Prof. Dr. Karsten Urban
Dr. Timo Tonn
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

WiSe 2023/2024
05.11.2023

Angewandte Numerik

Übungsblatt 03

Besprechung in den Tutorien von Montag, 13.11.2023 bis Freitag, 17.11.2023

Für dieses Übungsblatt gibt es 19 Theorie- und 31 Matlab-Punkte.
Die 70-Prozent-Grenzen liegen aktuell (inklusive Blatt 03) bei 47,6 Theorie- und 46,9 Matlab-Punkten.

Aufgabe 7 *(Gaußsche Eliminationsmethode ohne Pivotisierung)* (2T+2T+2T+4T+(2T+2T) Pkte)

In dieser Aufgabe betrachten wir für $n \in \mathbb{N}$ und $k = 1, \ldots, n$ sogenannte Frobeniusmatrizen $L_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Bei diesen stehen auf der Hauptdiagonalen nur Einsen. In der Spalte k stehen unter der Hauptdiagonalen beliebige Einträge $-\ell_{k+1,k}, \ldots, -\ell_{n,k} \in \mathbb{R}$ und alle anderen Einträge sind 0, also

$$L_k := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\ell_{k+1,k} & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\ell_{k+2,k} & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\ell_{n-1,k} & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\ell_{n,k} & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sei ferner $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine beliebige Matrix.

a) Rechnen Sie nach, dass durch das Produkt $L_k \cdot A$ von den Zeilen $k+1, \ldots, n$ der Matrix A jeweils das $\ell_{k+1,k}$-fache, ..., $\ell_{n,k}$-fache der k-ten Zeile der Matrix A subtrahiert wird.

b) Zeigen Sie, dass für $k = 1, \ldots, n$ durch

$$\tilde{L_k} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \ell_{k+1,k} & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \ell_{k+2,k} & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \ell_{n-1,k} & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \ell_{n,k} & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die Inverse $(L_k)^{-1}$ der Matrix L_k gegeben ist.

c) Erklären Sie, dass wir bei der Gaußschen Eliminationsmethode ohne Pivotisierung die ursprüngliche Matrix A sukzessive von links mit Frobeniusmatrizen multiplizieren und wir nach $n-1$ Eliminationsschritten

$$L_{n-1} \cdot L_{n-2} \cdot \ldots \cdot L_2 \cdot L_1 \cdot A = R \tag{1}$$

mit einer rechten oberen Dreiecksmatrix R erhalten.

Geben Sie dazu die Faktoren $-\ell_{i,k}$ $(k = 1, \ldots, n-1,\ i = k+1, \ldots, n)$ in Abhängigkeit von der Matrix $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}$ explizit an.

Wie erhalten wir aus der Gleichung (1) die Matrix L der LR-Zerlegung der Matrix A?

d) Zeigen Sie (beispielsweise durch vollständige Induktion), dass

$$(L_1)^{-1} \cdot \ldots \cdot (L_{n-1})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ell_{2,1} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \ell_{n-1,1} & \ldots & \ell_{n-1,n-2} & 1 & 0 \\ \ell_{n,1} & \ldots & \ell_{n,n-1} & \ell_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

e) Betrachten Sie nun das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 7 \\ -12 & 5 & -12 \\ 18 & 0 & 22 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} \frac{41}{12} \\ -\frac{22}{3} \\ \frac{29}{2} \end{pmatrix} = \left(\tfrac{41}{12},\ -\tfrac{22}{3},\ \tfrac{29}{2}\right)^\top .$$

i) Berechnen Sie (von Hand) die Matrizen L und R der LR-Zerlegung von A. Stellen Sie dazu die Frobenius-Matrizen L_1 und L_2 auf und geben Sie deren Inverse L_1^{-1} und L_2^{-1} an.

ii) Lösen Sie jetzt mit Hilfe der LR-Zerlegung von A durch Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen. das Gleichungssystem $Ax = b$.

Verwenden Sie bei allen Rechnungen ausschließlich Brüche und keine Dezimalzahlen und geben Sie alle Zwischenschritte an.

Aufgabe 8 *(Programmieraufgabe: LR-Zerlegung ohne Pivotisierung)* (2M+2M+3M Punkte)

In dieser Aufgabe implementieren wir die LR-Zerlegung ohne Pivotisierung mit kompakter Speicherung und lösen damit ein lineares Gleichungssystems $Ax = b$.

a) Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion `A = kompaktLR(A)`, die die LR-Zerlegung einer quadratischen Matrix `A` analog zur Funktion `[L,R] = my_lr(A)` von Folie 27 berechnet. Speichern Sie jedoch die Faktoren $\ell_{i,j}$ an den Stellen der Matrix A, an denen der Gauß-Algorithmus Nullen erzeugt hat. Falls keine LR-Zerlegung der Matrix `A` existiert, soll Ihre Funktion eine Fehlermeldung ausgeben.

b) Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion `x = solveLR(A, b)`, die die Lösung des linearen Gleichungssystems $LRx = b$ mit Hilfe der in der Matrix `A` gespeicherten LR-Zerlegung durch Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen berechnet.

c) Schreiben Sie ein MATLAB-Skript `testSolveLR`, mit dem Sie Ihre Funktionen `A = kompaktLR(A)` und `x = solveLR(A, b)` an verschiedenen linearen Gleichungssystemen $Ax = b$ testen. Überprüfen Sie Ihre MATLAB-Funktionen auch am linearen Gleichungssystem aus Aufgabe 7 e).

Aufgabe 9 *(Programmieraufgabe: LR-Zerlegung mit Spalten-Pivotisierung)*
(3M+1M+3M+(3T+3M)+4M+(2M+2M+2M+4M+2T) Punkte)

a) Erweitern Sie Ihre MATLAB-Funktion `A = kompaktLR(A)` aus Aufgabe 8 zu einer MATLAB-Funktion `[A,p] = lrPivotZP(A)` zur Berechnung der LR-Zerlegung mit Spaltenpivotisierung.

   Vertauschen Sie dabei die Zeilen der Matrix `A` nicht, sondern verwenden Sie für den Zugriff auf die Zeilen der Matrix `A` einen Permutationsvektor `p`. Ihre Funktion soll die LR-Zerlegung der Matrix A, kompakt in der Matrix `A` gespeichert, sowie den Permutationsvektor `p` zurückgeben.

   Schreiben Sie ein MATLAB-Skript `testLrPivot`, mit dem Sie Ihre MATLAB-Funktion `[A,p] = lrPivotZP(A)` an geeigneten Beispielen testen.

b) Falls nötig schreiben Sie analog zu Ihrer MATLAB-Funktion `x = solveLR(A,b)` aus Aufgabe 8 b) auch eine MATLAB-Funktion `x = solveLrPivot(A,p,b)`, die zusammen mit Ihrer Funktion `[A,p] = lrPivotZP(A)` ein Gleichungssystem $Ax = b$ mit Spaltenpivotisierung löst.

c) Schreiben Sie ein MATLAB-Skript `testSolve`, das die folgenden Gleichungssysteme $Ax = b$ numerisch jeweils einerseits ohne Pivotisierung und andererseits mit Spaltenpivotisierung löst.

   i)
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

   ii)
$$A = \begin{pmatrix} 11 & 44 & 1 \\ 0.1 & 0.4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

   iii)
$$A = \begin{pmatrix} 0.001 & 1 & 1 \\ -1 & 0.004 & 0.004 \\ -1000 & 0.004 & 0.000004 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

d) Vergleichen Sie für alle drei Gleichungssysteme Ihre Ergebnisse hinsichtlich der Genauigkeit. Als Referenzlösung können Sie das Ergebnis von `A\b` verwenden.

   Betrachten Sie jeweils nicht nur Ihre Lösungen x des linearen Gleichungssystems $Ax = b$, sondern auch die Residuen $b - Ax$. Berechnen Sie jeweils auch für die Referenzlösung das Residuum.

   Gibt es Unterschiede zwischen den Fällen „Gaußsches Eliminationsverfahren ohne Pivotisierung“ und „Gaußsches Eliminationsverfahren mit Spaltenpivotisierung“? Woran liegt das? Worin unterscheiden sich jeweils die Matrizen L und R in diesen Fällen?

   Hinweis: Schreiben Sie sich nötigenfalls eine MATLAB-Funktion `zeigeMatrix(A)`, mit der Sie diese Matrizen in einem geeigneten Format ausgeben können.

e) Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion `inversA = inversMat(A)`, die, ohne einschlägige MATLAB-interne Funktionen zu verwenden, mit den von Ihnen erstellten Funktionen effizient die Inverse der Matrix A berechnet.

   Geben Sie den Aufwand des von Ihnen verwendeten Algorithmus in $\mathcal{O}$-Notation an.

   Testen Sie Ihre MATLAB-Funktion `inversA = inversMat(A)` an verschiedenen Beispielen.

f) In dieser Teilaufgabe wollen wir die Laufzeiten verschiedener Implementierungen der LR-Zerlegung mit Spalten-Pivotisierung vergleichen.

i) Vermutlich haben Sie Ihre MATLAB-Funktion `[A,p] = lrPivotZP(A)` aus Aufgabenteil a) so implementiert, dass die Matrix `A` zeilenweise durchlaufen wird. Falls nicht, ist diese Teilaufgabe entsprechend anzupassen, sodass Sie ebenfalls alle drei Varianten implementieren.

   Implementieren Sie zwei Varianten `[A,p] = lrPivotSP(A)` und `[A,p] = lrPivotVP(A)` Ihrer MATLAB-Funktion `[A,p] = lrPivotZP(A)` aus Aufgabenteil a), bei denen die Matrix `A` spaltenweise durchlaufen wird bzw. die beiden inneren Schleifen vektorisiert sind.

   Bei allen drei Varianten sollen die Zeilen der Matrix `A` nicht vertauscht, sondern für den Zugriff auf die Zeilen der Matrix `A` ein Permutationsvektor `p` verwendet werden.

ii) Nun wollen wir drei weitere Varianten `[A,p] = lrPivotZT(A)`, `[A,p] = lrPivotST(A)` und `[A,p] = lrPivotVT(A)` der MATLAB-Funktion `[A,p] = lrPivotZP(A)` aus Aufgabenteil a) implementieren, bei denen wieder die Matrix `A` spaltenweise bzw. zeilenweise durchlaufen wird bzw. die beiden inneren Schleifen vektorisiert sind.

   Allerdings soll jetzt für den Zugriff auf die Zeilen der Matrix `A` kein Permutationsvektor verwendet werden, sondern die Zeilen der Matrix `A` sollen tatsächlich vertauscht werden.

iii) Erweitern Sie Ihr MATLAB-Skript `testLrPivot`, sodass Sie auch die neuen fünf Varianten der LR-Zerlegung mit Spaltenpivotisierung an geeigneten Beispielen testen können.

iv) Schreiben Sie ein MATLAB-Skript `laufzeiten`, in dem Sie für $n \in \{2^i | i = 3, \ldots, 12\}$ jeweils eine reguläre Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ aufstellen. Berechnen Sie mit Ihren sechs verschiedenenen Implementierungen jeweils eine LR-Zerlegung mit Spaltenpivotisierung der Matrix A.

   Plotten Sie die zur Berechnung benötigten Zeiten über die Dimension `n` der Matrix in einem Schaubild mit logarithmischen Achsen (MATLAB-Befehl `loglog`). Zeichnen Sie in Ihr Schaubild eine geeignete Steigungsgerade ein.

   Beachten Sie, dass Ihr MATLAB-Skript je nach Leistungsfähigkeit Ihres Computers zur Berechnung längere Zeit brauchen wird.

v) Interpretieren Sie Ihr Schaubild. Haben Sie diese numerischen Ergebnisse erwartet?

Hinweise:

Teamarbeit ist bei der Bearbeitung der Übungsblätter erlaubt und erwünscht. Falls Sie die Aufgaben im Team lösen, muss jedes Teammitglied eine eigene Lösung votieren und abgeben. Geben Sie dann bitte auf Ihrer Lösung alle an der Aufgabe beteiligten Teammitglieder an.

Die Programmieraufgaben sind in MATLAB zu lösen. Der Source Code muss strukturiert und dokumentiert sein.

Speichern Sie Ihre Lösungen der Theorieaufgaben, Ihre MATLAB-Programme und Ihre Ergebnisse in einem Directory mit dem Namen **Blatt03_*Vorname_Nachname*** und verpacken Sie dieses in eine `.zip`-Datei. **Spätestens bis Sonntag, 12.11.2023, 23:59 Uhr** müssen Sie diese `.zip`-Datei in Moodle hochladen und für die Aufgabenteile, die Sie vorstellen können, votieren.

Aufgabe 7

a)

$$
L_k \cdot A = \begin{array}{c} \text{k.te Spalte} \\ \downarrow \\ \begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & \cdot & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & \ddots & & & & 0 \\
\vdots & & \ddots & & & & \vdots \\
 & 0 & 1 & 0 & & & \vdots \\
\vdots & 0 & -l_{k+1,k} & 1 & \ddots & & \vdots \\
\vdots & 0 & -l_{k+2,k} & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & & 1 & 0 \\
0 \cdots & 0 & -l_{n,k} & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{pmatrix} \end{array}
\begin{pmatrix}
a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & & a_{1,n} \\
a_{2,1} & a_{2,2} & & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & a_{k,k} & & \vdots \\
\vdots & & a_{k+1,k} & \ddots & \vdots \\
 & & \vdots & & \\
a_{n-1,1} & & a_{n-1,k} & \cdots & a_{n-1,n} \\
a_{n,1} & & a_{n,k} & \cdots & a_{n,n}
\end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix}
a_{1,1} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
a_{2,1} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
0 & & & & \vdots & & & & \vdots \\
\vdots & & & & a_{k,k} & & & & \vdots \\
-l_{k+1,k}\, a_{k,1} + a_{k+1,1} & & \cdots & & -l_{k+1,k}\, a_{k,k} + a_{k+1,k} & & \cdots & & -l_{k+1,k}\, a_{k,n} + a_{k+1,n} \\
-l_{k+2,k}\, a_{k,1} + a_{k+2,1} & & \cdots & & -l_{k+2,k}\, a_{k,k} + a_{k+2,k} & & \cdots & & -l_{k+2,k}\, a_{k,n} + a_{k+2,n} \\
\vdots & & & & \vdots & & & & \vdots \\
-l_{n,k}\, a_{k,1} + a_{n,1} & & \cdots & & -l_{n,k}\, a_{k,k} + a_{n,k} & & \cdots & & -l_{n,k}\, a_{k,n} + a_{n,n}
\end{pmatrix}
$$

b)

$$
L_k \cdot \tilde{L}_k = \begin{array}{c} \text{k.te Spalte} \\ \downarrow \end{array}
$$

$$
= \begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & & & & 0 \\
0 & 1 & \ddots & & & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & 0 & & & \vdots \\
\vdots & & 0 & 1 & & & \vdots \\
\vdots & & \vdots & -l_{k+1,k} & 1 & & \vdots \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & -l_{n,k} & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & & & & 0 \\
0 & 1 & \ddots & 0 & & & \vdots \\
\vdots & \ddots & 0 & 1 & & & \vdots \\
\vdots & & & l_{k+1,k} & 1 & & \vdots \\
\vdots & & & \vdots & & \ddots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & l_{n,k} & 0 & & 1
\end{pmatrix} \leftarrow \text{k.te Zeile}
$$

$$
= \left(\begin{array}{c|ccc|c}
I & 0 & \cdots 0 \cdots & 0 & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
 & \vdots & 0 & \vdots & \\
 & 0 \cdots & 0 \; 1 \; 0 & \cdots 0 & \\
\hline
0 & & -l_{k+1,k} + l_{k+1,k} & & I \\
 & & \vdots & & \\
 & & -l_{n,k} + l_{n,k} & &
\end{array}\right)
= \begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & \ddots & & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & & \ddots & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 1
\end{pmatrix} = I_n
$$

$\Rightarrow$ Da die Einheitsmatrix entsteht ist $\tilde{L}_k$ die Inverse zu L_k.

c) Wir wählen $-l_{i,k} = \frac{a_{i,k}}{a_{k,k}}$

Durch das Multiplizieren mit einer L_1 Matrix entstehen in der 1. Spalte ab der 2. Zeile nur Null-Einträge. Allgemeiner entsteht durch die Linksmultiplikation einer L_K-Frobeniusmatrix mit den oben genannten Werten, dann entstehen von der k.ten Spalte ab der k+1.ten bis zur n.ten Zeile Nuller.

Wiederholen wir dieses Verfahren von $k = 1 \ldots (n-1)$, dann bleibt die Hauptdiagonale unberührt und alle Einträge a_{ij} mit $i > j$ sind 0. Dies entspricht einer oberen Dreiecksmatrix.

$$(L_1)^{-1} \cdot (L_2)^{-1} \cdot \ldots \cdot (L_{n-1})^{-1} = L$$

d)

I.A

für $n=3$: $L_1^{-1} \cdot L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{2,1} & 1 & 0 \\ l_{3,1} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & l_{3,2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{2,1} & 1 & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & 1 \end{pmatrix}$ ✓

I.H $\quad (L_1)^{-1} \cdot \ldots \cdot (L_{n-2})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ l_{2,1} & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & l_{3,2} & \ddots & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & & l_{n-1,n-2} & 1 & 0 \\ l_{n,1} & l_{n,2} & \cdots & l_{n,n-2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$

I.S :

$$\overbrace{(L_1)^{-1} \cdot (L_2)^{-1} \cdot \ldots \cdot (L_{n-2})^{-1}}^{\text{I.H}} \cdot (L_{n-1})^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ l_{2,1} & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & l_{3,2} & \ddots & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & & l_{n-1,n-2} & 1 & 0 \\ l_{n,1} & l_{n,2} & \cdots & l_{n,n-2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ l_{2,1} & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & l_{3,2} & \ddots & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & & l_{n-1,n-2} & 1 & 0 \\ l_{n,1} & l_{n,2} & \cdots & l_{n,n-2} & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

e)

i) $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 7 \\ -12 & 5 & -12 \\ 18 & 0 & 22 \end{pmatrix}$ $\quad b = \begin{pmatrix} 41/12 \\ -22/3 \\ 29/2 \end{pmatrix}$

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_2 \cdot L_1 \cdot A = \overset{L_2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}} \overset{\tilde{A}}{\begin{pmatrix} 6 & -4 & 7 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 12 & 1 \end{pmatrix}} = \overset{R}{\begin{pmatrix} 6 & -4 & 7 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}}$$

$$L_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L = L_2^{-1} \cdot L_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

ii) $Ax = b \quad \Rightarrow \quad LRx = b$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 41/12 \\ -22/3 \\ 29/2 \end{pmatrix}$$

$Ly = b$ durch Vorfährtseinsetzen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41/12 \\ -88/12 \\ \frac{174}{12} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41/12 \\ -\frac{88}{12} + \frac{82}{12} \\ \frac{174}{12} - \frac{123}{12} - \frac{24}{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41/12 \\ -6/12 \\ 27/12 \end{pmatrix}$$

$Rx = y$

$$\begin{pmatrix} 6 & -4 & 7 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41/12 \\ -6/12 \\ 27/12 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} \left(41/12 - 7\frac{3}{12} + 4\frac{4}{12}\right) : 6 \\ \left(-6/12 - \frac{6}{12}\right) : -3 \\ {}^{3}\cancel{27}/12 \cdot \frac{1}{\cancel{9}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \left(\frac{41}{12} - \frac{21}{12} + \frac{16}{12}\right) : 6 \\ \frac{4}{12} \\ \frac{3}{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\cancel{36}^{6}}{12} \; \frac{1}{\cancel{6}^{1}} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$