Hydrostatik

Die Physik von Flüssigkeiten und Gasen

Einleitung

Die Hydrostatik beschäftigt sich mit der Physik von Flüssigkeiten und Gasen (Fluide). Dabei betrachten wir nur den statischen Fall, das Fluid strömt also nicht.

Die Dichte

Die Dichte sollten Sie schon aus der Mechanik und der Chemie kennen. Erinnern Sie sich noch? Sie ist wie folgt definiert:

$$\text{Dichte} = \frac{\text{Masse}}{\text{Volumen}} \quad \text{oder} \quad \rho = \frac{m}{V}$$
$$\text{Einheit}: [\rho] = \frac{\text{Kilogramm}}{\text{Kubikmeter}} = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Das Formelzeichen der Dichte ρ ist ein griechischer Buchstabe. Man spricht ihn rho aus. Wir benutzen als Einheit für die Dichte kg/m^3. In der Chemie wird meistens die Einheit g/cm^3 verwendet.

AUFGABE 1: Rechnen Sie die Dichte von $2{,}7\,\text{g}/\text{cm}^3$ in die in der Physik gebräuchliche Einheit kg/m^3 um.
Lösung $2700\,\text{kg}/\text{m}^3$

AUFGABE 2: Bestimmen Sie die Dichte der Schüler im Klassenraum. Welche maximale Dichte ist möglich? Wie kann man diese bestimmen?

Wir bestimmen nun die Dichte von Wasser und anschliessend die Dichte eines Steins. Bitte machen sie Vorschläge wie man das machen könnte.

AUFGABE 3: Bestimmen Sie das Volumen von 1 kg Gold. Welche Kantenlänge hat ein Würfel mit diesem Volumen? Lösung $a \approx 3{,}7\,\text{cm}$

AUFGABE 4: Vervollständigen Sie die Tabelle.

	7,86 g/cm^3	200 cm^3	
	13,55 g/cm^3		0,7 kg
Gold		200 cm^3	
Wasser			0,7 kg

Die Dichte der Luft

AUFGABE 5: Wie kann man die Dichte von Luft messen? Überlegen Sie sich eine Methode und beschreiben Sie die nötigen Schritte.

AUFGABE 6: Bestimmen Sie grob die Masse der Luft im Physikraum.

AUFGABE 7: Wie viele Luftballons mit 5 Litern Füllvolumen können mit 100 kg Helium gefüllt werden (bei normalem Luftdruck und 0 °C Temperatur)?

Dichtetabelle ρ [kg/m^3]

Aluminium	**2700**	**Äther**	**714**
Blei	11340	**Alkohol**	789
Eisen	7860	**Olivenöl**	914
Gold	19290	**Petroleum**	850
Kupfer	8920	**Quecksilber**	13546
Nickel	8900		
Platin	21450	**Wasser** 0 °C	999,84
Silber	10500	**Wasser** 4 °C	999,97
Zink	7140	**Wasser** 100 °C	958,35
Beton	ca. 2000	**Chlorgas**	3,214
Glas	ca. 2600	**Helium**	0,1768
Plexiglas	1190	**Kohlendioxid**	1,9769
Messing	ca. 8400	**Luft**	1,2929
Stahl	ca. 7900	**Methan**	0,7168
Holz	500 - 700	**Sauerstoff**	1,429
Kork	ca. 300	**Stickstoff**	1,2505
Eis (0 °C	917	**Wasserstoff**	0,0899

Die Werte der Gase gelten bei 0 °C.

Der hydrostatische Druck

Der Druck in Flüssigkeiten und Gasen wird hydrostatischer Druck genannt. Dieser Druck wirkt in alle Raumrichtungen gleich. Um den Grund dafür zu verstehen, muss man sich das Fluid (Flüssigkeit oder Gas) aus Atomen oder Molekülen vorstellen. Diese Teilchen schwingen im Fluid und bewegen sich ungeordnet in alle Richtungen. Dabei üben sie eine Kraft aus, die in Bewegungsrichtung zeigt. Im Mittel wird also in alle Raumrichtungen die gleiche Kraft ausgeübt. Dadurch ist auch der Druck P in alle Raumrichtungen gleich.

Der Druck in einem Fluid wird mit steigender Tiefe höher. Als Beispiel können wir den Wasserdruck beim Tauchen betrachten. Während wir an der Wasseroberfläche den Druck nicht spüren, steigt dieser mit zunehmender Tauchtiefe. Gleichzeitig steigt das Gewicht (die Gewichtskraft) des Wassers über unserem Körper.

Im folgenden wollen wir den Wasserdruck (P_W) in Abhängigkeit zur Wassertiefe herleiten:

$$P_\mathrm{W} = \frac{F_\mathrm{G}}{A} = \frac{m \cdot g}{A} = \frac{\overbrace{\rho_\mathrm{W} \cdot V}^{m} \cdot g}{A} = \frac{\rho_\mathrm{W} \cdot \overbrace{A \cdot h}^{V} \cdot g}{A} = \rho_\mathrm{W} \cdot g \cdot h.$$

Dabei ist F_G die Gewichskraft, A die Fläche, ρ_W die Dichte von Wasser, V das Volumen und h die Wassertiefe.

Zusammenfassend kann man schreiben:

$$\boxed{P_\mathrm{W} = \rho_\mathrm{W} \cdot g \cdot h.}$$

Die Formel sagt aus, dass der Wasserdruck nur von der Wassertiefe abhängt (Wasserdichte und Fallbeschleunigung sind konstant) und nicht von der Form des Behälters. Dieser einfache Ausdruck für den Wasserdruck beruht auf der Annahme, dass die Wasserdichte unabhängig vom Wasserdruck konstant ist. Dies gilt näherungsweise für alle Flüssigkeiten. In Gasen ist diese einfache Annahme nicht gültig.

Übt man auf die Wasseroberfläche einen zusätzlichen Druck P_0 aus kann man diesen zum Wasserdruck P_W addieren und erhält dann den Gesamtdruck P.

$$\boxed{P = P_0 + P_\mathrm{W} = P_0 + \rho \cdot g \cdot \Delta h}$$

AUFGABE 8: Wie hoch ist der Wasserdruck bei a) 3 m b) 2000 m Wassertiefe? Lösung a) 30 000 Pa und b) 20 000 000 Pa

AUFGABE 9: Die Staumauer Grand Dixence im Wallis ist eine der höchsten Staumauern der Welt. Die maximale Höhe beträgt 285Meter, die maximale “Dicke” am Fuss 198Meter. In der achtjährigen Bauzeit wurden sechs Millionen Kubikmeter Beton verarbeitet.

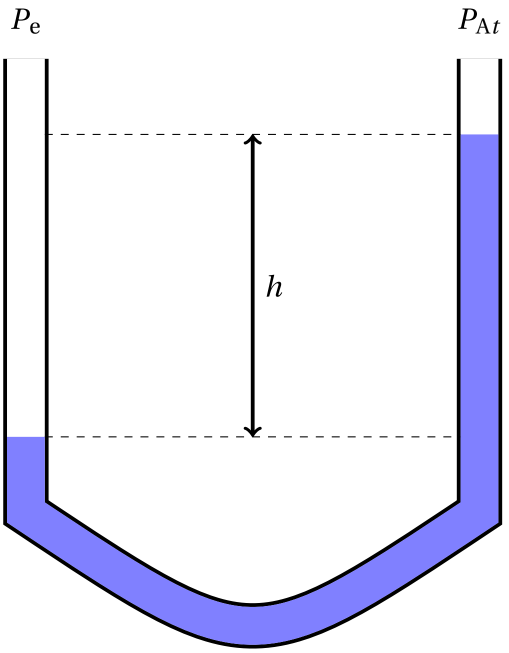
a) Warum spielte die Form und Länge des Stausees keine Rolle für die Dimensionalisierung der Mauer?

b) Musste der Luftdruck bei der Bestimmung der Mauerbeanspruchung berücksichtigt werden?

AUFGABE 10: Welche Kraft wirkt auf einen Qudratzentimer der Körperoberfläche einer Taucherin in 50 m Tiefe? Der Luftdruck beträgt 960 hPa. Lösung 59,6 N

Druckmessung

Für die Druckmessung verwendet man Manometer (Druckmesser). Heutige Manometer funktionieren meistens elektronisch. Hier wollen wir zwei Flüssigkeitsmanometer kennenlernen. Das erste ist das offene U-Rohr-Manometer. Es besteht aus einem U-förmigen Rohr, das etwa halb mit einer Flüssigkeit gefüllt ist. Herrscht auf beiden Seiten des U-Rohrs der gleiche Druck, so ist die Oberfläche auf der linken Seite auf gleicher Höhe wie die Oberfläche auf der rechten Seite des U-Rohrs. Wird auf einer Seite ein Überdruck (P_e) angelegt, so verschieben sich die Oberflächen gegeneinander. Mit diesem Manometer kann man nur Druckdifferenzen messen.



Mit dem Höhenunterschied zwischen den beiden Oberflächen kann der Überdruck bestimmt werden. Es gilt

$$\boxed{P_\mathrm{e} = \rho \cdot g \cdot h.}$$

Dabei ist ρ die Dichte der Flüssigkeit im inneren des U-Rohrs, g die Fallbeschleunigung und h der Höhenunterschied zwischen beiden Oberflächen.

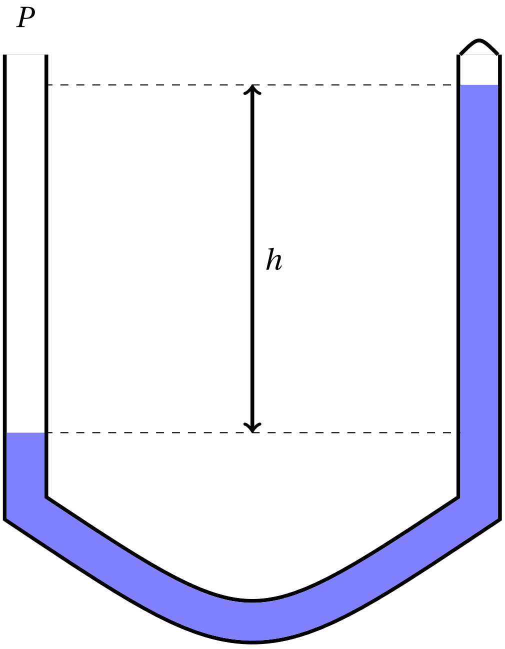
Heute sind diese Manometer nicht mehr sehr verbreitet. Historisch wurde das offene Quecksilber Manometer zur Messung des Blutdrucks verwendet. Die Einheit des Blutdrucks ist bis heute mmHg, also der Höhenunterschied von Quecksilber (Hg) in einem offenen U-Rohr-Manometer.

AUFGABE 11:

a) Wie hoch ist der Druck von 120mmHg in der für den Druck üblichen Einheit Pascal?

b) Welchem Höhenunterschied entspricht dass, wenn stattdessen Wasser im Manometer verwendet wird?

Eine Variation des offenen Manometers ist das geschlossene Manometer. Mit diesem werden keine Druckdifferenzen gemessen, wie beim offenen Manometer sondern absolute Drücke.



Mit dem Höhenunterschied zwischen den beiden Oberflächen kann der Druck bestimmt werden. Es gilt

$$\boxed{P = \rho \cdot g \cdot h.}$$

Dabei ist ρ die Dichte der Flüssigkeit im inneren des U-Rohrs, g die Fallbeschleunigung und h der Höhenunterschied zwischen beiden Oberflächen. In der geschlossenen Röhre bildet sich oben ein Vakuum. Im Vakuum ist der Druck Null. Deshalb kann in diesem Manometer der Druck gemessen werden.

Historisch wird dieser Manometertyp zur Messung des Luftdrucks verwendet. Der Normaldruck von 1013 hPa entspricht einer Quecksilbersäule von 76 cm.

AUFGABE 12: In einem Experiment sehen Sie ein geschlossenes Quecksilbermanometer unter einer Glasglocke. Mit der Vakuumpumpe wird die Luft aus der Glasglocke gepumpt. Lesen Sie den Höhenunterschied zwischen den zwei Flüssigkeitsoberflächen ab und bestimmen Sie den Druck unter der Glasglocke.

Der Luftdruck

AUFGABE 13: Lesen Sie den Ausschnitt zum Barometer aus der Wikipedia und beantworten Sie folgende Fragen:

a) Was ist ein Barometer?

b) Welche Funktion hat das Barometer?

c) Skizzieren Sie die geschichtliche Entwicklung des Barometers.

d) Was wurde mit dem Barometer erforscht?

e) Beschreiben Sie das Funktionsprinzip des Barometers.

f) Was hat Ihnen besonders gut an dem Artikel gefallen?

AUFGABE 14: In der Physiksammlung gibt es ein Quecksilberbarometer. Gehen Sie in kleinen Gruppen (maximal drei Personen) und schauen Sie es sich an. Lesen Sie die Höhe der Quecksilbersäule ab. Berechnen Sie am Arbeitsplatz den heutigen Luftdruck.

AUFGABE 15: Nehmen Sie an, die Dichte der Luft in der Atmosphäre ist nicht abhängig von der Höhe, sondern konstant die Dichte bei Normalbedingungen. Bis wohin reicht die Atmosphäre in diesem Fall?

Lösung 7943 m

AUFGABE 16: In Aufgabe 15 haben Sie angenommen, die Dichte der Luft sei über die gesamte Atmosphäre konstant. Verbessern Sie dieses Modell, indem Sie die Atmosphäre in 1 km Dicke schichten konstanter Dichte zerlegen.

a) Welcher Luftdruck ergibt sich für 5 km bzw. 10 km über dem Meer, wenn Sie von Normalbedingungen und konstanter Temperatur auf Meereshöhe ausgehen?

b) Vergleichen Sie die Werte aus a) mit der barometrischen Höhenformel:

$$P = P_0 \cdot e^{-\frac{\rho_0 g}{P_0} \cdot h}$$

Lösung a) 517 hPa und 264 hPa, b) 540 hPa und 288 hPa

Die Magdeburger Halbkugeln

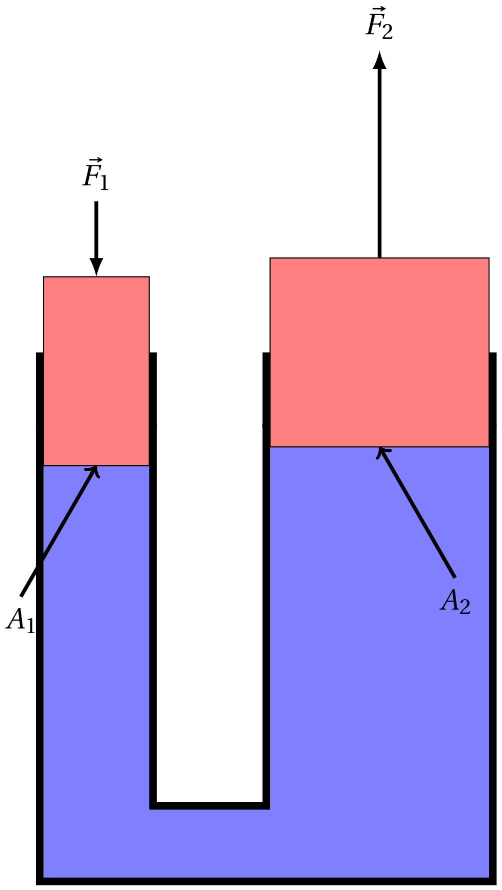
Im Jahre 1654 hat Otto von Guericke in Magdeburg (Deutschland) zum ersten Mal sein später berühmt gewordenes Experiment vorgeführt. Es ist ein Experiment um die Wirkung des Luftdrucks zu verdeutlichen. Zwei Halbkugeln werden so aneinander gelegt, dass sie eine Kugel formen. Dann wird die Luft aus dem inneren der Kugel gepumpt. Der äussere Luftdruck drückt weiterhin auf die zwei Halbkugeln. Dies verhindert, dass man die Halbkugeln voneinander trennen kann. Der Durchmesser der zwei Halbkugeln betrug damal 42 cm und 16 Pferde waren nicht in der Lage sie zu trennen.

Otto von Guerickes Versuch über den Druck der atmosphärischen Luft vor dem Regensburger Reichstag.

AUFGABE 17: Machen Sie sich eine Skizze des Experiments und zeichnen Sie die wirkenden Kräfte ein. Berechnen Sie, wie gross die Kräfte sein müssten um die zwei Halbkugeln zu trennen.

Hydraulische Systeme

In täglichen Leben werden häufig hydraulische Systeme benutzt, um Kräfte zu verstärken. Ein Beispiel ist der hydraulische Wagenheber. Die Abbildung zeigt zwei Kolben, die mit einer Flüssigkeit verbunden sind. Erhöht man den Druck in einer Flüssigkeit indem man mit einem Kolben eine Kraft auf die Oberfläche ausübt, so erhöht sich der Druck gleichmässig in der gesamten Flüssigkeit.



Wird auf den linken Kolben eine Kraft F_1 ausgeübt, dann steigt der Druck in der Flüssigkeit. Der Druckanstieg ist

$$P = \frac{F_1}{A_1}.$$

Der Druck in der Flüssigkeit drückt nun auf den zweiten Kolben mit der Fläche A_2. Dies bewirkt eine Kraft F_2

$$\begin{aligned} F_2 &= P \cdot A_2 \\ &= \frac{F_1}{A_1} \cdot A_2 \\ &= \frac{A_2}{A_1} \cdot F_1 \end{aligned}$$

AUFGABE 18: Die zwei Kolben eines Wagenhebers haben einen Durchmesser von 2 cm und 8 cm. Wie gross ist die Kraftverstärkung?

Auftrieb und archimedisches Prinzip

Wenn ein schwerer Körper an einer Feder aufgehängt und in Wasser eingetaucht wird, dann zeigt die Skala an der Federwaage eine geringere Gewichtskraft an, als wenn der Körper in Luft gewogen würde. Ursache dafür ist eine nach oben gerichtete Kraft, die von dem Wasser auf den Körper ausgeübt wird und einen Teil der Gewichtskraft kompensiert. Dieses Phänomen heisst Auftrieb. Der Auftrieb ist noch besser sichtbar, wenn man beispielsweise einen Korken in Wasser eintaucht. Wenn er vollständig in Wasser eingetaucht ist, dann erfährt der Korken aufgrund des Wasserdrucks eine aufwärts gerichtete Kraft, die grösser ist als seine Gewichtskraft. Diese Kraft, die das Fluid auf einen ganz oder teilweise eingetauchten Körper ausübt, wird als Auftriebskraft F_A bezeichnet. Sie hängt nicht von der Form oder Dichte des Körpers ab, sondern nur von der Dichte des Fluids. Ihr Betrag ist gleich Gewichtskraft der durch den Körper verdrängten Fluidmenge.

Ein Körper, der ganz oder teilweise in ein Fluid eintaucht, erfährt eine Auftriebskraft, deren Betrag gleich der Gewichtskraft der durch den Körper verdrängten Fluidmenge ist.

$$\text{Auftriebskraft} = \text{Fluiddichte} \cdot \text{Fallbeschleunigung} \cdot \text{Volumen}$$
$$F_\mathrm{A} = \rho_\mathrm{W} \cdot g \cdot V$$

AUFGABE 19: Was versteht man unter Auftrieb? Wovon hängt der Auftrieb ab?

AUFGABE 20: Wie gross ist der Auftrieb den ein Körper mit einem Volumen von 0,25 m^3 in Wasser erfährt? Lösung 2452,5 N

AUFGABE 21: Ein Taucher ist im Urlaub am Toten Meer ($\rho = 1240\,\mathrm{kg/m^3}$) und möchte tauchen gehen. Daheim taucht er gewöhnlich in einem Süsswassersee.

a) Was sollte der Taucher beachten?

b) Wie viel grösser ist der Auftrieb im Toten Meer im Vergleich zum heimischen See?

Lösung b) 1,24

Die Entdeckung des archimedischen Prinzips

Quelle: `http://de.wikipedia.org/wiki/Archimedisches_Prinzip`

Archimedes war von König Hieron II. von Syrakus beauftragt worden, herauszufinden, ob dessen Krone wie bestellt aus reinem Gold wäre oder ob das Material durch billigeres Metall gestreckt worden sei. Diese Aufgabe stellte Archimedes zunächst vor Probleme, da die Krone natürlich nicht zerstört werden durfte.

Der Überlieferung nach hatte Archimedes schließlich den rettenden Einfall, als er zum Baden in eine bis zum Rand gefüllte Wanne stieg und dabei das Wasser überlief. Er erkannte, dass die Menge Wasser, die übergelaufen war, genau seinem Körpervolumen entsprach. Angeblich lief er dann, nackt wie er war, durch die Straßen und rief Heureka ("Ich habe es gefunden").

Um die gestellte Aufgabe zu lösen, tauchte er einmal die Krone und dann einen Goldbarren, der genauso viel wog wie die Krone, in einen bis zum Rand gefüllten Wasserbehälter und maß die Menge des überlaufenden Wassers. Da die Krone mehr Wasser verdrängte als der Goldbarren und somit bei gleichem Gewicht voluminöser war, musste sie aus einem Material geringerer Dichte, also nicht aus reinem Gold, gefertigt worden sein.

Diese Geschichte wurde vom römischen Architekten Vitruv überliefert.

Obwohl der Legende nach auf dieser Geschichte die Entdeckung des archimedischen Prinzips beruht, würde der Versuch von Archimedes auch mit jeder anderen Flüssigkeit funktionieren. Das Interessanteste am archimedischen Prinzip, nämlich die Entstehung des Auftriebs und damit die Berechnung der Dichte des Fluids, spielt in dieser Entdeckungsgeschichte gar keine Rolle.

AUFGABE 22: Lesen Sie den obigen Text zur Entdeckung des archimedischen Prinzips.

a) Was hat Archimedes gemacht, um die Echtheit der Goldkrone zu überprüfen.

b) Was misst Archimedes eigentlich?

c) Warum funktioniert dieses Verfahren?

d) Welchen Nachteil hat diese Methode?

e) Fällt ihnen ein alternatives Verfahren ein, um die Echtheit der Krone zu überprüfen?

Dichtebestimmung mit der Auftriebskraft

Am Auftrieb eines Körpers kann man eine erste Einschätzung seiner Dichte machen. Geht der Körper im Fluid unter, so ist seine Dicht grösser als die Dichte des Fluids. Beispiele sind der heliumgefüllte Luftballon der aufsteigt oder der Korken der auf der Wasseroberfläche schwimmt. In beiden Fällen ist die Dichte des Körpers kleiner als die Dichte des Fluids. Der Stein, den man in den See wirft geht hingegen unter. Seine Dichte ist höher als die Dichte des Wassers.

Man kann die Dichte eines Körpers mit Hilfe des Auftriebs aber auch genauer bestimmen. Der Auftrieb eines Körpers kann relativ leicht mit einer Federwaage bestimmt werden. Zuerst bestimmt man das Gewicht (Gewichtskraft) des Körpers in Luft (F_G). Dann hält man den Körper in die Flüssigkeit und bestimmt den Gewichtsverlust des Körpers. Der Gewichtsverlust ist die Auftriebskraft.

Mit Gewichtskraft und Auftriebskraft kann man nun die Dichte des Körpers bestimmen:

$$\frac{F_\mathrm{G}}{F_\mathrm{A}} = \frac{\rho \cdot g \cdot V}{\rho_\mathrm{W} \cdot g \cdot V} \qquad \rightarrow \qquad \frac{F_\mathrm{G}}{F_\mathrm{A}} = \frac{\rho}{\rho_\mathrm{W}} \qquad \rightarrow \qquad \rho = \rho_\mathrm{W} \cdot \frac{F_\mathrm{G}}{F_\mathrm{A}}$$

AUFGABE 23: Das Gewicht eines Körpers in Luft ist 5 N. In Wasser getaucht zeigt der Kraftmesser 4,75 N an.

a) Welche Dichte hat der Körper und aus welchem Material besteht er vermutlich?

b) Wie gross ist das Volumen des Körpers?

Lösung a) 20000 kg/m^3 vermutlich aus Gold, b) 25 cm^3

AUFGABE 24: Ein Korken schwimmt auf der Wasseroberfläche. Wie viel vom Korken ist unter der Wasseroberfläche? Die Dichte des Korkens ist $\rho_\mathrm{Kork} = 200\,\mathrm{kg/m^3}$.

Lösung 20 %

AUFGABE 25: Im Unterricht sehen Sie ein Experiment. Beantworten Sie dazu die folgenden Fragen.

a) Sie sehen zwei mit Wasser gefüllte Bechergläser in denen jeweils ein Ballon schwebt. Warum schweben die Ballone?

b) Die Ballone werden nun vertauscht. Der rechte Ballon wird ins linke Gefäss und der linke Ballon ins rechte Gefäss gegeben. Machen Sie eine Skizze. Was beobachten Sie?

c) Wie können Sie sich das Beobachtete erklären?

AUFGABE 26: Ein Messbecher mit einem Volumen von 200 ml ist mit Wasser von 4 °C bis zum Rand gefüllt ($\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$). Das Wasser wird auf 80 °C erwärmt. Dabei laufen 6 g Wasser über. Nehmen Sie an, dass Volumen des Gefässes ändert sich durch die Temperaturänderung nicht.

a) Welche Masse hat das Wasser bei 4 °C?

b) Welche Dichte hat Wasser von 80 °C?

Lösung a) 0,2 kg, b) $970\,\mathrm{kg/m^3}$

AUFGABE 27: Im Schwimmbad liegt eine Person auf einer Schwimmmatte. Die Matte ist zwei Meter lang, ein Meter breit und zehn Zentimeter hoch. Die Matte wird durch das Gewicht der Person um etwa 3,5 Zentimeter unter Wasser gedrückt. Wie schwer ist die Person?

Lösung etwa 70 kg

AUFGABE 28: Während einer Lektion haben wir die Dichte von Luft bestimmt. Erinnern Sie sich noch? Ein Vorschlag der gemacht wurde war einen Luftballon mit und ohne Luft zu wiegen. Warum kann dieser Vorschlag nicht funktionieren?

AUFGABE 29: Ein Eiswürfel schwimmt in einem Glas mit Wasser. Wie viel von einem Eiswürfel ist über der Wasseroberfläche zu sehen? Die Dichte von Eis ist $917\,\mathrm{kg/m^3}$.

Lösung etwa 8 %

AUFGABE 30: Ein Gefäss ist randvoll mit Wasser gefüllt. Auf dem Wasser schwimmt ein Stück Eis. Was passiert, wenn das Eis schmilzt? Erklären Sie.

AUFGABE 31: Ein Liter Wasser ($\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$) wird in einem sehr dünnen Gefäss gewogen. Was zeigt die Waage an? Denken Sie bei dieser Aufgabe an den Auftrieb der Luft.

Lösung 0,9987 kg

Musterlösungen

LÖSUNG 1:

$$2{,}7\,\mathrm{g/cm^3} = 2{,}7\frac{1\cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}}{(1\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m})\cdot(1\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m})\cdot(1\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m})} = 2{,}7\frac{1\cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}}{1\cdot 10^{-6}\,\mathrm{m^3}} = 2{,}7\cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3} = 2700\,\mathrm{kg/m^3}$$

LÖSUNG 3: Zuerst bestimmen wir das Volumen:

$$\rho = \frac{m}{V} \rightarrow V = \frac{m}{\rho} = \frac{1\,\mathrm{kg}}{19\,290\,\mathrm{kg/m^3}} = 5{,}1840\cdot 10^{-5}\,\mathrm{m^3}$$

Für einen Würfel gilt: $V = a^3 \rightarrow a = \sqrt[3]{V} = 0{,}037\,287\,\mathrm{m} \approx 3{,}7\,\mathrm{cm}$.

LÖSUNG 4:

Material	Dichte	Volumen	Masse
Eisen	$7{,}86\,\mathrm{g/cm^3}$	$200\,\mathrm{cm^3}$	1,572 kg
Quecksilber	$13{,}55\,\mathrm{g/cm^3}$	$51{,}66\,\mathrm{cm^3}$	0,7 kg
Gold	$19{,}29\,\mathrm{g/cm^3}$	$200\,\mathrm{cm^3}$	3,858 kg
Wasser	$1\,\mathrm{g/cm^3}$	$700\,\mathrm{cm^3}$	0,7 kg

LÖSUNG 7: Das Volumen von 100 kg Helium bei Normalbedingungen berechnet sich so:

$$\rho = \frac{m}{V} \rightarrow V = \frac{m}{\rho} = \frac{100\,\mathrm{kg}}{0{,}1768\,\mathrm{kg/m^3}} = 565{,}61\,\mathrm{m^3}$$

Ein Luftballon hat ein Volumen von $5\,\mathrm{l} = 5\,\mathrm{dm^3} = 5\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m^3}$. Es lassen sich also V/V_{Ballon} Luftballons füllen. Das macht 113 122 Luftballons.

LÖSUNG 8:

a)

$$P = \rho_{\mathrm{W}}\cdot g\cdot h = 1000\,\mathrm{kg/m^3}\cdot 10\,\mathrm{N/kg}\cdot 3\,\mathrm{m} = 30\,000\,\mathrm{Pa}$$

b)

$$P = \rho_{\mathrm{W}}\cdot g\cdot h = 1000\,\mathrm{kg/m^3}\cdot 10\,\mathrm{N/kg}\cdot 2000\,\mathrm{m} = 20\,000\,000\,\mathrm{Pa}$$

LÖSUNG 9:

a) Für die Dimensionierung der Mauer muss der Druck auf die Mauer berücksichtigt werden. Der Wasserdruck ist unabhängig von der Form des Wassergefässes, auch bei Seen. Einzig der Wasserstand also die Höhe des Wassers hat einen Einfluss auf den Druck.

b) Nein. Der Luftdruck musste nicht berücksichtigt werden. Der Luftdruck drückt zwar auf die Wasseroberfläche des Sees, der Druck im See ist damit höher als ohne den Luftdruck, aber der Luftdruck drückt auch gegen die Staumauer und stützt diese dadurch. Effektiv gleichen sich beide Effekte aus.

LÖSUNG 10: Der Druck in 50 m Wassertiefe ist die Summe aus Luftdruck an der Oberfläche und Wasserdruck in 50 m Tiefe.

$$P = P_0 + P_\mathrm{w} = P_0 + \rho \cdot g \cdot \Delta h = 960\,\mathrm{hPa} + 1000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 10\,\mathrm{m/s^2} \cdot 50\,\mathrm{m} = 5960\,\mathrm{hPa}$$

Druck ist der Quotient aus Kraft F und Fläche A

$$P = \frac{F}{A} \rightarrow F = P \cdot A = 5960\,\mathrm{hPa} \cdot 1 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2} = 59{,}6\,\mathrm{N}$$

LÖSUNG 11:

a)

$$P = \rho_{\mathrm{Hg}} \cdot g \cdot h = 13\,546\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 10\,\mathrm{N/kg} \cdot 0{,}12\,\mathrm{m} = 1{,}6255 \cdot 10^4\,\mathrm{Pa}$$

b)

$$P = \rho \cdot g \cdot h \rightarrow h = \frac{P}{\rho \cdot g} = \frac{1{,}6255 \cdot 10^4\,\mathrm{Pa}}{1000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 10\,\mathrm{N/kg}} = 1{,}63\,\mathrm{m}$$

LÖSUNG 15: In dieser Aufgabe wird angenommen, dass die Luft nicht komprimiert werden kann. Die Luft soll sich also wie eine Flüssigkeit verhalten.

$$P = \rho \cdot g \cdot h \rightarrow h = \frac{P}{\rho \cdot g} = \frac{101\,300\,\mathrm{Pa}}{1{,}3\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}} = 7943{,}22\,\mathrm{m}$$

LÖSUNG 17: Die Fläche eines Kreises mit einem Durchmesser von 42 cm ist:

$$A = r^2 \cdot \pi = (0{,}21\,\mathrm{m})^2 \cdot \pi = 0{,}138\,54\,\mathrm{m^2}.$$

$$P = \frac{F}{A} \rightarrow F = P \cdot A = 1 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa} \cdot 0{,}139\,\mathrm{m^2} = 13\,900\,\mathrm{N}$$

LÖSUNG 18:

$$A_1 = r^2 \cdot \pi = (0{,}01\,\mathrm{cm})^2 \cdot \pi = 0{,}0001\,\mathrm{m^2} \cdot \pi$$
$$A_2 = r^2 \cdot \pi = (0{,}04\,\mathrm{cm})^2 \cdot \pi = 0{,}0016\,\mathrm{m^2} \cdot \pi$$

Die Kraftverstärkung ist $A_2/A_1 = 16$.

LÖSUNG 19: Auftrieb tritt in Flüssigkeiten und Gasen auf und beschreibt eine nach oben gerichtete Kraft. Die Auftriebskraft hängt von der Dichte des Fluids und vom Volumen des eingetauchten Körpers ab.

LÖSUNG 20:

$$F_\mathrm{A} = \rho_\mathrm{W} \cdot g \cdot V = 1000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 0{,}25\,\mathrm{m^3} = 2452{,}5\,\mathrm{N}$$

LÖSUNG 21:

a) Die Dichte des Wassers im Toten Meer ist höher als im Süsswassersee. Dadurch ist die Auftriebskraft grösser.

b)

$$\frac{F_\mathrm{A}(\text{Totes Meer})}{F_\mathrm{A}(\text{Süsswassersee})} = \frac{\rho_\mathrm{W}(\text{Totes Meer}) \cdot g \cdot V}{\rho_\mathrm{W}(\text{Süsswasser}) \cdot g \cdot V} = \frac{\rho_\mathrm{W}(\text{Totes Meer})}{\rho_\mathrm{W}(\text{Süsswasser})} = \frac{1240\,\mathrm{kg/m^3}}{1000\,\mathrm{kg/m^3}} = 1{,}24$$

LÖSUNG 22:

a)

b) Das Volumen der Krone, bzw. das Volumen des Goldbarren.

c) Die Dichte von Gold ist sehr hoch. Es gibt keine Materialien, die günstiger sind als Gold mit vergleichbarer Dichte.

d) Man braucht zusätzlich Gold, mit der gleichen Masse der Krone.

e)

LÖSUNG 23:

a)

$$F_\mathrm{A} = 5\,\mathrm{N} - 4{,}75\,\mathrm{N} = 0{,}25\,\mathrm{N}$$

$$\rho = \rho_\mathrm{W} \cdot \frac{F_\mathrm{G}}{F_\mathrm{A}} = 1000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot \frac{5\,\mathrm{N}}{0{,}25\,\mathrm{N}} = 20\,000\,\mathrm{kg/m^3}$$

Der Körper ist vermutlich aus Gold ($\rho_\mathrm{Gold} = 19\,290\,\mathrm{kg/m^3}$).

b)

$$m = \rho \cdot V \rightarrow V = \frac{m}{\rho} = \frac{F_\mathrm{G}}{g \cdot \rho} = \frac{5\,\mathrm{N}}{10\,\mathrm{N/kg} \cdot 20\,000\,\mathrm{kg/m^3}} = 2{,}5 \cdot 10^5\,\mathrm{m^3} = 25\,\mathrm{cm^3}$$

LÖSUNG 24: Der Korken ist im Gleichgewicht: $F_A = F_G$. Mit V^* bezeichnen wir das Volumen des Körpers, dass unter der Wasseroberfläche ist. Dieses ist für den Auftrieb wichtig.

$$\frac{F_A}{F_G} = \frac{\rho_W \cdot g \cdot V^*}{\rho_{Kork} \cdot g \cdot V} = 1 \rightarrow \frac{V^*}{V} = \frac{\rho_{Kork}}{\rho_W} = \frac{200\,kg/m^3}{1000\,kg/m^3} = \frac{1}{5}$$

20 % des Korkvolumens ist unter der Wasseroberfläche.

LÖSUNG 26:

a) Die Masse berechnet sich mit der Definition der Dichte:

$$\rho = \frac{m}{V} \rightarrow m = \rho \cdot V = 1000\,kg/m^3 \cdot 2 \cdot 10^{-4}\,m^3 = 2 \cdot 10^{-1}\,kg = 0{,}2\,kg$$

b) Mit der Definition der Dichte bekommen wir

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{0{,}2\,kg - 0{,}006\,kg}{2 \cdot 10^{-4}\,m^3} = 970\,kg/m^3$$

LÖSUNG 27: Die Eintauchtiefe der Matte ist konstant 3,5 Zentimeter. Das bedeutet die Gewichtskraft und die Auftriebskraft sind bei diesem Wert im Gleichgewicht.

$$\begin{aligned} F_G &= F_A \\ m \cdot g &= \rho_W \cdot V \cdot g \\ m &= \rho_W \cdot V = 1000\,kg/m^3 \cdot 2\,m \cdot 1\,m \cdot 0{,}035\,m = 70\,kg \end{aligned}$$

Das Volumen bei der Auftriebskraft ist das Volumen der Matte, das unter der Wasseroberfläche liegt.

LÖSUNG 29: Der Eiswürfel ist im Gleichgewicht. Das heisst $F_G = F_A$.

$$1 = \frac{F_G}{F_A} = \frac{\rho_{Eis} \cdot V_{Eis} \cdot g}{\rho_{Wasser} \cdot V^* \cdot g}$$

V^* ist das Volumen des Eiswürfels das sich unter Wasser befindet. Umstellen der oberen Formel nach V^*/V_{Eis} gibt uns den Anteil des Einswürfels der unter der Wasseroberfläche ist.

$$\frac{V^*}{V_{Eis}} = \frac{\rho_{Eis}}{\rho_{Wasser}} = \frac{917\,kg/m^3}{1000\,kg/m^3} = 0{,}917 \approx 92\,\%$$

Der Rest des Eiswürfels (8 %) ist also über der Wasseroberfläche.

LÖSUNG 31: Um den Auftrieb in Luft zu bestimmen braucht man die Dichte der Luft und das Volumen des Gegenstandes. Die Dichte ist etwa $1{,}3\,kg/m^3$. Das Volumen ist $1\,l = 1\,dm^3 = 1 \cdot 10^{-3}\,m^3$. Damit ergibt sich die Auftriebskraft zu

$$F_A = \rho \cdot g \cdot V = 1{,}3\,kg/m^3 \cdot 9{,}81\,m/s^2 1 \cdot 10^{-3}\,m^3 = 0{,}012\,753\,N$$

Mit der Formel für die Gewichtskraft bekommt man die Masse, die dieser Kraft entspricht

$$F_\mathrm{G} = m \cdot g \rightarrow m = \frac{F_\mathrm{G}}{g} = \frac{0{,}012\,753\,\mathrm{N}}{9{,}81\,\mathrm{m/s^2}} = 0{,}0013\,\mathrm{kg}.$$

Damit ergibt sich für die Anzeige

$$1\,\mathrm{kg} - 0{,}0013\,\mathrm{kg} = 0{,}9987\,\mathrm{kg}.$$
