SEMINARSKA NALOGA

JANEZ PODLOGAR

1. Navodilo naloge

Streljamo v tarčo kvadratne oblike z robom a. Predpostavimo, da vsak zadetek zadene tarčo in da je točka zadetka porazdeljena enakomerno po tarči. Izračunaj verjetnost, da bo naš strel zadel bližje središču tarče kot njenemu robu.

2. Definicije, trditve in izreki

Spodaj so definicje in trditve, ki smo jih spoznali pri Analizi 3, na katere se bomo sklicali tekom naloge.

Definicija 2.1. Množica $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ima *mero* 0, če za za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja največ števno mnogo kvadratov $k_1, K_2, K_3, \ldots$, da velja

$$A \subseteq K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup \ldots \text{ in } \sum_{j=1}^{\infty} V(K_j) < \varepsilon$$

Primer 2.2. Pokažimo, da ima množica $A = \{\mathbb{R} \times \{0\}\} \subseteq \mathbb{R}^2$ mero 0. Naj bo $\varepsilon > 0$ in $K_j = [j, j+1] \times \left[0, \frac{\varepsilon}{2^{j+2}}\right]$ za $k = 0, 1, 2, \ldots$

Očitno velja prva zahteva:

$$A \subseteq \bigcup_{j=0}^{\infty} K_j$$

Z hitrim izračunom preverimo tudi drugo zahtevo

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty} V(K_j) &= V(K_0) + V(K_1) + V(K_2) + \ldots \\ &= \frac{\varepsilon}{4} + 2 * \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{j+2}} \\ &= \frac{3 * \varepsilon}{4} < \varepsilon\end{aligned}$$

Torej ima množica A mero 0.

$\diamondsuit$

Trditev 2.3. *Naj bodo $B_1, B_2, B_3 \ldots$ množice z mero 0. Tedaj ima $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$ mero 0.*

Izrek 2.4 (Lebesgueov izrek)**.** *Naj bo $f \colon K \to \mathbb{R}$ omejena, potem je f integrabilna na K natanko tedaj, ko ima množica v katerih f ni zvezna mero 0.*

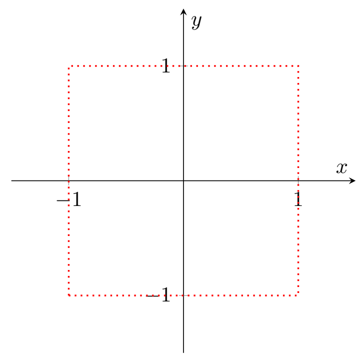
Date: 5. maj 2022.

3. Reštev

Naj bo $T_a = \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right] \times \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$ tarča. Ker so zadetki porazdeljeni enakomerno, ima gostoto

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{a^2} & \text{če } (x,y) \in T_a \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

Gostota $f(x,y)$ zvezna skoraj povsod, saj ima posledično po primeru (2.2) in trditvi (2.3) množica točk nezveznosti mero 0.



Slika 1. Točke nezveznosti pri $a = 1$

Ker je f na $\mathbb{R}^2$ omejena, je po Lebesgueovem izreku (2.4) integrabilna na $\mathbb{R}^2$. Sedaj lahko izračunamo verjetnost, da zadanemo znotraj nekega območja oziroma podmonožico $B \subseteq T_a$ tarče.

$$\begin{aligned} P\big((x,y) \in B\big) &= \iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, \mathbb{1}_B \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint\limits_{B} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \end{aligned}$$

Poiščimo množico točk, ki je bližje središču tarče kot kateremukoli izmed robov tarče.

$$|(x,y)| < \frac{a}{2} - x \tag{1}$$

$$|(x,y)| < \frac{a}{2} - y \tag{2}$$

$$|(x,y)| < \frac{a}{2} + x \tag{3}$$

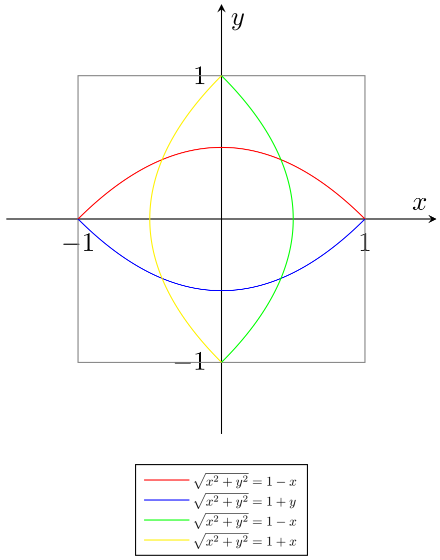
$$|(x,y)| < \frac{a}{2} + y \tag{4}$$

Pogoj (1) opisuje vse točke, ki so bližje središču tarče kot desnemu robu tarče, pogoj (2) opisuje vse točke, ki so bližje središču tarče kot spodnjemu robu tarče pogoj (3) opisuje vse točke, ki so bližje središču tarče kot levemu robu tarče, pogoj (4) opisuje vse točke, ki so bližje središču tarče kot zgornjemu robu tarče. Točke, ki zadostijo vsem zgoraj napisanim enačbam so bližje središču kot robu, označimo jih z S_a.

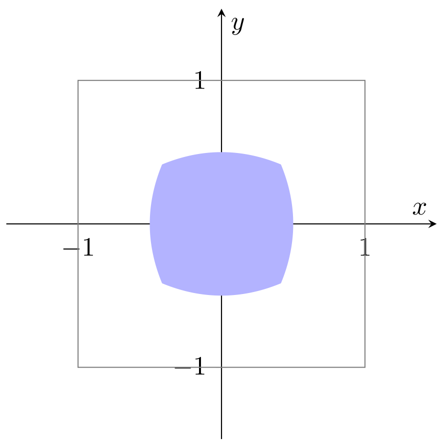
Izračunati moramo

$$\begin{aligned} P\big((x,y) \in S_a\big) &= \iint\limits_{S_a} f(x,y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{a^2} \iint\limits_{S_a} 1 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \end{aligned}$$

Izračunati moramo ploščino pobarvanega območja.

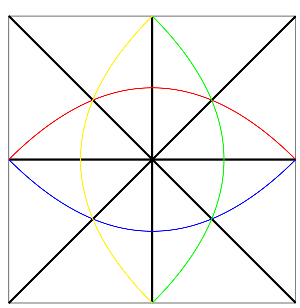


Slika 2. Roboni pogoji pri $a = 1$

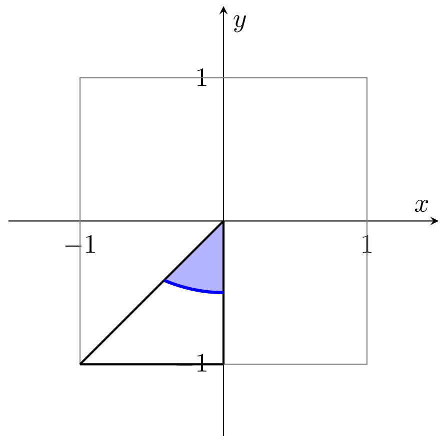


Slika 3. Integral $\iint\limits_{S_1} 1 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

Ploščino najlažje izračunamo tako, da opazimo simetrijo rotacij in simetrijo zrcaljenja. Izračunati ploščino območja le za enega izmed osmih trikotnikov.



Slika 4. Simetrije



SLIKA 5. Osmina ploščine pri $a = 1$

Funkcijo $|(x, y)| < \frac{a}{2} + y$, ki opisuje vse točke, ki so bližje središču tarče kot spodnjemu robu tarče preoblikujemo v

$$y = \frac{x^2}{a} - \frac{a}{4}$$

in poiščemo njeno presečišče z funkcijo $y = x$. Ko rešimo kvadratno enačbo, dobimo za presečišče

$$x = \frac{a(1 - \sqrt{2})}{2}$$

Sedaj lahko izračunamo ploščino območja. Najprej izračunamo območje pod pobarvanim delom.

$$\left| \int_{-\frac{a}{2}}^{0} \min\{x, \tfrac{x^2}{a} - \tfrac{a}{4}\} \,\mathrm{d}x \right| = \left| \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a(1-\sqrt{2})}{2}} x \,\mathrm{d}x + \int_{\frac{a(1-\sqrt{2})}{2}}^{0} \tfrac{x^2}{a} - \tfrac{a}{4} \,\mathrm{d}x \right|$$
$$= \frac{a^2}{24}(4\sqrt{2} - 5)$$

Da dobimo ploščino modrega območja, od ploščine trikotnika odštejemo dobljeni integral

$$\frac{a^2}{8} - \frac{a^2}{24}(4\sqrt{2} - 2) = \frac{a^2}{8}\big(1 - \frac{1}{3}\big(4\sqrt{2} - 2\big)\big)$$
$$= \frac{a^2}{8}$$

4. SIMULACIJA