Vaje 2

1. Sestavite funkcijo `V = mojVander(vecx)`, ki vrne Vandermondovo matriko za potenčno bazo x^i za polinome stopnje $\leq n$ za vektor vrednosti `vecx` $= (x_0, x_1, \dots, x_n)$. Primerjajte vaš rezultat z vgrajenim ukazom `vander`; poglejte v help, kako se preuredite stolpce, da bo enaka vaši matriki.

   Vzemite poljuben vektor desne strani $\boldsymbol{d}$ ustrezne velikosti in rešite linearen sistem $V\boldsymbol{c} = \boldsymbol{d}$. Kaj prestavlja rešitev vektor $\boldsymbol{c} = [c_0, c_1, \dots c_n]$? Narišite polinom $\sum_{i=0}^{n} c_i x^i$. Pomagate si lahko z ukazom `polyval`.

2. Sprogramirajte metodo `[koef,gram,desna] = aproksimantMNK(F, baza,a,b,N)` za aproksimacijo funkcije F na intervalu $[a,b]$ po metodi najmanjših kvadratov. Aproksimant je iz prostora, ki ga določajo bazne funkcije `b`, shranjene v celični tabeli. Parameter `N` določa število enakomerno izbranih točk v predpisu diskretnega skalarnega produkta.

   Naj bo $F(x) = \sin(x)$ in $N = 10$, $[a,b] = [0, 2\pi]$.

   (a) Izračunajte pogojenostno število za Gramovo matriko, sestavljeno iz potenčne baze $1, x, \dots x^n$ za $n = 2, 5, 10$. Kaj opazite?

   (b) Aproksimirajte F po metodi najmanjših kvadratov za $n = 4, 5, 6, 7$. Izračunajte napako aproksimacije v neskončni normi. Preverite, da napaka pada (ne narašča) z naraščajočim n.

   (c) Za $n = 4$ poglejte, kako se spreminja napaka v 2-normi, če vzamemo različne N, npr. $N = 2, 10, 100$. Kaj opazite? Utemeljite odgovor.

   (d) Definirajte bazo za zvezne odsekoma linearne funkcije na $[a,b]$, sestavljeno iz t.i. "hat" funkcij $H_0, \dots, H_n$, kjer je

   $$H_i(x) = H^*((x - x_i)/h), \qquad x \in [a,b],$$

   in $h = (b-a)/n$, $x_i = a + hi$, $H^*(x) = \max(1 - |x|, 0)$ za $x \in \mathbb{R}$. Kakšno strukturo ima Gramova matrika? Narišite bazo in aproksimant za F za $n = 8$.