Vaje 17.11.2025: Aproksimacija po metodi najmanjših kvadratov

1. *Polinom najboljše aproksimacije.* Naj bo skalarni produkt funkcij g in h na intervalu $[0,1]$ podan s predpisom
$$\langle g, h\rangle = \int_0^1 g(x)h(x)dx.$$
V prostoru $\mathbb{P}_2$ bi radi poiskali polinom f^*, ki po metodi najmanjših kvadratov najbolje aproksimira funkcijo $f(x) = x^3$.

   (a) Prostor $\mathbb{P}_2$ predstavite s potenčno bazo $x \mapsto x^i$, $i = 0, 1, 2$, in določite pripadajočo Gramovo matriko.

   (b) Prostor $\mathbb{P}_2$ predstavite z Bernsteinovimi baznimi polinomi B_i^2, $i = 0, 1, 2$, in določite pripadajočo Gramovo matriko.

   Rešite normalna sistema in preverite, da v obeh primerih dobite enak polinom f^*.

2. *Trigonometrični polinom najboljše aproksimacije.* Naj bo $n \in \mathbb{N}_0$ in $\mathbb{T}_n$ aproksimacijski prostor, ki ga razpenjajo funkcije $x \mapsto 1/\sqrt{2\pi}$ ter $x \mapsto \cos(kx)/\sqrt{\pi}$ in $x \mapsto \sin(kx)/\sqrt{\pi}$ za $k = 1, 2, \ldots, n$. Ti bazni trigonometrični polinomi sestavljajo ortonormiran sistem glede na skalarni produkt, ki je za funkciji g in h podan s predpisom
$$\langle g, h\rangle = \int_0^{2\pi} g(x)h(x)\mathrm{d}x.$$
Določite trigonometrični polinom $f_n^* \in \mathbb{T}_n$, ki se po metodi najmanjših kvadratov najbolje prilega funkciji
$$f(x) = \begin{cases} 0; & x \in [0, \pi] \\ 1; & x \in (\pi, 2\pi] \end{cases}.$$

3. *Implementacija metode najmanjših kvadratov.* V Matlabu pripravite metodo, ki izračuna element najboljše aproksimacije za funkcijo f po metodi najmanjših kvadratov. Metoda naj poleg f kot vhodni podatek sprejme še množico baznih funkcij $\{f_0, f_1, \ldots, f_n\}$, $n \in \mathbb{N}_0$, in funkcijo, ki danima dvema funkcijama priredi skalarni produkt. Vrne naj seznam koeficientov α_j, $j = 0, 1, \ldots, n$, ki določajo element $\sum_{j=0}^n \alpha_j f_j$ najboljše aproksimacije za f po metodi najmanjših kvadratov glede na podani skalarni produkt. Ti koeficienti naj bodo izračunani z reševanjem normalnega sistema. Metodo testirajte z aproksimacijo funkcije $f(x) = e^{\sin(x^2/10)}$ na intervalu $[0, 2\pi]$ glede na zvezni in diskretni skalarni produkt, ki sta za funkciji g in h podana s predpisom
$$\langle g, h\rangle = \int_0^{2\pi} g(x)h(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \langle g, h\rangle_N = \frac{1}{N+1}\sum_{i=0}^{N} g(2\pi\tfrac{i}{N})h(2\pi\tfrac{i}{N}),\ N = 50.$$
Poiščite polinoma najboljše aproksimacije iz $\mathbb{P}_4$, izražena v potenčni bazi, in trigonometrična polinoma iz $\mathbb{T}_2$, izražena s funkcijami $1/\sqrt{2\pi}$, $\cos(x)/\sqrt{\pi}$, $\sin(x)/\sqrt{\pi}$, $\cos(2x)/\sqrt{\pi}$ in $\sin(2x)/\sqrt{\pi}$. Primerjajte napake vseh štirih aproksimacij v normi, inducirani z zveznim skalarni produktom. Za integriranje uporabljajte ukaz
```
If = integral(f, a, b, 'AbsTol',1e-14, 'RelTol',1e-14),
```
ki funkciji `f` priredi natančen približek `If` za integral na intervalu [`a`, `b`].