Naloga 3. *Reševanje nelinearnih enačb.*

Obveznica z nominalno vrednostjo $N = 1000$ EUR in zapadlostjo 5 let izplačuje letne kupone v vrednosti $C = 50$ EUR. Danes se obveznica prodaja po ceni $P = 1100$ EUR. Izračunajte donosnost do dospetja obveznice, to je obrestno mero r, ki zadošča enačbi

$$\sum_{k=1}^{5} C\frac{1}{(1+r)^k} + N\frac{1}{(1+r)^5} = P.$$

Računanje r lahko interpretiramo kot iskanje ničle funkcije f, ki je podana s predpisom

$$f(x) = \sum_{k=1}^{5} C\frac{1}{(1+x)^k} + N\frac{1}{(1+x)^5} - P.$$

1. Za funkcijo f velja $f(0) = 150 > 0$ in $f(1) = -1020.31 < 0$. Poleg tega je

$$f'(x) = -\sum_{k=1}^{5} k\,C\frac{1}{(1+x)^{k+1}} - 5N\frac{1}{(1+x)^6},$$

kar pomeni, da je funkcija f na intervalu $[0,1]$ padajoča. Iz teh ugotovitev sledi, da ima funkcija f na intervalu $[0,1]$ natanko eno ničlo, ki jo lahko poiščemo s pomočjo bisekcije. Implementirajte postopek v Matlabu in napravite toliko korakov metode, da se bo približek z ničlo ujemal v vsaj desetih decimalkah. Rezultati so prikazani v spodnji tabeli, kjer parametra a in b določata trenutni interval $[a,b]$, c pa je novi približek.

n	a	b	c	$\operatorname{sign}(f(a))$	$\operatorname{sign}(f(b))$	$\operatorname{sign}(f(c))$
1	0	1	0.5	$+$	$-$	$-$
2	0	0.5	0.25	$+$	$-$	$-$
3	0	0.25	0.125	$+$	$-$	$-$
4	0	0.125	0.0625	$+$	$-$	$-$
5	0	0.0625	0.03125	$+$	$-$	$-$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
29	0.0282721519	0.0282721557	0.0282721538	$+$	$-$	$-$
30	0.0282721519	0.0282721538	0.0282721529	$+$	$-$	$-$
31	0.0282721519	0.0282721533	0.0282721524	$+$	$-$	$+$
32	0.0282721524	0.0282721529	0.0282721526	$+$	$-$	$-$
33	0.0282721524	0.0282721526	0.0282721525	$+$	$-$	$-$

2. Če iščemo ničlo funkcije f z bisekcijo, moramo za dober približek opraviti veliko korakov, zato je računsko neučinkovita. Ničlo lahko običajno hitreje poiščemo s tangentno metodo, pri kateri začnemo z nekim začetnim približkom x_0, nato pa v vsakem koraku izračunamo nov približek x_{n+1} po formuli

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n = 0, 1, \ldots.$$

Geometrijsko je x_{n+1} presečišče abscisne osi in tangentne funkcije f v točki x_n. Implementirajte metodo v Matlabu in pri začetnem približku $x_0 = 0$ napravite toliko korakov

n, da bo absolutna razlika $|x_n - x_{n-1}|$ med dvema zaporednima približkoma x_n in x_{n-1} manjša od 10^{-15}. Rezultati so prikazani v spodnji tabeli.

n	x_n	$f(x_n)$
0	0	150
1	0.026086956521739	10.7491
2	0.028258687103281	0.0658311
3	0.028272151992404	$2.50607 \cdot 10^{-6}$
4	0.028272152505026	$4.54747 \cdot 10^{-13}$
5	0.028272152505026	$-4.54747 \cdot 10^{-13}$

Pomankljivost tangentne metode je, da lahko zaporedje približkov pri slabšem začetnem približku divergira. Preverite, da se to zgodi, če za začetni približek vzamete $x_0 = 0.5$.

3. Alternativa za tangentno metodo, ki se pri izračunu približkov ne poslužuje odvodov funkcije f, je sekantna metoda. Približek x_{n+1} dobimo po formuli

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} = \frac{x_{n-1}f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

in predstavlja presečišče abscisne osi in sekante funkcije f skozi točki x_{n-1} in x_n. Pri tej metodi izračun približka torej temelji na dveh prejšnjih približkih, zato potrebujemo tudi dva začetna približka. Implementirajte metodo v Matlabu in pri začetnih približkih $x_0 = 0$ in $x_1 = 1$ napravite toliko korakov n, da bo absolutna razlika $|x_n - x_{n-1}|$ med dvema zaporednima približkoma x_n in x_{n-1} manjša od 10^{-15}. Rezultati so prikazani v spodnji tabeli.

n	x_n	$f(x_n)$
0	0	150
1	1	-1020.31
2	0.12817089452603	-376.177
3	-0.38097901841505	11214.7
4	0.11164668603068	-326.899
5	0.097693790065907	-281.867
6	0.010358776316329	92.1925
7	0.031883761149401	-17.4773
8	0.028453475209759	-0.885982
9	0.028270296860675	0.00907177
10	0.028272153456418	$-4.65109 \cdot 10^{-6}$
11	0.028272152505031	$-2.45564 \cdot 10^{-11}$
12	0.028272152505026	$-4.54747 \cdot 10^{-13}$
13	0.028272152505026	$4.54747 \cdot 10^{-13}$

4. V Matlabu lahko ničlo funkcije poiščemo z vgrajeno funkcijo `fzero`. Gre za implementacijo metode, ki pri računanju ničle kombinira biskecijo, sekantno metodo in inverzno kvadratično interpolacijo. Uporabimo jo tako, da ji za prvi vhodni podatek podamo funkcijo, za drugi pa približek za ničlo. Pri začetnem približku 0 dobimo 0.028272152505026, kar se ujema z rezultatoma, pridobljenima s tangentno in sekantno metodo.

✉ jan.groselj@fmf.uni-lj.si