Prof. Dr. Karsten Urban
Dr. Timo Tonn
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

WiSe 2023/2024
26.11.2023

# Angewandte Numerik

## Übungsblatt 06

**Besprechung** in den Tutorien von Montag, 04.12.2023 bis Freitag, 08.12.2023

Für dieses Übungsblatt gibt es 28 Theorie- und 6 Matlab-Punkte, sowie 11 Theorie- und 7 Matlab-Zusatzpunkte. Punkte, die mit einem * gekennzeichnet sind, sind Zusatzpunkte.
Die 70-Prozent-Grenzen liegen aktuell (inklusive Blatt 06) bei 87,5 Theorie- und 63,7 Matlab-Punkten.

**Aufgabe 18** *(Noch ein lineares Ausgleichsproblem?)* (1T+4T Punkte)

Das Abkühlen eines festen Körpers kann durch die folgende Gleichung beschrieben werden

$$T(t) = T_u + a\, e^{-b\, t}.$$

Dabei ist

- $T(t)$ die Temperatur zum Zeitpunkt $t$,
- $T_u$ die (konstante) Umgebungstemperatur,
- $a$ eine unbekannte systemabhängige Konstante und
- $b$ eine unbekannte Materialkonstante.

Die beiden unbekannten Konstanten $a$ und $b$ sollen experimentell bestimmt werden. Dazu werden durch ein Experiment bei konstanter Umgebungstemperatur $T_u$ zu den Zeitpunkten $t_i$ für $i \in \{1, ..., m\}$ die Temperaturwerte $T_i$ des festen Körpers gemessen.

a) Lässt sich dieses Problem als lineares Ausgleichsproblem formulieren und mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate lösen?

b) Begründen Sie Ihre Aussage. Geben Sie dazu die Formulierung des linearen Ausgleichsproblems sowie die auftretende Matrix und die auftretenden Vektoren explizit an. Welche Dimensionen haben dann die Matrix und die Vektoren?

   Oder erklären Sie detailliert, woran die Formulierung als lineares Ausgleichsproblem scheitert.

**Aufgabe 19** *(Eigenschaften orthogonaler Matrizen)* (2T+2T+3T*+2T Punkte)

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine orthogonale Matrix. Zeigen Sie:

a) $Q^T$ ist eine orthogonale Matrix.

b) Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt: $\|Q\,x\|_2 = \|x\|_2$.

c) $\kappa_2(Q) = 1$.

**Hinweise:**

i) Die Konditionszahl einer regulären Matrix $A$ wird in Definition 3.1.2 des Skripts definiert.

ii) Die von einer beliebigen Vektornorm $\|\cdot\|$ induzierte Matrixnorm $\|A\|$ wird in Beispiel 2.1.8 des Skripts eingeführt (vergleiche auch Anhang A des Skripts).

iii) Die sogenannte Spektralnorm $\|A\|_2$ einer Matrix $A$ wird durch die euklidische Vektornorm $\|\cdot\|_2$ induziert.

d) Falls $\tilde{Q}$ eine weitere orthogonale Matrix ist, dann ist auch die Matrix $Q\,\tilde{Q}$ orthogonal.

**Aufgabe 20** *(Programmieraufgabe: Die QR-Zerlegung und Lineare Ausgleichsprobleme)* (4T+4M+2M+2M* Punkte)

a) Wie in Aufgabe 17 vom letzten Übungsblatt 05 seien wieder $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \geq n$ sowie $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine Matrix mit vollem Rang (also $rgA = n$) und $b \in \mathbb{R}^m$.

Erklären Sie, warum und wie man das lineare Ausgleichsproblem $\|Ax - b\|_2 \to \min$ mit Hilfe einer $QR$-Zerlegung der Matrix $A$ lösen kann. Welche Dimensionen haben die Matrizen $Q$ und $R$?

b) Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion `[x, uF] = solveQR(Q, R, b)`, die zu einer orthogonalen Matrix `Q`, einer oberen Dreiecksmatrix `R` und einem Vektor `b` die Lösung `x` sowie den unvermeidbaren Modellfehler `uF` des linearen Ausgleichsproblem $\|QRx - b\|_2 \to \min$ zurück gibt.

c) Betrachten Sie wieder das lineare Ausgleichsproblem $\|Ax - b\|_2 \to \min$ aus Aufgabe 16 und erweitern Sie Ihr MATLAB-Skript aus Aufgabe 16:

i) Berechnen Sie mit Hilfe der MATLAB-Funktion `[Q, R] = qr(A)` eine $QR$-Zerlegung der Matrix $A$. Lösen Sie mit Hilfe der Matrizen `Q` und `R` und Ihrer MATLAB-Funktion `solveQR` das lineare Ausgleichsproblem und vergleichen Sie die so erhaltene Lösung $x^*$ mit der in Aufgabe 16 berechneten Lösung.

ii) Berechnen Sie den unvermeidbaren Modellfehler auch durch die Formel $\|Ax^* - b\|_2^2$ und vergleichen Sie sowohl diesen Wert als auch den mit Hilfe der $QR$-Zerlegung der Matrix $A$ berechneten Wert `uF` mit der in Aufgabe 16 berechneten Summe der Fehlerquadrate.

**Aufgabe 21** *(Programmieraufgabe: Kondition und Normalengleichungen)* (5M*+4T* Punkte)

a) Schreiben Sie ein Matlab-Skript `testNormalengleichung`, in dem Sie für $n = (1, \ldots, 13)$ jeweils die Matrix $A_n$ und den Vektor $x_n$ durch `An = [hilb(n); hilb(n)];` und `xn = rand(n,1);` definieren. Erzeugen Sie den Vektor $b_n$ durch `bn = An * xn;`. Berechnen Sie mit dem Backslash-Operator (`x = An\bn`), mit Hilfe der Normalengleichungen und mit Hilfe der $QR$-Zerlegung jeweils eine Näherungslösung des linearen Ausgleichsproblems $\|A_n x - b_n\|_2 \to \min$.

   Plotten Sie für die drei verschiedenen Näherungslösungen jeweils die relativen Fehler logarithmisch über $n$.

   **Hinweis:** Die Normalengleichungen dürfen Sie mit dem Backslash-Operator lösen. Die $QR$-Zerlegung dürfen Sie mit der MATLAB-Funktion `qr` berechnen und zum „Rückwärtseinsetzen“ können Sie Ihre Funktion `solveQR` aus Aufgabe 20 oder auch den Backslash-Operator verwenden.

b) Was stellen Sie fest? Woran liegt das?

   **Hinweis:** Betrachten Sie jeweils die Kondition der Matrix $A_n$ und die Kondition der Matrix $A_n^T A_n$, die Sie mit den MATLAB-Befehlen `cond(An)` und `cond(An'*An)` berechnen dürfen. Können für große $n$ diese Werte stimmen?

**Aufgabe 22** *(Drehen und Drehmatrizen)* (1T+4T+4T+4T+2T*+2T* Punkte)

a) Im $\mathbb{R}^2$ kann ein Vektor durch Multiplikation von links mit der Drehmatrix

$$D_{12} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

   in der $x_1$-$x_2$-Ebene im mathematisch positiven Sinn, also entgegen dem Uhrzeigersinn, um den Winkel $\varphi$ gedreht werden. Geben Sie eine Drehmatrix $D_{ij}$ an, mit der ein Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ in der $x_i$-$x_j$-Ebene ($i, j \in \{1, \ldots, n\}$) entgegen dem Uhrzeigersinn um den Winkel $\varphi$ gedreht werden kann.

b) Die Drehmatrix $D_{ij}$ soll einen Vektor $v = \big(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n\big)^T$ auf einen Vektor $\tilde{v}$ der Form $\tilde{v} = \big(x_1, \ldots, x_{i-1}, \tilde{x}_i, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \ldots, x_n\big)^T$ drehen.

   Bestimmen Sie die Matrix $D_{ij}$. Welche Werte kann $\tilde{x}_i$ annehmen? Geben Sie die Komponenten Ihrer Drehmatrix auch für die Spezialfälle $x_i = 0$ und bzw. oder $x_j = 0$ an.

   **Hinweis:** Betrachten Sie zunächst den zweidimensionalen Fall und drücken Sie $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ in Abhängigkeit der Komponenten $a$ und $b$ des Vektors $v = \big(x_i, x_j\big)^T = \big(a, b\big)^T$ aus. Verallgemeinern Sie dann die zweidimensionale Drehmatrix auf den n-dimensionalen Fall.

c) Zeigen Sie, dass Ihre Matrix $D_{ij}$ orthogonal ist. Gilt das auch für die oben genannten Spezialfälle $x_i = 0$ und bzw. oder $x_j = 0$?

d) Transformieren Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

   mit Hilfe sukzessiver Drehungen der Spalten von $A$ auf die Matrix

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Geben Sie dabei alle verwendeten Drehmatrizen an.

e) Berechnen Sie eine $QR$-Zerlegung der Matrix $A$.

f) Ist die $QR$-Zerlegung einer Matrix eindeutig? Begründen Sie Ihre Antwort.

**Hinweise:**

Teamarbeit ist bei der Bearbeitung der Übungsblätter erlaubt und erwünscht. Falls Sie die Aufgaben im Team lösen, muss jedes Teammitglied eine eigene Lösung votieren und abgeben. Geben Sie dann bitte auf Ihrer Lösung alle an der Aufgabe beteiligten Teammitglieder an.

Die Programmieraufgaben sind in MATLAB zu lösen. Der Source Code muss strukturiert und dokumentiert sein.

Speichern Sie Ihre Lösungen der Theorieaufgaben, Ihre MATLAB-Programme und Ihre Ergebnisse in einem Directory mit dem Namen **Blatt06_*Vorname_Nachname*** und verpacken Sie dieses in eine `.zip`-Datei. **Spätestens bis Sonntag, 03.12.2023, 23:59 Uhr** müssen Sie diese `.zip`-Datei in Moodle hochladen und für die Aufgabenteile, die Sie vorstellen können, votieren.

# Aufgabe 18

a) Ja, das Problem lässt sich als lineares Ausgleichproblem definieren

b) $T(t)$ : Temperatur zu Zeitpunkt $t$ $\quad$ $T_u$ : (konstante) Umgebungstemperatur

$a$ : unbekannt $\quad$ $b$: unbekannt $\quad$ $x \in \mathbb{R}^2$, $b \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{m\times 2}$

$$T(t) = T_u + a e^{-bt}$$

$$x = \begin{pmatrix} \ln a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad T(t) - T_u = y(t) = a e^{-bt} \quad | \ln$$

$$\ln y(t) = \ln(a e^{-bt})$$

$$\ln y(t) = \ln a + b \ln(e^{-t})$$

$$\ln y(t) = \ln a - b t$$

$$b = \begin{pmatrix} \ln(T(1) - T_u) \\ \vdots \\ \ln(T(m) - T_u) \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 & -t_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & -t_m \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow y > 0$, da $T(t) - T_u$ eine Abkühlung beschreibt $\qquad \Rightarrow \|Ax - b\|_2^2 \rightarrow \min$

## Aufgabe 19

$n \in \mathbb{N}$ $\quad Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $\quad Q$ ist eine orthogonale Matrix : $\quad Q^T \cdot Q = I$

a) $Q^T$ ist eine orthogonale Matrix

Folgendes muss gelten für orthogonale Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ : $\quad A A^T = I$

$$(Q^T)^T \cdot Q^T = Q \cdot Q^T = I \text{ und } Q^T (Q^T)^T = Q^T Q = I$$

b) $\forall x \in \mathbb{R}^n ( \|Qx\|_2 = \|x\|_2 )$

Für die Spalten / Zeilen von $Q$ gilt : $\|q_i\|_2 = 1$

Durch diese Eigenschaft wird der Vektor $x$ nicht skaliert und die Norm liefert dasselbe Ergebnis.

$$\|Qx\|_2 = ((Qx)^T (Qx))^{\frac{1}{2}} = (x^T Q^T Q x)^{\frac{1}{2}} = (x^T I x)^{\frac{1}{2}} = (x^T x)^{\frac{1}{2}} = \|x\|_2$$

c) $\kappa_2(Q) = \|Q\|_2 \|Q^{-1}\|_2 = \|Q\|_2 \|Q^T\|_2$

$$= \left( \sup_{x \neq 0} \frac{\|Qx\|_2}{\|x\|_2} \right) \left( \sup_{x \neq 0} \frac{\|Q^T x\|_2}{\|x\|_2} \right)$$ folgt aus Aufgabe 19 a) und b)

$$= \left( \sup_{x \neq 0} \frac{\|x\|_2}{\|x\|_2} \right) \left( \sup_{x \neq 0} \frac{\|x\|_2}{\|x\|_2} \right)$$

$$= 1 \cdot 1 = \underline{\underline{1}}$$

d) $\tilde{Q}$ ist eine weitere Orthogonale Matrix

$$(Q\tilde{Q})^T Q\tilde{Q} = \tilde{Q}^T Q^T Q \tilde{Q} = \tilde{Q}^T I \tilde{Q} = \tilde{Q}^T \tilde{Q} = I \quad \checkmark$$

$$Q\tilde{Q} (Q\tilde{Q})^T = Q\tilde{Q}\tilde{Q}^T Q^T = Q I Q^T = Q Q^T = I \quad \checkmark$$

$\Rightarrow$ $Q\tilde{Q}$ ist auch eine orthogonale Matrix

## Aufgabe 20

a) $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $\quad$ $\text{rang}(A) = n < m$ $\quad$ $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$

durch die QR-Zerlegung erhalten wir: $A = QR \implies R = Q^T A \quad (Q^{-1} = Q^T)$

$R = \begin{pmatrix} \hat{R} \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\hat{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $\rightarrow \|Ax - b\|_2^2 = \|Rx - Q^T b\|_2^2$

$$= \left\| \begin{pmatrix} \hat{R} \\ 0 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} Q^T b_{i=1\ldots n} \\ \hline Q^T b_{i=n+1\ldots m} \end{pmatrix} \right\|_2 = \|Rx - b_1\|_2^2 + \underbrace{\|b_2\|_2^2}_{\text{fester Wert}} \qquad b_\ell = \begin{cases} (Q^T b)_{i=1\ldots n}, & 1 \\ (Q^T b)_{i=n+1\ldots m}, & 2 \end{cases}$$

$\implies$ minimiere $\|Rx - b_1\|_2^2$

## Aufgabe 21

b) Man erkennt schnell dass die Lösung über die QR-Zerlegung und das direkte lösen durch Matlab deutlich besser sind als die Normalengleichungen.
Beide Konditionen von $A_n$ und $A_n^T A_n$ sind sehr schlecht, aber $A_n^T A_n$ ist nocheinmal deutlich schlechter. Dadurch lässt sich der große relative Fehler erklären.

# Aufgabe 22

a)

$$D_{12} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$D_{ij} = \begin{array}{cc}
\begin{matrix} & & & \overset{i}{\downarrow} & & \overset{j}{\downarrow} & & \end{matrix} & \\
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & 0 \\
 & 1 & & & & & & \\
 & & \ddots & & & & & \\
 & & & \cos\varphi & & -\sin\varphi & & \\
 & & & & \ddots & & & \\
 & & & \sin\varphi & & \cos\varphi & & \\
 & 0 & & & & & 1 & \\
 & & & & & & & 1
\end{pmatrix} &
\begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{matrix}
\end{array}$$

b)

$$v = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n)^T$$

$$\tilde{v} = (x_1, \dots, x_{i-1}, \tilde{x}_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

$$\tilde{x}_i = x_i \cos(\varphi) - x_j \sin(\varphi)$$

$$0 = \tilde{x}_j = x_i \sin(\varphi) + x_j \cos(\varphi) \quad \Rightarrow \quad x_i \sin(\varphi) = -x_j \cos(\varphi)$$

Falls $x_i = 0$ : $\varphi = \frac{\pi}{2}$, da $x_i \sin(\frac{\pi}{2}) + x_j \cos(\frac{\pi}{2}) = 0 \cdot 1 + x_j \cdot 0 = 0$

Falls $x_j = 0$

$$\tilde{x}_j = 0 = x_i \sin(\varphi) + x_j \cos(\varphi) \qquad \varphi = 0$$

$$\tilde{x}_j = x_i \sin(0) + 0 \cdot \cos(0) = x_i \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$

Falls $x_i \neq 0$: $\quad \varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$(x_i + x_j)(x_i - x_j$

$x_i^2 - x_j^2$

$$\cos(\varphi) = \frac{|x_i|}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}} \qquad \sin(\varphi) = \frac{-\operatorname{sign}(x_i)\, x_j}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}}$$

$$\tilde{x}_i = \frac{x_i^2}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}} + \frac{\operatorname{sign}(x_i)\, x_j^2}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x_i^2 + x_j^2}, & x_i \geq 0 \\ \sqrt{x_i^2 - x_j^2}, & x_i < 0 \end{cases}$$

Für $x_i = 0$:

$$D = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & -1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \\ \quad\; i \quad\;\; j \end{array}$$

Für $x_j = 0$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & 0 & \\ & 0 & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Für $x_i \neq 0$

$$D = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \frac{|x_i|}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}} & \frac{\operatorname{sign}(x_i)\, x_j}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}} & \\ & \frac{-\operatorname{sign}(x_i)\, x_j}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}} & \frac{|x_i|}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}} & \\ & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ i \\ j \\ \\ \end{array} \end{array}$$

c) Für $x_i = 0$

$D \cdot D^T = I$, da

$(i,i)$: $0 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) = 1$ ✓ $(i,j)$: $0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 = 0$ ✓

$(j,i)$: $1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) = 0$ ✓ $(j,j)$: $1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1$ ✓

Für $x_j = 0$ : $D \cdot D^T = I$, da

$(i,i)$: $1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1$ ✓ $(i,j)$: $1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$ ✓

$(j,i)$: $0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0$ ✓ $(j,j)$: $0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$ ✓

Für den allgemeinen Fall: $D \cdot D^T = I$, da

$$(i,i): \frac{|x_i|}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}} \frac{|x_i|}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}} + \frac{\mathrm{sign}(x_i)|x_j|}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}} \frac{\mathrm{sign}(x_i)|x_j|}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}} = \frac{x_i^2}{x_i^2 + x_j^2} + \frac{x_j^2}{x_i^2 + x_j^2} = \frac{x_i^2 + x_j^2}{x_i^2 + x_j^2} = 1 \checkmark$$

$$(i,j):\quad \frac{|x_i|}{\sqrt{x_i^2+x_j^2}}\;\frac{-\operatorname{sign}(x_i)\,x_j}{\sqrt{x_i^2+x_j^2}}+\frac{\operatorname{sign}(x_i)\,x_j}{\sqrt{x_i^2+x_j^2}}\;\frac{|x_i|}{\sqrt{x_i^2+x_j^2}}=\overbrace{\frac{-\operatorname{sign}(x_i)\,x_j|x_i|}{x_i^2+x_j^2}+\frac{\operatorname{sign}(x_i)\,x_j|x_i|}{x_i^2+x_j^2}}^{\text{gleiches Vorzeichen}}$$

$$=\frac{0}{x_i^2+x_j^2}=0\quad\checkmark$$

$$(j,i):\quad \frac{-\operatorname{sign}(x_i)\,x_j|x_i|}{x_i^2+x_j^2}+\frac{\operatorname{sign}(x_i)\,x_j|x_i|}{x_i^2+x_j^2}=\frac{0}{x_i^2+x_j^2}=0\quad\checkmark$$

$$(j,j):\quad \frac{-\operatorname{sign}(x_i)\,x_j}{\sqrt{x_i^2+x_j^2}}\;\frac{-\operatorname{sign}(x_i)\,x_j}{\sqrt{x_i^2+x_j^2}}+\frac{x_i^2}{x_i^2+x_j^2}=\frac{x_j^2+x_i^2}{x_j^2+x_i^2}=1\quad\checkmark$$

d)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$D_{23}\, D_{13}\, D_{12}\, A = D_{23}\, D_{13} \begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 & 0 \\ -3/5 & 4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} = D_{23} D_{13} \begin{pmatrix} \frac{16}{5} + \frac{9}{5} & \frac{8}{5} - \frac{3}{5} \\ -\frac{12}{5} + \frac{12}{5} & -\frac{6}{5} - \frac{4}{5} \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= D_{23} \begin{pmatrix} 5/\sqrt{50} & 0 & 5/\sqrt{50} \\ 0 & 1 & 0 \\ -5/\sqrt{50} & 0 & 5/\sqrt{50} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} = D_{23} \begin{pmatrix} 25/\sqrt{50} + 25/\sqrt{50} & 5/\sqrt{50} + 10/\sqrt{50} \\ 0 & -2 \\ -25/50 + 25/\sqrt{50} & -5/\sqrt{50} - 10/\sqrt{50} \end{pmatrix}$$

$$= D_{23} \begin{pmatrix} \sqrt{50} & \frac{3\sqrt{50}}{10} \\ 0 & -2 \\ 0 & -\frac{3\sqrt{50}}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{17/2} & -\frac{3\sqrt{50}}{10\sqrt{17/2}} \\ 0 & \frac{3\sqrt{50}}{10\sqrt{17/2}} & 2/\sqrt{17/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{50} & \frac{3\sqrt{50}}{10} \\ 0 & -2 \\ 0 & -\frac{3\sqrt{50}}{10} \end{pmatrix}$$

$$4 + \frac{450}{100} = \frac{17}{2}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{50} & \frac{3\sqrt{50}}{10} \\ 0 & \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{34}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e) fuck no

f) Ja die QR Zerlegung ist für $m \geq n$ und $\mathrm{Rang}(A) = n$ eindeutig, da das Vorzeichen der Diagonalelemente klar bestimmt ist.