Naloga 5. *Reševanje sistemov linearnih enačb z LU razcepom.*

Osnovna metoda za reševanje sistemov linearnih enačb je LU razcep, pri katerem matriko razcepimo na produkt spodnje trikotne matrike in zgornje trikotne matrike.

1. V Matlabu sestavite metodo `lusolve`, ki poišče rešitev $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ sistema $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ pri podani matriki $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in vektorju $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$. Metoda naj bo implementirana tako, da najprej izračuna LU razcep $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{U}$ matrike $\boldsymbol{A}$. Pri tem je $\boldsymbol{L}$ spodnje trikotna matrika z enkami na diagonali, $\boldsymbol{U}$ pa zgornje trikotna matrika z neničelnimi elementi na diagonali. Metoda naj nato izračuna rešitev sistema $\boldsymbol{x}$ z reševanjem sistemov $\boldsymbol{L}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$ in $\boldsymbol{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ s premimi in obratnimi substitucijami.

```
function [x,L,U] = lusolve(A,b)
% Opis:
%  lusolve izračuna rešitev sistema A*x = b z uporabo LU
%  razcepa ter premih in obratnih substitucij
%
% Definicija:
%  [x,L,U] = lusolve(A,b)
%
% Vhodna podatka:
%  A         matrika sistema,
%  b         vektor sistema
%
% Izhodni podatki:
%  x         vektor, ki je rešitev sistema A*x = b,
%  L,U       matriki iz LU razcepa matrike A
```

Metodo preizkusite na primeru

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 4 \\ 4 & -3 & 7 & 14 \\ 0 & -3 & 18 & 19 \\ 6 & -2 & 7 & 14 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Rezultat je

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

2. Če metodo `lusolve` preizkusimo na primeru

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 & 4 \\ 4 & -3 & -6 & 14 \\ -8 & 3 & 6 & 19 \\ 6 & -2 & 7 & 14 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 36 \\ 92 \\ 79 \end{bmatrix},$$

✉ jan.groselj@fmf.uni-lj.si

dobimo nesmiseln rezultat. Zakaj? Nadgradite metodo `lusolve` tako, da sprejme dodaten vhodni podatek in vrne dodaten izhodni podatek.

```
function [x,L,U,P] = lusolve(A,b,pivot)
```

Metoda naj deluje tako, da v primeru, ko dodatni vhodni podatek `pivot` ni podan ali pa je enak `1`, namesto običajnega LU razcepa (ki se uporabi le ob opciji `pivot = 0`) pri reševanju sistema uporabi LU razcep $\boldsymbol{PA} = \boldsymbol{LU}$ z delnim pivotiranjem. Ustrezno popravite tudi izvedbo substitucij, s katerimi izračunate rešitev sistema. Preverite, da metoda z delnim pivotiranjem pri zgornjem primeru vrne rezultat

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{4} & -\frac{1}{6} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{6} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} -8 & 3 & 6 & 19 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -3 & \frac{47}{5} \\ 0 & 0 & 11 & \frac{193}{6} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{65}{6} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Preverite tudi, da enak LU razcep dobite z vgrajeno metodo `lu` ter da rešitev sistema ustreza rezultatu `A\b` reševanja sistema z vgrajeno metodo.

3. Metodo `lusolve` nadgradite tako, da pri opciji `pivot = 2` sistem enačb $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ rešuje z uporabo kompletnega pivotiranja. LU razcep matrike $\boldsymbol{A}$ je tedaj oblike $\boldsymbol{PAQ} = \boldsymbol{LU}$. Metoda naj vrne vse matrike razcepa. Preverite, da za primer iz druge točke dobite rezultat

$$\boldsymbol{L} \doteq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.7368 & 1 & 0 & 0 \\ 0.7368 & 0.8319 & 1 & 0 \\ 0.2105 & 0.3097 & 0.4824 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{U} \doteq \begin{bmatrix} 19 & -8 & 6 & 3 \\ 0 & 11.8947 & 2.5789 & -4.2105 \\ 0 & 0 & -12.5664 & -1.7080 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5035 \end{bmatrix}$$

in

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rešitev $\boldsymbol{x}$ tudi v tem primeru ustreza vektorju $(1, 2, 3, 4)$.

✉ jan.groselj@fmf.uni-lj.si