

20. naloga

Janez Podlogar

9. 5. 2022

Navodilo naloge

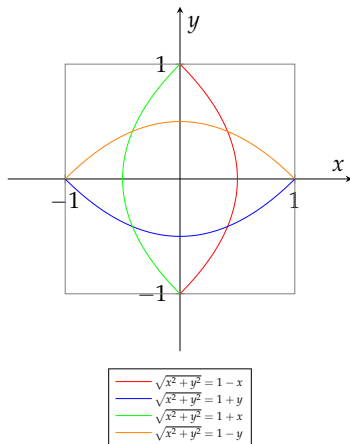
Streljamo v tarčo kvadratne oblike z robom a . Predpostavimo, da vsak zadetek zadene tarčo in da je točka zadetka porazdeljena enakomerno po tarči. Izračunaj verjetnost, da bo naš strel zadel bližje središču tarče kot njenemu robu.

- Naj bo $T_a = \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right] \times \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$ tarča
- Z S_a označimo množico vseh točk, ki so bližje središču tarče kot robu tarče

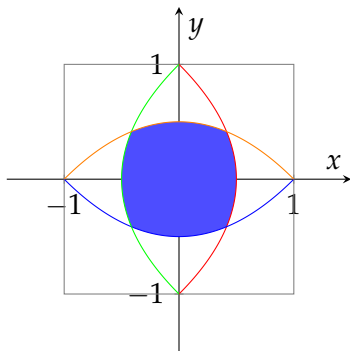
Zanima nas verjetnost, da je točka vsebovana v množici S_a

$$\begin{aligned} P((x, y) \in S_a) &= \frac{pl(S_a)}{pl(T_a)} \\ &= \frac{1}{a^2} \iint_{S_a} 1 \, dx dy \end{aligned}$$

Rešitev



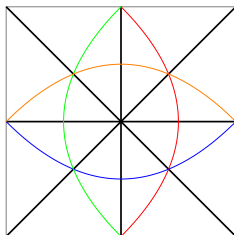
Slika: Roboni pogoji pri $a = 2$



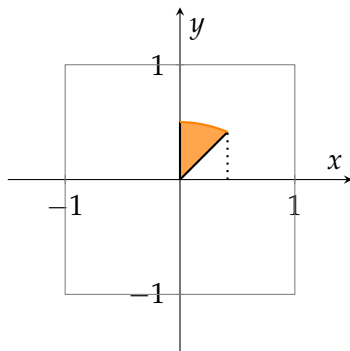
Slika: Integral $\iint_{S_2} 1 \, dx \, dy$

Rešitev

Ploščino najlažje izračunamo tako, da opazimo simetrijo rotacij in simetrijo zrcaljenja. Izračunali bomo ploščino le enega izmed osmih trikotnikov



Slika: Simetrije



Slika: Osmina ploščine pri $a = 2$

- Funkcijo $|(x, y)| < \frac{a}{2} - y$, ki opisuje vse točke, ki so bližje središču tarče kot zgornjemu robu tarče preoblikujemo v

$$y = \frac{a}{4} - \frac{x^2}{a}$$

- Poiščemo njeno presečišče z funkcijo $y = x$. Ko rešimo kvadratno enačbo, dobimo za ustržno presečišče

$$x = \frac{a(\sqrt{2} - 1)}{2}$$

- Izračunajmo ploščino oranžnega območja

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{a(\sqrt{2}-1)}{2}} \left(\frac{a}{4} - \frac{x^2}{a} \right) dx - \frac{1}{2} \left(\frac{a(\sqrt{2}-1)}{2} \right)^2 &= \frac{a^2(4-2\sqrt{2})}{24} - \frac{a^2(3-2\sqrt{2})}{8} \\ &= \frac{a^2(4\sqrt{2}-5)}{24}\end{aligned}$$

- Ploščino celotnega območja dobimo tako, da pomnožimo zgornjo ploščino z 8
- Verjetnost, da strel zadane bližje središču tarče kot njenemu robu je enaka

$$P((x, y) \in S_a) = \frac{4\sqrt{2}-5}{3} \approx 0.218951416$$

Simulacija

Tabela prikazuje rezultate simulacije ter njihovo absolutno in relativno napako na devet decimalk natančno

Število točk	Vrednost simulacije	Absolutna napaka	Relativna napaka
10^3	0.229	0.010048584	0.045894127
10^4	0.2247	0.005748584	0.026255067
10^5	0.21732	0.001631416	0.007451041
10^6	0.218713	0.000238416	0.001088899
10^7	0.2187818	0.000169616	0.000774674
10^8	0.21904325	0.000091834	0.000419426