranega) Kantorovičevega polinoma stopnje  $n$  za funkcijo  $f$ , ki jo predstavlja primitivna funkcija  $F$ .
- $y = \text{odsekomaLinearnaAproksimacija}(f, a, b, n, x)$  izračuna vrednosti zvezne odsekoma linearne funkcije, ki interpolira vrednosti funkcije  $f$  v točkah  $a + i \frac{b-a}{n}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ .

Izračunajte aproksimacije funkcij  $x \mapsto \cos(2x)$  in  $x \mapsto |x| \cos(x^2)$  na intervalu  $[-1, 1]$  z vsemi tremi metodami za parametre  $n \in \{2, 4, 6, \dots, 50\}$ . Narišite grafe aproksimacij. Primerjajte napake aproksimacij v enakomerni normi, ki jih ocenite tako, da izračunate maksimalno absolutno napako v točkah  $(j - 100)/100$ ,  $j = 0, 1, \dots, 200$ . Narišite grafe napak v odvisnosti od parametra  $n$  v logaritemski skali. Kaj opazite?