SEMINARSKA NALOGA

JANEZ PODLOGAR

1. Navodilo naloge

Streljamo v tarčo kvadratne oblike z robom a. Predpostavimo, da vsak zadetek zadene tarčo in da je točka zadetka porazdeljena enakomerno po tarči. Izračunaj verjetnost, da bo naš strel zadel bližje središču tarče kot njenemu robu.

2. Definicije, trditve in izreki

Spodaj so definicije in trditve, ki smo jih spoznali pri Analizi 3, na katere se bomo sklicali tekom naloge.

Definicija 2.1. Množica $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ima *mero* 0, če za za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja največ števno mnogo kvadratov $K_1, K_2, K_3, \ldots$, da velja

$$A \subseteq K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup \ldots \text{ in } \sum_{j=1}^{\infty} V(K_j) < \varepsilon$$

Primer 2.2. Pokažimo, da ima množica $A = \{\mathbb{R} \times \{0\}\} \subseteq \mathbb{R}^2$ mero 0. Naj bo $\varepsilon > 0$ in $K_j = [j, j+1] \times \left[0, \frac{\varepsilon}{2^{j+2}}\right]$ za $j = 0, 1, 2, \ldots$

Očitno velja prva zahteva

$$A \subseteq \bigcup_{j=0}^{\infty} K_j$$

Z hitrim izračunom preverimo tudi drugo zahtevo

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty} V(K_j) &= V(K_0) + V(K_1) + V(K_2) + \ldots \\ &= \frac{\varepsilon}{4} + 2 * \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{j+2}} \\ &= \frac{3 * \varepsilon}{4} < \varepsilon\end{aligned}$$

Torej ima množica A mero 0.

$\diamondsuit$

Trditev 2.3. *Naj bodo $B_1, B_2, B_3 \ldots$ množice z mero 0. Tedaj ima $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$ mero 0.*

Izrek 2.4 (Lebesgueov izrek)**.** *Naj bo $f\colon K \to \mathbb{R}$ omejena, potem je f integrabilna na K natanko tedaj, ko ima množica v katerih f ni zvezna mero 0.*

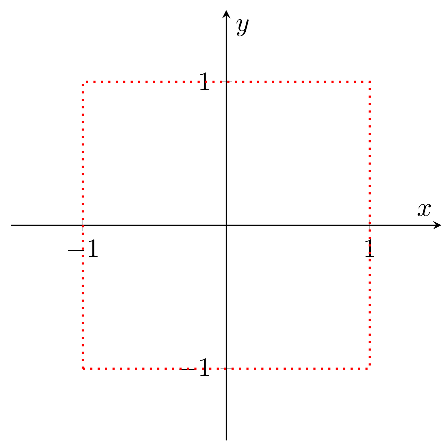
Date: 5. maj 2022.

3. Reštev

Naj bo $T_a = \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right] \times \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$ tarča. Ker so zadetki porazdeljeni enakomerno, ima gostoto

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{a^2} & \text{če } (x, y) \in T_a \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

Gostota $f(x, y)$ zvezna skoraj povsod, saj ima ,po primeru (2.2) in trditvi (2.3), množica točk nezveznosti funkcije f mero 0.



Slika 1. Točke nezveznosti funkcije f pri $a = 2$

Ker je funkcija f na $\mathbb{R}^2$ omejena, je po Lebesgueovem izreku (2.4) integrabilna na $\mathbb{R}^2$. Sedaj lahko izračunamo verjetnost, da zadanemo znotraj nekega območja tarče oziroma, da točka pade v neko Borelovo podmonožico $B \subseteq T_a$.

$$\begin{aligned} P\big((x, y) \in B\big) &= \iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\, \mathbb{1}_B \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint\limits_{B} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \end{aligned}$$

Poiščimo množico točk, ki je bližje središču tarče kot robu tarče.

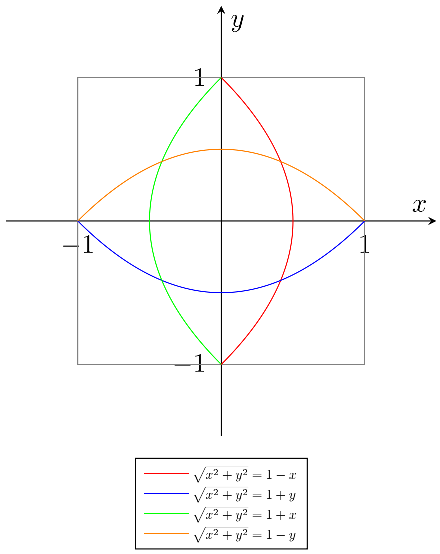
$$|(x, y)| < \frac{a}{2} - x \tag{1}$$

$$|(x, y)| < \frac{a}{2} + y \tag{2}$$

$$|(x, y)| < \frac{a}{2} + x \tag{3}$$

$$|(x, y)| < \frac{a}{2} - y \tag{4}$$

Pogoj (1) opisuje vse točke, ki so bližje središču tarče kot desnemu robu tarče, pogoj (2) opisuje vse točke, ki so bližje središču tarče kot spodnjemu robu tarče, pogoj (3) opisuje vse točke, ki so bližje središču tarče kot levemu robu tarče, pogoj (4) opisuje vse točke, ki so bližje središču tarče kot zgornjemu robu tarče. Točke, ki zadostijo vsem zgoraj napisanim enačbam so bližje središču kot robu, označimo jih z S_a.

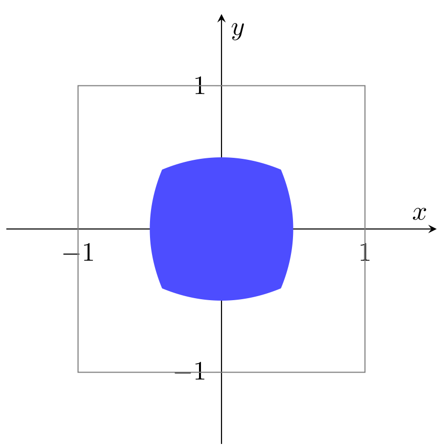


Slika 2. Roboni pogoji pri $a = 2$

Torej je ustrezna verjetnost, da točka pade bližje središču kot robu tače

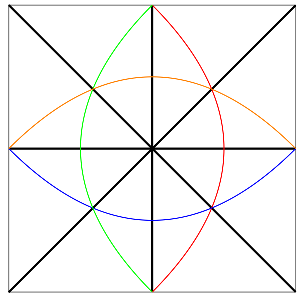
$$\begin{aligned} P\big((x,y) \in S_a\big) &= \iint\limits_{S_a} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{a^2} \iint\limits_{S_a} 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \end{aligned}$$

kar je ravno ploščina ombočja v modrem ulomljeni s ploščino celotnega kvadrata.

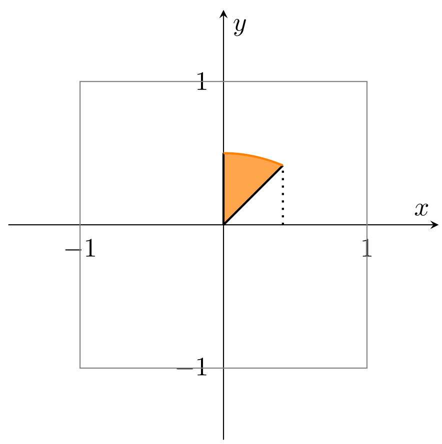


Slika 3. Integral $\iint\limits_{S_2} 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

Ploščino najlažje izračunamo tako, da opazimo simetrijo rotacij in simetrijo zrcaljenja. Izračunali bomo ploščino le enega izmed osmih trikotnikov.



Slika 4. Simetrije



Slika 5. Osmina ploščine pri $a = 2$

Funkcijo $|(x,y)| < \frac{a}{2} - y$, ki opisuje vse točke, ki so bližje središču tarče kot zgornjemu robu preoblikujemo v

$$y = \frac{a}{4} - \frac{x^2}{a}$$

in poiščemo njeno presečišče z funkcijo $y = x$. Ko rešimo kvadratno enačbo, dobimo za ustrzno presečišče

$$x = \frac{a(\sqrt{2} - 1)}{2}$$

Sedaj lahko izračunamo ploščino oranžnega območja

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{a(\sqrt{2}-1)}{2}} \frac{a}{4} - \frac{x^2}{a}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\left(\frac{a(\sqrt{2}-1)}{2}\right)^2 &= \frac{a^2(4 - 2\sqrt{2})}{24} - \frac{a^2(3 - 2\sqrt{2})}{8} \\ &= \frac{a^2(4\sqrt{2} - 5)}{24}\end{aligned}$$

Da dobimo ploščino celotnega območja, pomnožimo zgorjno ploščino z 8. Tako je verjetnost, da strel zadane bližje središču tarče kot njenemu robu enaka

$$P\big((x,y) \in S_a\big) = \frac{4\sqrt{2} - 5}{3}$$

4. Simulacija

Da rezultat preverimo še ekspirimentalno, napišemo simulacijo v Pythonu

```
import random
import math
random.seed(10)

blizje_srediscu = 0
n= 3

for i in range(10**n):
    x = random.uniform(-1, 1)
    y = random.uniform(-1, 1)
    do_sredisca = math.sqrt(x**2 + y**2)
    if (do_sredisca < 1 - x and do_sredisca < 1 + y and
        do_sredisca < 1 + x  and do_sredisca < 1 - y):
        blizje_srediscu += 1

    razmerje = blizje_srediscu / 10**n

print('Priblizek verjetnosti je ', razmerje)
```

Spodnja tabela prikazuje približke izračunane s simulacijo ter njihovo absolutno in relativno napako na devet mest natančno.

Tabela 1. Rezultati simulacije

Število točk	**Vrednost simulacije**	**Absolutna napaka**	**Relativna napaka**
10^3	0.229	0.010048584	0.045894127
10^4	0.2247	0.005748584	0.026255067
10^5	0.21732	0.001631416	0.007451041
10^6	0.218713	0.000238416	0.001088899
10^7	0.2187818	0.000169616	0.000774674
10^8	0.21904325	0.000091834	0.000419426