25.10.23
Jonas Kruger

Angewandte Numerik - Übungsblatt 01

Aufgabe 2

a)

$$k(x) = \frac{|x|}{|f(x_0)|} \cdot \left| \frac{d}{dx} f(x_0) \right|$$

$$f(x) = \ln\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}\left(1 - \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}\left(\frac{\sqrt{x^2-1} - x}{\sqrt{x^2-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{\cancel{x-\sqrt{x^2-1}}} \quad \frac{-\cancel{(x-\sqrt{x^2-1})}}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$k(x) = \frac{|x|}{|\ln(x-\sqrt{x^2-1})|} \cdot \left| -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \right|$$

$$= \frac{|x|}{\ln(x-\sqrt{x^2-1})} \cdot \frac{1}{|\sqrt{x^2-1}|} = \frac{|x|}{|\ln(x-\sqrt{x^2-1})\sqrt{x^2-1}|}$$

Definitionsbereich von $f(x)$ ist $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$

Die Konditionzahl ist definiert für $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

b)

$$k(30) = \frac{30}{|\ln(30-\sqrt{30^2-1})\sqrt{30^2-1}|} = \frac{30}{|-4{,}091 \cdot 29{,}9833|} \approx \frac{30}{122{,}7536} \approx 0{,}2444$$

$\Rightarrow$ Das Problem gut konditioniert

c) Wir betrachten nur Werte $x > 1$. Da für $\lim_{x \to 1} \| \ln(x-\sqrt{x^2-1}) \sqrt{x^2-1} \| = 0$ gilt,

bedeutet das die Konditionszahl für $\lim_{x \to 1^+} (k(x)) = +\infty$, unendlich wird.

Deshalb ist das Problem für jede Näherung an eins schlecht konditioniert

Aufgabe 3

a)

$$y = mx + c$$

$$x = x_1$$

$$\Rightarrow \quad y = x_2$$

$$m = -\frac{a_{i,1}}{a_{i,2}}$$

$$c = \frac{b_i}{a_{i,2}}$$

$$a_{i,1} x_1 + a_{i,2} x_2 = b_i \quad \Big| -a_{i,1} x_1$$

$$a_{i,2} x_2 = -a_{i,1} x_1 + b_i \quad \Big| : a_{i,2}$$

$$\underbrace{x_2}_{y} = \underbrace{-\frac{a_{i,1}}{a_{i,2}}}_{m} \underbrace{x_1}_{x} + \underbrace{\frac{b_i}{a_{i,2}}}_{c}$$

b) $Ax = b \qquad A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

da regulär

$$x = A^{-1} b = \frac{1}{\operatorname{Det} A} \operatorname{adj.} A\, b = \frac{1}{a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}} \cdot \begin{pmatrix} a_{1,1} & -a_{2,1} \\ -a_{1,2} & a_{2,2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}} \begin{pmatrix} a_{1,1}b_1 - a_{2,1}b_2 \\ -a_{1,2}b_1 + a_{2,2}b_2 \end{pmatrix}$$

c) Kondition beschreibt die Sensitivität einer Funktion von Eingabefehlern.
Oder ob Fehler in der Eingabe in der Ausgabe verstärkt oder geschwächt werden.

d) $y_1 = x_1$ $\quad y_2 = -x_2$ $\quad m = -\frac{a_{i,1}}{a_{i,2}}$ $\quad c = \frac{b_i}{a_{i,2}}$ $\quad \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$

$m = 1 \quad c = 0 \qquad m = -1 \quad c = 0$

$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$g_1: \quad -x_1 + x_2 = 0$

$g_2: \quad x_1 + x_2 = 0$

=> gut konditioniertes Problem

$y_1 = 4x \qquad y_2 = -4x_2$

$g_1: \quad -10x_1 + x_2 = 0$

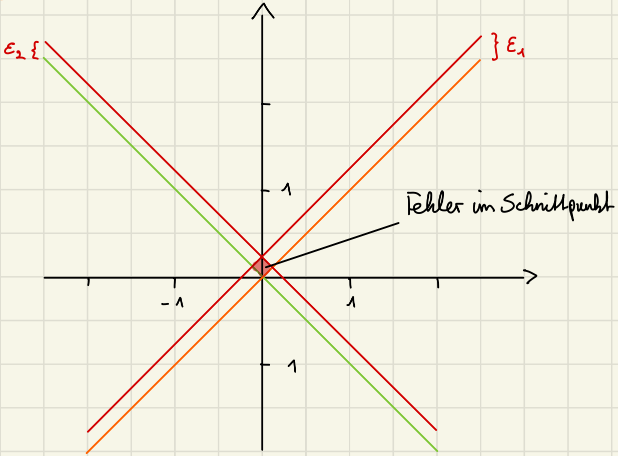
$\quad\quad 10x_1 + x_2 = 0$

$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

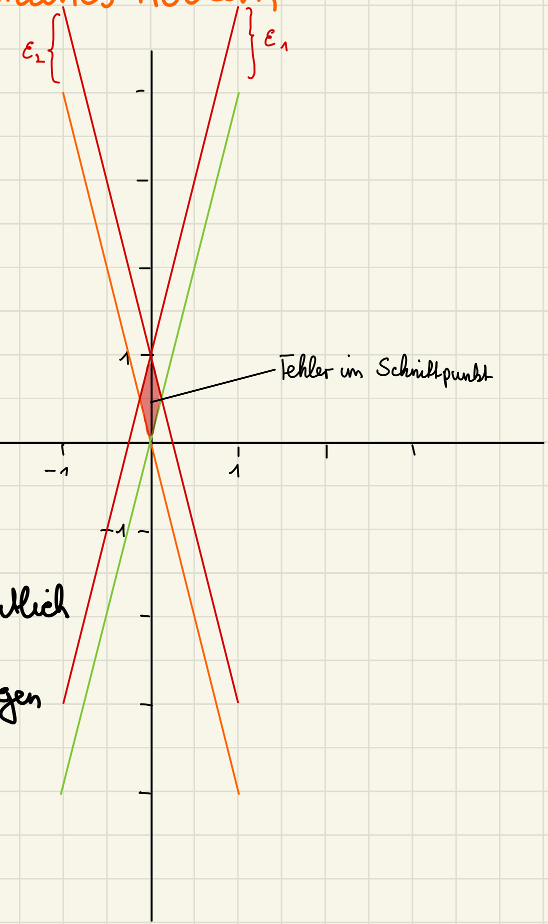
=> schlecht konditioniertes Problem

Gut konditioniertes Problem :



-> Fehlerfläche ist relativ klein
kleinere Ungenauigkeiten erzeugen
auch kleinere Fehler im
Schnittpunkt

Schlecht konditioniertes Problem



-> Fehlerfläche deutlich
größer, kleinere
Änderung erzeugen
deutlich größere
Unterschiede in der
Fläche

e) $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ fest $\qquad X = Y = \mathbb{R}^2 \qquad f: X \to Y,\ b \mapsto f(b)$

$b \in X,\ x \in Y \qquad$ mit $f(b) = x = A^{-1} b$

$$\varepsilon > 0 \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \qquad \tilde{b} = \begin{pmatrix} b_1 + \varepsilon \\ b_2 \end{pmatrix} \qquad \Delta b = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\|\Delta x\|_Y}{\|\Delta b\|_X} = \frac{\|\tilde{x} - x\|_Y}{\|\tilde{b} - b\|_X} = \frac{\left\| \frac{1}{a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}} \left(\begin{pmatrix} a_{2,2}(b_1+\varepsilon) - a_{1,2}b_2 \\ -a_{2,1}(b_1+\varepsilon) - a_{1,1}b_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{2,2}b_1 - a_{1,2}b_2 \\ -a_{2,1}b_1 - a_{1,1}b_2 \end{pmatrix} \right) \right\|_Y}{\left\| \begin{pmatrix} b_1+\varepsilon \\ b_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right\|_X}$$

$$= \frac{\left\| \frac{1}{a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}} \begin{pmatrix} a_{2,2}\varepsilon \\ -a_{2,1}\varepsilon \end{pmatrix} \right\|_Y}{\left\| \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_X} = \frac{\frac{a_{2,2}\varepsilon}{a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}}}{\varepsilon} = \frac{a_{2,2}\cancel{\varepsilon}}{(a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1})\cancel{\varepsilon}}$$

$$= \frac{a_{2,2}}{a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}}$$

Dieses Verhältnis heißt : absolute Kondition

Eingabefehler : $\Delta b = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}$

Ausgabefehler : $\Delta x = \begin{pmatrix} a_{2,2}\,\varepsilon \\ -a_{2,1}\,\varepsilon \end{pmatrix}$

Anmerkung zu Aufgabe 1:
a) File: matlab_test_chatgpt.m
- Erklärung am Ende
b) File: quadpoly.m
c) File: blatt1_c.m
d) File: blatt1_d.m