

# Sferikaalinen maksimaalifunktio

Jan Härkönen

**Perustieteiden korkeakoulu**

Kandidaatintyö

Espoo 24.8.2017

**Vastuupettaja:**

Apulaisprofessori Riikka Korte

**Työn ohjaaja:**

Apulaisprofessori Riikka Korte

Tekijä: Jan Härkönen

Työn nimi: Sferikaalinen maksimaalifunktio

Päivämäärä: 24.8.2017

Kieli: Suomi

Sivumäärä: 4+28

Koulutusohjelma: Teknillinen fysiikka ja matematiikka

Vastuuopettaja: Apulaisprofessori Riikka Korte

Työn ohjaaja: Apulaisprofessori Riikka Korte

Yksi analyysin osa-alueista käsittelee maksimaalifunktioita. Maksimaalifunktiolla tarkoitetaan sellaista operaatiota, jossa maksimoidaan funktion keskiarvoa pisteen ympärillä. Alussa esitellään tärkeimpiä aputuloksia, sitten käsitellään maksimaalifunktioiden perusidea sekä eri maksimaalifunktioiden ominaisuuksia. Tämän työn keskeinen maksimaalifunktio on sferikaalinen maksimaalifunktio  $\mathcal{M} : L^p \rightarrow L^p$ . Työn tavoitteena on todistaa, että sferikaalisen maksimaalifunktion  $L^p$ -normia voidaan arvioida alkuperäisen funktion  $L^p$ -normin avulla. Tämän todistusprosessin yhteydessä tullaan käyttämään hyväksi muun muassa Fourier-muunnosta, Besselin funktiota,  $n$ -ulotteisen avaruuteen liittyviä operaatioita ja Marcinkiewiczin interpolaatiolausetta. Todistus perustuu Grafakoksen kirjan [5] todistukseen, johon on tässä työssä tehty muutamia muutoksia. Tätä tulosta voidaan hyödyntää muilla analyysin osa-alueilla, kuten funktioiden jatkuvuuden ja Sobolev-avaruuksien tutkimisessa, osittaisdifferentiaaliyhtälöissä sekä harmonisessa analyysissä.

Avainsanat: Analyysi, Sferikaalinen, Maksimaalifunktio, Lebesgue-avaruus

# Sisällysluettelo

Tiivistelmä	ii
Sisällysluettelo	iii
Symbolit ja lyhenteet	iv
<b>1 Johdanto</b>	<b>1</b>
<b>2 Aputuloksia</b>	<b>3</b>
2.1 Funktioiden määritelmiä . . . . .	3
2.2 Besselin funktio . . . . .	3
2.3 Pintadifferentiaalın Fourier-muunnos . . . . .	4
2.4 $L^p$ -normi . . . . .	5
2.5 Epäyhtälöitä . . . . .	6
2.6 Marcinkiewiczin interpolaatiolause . . . . .	6
<b>3 Maksimaalifunktiot</b>	<b>8</b>
<b>4 Kaksi olennaista lemmaa</b>	<b>10</b>
4.1 Apumääritelmiä . . . . .	10
4.2 Ensimmäinen lemma . . . . .	12
4.3 Toinen lemma . . . . .	19
<b>5 Todistuksen täydentäminen</b>	<b>25</b>
<b>Viitteet</b>	<b>27</b>

# Symbolit ja lyhenteet

## Symbolit

$\mathbb{R}^n$	n-ulotteinen Euklidinen avaruus
$\mathbf{x}$	n-ulotteinen vektori, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
$L^p$	Lebesgue-avaruus joukossa $\mathbb{R}^n$
$W^{k,p}$	Sobolev-avaruus
$B(\mathbf{x}, r)$	$\mathbf{x}$ -keskinen n-ulotteinen r-säteinen avoin pallo $\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n :  \mathbf{y} - \mathbf{x}  < r\}$
$\partial B(\mathbf{x}, r)$	$\mathbf{x}$ -keskisen n-ulotteisen r-säteisen pallon pinta $\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n :  \mathbf{y} - \mathbf{x}  = r\}$
$\mathbf{S}^{n-1}$	origokeskisen n-ulotteisen yksikköpallon pinta $\partial B(0, 1)$
$\boldsymbol{\theta}$	yksikkövektori, $\boldsymbol{\theta} \in \mathbf{S}^{n-1}$
$dS(\mathbf{x})$	$B(\mathbf{x}, r)$ -pinnan differentiaali pisteessä $\mathbf{x}$
$d\sigma(\boldsymbol{\theta})$	$\mathbf{S}^{n-1}$ -pinnan normalisoitu differentiaali
$C^\infty(\Omega)$	äärettömästi derivoituvien funktioiden joukko määrittelyjoukossa $\Omega$
$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$	Schwartzin avaruus

## Operaattorit

$\cdot$	pistetulo
$*$	konvoluutio
$ \cdot $	pisteen Euklidinen normi tai joukon Lebesgue-mitta
$\widehat{f}$	funktion $f$ Fourier-muunnos
$\widetilde{f}$	funktion $f$ käänteinen Fourier-muunnos
$\ \cdot\ _{L^p}$	funktion $L^p$ -normi
$\ \cdot\ _{L^{p,w}}$	funktion heikko $L^p$ -normi

# 1 Johdanto

Maksimaalifunktiolla tarkoitetaan sellaista operaatiota jollekin funktiolle, jossa maksimoidaan funktion keskiarvoa pisteen ympärillä tietyin ehdoin. Esimerkiksi Hardy-Littlewood-maksimaalifunktiossa otetaan keskiarvoja pisteen ympärillä olevasta avoimesta pallosta. Tässä työssä keskitytään sferikaaliseen maksimaalifunktioon. Siinä keskiarvo otetaan  $n$ -ulotteisen pallon pinnasta  $\partial B(\mathbf{x}, t)$ . Sferikaalinen maksimaalifunktio on määritelty seuraavasti:

$$\mathcal{M}(f)(\mathbf{x}) = \sup_{t>0} \frac{1}{|\partial B(\mathbf{x}, t)|} \left| \int_{\partial B(\mathbf{x}, t)} f(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) \right|. \quad (1)$$

Kun pallon pinnan  $\partial B(\mathbf{x}, t)$  säde lähestyy nollaa, niin funktion keskiarvo lähestyy funktion pisteittäistä arvoa melkein kaikissa pisteissä  $\mathbf{x}$ . Tällä tarkoitetaan kaikkia arvoja  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbf{N}$ , jossa  $\mathbf{N}$  on sellainen joukko, jonka mitta on 0. Joukko  $\mathbf{N}$  voi esimerkiksi koostua funktion yksittäisistä epäjatkuvuuspisteistä. Tästä seuraa, että melkein kaikissa pisteissä maksimaalifunktion arvo on vähintään alkuperäisen funktion arvo.

Tämän työn keskeinen tavoite on todistaa estimaatti  $\mathcal{M} : L^p \rightarrow L^p$ -kuvauksen  $L^p$ -normille:

Kun  $p > \frac{n}{n-1}$  ja  $n \geq 3$ , niin

$$\|\mathcal{M}(f)\|_{L^p} \leq C_p \|f\|_{L^p}, \quad (2)$$

jossa  $f \in L^p$  ja  $C_p$  on  $f$ :stä riippumaton äärellinen vakio. Katso  $L^p$ -normi luvusta 2.4 määritelmä (12). Tämä lause ei ole totta yksiulotteisessa tapauksessa, eli kun  $n = 1$ . Katso viite [5] sivun 401 tehtävä 5.5.5. Tämä lause pätee kaksiulotteisessa tapauksessa, eli kun  $n = 2$ . Todistus löytyy Steinin kirjasta [9], joka perustuu Rubio de Francian todistukseen [6]. Sen todistaminen on huomattavasti monimutkaisempaa, joten se sivuutetaan kokonaan tässä työssä ja sen sijaan keskitytään vain tapaukseen  $n \geq 3$ . Tämä tulos on hyödyllinen, koska sferikaalisen maksimaalifunktion  $L^p$ -normi on verrannollinen alkuperäisen funktion  $L^p$ -normiin kun  $p > \frac{n}{n-1}$ .

Tämän lauseen todistusprosessi perustuu Grafakoksen kirjan [5] kappaleeseen 5.5, johon on tässä työssä tehty muutamia muutoksia. Kirjan lause (5.5.5) sekä funktiot  $G_j(f)(\mathbf{x})$  ja  $\tilde{G}_j(f)(\mathbf{x})$  on kokonaan jätetty pois. Tiedyt kohdat olisi ollut syytä esittää yksityiskohtaisemmin, kuten funktio  $\phi_0(\boldsymbol{\xi})$  (määritelmä (33)), Schwartzin avaruus ja kirjan lauseen (5.5.11) todistaminen. Ensimmäisen ja toisen oleellisen lemmän 4.2 ja 4.3 järjestystä on vaihdettu päittäin. Nämä lemmat on kirjassa todistettu vain ehdolla  $j \geq 1$ , mutta tässä työssä on myös erikseen käsitelty tapaus  $j = 0$ . Todistuksen täydentäminen on esitetty paljon yksityiskohtaisemmin kaikkine välivaiheineen. Myös Marcinkiewiczin interpolaatiolause on esitetty. Muutamia esitysteknisiä muutoksia on tehty.

Luvussa 3 on esitelty erilaisia maksimaalifunktioita ja niiden ominaisuuksia. Hardy-Littlewood- ja sferikaalisen maksimaalifunktion lisäksi tarkastellaan hieman fraktionaalisia maksimaalifunktioita, joissa on kertoimena pallon säteen jokin potenssi  $r^\alpha$ . Näillä maksimaalifunktioilla on usein silottavia ominaisuuksia ja erityisesti

sferikaaliseen fraktionaaliseen maksimaalifunktion silottaviin ominaisuuksiin liittyy vielä avoimia kysymyksiä.

## 2 Aputuloksia

Koska todistus on sen verran pitkä, tarvitsemme erilaisia aputuloksia selkeyttämään todistusprosessia.

### 2.1 Funktioiden määritelmiä

Olkoon  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Määritellään  $\Omega$ -joukon Lebesgue-mitta:

$$|\Omega| = \int_{\Omega} d\mathbf{x}. \quad (3)$$

Karakteristinen funktio merkitään seuraavasti:

$$\chi_{\Omega}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{kun } \mathbf{x} \in \Omega, \\ 0, & \text{kun } \mathbf{x} \notin \Omega. \end{cases} \quad (4)$$

Funktion  $f(\mathbf{x})$  Fourier-muunnos  $n$ -ulotteisessa avaruudessa määritellään näin:

$$\hat{f}(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\Omega} e^{-2\pi i \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (5)$$

Funktion  $F(\boldsymbol{\xi})$  käänteinen Fourier-muunnos on lähes sama, paitsi että  $e$ :n eksponentti on vastakkaismerkkinen, eli

$$\check{F}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} e^{2\pi i \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}} F(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}. \quad (6)$$

Funktion  $f$  jakaumafunktio määritellään näin:

$$\lambda_f(t) = |\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |f(\mathbf{x})| > t\}|. \quad (7)$$

Lopuksi määritellään yhteys pinnan  $\mathbf{S}^{n-1}$  normalisoidulle differentiaalille  $d\sigma(\boldsymbol{\theta})$  ja pinnan  $|\partial B(\mathbf{x}, t)|$  differentiaalille  $S(\mathbf{y})$ , kun  $t\boldsymbol{\theta} = \mathbf{y}$ :

$$d\sigma(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{|\mathbf{S}^{n-1}|} dS(\mathbf{y}) \quad (8)$$

### 2.2 Besselin funktio

Besselin funktiolla  $J_{\nu}(t)$  tarkoitetaan ratkaisua differentiaaliyhtälölle

$$t^2 \frac{d^2}{dt^2} J_{\nu}(t) + t \frac{d}{dt} J_{\nu}(t) + (t^2 - \nu^2) J_{\nu}(t) = 0. \quad (9)$$

Yhtälön ratkaisu voidaan esittää muodossa

$$J_{\nu}(t) = \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{\nu}}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \int_{-1}^{+1} e^{its} (1 - s^2)^{\nu} \frac{ds}{\sqrt{1 - s^2}}. \quad (10)$$

Tämä on todistettu viitteessä [5] sivulla 426.

Besselin funktiolle pätee seuraavat lemmat:

**Lemma 1.** a)

$$\frac{d}{dt}(J_\nu(t)) = \frac{1}{2}(J_{\nu-1}(t) - J_{\nu+1}(t)).$$

b) Kun  $t \geq 1$ ,  $\nu \in \mathbb{R}$  ja  $\nu \geq \frac{1}{2}$ , niin on olemassa  $t$ :stä riippumaton vakio  $C_0$  niin, että

$$|J_\nu(t)| \leq C_0 t^{-\frac{1}{2}}.$$

Todistukset löytyvät viitteestä [5] sivuilta 426 ja 430.

## 2.3 Pintadifferentiaalinen Fourier-muunnos

Osoitetaan, että  $n$ -ulotteisen pallon pinnan, eli  $\mathbf{S}^{n-1}$ -pinnan, differentiaalinen  $d\sigma(\mathbf{x})$  Fourier-muunnos voidaan esittää Besselin funktion avulla seuraavan lemmän mukaisesti:

**Lemma 2.**

$$\widehat{d\sigma}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{a_n}{|\boldsymbol{\xi}|^{\frac{n-2}{2}}} J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi |\boldsymbol{\xi}|),$$

jossa  $a_n = \frac{2\pi}{|\mathbf{S}^{n-1}|}$ .

*Todistus.* Ensiksi esitetään pallon pinnan integraali pistetulolla, joka voidaan laskea seuraavalla kaavalla, kun  $K : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ .

$$\int_{\mathbf{S}^{n-1}} K(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \int_{-1}^1 K(s' |\boldsymbol{\xi}|) (\sqrt{1-s'^2})^{n-3} ds'. \quad (11)$$

Todistus löytyy viitteestä [5] sivulla 442 kohdassa D.3. Käyttämällä tätä kaavaa, Besselin funktion esitystä (10) sekä tekemällä muuttujanvaihto  $s' = -s$ , saadaan tulokseksi

$$\begin{aligned} \widehat{d\sigma}(\boldsymbol{\xi}) &= \int_{\mathbf{S}^{n-1}} e^{-2\pi i \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}} d\sigma(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\mathbf{S}^{n-1}|} \int_{\mathbf{S}^{n-1}} e^{-2\pi i \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}} dS(\mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{|\mathbf{S}^{n-1}|} \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \int_{-1}^1 e^{-2\pi i s' |\boldsymbol{\xi}|} (\sqrt{1-s'^2})^{n-3} ds' \\ &= \frac{1}{|\mathbf{S}^{n-1}|} \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \int_{-1}^1 e^{2\pi i s |\boldsymbol{\xi}|} (1-s^2)^{\frac{n-2}{2}} \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} \\ &= \frac{1}{|\mathbf{S}^{n-1}|} \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \frac{\Gamma(\frac{n-2}{2} + \frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})}{(\pi |\boldsymbol{\xi}|)^{\frac{n-2}{2}}} J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi |\boldsymbol{\xi}|) \\ &= \frac{a_n}{|\boldsymbol{\xi}|^{\frac{n-2}{2}}} J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi |\boldsymbol{\xi}|). \end{aligned}$$

□



## 2.4 $L^p$ -normi

Tässä osiossa esitetään hyödyllisiä  $L^p$ -normiin liittyviä aputuloksia, joita tullaan tarvitsemaan myöhemmin. Tässä työssä  $L^p$ -avaruudella tarkoitetaan Lebesgue-avaruutta joukossa  $\mathbb{R}^n$ , eli  $L^p = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} : \|f\|_{L^p} < \infty\}$ . Funktion  $L^p$ -normi määritellään seuraavasti:

$$\|f\|_{L^p} = \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (12)$$

Funktion  $L^\infty$ -normi puolestaan määritellään seuraavasti:

$$\|f\|_{L^\infty} = \sup\{k : |\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |f(\mathbf{x})| > k\}| > 0\} = \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x})|. \quad (13)$$

Tässä  $\operatorname{ess\,sup} |f(\mathbf{x})|$  tarkoittaa funktion  $|f(\mathbf{x})|$  pienintä ylärajaa tarkasteltaessa melkein kaikkia  $\mathbf{x}$ :n arvoja. Todistus löytyy viitteestä [1] sivulta 89. Määritellään myös funktion heikko  $L^p$ -normi, eli

$$\|f\|_{L^{p,w}} = \sup_{t>0} t \lambda_f(t)^{\frac{1}{p}}, \quad (14)$$

jossa  $\lambda_f(t)$  on määritelmän (7) mukainen jakaumafunktio. Nyt todistetaan, että  $L^p$ -normi on vähintään yhtä suuri kuin heikko  $L^p$ -normi.

**Lemma 3.** *Kun  $p \geq 1$ , niin*

$$\|f\|_{L^{p,w}} \leq \|f\|_{L^p}.$$

*Todistus.* Olkoon  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t > 0$  ja funktio  $s : \Omega \rightarrow \{0, t\}$  niin, että

$$s(\mathbf{x}) = \begin{cases} t & \text{kun } |f(\mathbf{x})| > t \\ 0 & \text{kun } |f(\mathbf{x})| \leq t. \end{cases} \quad (15)$$

Tämän määritelmän mukaan  $s(\mathbf{x}) \leq |f(\mathbf{x})|$ . Jakaumafunktiota  $\lambda_f(f)$  hyväksikäyttäen saadaan seuraava epäyhtälö:

$$\begin{aligned} t \lambda_f(t)^{\frac{1}{p}} &= \left( \int_{\{\mathbf{x} \in \Omega : |f(\mathbf{x})| > t\}} t^p d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \int_{\Omega} s(\mathbf{x})^p d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left( \int_{\Omega} |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{L^p}. \end{aligned}$$

Tästä seuraa, että

$$\|f\|_{L^{p,w}} = \sup_{t>0} t \lambda_f(t)^{\frac{1}{p}} \leq \|f\|_{L^p}.$$

Tuloksesta voidaan päätellä, että  $L^p \subset L^{p,w}$ . □

Cavalierin periaatteen avulla voidaan ilmaista funktion  $L^p$ -normi vaihtoehtoisella tavalla.

**Lemma 4.**

$$\|f\|_{L^p}^p = p \int_0^\infty t^{p-1} \lambda_f(t) dt$$

*Todistus.*

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^p}^p &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{t=0}^{|f(\mathbf{x})|} t^p \right) d\mathbf{x} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{|f(\mathbf{x})|} p t^{p-1} dt d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty \chi_{[0, |f(\mathbf{x})|]}(t) p t^{p-1} dt d\mathbf{x} \\
&= p \int_0^\infty t^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} dt \\
&= p \int_0^\infty t^{p-1} |\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |f(\mathbf{x})| > t\}| dt \\
&= p \int_0^\infty t^{p-1} \lambda_f(t) dt.
\end{aligned}$$

□

## 2.5 Epäyhtälöitä

Cauchy-Schwarzin epäyhtälö on määritelty seuraavasti:

**Lemma 5.** *Kun  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ , niin*

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \int_{\mathbb{R}^n} |g(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}$$

Minkowskin epäyhtälö integraaleille on todistettu viitteessä [3] sivulla 146 lauseesta (6.13.1). Seuraavassa lemmassa esitetään sille kaksi eri esitystapaa.

**Lemma 6.** *Kun  $p > 1$ , niin*

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} \left( \left| \sum_{i=1}^m f_i(\mathbf{x}) \right| \right)^p d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}} \leq \sum_{i=1}^m \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f_i(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}},$$

*eli yhtäpitävästi*

$$\left\| \sum_{i=1}^m f_i \right\|_{L^p} \leq \sum_{i=1}^m \|f_i\|_{L^p}.$$

## 2.6 Marcinkiewiczin interpolaatiolause

Marcinkiewiczin interpolaatiolauseen todistus löytyy viitteestä [5] sivulta 31. Jos tiedetään, että  $T : L^p \rightarrow L^{p,w}$ -kuvauksen heikkoa  $L^p$ -normia voidaan estimoida alkuperäisen  $f$ -funktion  $L^p$ -normilla arvoilla  $p = p_1$  ja  $p = p_2$ , niin sama estimaatti pätee kun  $p$  saa arvoja  $p_1$ :n ja  $p_2$ :n välillä mutta eri kertoimella. Lause on määritelty näin:

**Lemma 7.** *Olkoon  $0 < p_1 < p < p_2 < \infty$ . Jos*

$$\begin{aligned} & \|T(f)\|_{L^{p_1}, w} \leq A_1 \|f\|_{L^{p_1}} \\ \text{ja} \quad & \|T(f)\|_{L^{p_2}, w} \leq A_2 \|f\|_{L^{p_2}} \end{aligned}$$

*kaikilla  $f \in L^{p_1} \cup L^{p_2}$ , niin pätee*

$$\|T(f)\|_{L^p} \leq A A_1^{\frac{p_1(p_2-p)}{p(p_2-p_1)}} A_2^{\frac{p_2(p-p_1)}{p(p_2-p_1)}} \|f\|_{L^p},$$

*jossa*

$$A = 2 \left( \frac{p}{p-p_1} + \frac{p}{p_2-p} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

*Jos taas  $0 < p_1 < p < p_2 = \infty$ , niin*

$$\|T(f)\|_{L^p} \leq A A_1^{\frac{p_1}{p}} A_2^{1-\frac{p_1}{p}} \|f\|_{L^p},$$

*jossa*

$$A = 2 \left( \frac{p}{p-p_1} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

### 3 Maksimaalifunktiot

Tässä luvussa esitellään muutamia esimerkkejä kirjallisuudessa esiintyvistä maksimaalifunktioista ja niiden ominaisuuksia. Ensimmäinen esimerkki on Hardy-Littlewood-maksimaalifunktio. Siinä funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  keskiarvo otetaan  $n$ -ulotteisesta avoimesta pallosta  $B(\mathbf{x}, r)$  ja se on määritelty seuraavasti:

$$\mathcal{M}(f)(\mathbf{x}) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(\mathbf{x}, r)|} \int_{B(\mathbf{x}, r)} |f(\mathbf{y})| d\mathbf{y}. \quad (16)$$

Tähän funktioon liittyy mielenkiintoisia ominaisuuksia. Lebesguen differentiointilauseen mukaan kun pallon  $B(\mathbf{x}, r)$  säde lähestyy nollaa, niin funktion keskiarvo lähestyy funktion pisteittäistä arvoa melkein kaikissa pisteissä  $\mathbf{x}$ , eli

$$f(\mathbf{x}) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B(\mathbf{x}, r)|} \int_{B(\mathbf{x}, r)} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (17)$$

Katso sivu 87 kirjassa [5]. Tästä seuraa

$$|f(\mathbf{x})| \leq \mathcal{M}(f)(\mathbf{x}). \quad (18)$$

Tästä taas voidaan päätellä, että kun  $p > 0$ , niin

$$\|f\|_{L^p} \leq \|\mathcal{M}(f)\|_{L^p}. \quad (19)$$

Tässäkin maksimaalifunktion  $L^p$ -normi on verrannollinen alkuperäisen funktion  $L^p$ -normiin kun  $p > 1$ . Kun  $p = 1$ , niin saadaan heikon tyypin etimaatti, eli

$$\|\mathcal{M}(f)\|_{L^p} \leq C_p \|f\|_{L^p} \quad (20)$$

ja

$$\|\mathcal{M}(f)\|_{L^{1,w}} \leq C \|f\|_{L^1}. \quad (21)$$

Näissä kahdessa lauseessa  $C$  ja  $C_p$  ovat  $f$ :stä riippumattomia äärellisiä vakioita. Niiden todistukset löytyvät viitteestä [8] sivulta 51 lauseesta 1. Seuraava esimerkki maksimaalifunktiosta on fraktionaalinen maksimaalifunktio:

$$\mathcal{M}_\alpha(f)(\mathbf{x}) = \sup_{r>0} \frac{r^\alpha}{|B(\mathbf{x}, r)|} \int_{B(\mathbf{x}, r)} |f(\mathbf{y})| d\mathbf{y}. \quad (22)$$

Katso viite [4] sivu 2. Tämä on samankaltainen kuin Hardy-Littlewood-maksimaalifunktio, johon on vain lisätty  $r^\alpha$ -kerroin. Tiedetään, että operaattorilla  $\mathcal{M}_\alpha$  on silottavia ominaisuuksia. Esimerkiksi  $\mathcal{M}_\alpha$  kuvaa  $L^q$ -funktion jollekin Sobolev-avaruudelle. Toisin ilmaistuna

$$\mathcal{M}_\alpha : L^q \rightarrow W^{k,p}. \quad (23)$$

Sobolev-avaruuden  $W^{k,p}$  asteluku  $k$  ilmaisee kuinka monta kertaa funktiota voi derivoida niin, että se kuuluu  $L^p$  avaruuteen. Maksimaalioperaattori  $\mathcal{M}_\alpha$  myös kuvaa Sobolev-funktion korkeampiasteiselle Sobolev-avaruudelle, eli

$$\mathcal{M}_\alpha : W^{k,p} \rightarrow W^{l,p}, \quad \text{jossa } k < l. \quad (24)$$

Tämän työn keskeinen maksimaalifunktio on sferikaalinen maksimaalifunktio, jolle käytetään vaihtoehtoisia esitystapaa verrattuna määritelmään (1) laskutoimitusten helpottamiseksi, eli

$$\mathcal{M}(f)(\mathbf{x}) = \sup_{t>0} \left| \int_{\mathbf{S}^{n-1}} f(\mathbf{x} - t\boldsymbol{\theta}) d\sigma(\boldsymbol{\theta}) \right|.$$

Samalla logiikalla kuin yhtälöstä (17) taas voidaan päätellä, että

$$\|f\|_{L^p} \leq \|\mathcal{M}(f)\|_{L^p}. \quad (25)$$

Määritellään myös sferikaalinen fraktionaalinen maksimaalifunktio  $\mathcal{M}_\alpha$  samalla tavalla kuin kaavassa (22):

$$\mathcal{M}_\alpha(f)(\mathbf{x}) = \sup_{t>0} t^\alpha \left| \int_{\mathbf{S}^{n-1}} f(\mathbf{x} - t\boldsymbol{\theta}) d\sigma(\boldsymbol{\theta}) \right|. \quad (26)$$

On vielä toistaiseksi avoin kysymys, voidaanko tälle operaatiolle todistaa samankaltaisia silottavia ominaisuuksia kuin operaatiolle  $\mathcal{M}_\alpha$ . Viimeinen esimerkki on Bourgainin ympyrämaksimaalifunktio, joka on määritelty näin:

$$M(f)(\mathbf{x}) = \sup_{1<t<2} \int_{\mathbf{S}^{n-1}} |f(\mathbf{x} - t\boldsymbol{\theta})| d\sigma(\boldsymbol{\theta}). \quad (27)$$

Tämä funktio on lähes sama kuin sferikaalinen maksimaalifunktio paitsi että pallon säde  $t$  valitaan väliltä  $(1, 2)$ . Katso viite [2]. Kun tarkastellaan vain funktion  $f$  itseisarvoa  $|f|$ , voidaan päätellä, että

$$\mathcal{M}(|f|)(\mathbf{x}) \leq \mathcal{M}(|f|)(\mathbf{x}) \quad (28)$$

ja

$$M(|f|)(\mathbf{x}) \leq \mathcal{M}(|f|)(\mathbf{x}). \quad (29)$$

Näitä kaikkia eri maksimaalifunktioita voidaan soveltaa muilla analyysin osa-alueilla, kuten funktioiden jatkuvuuden ja Sobolev-avaruuksien tutkimisessa, osittaisdifferensiaalisyhtälöissä sekä harmonisessa analyysissä.

Johdannossa esitettiin tämän työn keskeinen lause (2): kun  $p > \frac{n}{n-1}$  ja  $n \geq 3$

$$\|\mathcal{M}(f)\|_{L^p} \leq C_p \|f\|_{L^p}, \quad (30)$$

jossa  $f \in L^p$  sekä  $C_p$  on  $f$ :stä riippumaton äärellinen vakio. Tämä lause ei voi päteä, kun  $p \leq \frac{n}{n-1}$ . Tämä voidaan päätellä käyttämällä epäyhtälöä

$$\|M(f)\|_{L^p} \leq C_p \|f\|_{L^p}. \quad (31)$$

ja käyttämällä esimerkiksi

$$f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^{n-1} |\log |\mathbf{x}||^{-1} \chi_{[|\mathbf{x}| \leq \frac{1}{2}]}(\mathbf{x}). \quad (32)$$

Voimme todeta, että vaikka  $f \in L^p$ , niin tapauksessa  $p \leq \frac{n}{n-1}$  saadaan  $\|M(f)\|_{L^p} = \infty$ . Epäyhtälö (31) ei siis päde tässä tapauksessa. Katso viite [7] lause 1.1.1 ja 1.11. Lopuksi päätämme päättelyketjun epäyhtälöllä (29) ja ottamalla molemminpuolin  $L^p$ -normi.

## 4 Kaksi olennaista lemmaa

### 4.1 Apumääritelmiä

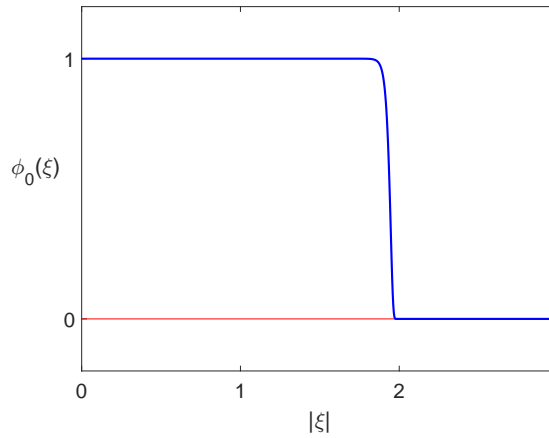
Todistuksen helpottamiseksi määritellään erilaisia funktioita yksinkertaistamaan prosessia. Olkoon  $\phi_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$  sellainen radiaalifunktio, että  $\phi_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  ja

$$\phi_0(\boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} 1, & \text{kun } |\boldsymbol{\xi}| \leq 1, \\ 0, & \text{kun } |\boldsymbol{\xi}| \geq 2. \end{cases} \quad (33)$$

Lisäksi kun  $|\boldsymbol{\xi}_1| = |\boldsymbol{\xi}_2|$ , niin  $\phi_0(\boldsymbol{\xi}_1) = \phi_0(\boldsymbol{\xi}_2)$ . Hyvä esimerkki välille  $1 < |\boldsymbol{\xi}| < 2$  olisi

$$\phi_0(\boldsymbol{\xi}) = e^{1 + \frac{1}{(|\boldsymbol{\xi}|-1)^{m-1}}},$$

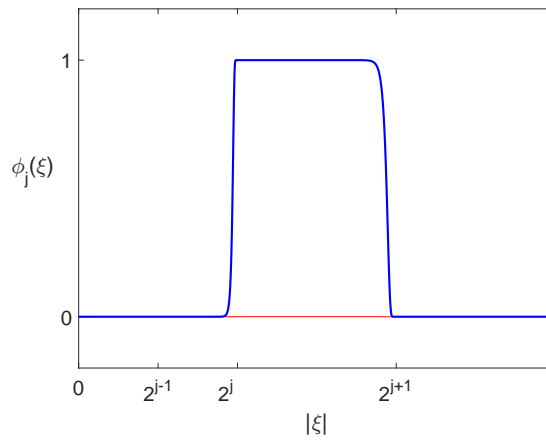
jossa  $m \gg 0$ . Kun esimerkiksi  $m = 40$ , kuvaaja näyttää tältä:



Määritellään myös  $\phi_j(\boldsymbol{\xi})$ , kun  $j \geq 1$ .

$$\phi_j(\boldsymbol{\xi}) = \phi_0(2^{-j}\boldsymbol{\xi}) - \phi_0(2^{1-j}\boldsymbol{\xi}). \quad (34)$$

Funktion  $\phi_j(\boldsymbol{\xi})$  kuvaaja puolestaan näyttää tältä:



Määritelmästä seuraa, että

$$\sum_{j=0}^{\infty} \phi_j(\boldsymbol{\xi}) = 1. \quad (35)$$

Määritellään seuraavat funktiot:

$$m(\boldsymbol{\xi}) = \widehat{d\sigma}(\boldsymbol{\xi}) \quad (36)$$

ja

$$m_j(\boldsymbol{\xi}) = \phi_j(\boldsymbol{\xi})m(\boldsymbol{\xi}). \quad (37)$$

Tästä taas seuraa, että

$$\sum_{j=0}^{\infty} m_j(\boldsymbol{\xi}) = m(\boldsymbol{\xi}). \quad (38)$$

Sferikaalinen maksimaalifunktio voidaan myös vaihtoehtoisesti seuraavassa muodossa:

**Lemma 8.**

$$\mathcal{M}(f)(\boldsymbol{x}) = \sup_{t>0} \left| \widehat{(\widehat{f}(\boldsymbol{\xi})m(t\boldsymbol{\xi}))}(\boldsymbol{x}) \right|.$$

*Todistus.* Olkoon  $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{y} + t\boldsymbol{\theta}$ . Tällöin  $d\boldsymbol{y} = d\boldsymbol{x}'$ . Nyt saadaan laskettua

$$\begin{aligned} \sup_{t>0} \left| \widehat{(\widehat{f}(\boldsymbol{\xi})m(t\boldsymbol{\xi}))}(\boldsymbol{x}) \right| &= \sup_{t>0} \left| \widehat{(\widehat{f}(\boldsymbol{\xi})\widehat{d\sigma}(t\boldsymbol{\xi}))}(\boldsymbol{x}) \right| \\ &= \sup_{t>0} \left| \left( \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{y}} f(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} \int_{\mathbf{S}^{n-1}} e^{-2\pi i t \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\theta}} d\sigma(\boldsymbol{\theta}) \right)(\boldsymbol{x}) \right| \\ &= \sup_{t>0} \left| \left( \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbf{S}^{n-1}} e^{-2\pi i \boldsymbol{\xi} \cdot (\boldsymbol{y} + t\boldsymbol{\theta})} f(\boldsymbol{y}) d\sigma(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{y} \right)(\boldsymbol{x}) \right| \\ &= \sup_{t>0} \left| \left( \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{x}'} \int_{\mathbf{S}^{n-1}} f(\boldsymbol{x}' - t\boldsymbol{\theta}) d\sigma(\boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{x}' \right)(\boldsymbol{x}) \right| \\ &= \sup_{t>0} \left| \left( \int_{\mathbf{S}^{n-1}} f(\boldsymbol{x}' - t\boldsymbol{\theta}) d\sigma(\boldsymbol{\theta}) \right)(\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{x}) \right|. \end{aligned}$$

Fourier-muunnos ja -käänteismuunnos kumoavat toisensa, joten

$$\begin{aligned} \sup_{t>0} \left| \widehat{(\widehat{f}(\boldsymbol{\xi})m(t\boldsymbol{\xi}))}(\boldsymbol{x}) \right| &= \sup_{t>0} \left| \int_{\mathbf{S}^{n-1}} f(\boldsymbol{x} - t\boldsymbol{\theta}) d\sigma(\boldsymbol{\theta}) \right| \\ &= \mathcal{M}(f)(\boldsymbol{x}). \end{aligned}$$

□

Seuraavaksi määritellään kaksi funktiota:

$$A_{j,t}(f)(\mathbf{x}) = (\widehat{f}(\boldsymbol{\xi}) \widetilde{m_j(t\boldsymbol{\xi})})(\mathbf{x}) \quad (39)$$

ja

$$\mathcal{M}_j(f)(\mathbf{x}) = \sup_{t>0} |A_{j,t}(f)(\mathbf{x})|. \quad (40)$$

Näiden määritelmien sekä lemmän 8 avulla voimme arvioida sferikaalista maksimaalifunktiota  $\mathcal{M}_j(f)$ :n summien avulla.

**Lemma 9.**

$$\mathcal{M}(f)(\mathbf{x}) \leq \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{M}_j(f)(\mathbf{x}).$$

*Todistus.*

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(f)(\mathbf{x}) &= \sup_{t>0} \left| (\widehat{f}(\boldsymbol{\xi}) \widetilde{m(t\boldsymbol{\xi})})(\mathbf{x}) \right| = \sup_{t>0} \left| (\widehat{f}(\boldsymbol{\xi}) \sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{m_j(t\boldsymbol{\xi})})(\mathbf{x}) \right| \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \sup_{t>0} \left| (\widehat{f}(\boldsymbol{\xi}) \widetilde{m_j(t\boldsymbol{\xi})})(\mathbf{x}) \right| = \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{M}_j(f)(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

□

## 4.2 Ensimmäinen lemma

Tässä osiossa todistetaan esitmaatti kuvauksen  $\mathcal{M}_j : L^1 \rightarrow L^{1,w}$  heikolle normille. Todistettava lemma voidaan esittää seuraavalla tavalla:

**Ensimmäinen lemma.** *On olemassa  $j$ :stä ja  $f$ :stä riippumaton äärellinen vakio  $C_1$  siten, että*

$$\|\mathcal{M}_j(f)\|_{L^{1,w}} \leq C_1 2^j \|f\|_{L^1},$$

*kaikilla  $j \geq 0$ .*

Lemman todistuksessa tarvitaan Schwartzin avaruutta  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  ja sen ominaisuuksia. Schwartzin funktio on joukko funktioita, jotka vaimenevat nopeammin kuin minkä tahansa polynomin käänteisluku.

**Määritelmä 1.** *Funktio  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  on Schwartzin funktio, jos*

$$f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \quad \text{ja} \quad \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} |\mathbf{x}^\alpha \partial^\beta f(\mathbf{x})| < \infty \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n,$$

*jossa  $\mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$  ja  $\partial^\beta = \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial x_1^{\beta_1}} \dots \frac{\partial^{\beta_n}}{\partial x_n^{\beta_n}}$*



Katso sivu 96 viitteestä [5]. Seuraavaksi todistamme, että funktio  $\phi_j(\boldsymbol{\xi})$  (määritelmä yhtälössä (34)) on Schwartzin funktio, eli  $\phi_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Olkoon  $\phi_j^r : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$  sellainen funktio, että kun  $\gamma = |\boldsymbol{\xi}|$ , niin

$$\phi_j^r(\gamma) = \phi_j^r(|\boldsymbol{\xi}|) = \phi_j(\boldsymbol{\xi}). \quad (41)$$

Jotta saamme todistettua, että  $\phi_j$  on Schwartzin funktio, niin riittää, että todistetaan  $\phi_j^r$ :n olevan Schwartzin funktio, eli todistamaan

$$\phi_j^r \in C^\infty(\mathbb{R}_+) \quad \text{ja} \quad \sup_{\gamma \in \mathbb{R}_+} \left| \gamma^\alpha \frac{d^\beta}{d\gamma^\beta} \phi_j^r(\gamma) \right| < \infty \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+. \quad (42)$$

Tiedetään, että kaikilla  $\beta \in \mathbb{Z}_+$  pätee

$$\begin{aligned} \frac{d^\beta}{d\gamma^\beta} \phi_j^r(\gamma) &= 0, \quad \text{kun} \quad \gamma \geq 2^{j+1} \\ \text{ja} \quad \frac{d^\beta}{d\gamma^\beta} \phi_j^r(\gamma) &< \infty, \quad \text{kun} \quad \gamma < 2^{j+1}. \end{aligned}$$

Lisäksi määritelmän (33) mukaan  $\phi_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , jolloin  $\phi_j^r \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ . Tästä seuraa, että  $\phi_j^r$  on Schwartzin funktio eli myös  $\phi_j$  on myös Schwartzin funktio. Fourier-muunnos on Schwartzin avaruudelle lineaarinen isomorfismi (katso sivu 100 viitteestä [5]).

**Lemma 10.** *Jos  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , niin  $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .*

Voidaan siis päätellä, että  $|\check{\phi}_j(\mathbf{x})|$  on myös Schwartzin funktio. Koska  $\phi_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  ja funktion käänteinen Fourier-muunnos on sama kuin sen kolminkertainen Fourier-muunnos, niin

$$\widehat{\widehat{\phi}_j} = \check{\phi}_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \quad (43)$$

Näiden tuloksien perusteella voidaan todistaa seuraava lemma:

**Lemma 11.** *Olkoon  $\phi_j : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$  kaavan (34) funktio ja  $N \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}$ . On olemassa  $x$ :stä ja  $j$ :stä riippumaton vakio  $c_N$  niin, että*

$$|\check{\phi}_j(\mathbf{x})| \leq c_N \frac{2^{nj}}{(1 + 2^j |\mathbf{x}|)^N}.$$

*Todistus.* Sovelletaan lausetta (42) ehdolle  $j = 0$ , valitaan  $\beta = 0$  ja erikseen  $\alpha = 0$  sekä  $\alpha = N$ . Tämä tarkoittaa sitä, että

$$\sup_{|\mathbf{x}| \in \mathbb{R}^+} \left| |\check{\phi}_0(\mathbf{x})| \right| = C_0 < \infty \quad \text{ja} \quad \sup_{|\mathbf{x}| \in \mathbb{R}^+} \left| |\mathbf{x}|^N |\check{\phi}_0(\mathbf{x})| \right| = C_N < \infty.$$

Kaikilla  $x \in \mathbb{R}^n$

$$|\check{\phi}_0(\mathbf{x})| \leq C_0 \quad \text{ja} \quad |\mathbf{x}|^N |\check{\phi}_0(\mathbf{x})| \leq C_N.$$

Näitä tuloksia summaamalla pätee, että

$$(1 + |\mathbf{x}|^N) |\check{\phi}_0(\mathbf{x})| \leq C_0 + C_N.$$

Koska  $(1 + |\mathbf{x}|)^N \leq 2^N(1 + |\mathbf{x}|^N)$ , niin

$$|\check{\phi}_0(\mathbf{x})| \leq \frac{2^N(C_0 + C_N)}{(1 + |\mathbf{x}|)^N} = \frac{c'_N}{(1 + |\mathbf{x}|)^N}. \quad (44)$$

Tämän avulla saadaan myös estimaatti  $|\check{\phi}_j(\mathbf{x})|$ :lle, kun  $j \geq 1$ .

$$\begin{aligned} |\check{\phi}_j(\mathbf{x})| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i \xi \cdot \mathbf{x}} \phi_j(\xi) d\xi \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i \xi \cdot \mathbf{x}} \phi_0(2^{-j} \xi) d\xi - \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i \xi \cdot \mathbf{x}} \phi_0(2^{1-j} \xi) d\xi \right| \\ &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i \xi \cdot \mathbf{x}} \phi_0(2^{-j} \xi) d\xi \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i \xi' \cdot \mathbf{x}} \phi_0(2^{1-j} \xi') d\xi' \right| \end{aligned}$$

Tehdään vasemmanpuoleiselle integraalille muuttujanvaihto  $\xi = 2^j \eta$  ja oikeanpuoleiselle integraalille tehdään muuttujanvaihto  $\xi' = 2^{j-1} \eta'$ . Tällöin  $d\xi = 2^{nj} d\eta$  ja  $d\xi' = 2^{n(j-1)} d\eta'$ , joten saadaan

$$|\check{\phi}_j(\mathbf{x})| \leq 2^{nj} \left| \check{\phi}_0(2^j \mathbf{x}) \right| + 2^{n(j-1)} \left| \check{\phi}_0(2^{j-1} \mathbf{x}) \right|.$$

Käyttämällä epäyhtälöä (44) saadaan

$$\begin{aligned} |\check{\phi}_j(\mathbf{x})| &\leq c'_N \frac{2^{nj}}{(1 + 2^j |\mathbf{x}|)^N} + c'_N \frac{2^{n(j-1)}}{(1 + 2^{j-1} |\mathbf{x}|)^N} \\ &\leq c'_N \frac{2^{nj}}{(1 + 2^j |\mathbf{x}|)^N} + \frac{c'_N 2^N}{2^n} \frac{2^{nj}}{(1 + 2^j |\mathbf{x}|)^N} \\ &= c_{N,n} \frac{2^{nj}}{(1 + 2^j |\mathbf{x}|)^N} \end{aligned}$$

□

Määritellään joukko  $S_r(\mathbf{x})$  siten, että

$$S_r(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{S}^{n-1} \cap B(\mathbf{x}, 2^{-j}), & \text{kun } r = -1 \\ \mathbf{S}^{n-1} \cap \left( B(\mathbf{x}, 2^{r+1-j}) - B(\mathbf{x}, 2^{r-j}) \right), & \text{kun } r \geq 0. \end{cases} \quad (45)$$

Tämä voidaan myös vaihtoehtoisesti esittää muotoon

$$S_r(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{S}^{n-1} \cap \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : 0 < 2^j |\mathbf{x} - \mathbf{y}| < 1\}, & \text{kun } r = -1 \\ \mathbf{S}^{n-1} \cap \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : 2^r < 2^j |\mathbf{x} - \mathbf{y}| < 2^{r+1}\}, & \text{kun } r \geq 0. \end{cases} \quad (46)$$

Tästä seuraa, että

$$\bigcup_{r=-1}^{\infty} S_r(\mathbf{x}) = \mathbf{S}^{n-1}. \quad (47)$$

Merkitään

$$K_{j,t}(\mathbf{x}) = \widetilde{m_j(t\xi)}(\mathbf{x}) = \widetilde{\phi_j(t\xi)}(\mathbf{x}) * d\sigma(\mathbf{x}) \quad (48)$$

Tästä voidaan päätellä estimaatti funktiolle  $|K_{j,1}(\mathbf{x})|$ :

$$\begin{aligned} |K_{j,1}(\mathbf{x})| &= |\widetilde{\phi_j(1 \cdot \xi)}(\mathbf{x}) * d\sigma(\mathbf{x})| \\ &= \left| \int_{\mathbf{S}^{n-1}} \check{\phi}_j(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\sigma(\mathbf{y}) \right| \\ &= \int_{\mathbf{S}^{n-1}} |\check{\phi}_j(\mathbf{x} - \mathbf{y})| d\sigma(\mathbf{y}) \\ &\leq c_{N,n} \int_{\mathbf{S}^{n-1}} \frac{2^{nj} d\sigma(\mathbf{y})}{(1 + 2^j |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)^N} \\ &= c_{N,n} \sum_{r=-1}^{\infty} \int_{S_r(\mathbf{x})} \frac{2^{nj} d\sigma(\mathbf{y})}{(1 + 2^j |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)^N} \\ &\leq \frac{c_{N,n}}{|\mathbf{S}^{n-1}|} \sum_{r=-1}^{\infty} \int_{S_r(\mathbf{x})} \frac{2^{nj} dS(\mathbf{y})}{2^{rN}} \\ &= C_{N,n} 2^{nj} \sum_{r=-1}^{\infty} \frac{|S_r(\mathbf{x})|}{2^{rN}}. \end{aligned}$$

Seuraavaksi arvioidaan joukkojen  $S_r(\mathbf{x})$  kokoa. Ehdolla  $r \geq 0$  pätee

$$|S_r(\mathbf{x})| = \left| \mathbf{S}^{n-1} \cap \left( B(\mathbf{x}, 2^{r+1-j}) - B(\mathbf{x}, 2^{r-j}) \right) \right| \leq |\mathbf{S}^{n-1} \cap B(\mathbf{x}, 2^{r+1-j})| \quad (49)$$

ja joukon  $\mathbf{S}^{n-1} \cap B(\mathbf{x}, R)$  mitta on rajoittunut  $R^{n-1}$  monikertaan, kun  $R \leq 1$  eli

$$|\mathbf{S}^{n-1} \cap B(\mathbf{x}, R)| \leq c' R^{n-1}, \quad (50)$$

kun taas jos  $R > 1$ , niin

$$|\mathbf{S}^{n-1} \cap B(\mathbf{x}, R)| \leq |\mathbf{S}^{n-1}|. \quad (51)$$

Lisäksi kun  $|\mathbf{x}| \geq R + 1$ , niin

$$|\mathbf{S}^{n-1} \cap B(\mathbf{x}, R)| = 0, \quad (52)$$

jolloin

$$|\mathbf{S}^{n-1} \cap B(\mathbf{x}, R)| = |\mathbf{S}^{n-1} \cap B(\mathbf{x}, R)| \chi_{B(0, R+1)}(\mathbf{x}). \quad (53)$$

Näitä tietoja yhdistellen saadaan

$$\begin{aligned}
|K_{j,1}(\mathbf{x})| &\leq C_{N,n} 2^{nj} \sum_{r=-1}^{\infty} \frac{|\mathbf{S}^{n-1} \cap B(\mathbf{x}, 2^{r+1-j})|}{2^{rN}} \\
&\leq C_{N,n} 2^{nj} \left( \sum_{r=-1}^{j-1} \frac{|\mathbf{S}^{n-1} \cap B(\mathbf{x}, 2^{r+1-j})|}{2^{rN}} + \sum_{r=j}^{\infty} \frac{|\mathbf{S}^{n-1} \cap B(\mathbf{x}, 2^{r+1-j})|}{2^{rN}} \right) \\
&\leq C_{N,n} 2^{nj} \left( \sum_{r=-1}^{j-1} c' \frac{2^{(r+1-j)(n-1)} \chi_{B(0,2^{r+1-j+1})}(\mathbf{x})}{2^{rN}} + \sum_{r=j}^{\infty} \frac{|\mathbf{S}^{n-1}| \chi_{B(0,2^{r+1-j+1})}(\mathbf{x})}{2^{rN}} \right) \\
&\leq C_{N,n} \left( 2^j 2^{n-1} \chi_{B(0,2)}(\mathbf{x}) \sum_{r=-1}^{j-1} c' 2^{r(n-1-N)} + c_n 2^{nj} \sum_{r=j}^{\infty} \frac{\chi_{B(0,2^{r+2-j+1})}(\mathbf{x})}{2^{rN}} \right)
\end{aligned}$$

Tiedämme, että kun  $M \in \mathbb{Z}_+$ , niin

$$\chi_{B(0,R)}(\mathbf{x}) \leq \left( \frac{1+R}{1+|\mathbf{x}|} \right)^M.$$

Olkoon  $N > M > n$ . Tällöin

$$\begin{aligned}
|K_{j,1}(\mathbf{x})| &\leq C_{N,n} \left( 2^j c'_n \left( \frac{3}{1+|\mathbf{x}|} \right)^M \sum_{r=-1}^{\infty} c' 2^{r(n-1-N)} + c_n 2^{nj} \sum_{r=j}^{\infty} \left( \frac{1+2^{r+2-j}}{1+|\mathbf{x}|} \right)^M \frac{1}{2^{rN}} \right) \\
&\leq C_{N,n} \frac{1}{(1+|\mathbf{x}|)^M} \left( c'_{N,M,n} 2^j + c_n \underbrace{2^{nj}}_{\leq 2^{(N+1)j}} \sum_{r=j}^{\infty} \frac{2^{(r+3-j)M}}{2^{rN}} \right) \\
&\leq C_{N,n} \frac{1}{(1+|\mathbf{x}|)^M} \left( c'_{N,M,n} 2^j + c_n 2^{3M} 2^{(N+1)j} \sum_{r=j}^{\infty} \frac{2^{(r-j)M} 2^{-Nj}}{2^{(r-j)N}} \right) \\
&\leq C_{N,n} \frac{1}{(1+|\mathbf{x}|)^M} \left( c'_{N,M,n} 2^j + c_{M,n} 2^j \sum_{r=j}^{\infty} 2^{(r-j)(M-N)} \right) \\
&\leq C_{N,M,n} \frac{2^j}{(1+|\mathbf{x}|)^M}.
\end{aligned}$$

Voidaan nähdä helposti, että

$$K_{j,t}(\mathbf{x}) = \frac{1}{t^n} K_{j,1} \left( \frac{\mathbf{x}}{t} \right). \quad (54)$$

Nyt olemme valmiit todistamaan seuraavan estimaattin  $\mathcal{M}_j(f)(\mathbf{x})$ -funktioille:

**Lemma 12.** *On olemassa  $j$ :stä ja  $f$ :stä riippumaton vakio  $C_1$  siten, että*

$$\mathcal{M}_j(f)(\mathbf{x}) \leq C_1 2^j \mathcal{M}(f)(\mathbf{x}).$$

*Todistus.* Määritellään seuraavat funktiot:

$$F_{\mathbf{x}}(r) = \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} |f(\mathbf{y}')| dS(\mathbf{y}'), \quad (55)$$

ja

$$G_{\mathbf{x}}(r) = \int_0^r F_{\mathbf{x}}(s) ds. \quad (56)$$

Näistä määritelmistä seuraa seuraavat identiteetit:

$$G_{\mathbf{x}}(r) = \int_0^r \int_{\partial B(\mathbf{x}, s)} |f(\mathbf{y}')| dS(\mathbf{y}') ds = \int_{B(\mathbf{x}, r)} |f(\mathbf{y})| d\mathbf{y}, \quad (57)$$

$$G_{\mathbf{x}}(0) = 0 \quad (58)$$

ja

$$G'_{\mathbf{x}}(r) = F_{\mathbf{x}}(r). \quad (59)$$

Yhtälön (54) ja  $K_{j,1}$ :n estimaatin perusteella pätee

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} K_{j,t}(\mathbf{x}) = 0. \quad (60)$$

Olkoon  $\mathbf{e}$  mikä tahansa yksikkövektori  $n$ -ulotteisessa avaruudessa

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_j(f)(\mathbf{x}) &= \sup_{t>0} |f * K_{j,t}| = \sup_{t>0} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{y}) K_{j,t}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right| \\ &\leq \sup_{t>0} \int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{y})| |K_{j,t}(\mathbf{x} - \mathbf{y})| d\mathbf{y} \\ &= \sup_{t>0} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} |f(\mathbf{y}')| |K_{j,t}(\mathbf{x} - \mathbf{y}')| dS(\mathbf{y}') dr \\ &= \sup_{t>0} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} |f(\mathbf{y}')| |K_{j,t}(r\mathbf{e})| dS(\mathbf{y}') dr \\ &= \sup_{t>0} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R F_{\mathbf{x}}(r) |K_{j,t}(r\mathbf{e})| dr \\ &= \sup_{t>0} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R G'_{\mathbf{x}}(r) |K_{j,t}(r\mathbf{e})| dr. \end{aligned}$$

Soveltamalla yhtälöitä (58) ja (60) ja tekemällä osittaisintegrointi saadaan

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_j(f)(\mathbf{x}) &\leq \sup_{t>0} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R G_{\mathbf{x}}(r) \left(-\frac{d}{dr} |K_{j,t}(r\mathbf{e})|\right) dr \\
&= \sup_{t>0} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \int_{B(\mathbf{x},r)} |f(\mathbf{y})| d\mathbf{y} \left(-\frac{d}{dr} |K_{j,t}(r\mathbf{e})|\right) dr \\
&= \sup_{t>0} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R |B(\mathbf{x},r)| \frac{1}{|B(\mathbf{x},r)|} \int_{B(\mathbf{x},r)} |f(\mathbf{y})| d\mathbf{y} \left(-\frac{d}{dr} |K_{j,t}(r\mathbf{e})|\right) dr \\
&\leq \sup_{t>0} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R |B(\mathbf{x},r)| \sup_{r'>0} \frac{1}{|B(\mathbf{x},r')|} \int_{B(\mathbf{x},r')} |f(\mathbf{y})| d\mathbf{y} \left(-\frac{d}{dr} |K_{j,t}(r\mathbf{e})|\right) dr \\
&= \mathcal{M}(f)(\mathbf{x}) \sup_{t>0} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R |B(\mathbf{x},r)| \left(-\frac{d}{dr} |K_{j,t}(r\mathbf{e})|\right) dr
\end{aligned}$$

Soveltamalla yhtälöitä (60),  $|B(\mathbf{x},0)| = 0$ ,  $\frac{d}{dr} |B(\mathbf{x},r)| = |\partial B(\mathbf{x},r)|$  ja tekemällä taas osittaisintegrointi, saadaan

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_j(f)(\mathbf{x}) &\leq \mathcal{M}(f)(\mathbf{x}) \sup_{t>0} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R |\partial B(\mathbf{x},r)| |K_{j,t}(r\mathbf{e})| dr \\
&= \mathcal{M}(f)(\mathbf{x}) \sup_{t>0} \int_{\mathbb{R}^n} |K_{j,t}(\mathbf{y})| d\mathbf{y} \\
&= \mathcal{M}(f)(\mathbf{x}) \sup_{t>0} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{t^n} \left| K_{j,1}\left(\frac{\mathbf{y}}{t}\right) \right| d\mathbf{y} \\
&\leq \mathcal{M}(f)(\mathbf{x}) \sup_{t>0} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{t^n} C_{N,M,n} \frac{2^j}{(1 + \frac{|\mathbf{y}|}{t})^M} d\mathbf{y} \\
&\leq C 2^j \mathcal{M}(f)(\mathbf{x}),
\end{aligned}$$

jossa  $C$  on  $j$ :stä ja  $f$ :stä riippumaton vakio. Tämä on haluttu tulos. □

Tästä seuraa, että

$$\|\mathcal{M}_j(f)\|_{L^{1,w}} \leq C 2^j \|\mathcal{M}_j(f)\|_{L^{1,w}}.$$

Lopuksi johdannossa olevan epäyhtälön (21) nojalla saadaan

$$C 2^j \|\mathcal{M}_j(f)\|_{L^{1,w}} \leq C_1 2^j \|f\|_{L^1},$$

jossa  $C$  on  $j$ :stä ja  $f$ :stä riippumaton vakio, mikä oli haluttu lopputulos.

### 4.3 Toinen lemma

Tässä osiossa todistetaan estimaatti  $\mathcal{M}_j : L^2 \rightarrow L^2$  -kuvauksen normille:

**Toinen lemma.** *On olemassa  $j$ :stä ja  $f$ :stä riippumaton äärellinen vakio  $C_2$  siten, että*

$$\|\mathcal{M}_j(f)\|_{L^2} \leq C_2 2^{j(1-\frac{n}{2})} \|f\|_{L^2}$$

*kaikilla  $j \geq 0$ .*

*Todistus.* Tarkastellaan ensin tapausta  $j \geq 1$ . Olkoon  $\gamma = |\xi|$ . Määritellään seuraavat funktiot:

$$m_j(\xi) = m_j^r(|\xi|) = m_j^r(\gamma), \quad (61)$$

$$\widetilde{m}_j(\xi) = \xi \cdot \nabla m_j(\xi) = \gamma m_j^{r'}(\gamma). \quad (62)$$

ja

$$\widetilde{A}_{j,t}(f)(\mathbf{x}) = (\widehat{f(\xi) \widetilde{m}_j(t\xi)})(\mathbf{x}). \quad (63)$$

Tämän määritelmän mukaan seuraava identiteetti pätee:

**Lemma 13.**

$$s \frac{dA_{j,s}(f)}{ds} = \widetilde{A}_{j,s}(f).$$

*Todistus.*

$$\begin{aligned} s \frac{dA_{j,s}(f)}{ds} &= s \frac{d}{ds} \left( (\widehat{f(\xi) \widetilde{m}_j(s\xi)})(\mathbf{x}) \right) \\ &= s \frac{d}{ds} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i \xi \cdot \mathbf{x}} \widehat{f(\xi) \widetilde{m}_j(s\xi)} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i \xi \cdot \mathbf{x}} \widehat{f(\xi)} s \frac{d}{ds} \widetilde{m}_j(s\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i \xi \cdot \mathbf{x}} \widehat{f(\xi)} s \gamma m_j^{r'}(s\gamma) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i \xi \cdot \mathbf{x}} \widehat{f(\xi)} \widetilde{m}_j(s\xi) d\xi \\ &= (\widehat{f(\xi) \widetilde{m}_j(s\xi)})(\mathbf{x}) \\ &= \widetilde{A}_{j,s}(f). \end{aligned}$$

□

Voidaan päätellä, että kun  $j \geq 1$ , niin

$$\lim_{s \rightarrow 0} A_{j,s}(f)(\mathbf{x}) = 0, \quad (64)$$

koska

$$\begin{aligned}
a &= \int_{\mathbb{R}^n} K_{j,1}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{m}_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \cdot 0 \cdot \mathbf{x}} \widetilde{m}_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
&= m_j(0) = \underbrace{\phi_j(0)}_{=0} \widehat{d\sigma}(0) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Funktio  $K_{j,1}(\mathbf{x})$  on integroitava ja sillä on radiaalisesti vähenevä majorantti. Tämä todistettiin sivulla 15. Soveltamalla kirjan [5] korollaaria 2.1.19, saadaan

$$\begin{aligned}
\lim_{s \rightarrow 0} A_{j,s}(f)(\mathbf{x}) &= \lim_{s \rightarrow 0} \widetilde{(\widehat{f}(\boldsymbol{\xi}) m_j(s\boldsymbol{\xi}))}(\mathbf{x}) \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} f(\mathbf{x}) * \widetilde{m_j(s\boldsymbol{\xi})}(\mathbf{x}) \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} f(\mathbf{x}) * K_{j,s}(\mathbf{x}) \\
&= af(\mathbf{x}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Tästä seuraa, että

$$(A_{j,t}(f)(\mathbf{x}))^2 = \int_0^t \frac{d}{ds} \left( (A_{j,s}(f)(\mathbf{x}))^2 \right) ds = \int_0^t 2A_{j,s}(f)(\mathbf{x}) \frac{d}{ds} \left( A_{j,s}(f)(\mathbf{x}) \right) ds.$$

Käytetään avuksi lemmaa 13, jolloin

$$(A_{j,t}(f)(\mathbf{x}))^2 = 2 \int_0^t A_{j,s}(f)(\mathbf{x}) \widetilde{A}_{j,s}(f)(\mathbf{x}) \frac{ds}{s}.$$

Tämän tuloksen avulla voidaan siis päätellä, että

$$\begin{aligned}
|A_{j,t}(f)(\mathbf{x})|^2 &= \left| 2 \int_0^t A_{j,s}(f)(\mathbf{x}) \widetilde{A}_{j,s}(f)(\mathbf{x}) \frac{ds}{s} \right| \\
&\leq 2 \int_0^t |A_{j,s}(f)(\mathbf{x})| |\widetilde{A}_{j,s}(f)(\mathbf{x})| \frac{ds}{s} \\
&\leq 2 \int_0^\infty |A_{j,s}(f)(\mathbf{x})| |\widetilde{A}_{j,s}(f)(\mathbf{x})| \frac{ds}{s}.
\end{aligned}$$

Seuraavaksi todistetaan seuraavat estimaatit ehdolla  $j \geq 1$ :



**Lemma 14.** *On olemassa sellaiset vakiot  $c_n$  ja  $\tilde{c}_n$  siten, että kaikilla  $j \geq 1$  pätee*

a)

$$\|m_j\|_{L^\infty} \leq c_n 2^{-j \frac{n-1}{2}},$$

b)

$$\|\widetilde{m}_j\|_{L^\infty} \leq \tilde{c}_n 2^{-j \frac{n-3}{2}}.$$

*Todistus.* Todistetaan ensin lemma 14a

$$\begin{aligned} |m_j(\boldsymbol{\xi})| &= \left| \widehat{d\sigma}(\boldsymbol{\xi}) \phi_j(\boldsymbol{\xi}) \right| \\ &= \left| \frac{a_n}{|\boldsymbol{\xi}|^{\frac{n-2}{2}}} J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi |\boldsymbol{\xi}|) \phi_j(\boldsymbol{\xi}) \right| \\ &= \frac{a_n}{|\boldsymbol{\xi}|^{\frac{n-2}{2}}} \left| J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi |\boldsymbol{\xi}|) \right| \phi_j(\boldsymbol{\xi}). \end{aligned}$$

Käytetään lemmän 1b mukaista estimaattia Besselin funktiolle ja funktiota  $\phi_j^r$  määritelmän (41) mukaan, sekä merkitaan  $|\boldsymbol{\xi}| = \gamma$ , jolloin

$$\begin{aligned} |m_j(\boldsymbol{\xi})| &\leq \frac{a_n}{\gamma^{\frac{n-2}{2}}} C_0 (2\pi\gamma)^{-\frac{1}{2}} \phi_j^r(\gamma) \\ &= c_0 \gamma^{-\frac{n-1}{2}} \phi_j^r(\gamma). \end{aligned}$$

Funktion  $\phi_j^r(\gamma)$  mukaan tämä lauseke saa nollasta poikkeavia arvoja, kun  $\gamma \in [2^{j-1}, 2^{j+1}]$ . Olkoon  $d \in [\frac{1}{2}, 2]$  niin, että arvolla  $\gamma = d2^j$  saadaan lausekkeelle maksimiarvo.

$$|m_j(\boldsymbol{\xi})| \leq c_0 d^{-\frac{n-1}{2}} 2^{-j \frac{n-1}{2}} \phi_j^r(d2^j) = c_n 2^{-j \frac{n-1}{2}},$$

eli

$$\operatorname{ess\,sup}_{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n} |m_j(\boldsymbol{\xi})| = \|m_j\|_{L^\infty} \leq c_n 2^{-j \frac{n-1}{2}}.$$

Seuraavaksi todistetaan lemma 14b. Nyt

$$|\widetilde{m}_j(\boldsymbol{\xi})| = |\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla m_j(\boldsymbol{\xi})| = \gamma \left| \frac{d}{d\gamma} m_j^r(\gamma) \right|.$$

Käyttämällä lemmaa 2 saadaan ja radiaalifunktiota  $\phi_j^r$ , niin

$$\begin{aligned} |\widetilde{m}_j(\boldsymbol{\xi})| &= \gamma \left| \frac{d}{d\gamma} \left( \frac{a_n}{\gamma^{\frac{n-2}{2}}} J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi\gamma) \phi_j^r(\gamma) \right) \right| \\ &= a_n \gamma \left| \frac{d\left(\gamma^{\frac{2-n}{2}}\right)}{d\gamma} J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi\gamma) \phi_j^r(\gamma) + \frac{1}{\gamma^{\frac{n-2}{2}}} \frac{d}{d\gamma} \left( J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi\gamma) \right) \phi_j^r(\gamma) + \frac{J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi\gamma)}{\gamma^{\frac{n-2}{2}}} \phi_j^{r'}(\gamma) \right| \end{aligned}$$

Tämä lauseke saa nollasta poikkeavia arvoja, kun  $\gamma \in [2^{j-1}, 2^{j+1}]$ . Olkoon  $d \in [\frac{1}{2}, 2]$  niin, että arvolla  $\gamma = d2^j$  saadaan lausekkeelle maksimi-arvo.

$$\begin{aligned} |\widetilde{m}_j(\boldsymbol{\xi})| &\leq a_n \gamma \left| \frac{c_2}{\gamma^{\frac{n}{2}}} J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi\gamma) + \frac{c_3}{\gamma^{\frac{n-2}{2}}} \left( J_{\frac{n-4}{2}}(2\pi\gamma) - J_{\frac{n}{2}}(2\pi\gamma) \right) + \frac{c_4}{\gamma^{\frac{n-2}{2}}} J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi\gamma) \right| \\ &\leq a_n \gamma \left( \left| \frac{c_2}{\gamma^{\frac{n}{2}}} J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi\gamma) \right| + \left| \frac{c_3}{\gamma^{\frac{n-2}{2}}} J_{\frac{n-4}{2}}(2\pi\gamma) \right| + \left| \frac{c_3}{\gamma^{\frac{n-2}{2}}} J_{\frac{n}{2}}(2\pi\gamma) \right| + \left| \frac{c_4}{\gamma^{\frac{n-2}{2}}} J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi\gamma) \right| \right) \end{aligned}$$

Kuten yllä maittiin, niin  $\gamma = d2^j$ . Tämä tarkoittaa sitä, että voidaan käyttää Besselin funktion estimaattia lemmän 1b mukaisesti, joten

$$\begin{aligned} |\widetilde{m}_j(\boldsymbol{\xi})| &\leq a_n \gamma \left( \frac{c_5}{\gamma^{\frac{n}{2}}} \gamma^{-\frac{1}{2}} + \frac{c_6}{\gamma^{\frac{n-2}{2}}} \gamma^{-\frac{1}{2}} + \frac{c_7}{\gamma^{\frac{n-2}{2}}} \gamma^{-\frac{1}{2}} + \frac{c_8}{\gamma^{\frac{n-2}{2}}} \gamma^{-\frac{1}{2}} \right) \\ &= \left( \frac{c_9}{\gamma^{\frac{n-1}{2}}} + \frac{c_{10}}{\gamma^{\frac{n-3}{2}}} + \frac{c_{11}}{\gamma^{\frac{n-3}{2}}} + \frac{c_{12}}{\gamma^{\frac{n-3}{2}}} \right) \\ &\leq \left( \frac{c_9}{\gamma^{\frac{n-3}{2}}} + \frac{c_{10}}{\gamma^{\frac{n-3}{2}}} + \frac{c_{11}}{\gamma^{\frac{n-3}{2}}} + \frac{c_{12}}{\gamma^{\frac{n-3}{2}}} \right) \\ &= \frac{c_{13}}{\gamma^{\frac{n-3}{2}}}. \end{aligned}$$

Nyt sijoitetaan  $\gamma = d2^j$ . Tällöin

$$|\widetilde{m}_j(\boldsymbol{\xi})| \leq c_{13} d^{-\frac{n-3}{2}} 2^{-j\frac{n-3}{2}} = \tilde{c}_n 2^{-j\frac{n-3}{2}}$$

eli

$$\operatorname{ess\,sup}_{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n} |\widetilde{m}_j(\boldsymbol{\xi})| = \|\widetilde{m}_j\|_{L^\infty} \leq \tilde{c}_n 2^{-j\frac{n-3}{2}}.$$

□

Nyt siirrymme todistamaan estimaatti kuvauksen  $\mathcal{M}_j$  normille.

$$\begin{aligned} \|\mathcal{M}_j(f)\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{M}_j(f)(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \sup_{t>0} |A_{j,t}(f)(\mathbf{x})| \right|^2 d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \sup_{t>0} |A_{j,t}(f)(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \sup_{t>0} \left( 2 \int_0^\infty |A_{j,s}(f)(\mathbf{x})| |\tilde{A}_{j,s}(f)(\mathbf{x})| \frac{ds}{s} \right) d\mathbf{x} \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty |A_{j,s}(f)(\mathbf{x})| |\tilde{A}_{j,s}(f)(\mathbf{x})| \frac{ds}{s} d\mathbf{x} \end{aligned}$$

Käytetään Cauchy-Schwarzin epäyhtälöä 5 kahteen kertaan. Käytetään hyväksemme yhtälöä  $\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2}$ , eli

$$\begin{aligned} \|\mathcal{M}_j(f)\|_{L^2}^2 &\leq 2 \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_0^\infty |A_{j,s}(f)(\mathbf{x})|^2 \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^\infty |\tilde{A}_{j,s}(f)(\mathbf{x})|^2 \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{2}} d\mathbf{x} \\ &\leq 2 \left( \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty |A_{j,s}(f)(\mathbf{x})|^2 \frac{ds}{s} d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty |\tilde{A}_{j,s}(f)(\mathbf{x})|^2 \frac{ds}{s} d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 2 \left( \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{A_{j,s}(f)}(\boldsymbol{\xi})|^2 d\boldsymbol{\xi} \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\tilde{A}_{j,s}(f)}(\boldsymbol{\xi})|^2 d\boldsymbol{\xi} \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 2 \left( \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\boldsymbol{\xi}) m_j(s\boldsymbol{\xi})|^2 d\boldsymbol{\xi} \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\boldsymbol{\xi}) \tilde{m}_j(s\boldsymbol{\xi})|^2 d\boldsymbol{\xi} \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Funktio  $\phi_j(s\boldsymbol{\xi})$  saa nollasta poikkeavia arvoja kun

$$2^{j-1} \leq |s\boldsymbol{\xi}| \leq 2^{j+1}$$

eli

$$|\boldsymbol{\xi}|^{-1} 2^{j-1} \leq s \leq |\boldsymbol{\xi}|^{-1} 2^{j+1}.$$

Merkitään  $a = |\boldsymbol{\xi}|^{-1} 2^{j-1}$ , jolloin

$$a \leq s \leq 4a.$$

Vastaavasti myös  $m_j(s\boldsymbol{\xi})$  ja  $\tilde{m}_j(s\boldsymbol{\xi})$  saavat nollasta poikkeavia arvoja vain näillä  $s$ -arvoilla. Tällöin

$$\begin{aligned} \|\mathcal{M}_j(f)\|_{L^2}^2 &\leq 2 \left( \int_{\mathbb{R}^n} \int_a^{4a} |\hat{f}(\boldsymbol{\xi})|^2 |m_j(s\boldsymbol{\xi})|^2 \frac{ds}{s} d\boldsymbol{\xi} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \int_a^{4a} |\hat{f}(\boldsymbol{\xi})|^2 |\tilde{m}_j(s\boldsymbol{\xi})|^2 \frac{ds}{s} d\boldsymbol{\xi} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2 \left( \int_{\mathbb{R}^n} \int_a^{4a} |\hat{f}(\boldsymbol{\xi})|^2 \|m_j\|_{L^\infty}^2 \frac{ds}{s} d\boldsymbol{\xi} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \int_a^{4a} |\hat{f}(\boldsymbol{\xi})|^2 \|\tilde{m}_j\|_{L^\infty}^2 \frac{ds}{s} d\boldsymbol{\xi} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 2 \|m_j\|_{L^\infty} \|\tilde{m}_j\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\int_a^{4a} \frac{ds}{s}}_{= \ln(4)} |\hat{f}(\boldsymbol{\xi})|^2 d\boldsymbol{\xi} \\ &= 2 \ln(4) \|m_j\|_{L^\infty} \|\tilde{m}_j\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\boldsymbol{\xi})|^2 d\boldsymbol{\xi} \\ &= c' \|m_j\|_{L^\infty} \|\tilde{m}_j\|_{L^\infty} \|\hat{f}\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Lemmaa 14 soveltama saadaan

$$\begin{aligned} \|\mathcal{M}_j(f)\|_{L^2}^2 &\leq c' c 2^{-j \frac{n-1}{2}} \tilde{c} 2^{-j \frac{n-3}{2}} \|\hat{f}\|_{L^2}^2 \\ &= c' \tilde{c} 2^{j(2-n)} \|f\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Tästä seuraa, että

$$\|\mathcal{M}_j(f)\|_{L^2} \leq C_2 2^{j(1-\frac{n}{2})} \|f\|_{L^2}.$$

Tämä oli haluttu tulos tapaukselle  $j \geq 1$ , mutta tämä myös pätee tapaukselle  $j = 0$ , koska lemmän 12 mukaan

$$\mathcal{M}_0(f)(\mathbf{x}) \leq C\mathcal{M}(f)(\mathbf{x}),$$

jolloin epäyhtälön (20) mukaan

$$\|\mathcal{M}_0(f)\|_{L^2} \leq C\|\mathcal{M}(f)\|_{L^2} \leq C_1\|f\|_{L^2},$$

jossa  $C_1$  on  $C_2$ :n tapaan  $j$ :stä ja  $f$ :stä riippumaton äärellinen vakio.

□

## 5 Todistuksen täydentäminen

Tässä osiossa kokoamme työn päätulosta, eli

$$\|\mathcal{M}(f)\|_{L^p} \leq C_p \|f\|_{L^p},$$

kun  $\frac{n}{n-1} < p$  ja  $n \geq 3$ .

*Todistus.* Nyt tiedetään ensimmäisen ja toisen lemmän (kappaleet 4.2 ja 4.3) perusteella, että

$$\|\mathcal{M}_j(f)\|_{L^{1,w}} \leq C_1 2^j \|f\|_{L^1}, \quad \text{kun } f \in L^1$$

ja

$$\|\mathcal{M}_j(f)\|_{L^2} \leq C_2 2^{j(1-\frac{n}{2})} \|f\|_{L^2}, \quad \text{kun } f \in L^2.$$

Lemman 3 perusteella taas

$$\|\mathcal{M}_j(f)\|_{L^{2,w}} \leq C_2 2^{j(1-\frac{n}{2})} \|f\|_{L^2}, \quad \text{kun } f \in L^2.$$

Näiden tietojen perusteella voidaan soveltaa Marcinkiewiczin interpolaatiolausetta (lemma 7), jonka mukaan arvoille  $1 < p < 2$  pätee

$$\|\mathcal{M}_j(f)\|_{L^p} \leq C' 2^{j(\frac{2-p}{p})} 2^{j(1-\frac{n}{2})(\frac{2p-2}{p})} \|f\|_{L^p} = C' 2^{j(\frac{n}{p}-(n-1))} \|f\|_{L^p}. \quad (65)$$

Nyt käyttämällä lemmaa 9 sekä Minkowskin epäyhtälöä (lemma 6) saadaan

$$\|\mathcal{M}(f)\|_{L^p} \leq \left\| \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{M}_j(f) \right\|_{L^p} \leq \sum_{j=0}^{\infty} \|\mathcal{M}_j(f)\|_{L^p}.$$

Hyödynnetään lauseen (65) estimaattia.

$$\sum_{j=0}^{\infty} \|\mathcal{M}_j(f)\|_{L^p} \leq C' \|f\|_{L^p} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j(\frac{n}{p}-(n-1))}.$$

Summa  $\sum_{j=0}^{\infty} 2^{j(\frac{n}{p}-(n-1))}$  on äärellinen kun 2:n eksponentti on negatiivinen, eli kun

$$\frac{n}{p} - (n-1) < 0,$$

jolloin

$$\frac{n}{n-1} < p.$$

Tulokseksi saadaan

$$\|\mathcal{M}(f)\|_{L^p} \leq C \|f\|_{L^p},$$

kun  $\frac{n}{n-1} < p < 2$ . Tämä väli on epätyhjä vain kun  $n \geq 3$ .

Jotta saamme todistettua tuloksen myös tapauksessa  $p > 2$ , tarvitsemme estimaatin maksimaalifunktion  $L^\infty$ -normille.

$$\begin{aligned}\|\mathcal{M}(f)\|_{L^\infty} &= \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} |\mathcal{M}(f)(\mathbf{x})| = \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \left| \sup_{t>0} \int_{\mathbf{S}^{n-1}} f(\mathbf{x} - t\boldsymbol{\theta}) d\sigma(\boldsymbol{\theta}) \right| \\ &\leq \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \sup_{t>0} \int_{\mathbf{S}^{n-1}} \|f\|_{L^\infty} d\sigma(\boldsymbol{\theta}) = \|f\|_{L^\infty}\end{aligned}$$

Olkoon  $\frac{n}{n-1} < q < 2$ . Kahden edellisen tuloksen sekä lemmän 3 perusteella tiedetään, että

$$\|\mathcal{M}(f)\|_{L^{q,w}} \leq C \|f\|_{L^q} \quad \text{kun } f \in L^q$$

ja

$$\|\mathcal{M}(f)\|_{L^{\infty,w}} \leq \|f\|_{L^\infty} \quad \text{kun } f \in L^\infty.$$

Marcinkiewiczin interpolaatiolauseesta (lemma 7) seuraa, että arvoilla  $q < p \leq \infty$  pätee

$$\|\mathcal{M}(f)\|_{L^p} \leq 2 \left( \frac{p}{p-q} \right)^{\frac{1}{p}} C_p^{\frac{q}{p}} \|f\|_{L^p}.$$

Tämä tarkoittaa sitä, että kun  $\frac{n}{n-1} < p$ , niin

$$\|\mathcal{M}(f)\|_{L^p} \leq C_p \|f\|_{L^p},$$

jossa  $C_p$  on jokin  $f$ :stä riippumaton äärellinen vakio sekä  $n \geq 3$ . Nyt ollaan saatu työn päätulos todistettua.  $\square$

## Viitteet

- [1] Athreya, Lahiri, *Measure Theory and Probability Theory*, Iowa, Yhdysvallat, Springer, 2006.
- [2] Bourgain J., *Averages in the plane over convex curves and maximal operators.*, J. Analyse Math. 47, 1986.
- [3] Hardy, Littlewood, Pólya, *Inequalities*, Cambridge, Yhdistynyt Kuningaskunta, 1934.
- [4] Heikkinen, Kinnunen, Korvenpää, Tuominen, *Regularity of the local fractional maximal function*, Aalto-yliopisto, Suomi, [https://helituominen.files.wordpress.com/2013/11/arkiv\\_rev.pdf](https://helituominen.files.wordpress.com/2013/11/arkiv_rev.pdf).
- [5] Loukas Grafakos, *Classical Fourier Analysis, Second Edition*, Columbia, Missouri, Yhdysvallat, Springer, 2008.
- [6] Rubio de Francia J.-L., *Maximal functions and Fourier transforms*, Duke Math. J. 53 (1986), 395–404.
- [7] Schlag Wilhelm,  *$L^p \rightarrow L^q$  Estimates for the Circular Maximal Function*, Pasadena, Kalifornia, Yhdysvallat, 1996, <http://www.math.uchicago.edu/~schlag/papers/THES.pdf>.
- [8] Stein Elias M., *Harmonic Analysis*, Princeton, New Jersey, Yhdysvallat, Princeton University Press, 1993.
- [9] Stein Elias M., *Maximal functions: Spherical means*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 73 (1976), 2174–2175.