Vaje 3.11.2025: Prvi Remesov postopek

1. *Implementacija prvega Remesovega postopka.* V Matlabu pripravite metodo, ki za dano funkcijo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, določi koeficiente $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ polinoma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0$$

stopnje $n \in \mathbb{N}$, ki predstavlja približek za polinom najboljše aproksimacije za f iz $\mathbb{P}_n$. Pri implementaciji metode sledite naslednjim navodilom.

   (a) Pripravite pomožno metodo, ki za dan seznam točk E dolžine $n+2$ poišče polinom $g \in \mathbb{P}_n$, čigar residual $f - g$ alternirajoče doseže vrednost $\pm m$, $m > 0$, v točkah iz seznama E.

   (b) Sestavite pomožno metodo za iskanje približka za absciso na danem intervalu, pri kateri je absolutna vrednost podane funkcije enaka njeni enakomerni normi. Natančneje, za funkcijo r in interval $[a, b]$ naj metoda razdeli $[a, b]$ z $N + 1$ ekvidistantnimi točkami, ki sestavljajo množico $\mathbf{x} = \{a + k(b - a)/N;\ k = 0, 1, \ldots, N\}$ (vzemite na primer $N = 1000$), in določi tisto absciso $x \in \mathbf{x}$, za katero velja $|r(x)| = ||r||_{\infty,\mathbf{x}}$.

   (c) Implementirajte pomožno metodo, ki sprejme funkcijo, urejen seznam točk, na katerem funkcija alternirajoče spreminja predznak, ter še eno dodatno točko; vrne pa urejen seznam točk, ki je enake dolžine kot vhodni, a namesto ene izmed prvotnih točk vsebuje podano dodatno točko. Izhodni seznam mora ohraniti lastnost, da funkcija na njem alternirajoče spreminja predznak.

   (d) Nazadnje pripravite glavno iteracijsko metodo, ki izvede Remesov postopek. Metoda naj sprejme funkcijo, interval, stopnjo polinoma in število korakov iteracije oz. toleranco, vrne pa koeficiente polinoma, ki predstavlja polinom najboljše enakomerne aproksimacije za dano funkcijo. Metoda naj se na vsakem koraku iteracije opre na pomožne metode iz točk 1a, 1b in 1c.

   Preizkusite implementirano metodo s funkcijo f, ki je podana s predpisom

$$f(x) = |x| \sin(2e^{\frac{3}{2}x} - 1).$$

   Za vsako izmed stopenj $n \in \{2, 4, 6, 8\}$ poiščite polinom $p_n \in \mathbb{P}_n$, ki predstavlja tak približek za element najboljše enakomerne aproksimacije za f na intervalu $[-1, 1]$ iz prostora $\mathbb{P}_n$, da je razlika med normo residuala in minimaksom residuala na trenutni množici $n+2$ točk manjša od `tol`$= 10^{-10}$. Remesov postopek začnite izvajati z množico

$$\left\{\pm\frac{1}{n+1}, \pm\frac{3}{n+1}, \ldots, \pm\frac{n-1}{n+1}, \pm 1\right\}.$$

   Narišite grafe f in p_n na intervalu $[-1, 1]$ ter primerjajte napake $||f - p_n||_{\infty,\mathbf{x}}$ za različne stopnje n. Spremljajte tudi vrednosti minimaksov ter razlik med normami residualov in minimaksi tekom postopka.

2. *Konvergenca algoritma.*

   (a) Naj bo

$$E = \{x_i\ ;\ a \le x_0 < x_1 \ldots x_{n+1} \le b\}.$$

   Naj bo $q \in \mathbb{P}_n$ poljuben polinom stopnje n in $f \in C([a, b])$ poljubna. Pokažite, da velja

$$M_n(E, f) = M_n(E, f - q).$$

   (b) Pokažite, da velja

$$M_n([a, b], f) \ge M_n(E_k, f).$$

   (c) Pokažite, da velja

$$M_n(E_{k+1}, f) > M_n(E_k, f).$$

   (d) Pokažite, da velja

$$M_n(E_{k+1}, f) - M_n(E_k, f) \ge \Theta\left(M_n([a, b], f) - M_n(E_k, f)\right),$$

   za $0 < \Theta < 1$.

(e) Izračunajte

$$\lim_{k\to\infty}\left(M_n([a,b],f) - M_n(E_{k+1},f)\right).$$

(f) Določite konstanto $c > 0$ za katero velja

$$0 \leq ||f - p_k^*||_{\infty,[a,b]} - ||f - p^*||_{\infty,[a,b]} \leq c\rho^k.$$