ID01

Binärlogarithmus

$$\log_2 x = \frac{\log x}{\log 2}$$

Entscheidungsgehalt

$H_0 = \log_2 K$ mit $K =$ Anzahl Symbole

Informationsgehalt

$$I(a_k) = -\log_2 P(a_k) \text{ [Bit]}$$

- Je kleiner $P(a_k)$, desto größer I.
- Wenn $P(a_k) = 1$, dann $I(a_k) = 0$.

Entropie – mittlerer Info.gehalt

$$H = -\sum_{k=1}^{K} \left[P(a_k) \cdot \log_2 P(a_k) \right] \text{ [Bit]}$$

- Wenn alle Sym. gleich wahrscheinlich $I(a_k) = H_0 = H$
- Max. bei $P(a_k) = \frac{1}{K}$
- Einfachere Berechnung bei $P(a_k) = \frac{i_k}{c}$:

$$H = \frac{c \cdot \log(c) - \sum_{k=1}^{K} \left[i_k \cdot \log(i_k) \right]}{c \cdot \log(2)} \text{ [Bit]}$$

Redundanz

$$R = H_0 - H \text{ [Bit]}$$

- relative Red. $R = \frac{H_0 - H}{H}$

Ideale Codewortlänge

$n = -\log_2 P(a_k)$ [Bit]

Mittlere Codewortlänge

$$\overline{m} = \sum_{k=1}^{K} \left[P(a_k) \cdot m_k \right] \text{ [Bit]}$$

ID02

Verbundentropie

$$\boldsymbol{H(a_i, a_j) = -\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\left[P(a_i, a_j)\cdot \log_2(P(a_i, a_j))\right]}\ [\text{Bit}]$$

- Einfachere Berechnung bei $\boldsymbol{P(a_i, a_j) = \frac{m_{ij}}{c}}$:

$$\boldsymbol{H(a_i, a_j) = \frac{c\cdot \log(c) - \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\left[m_{ij}\cdot \log(m_{ij})\right]}{c\cdot \log(2)}}\ [\text{Bit}]$$

Bedingte Entropie

$$\boldsymbol{H(a_i|a_j) = -\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\left[P(a_i, a_j)\log_2(P(a_i|a_j))\right]}\ [\text{Bit}]$$

Beziehungen zw. den Entropien

$$\boldsymbol{H(a_i, a_j) = H(a_i|a_j) + H(a_j)}$$

Datenrate eines Kanals

$$\boldsymbol{C = 2\cdot B\cdot \log_2(L)}\ [\text{Bit/s}]$$

- mit Anzahl der unterschiedlichen Amplituden $\boldsymbol{L}$

$$\boldsymbol{C = B\cdot \log_2\left(1+\frac{S}{N}\right)}$$

für $\boldsymbol{\frac{S}{N} \ll 1}$:

$$\boldsymbol{C \approx 1.44\cdot \frac{B}{\text{Hz}}\cdot \frac{S}{N}}\ [\text{Bit/s}]$$

für $\boldsymbol{\frac{S}{N} \gg 1}$:

$$\boldsymbol{C \approx 0.332\cdot \frac{B}{\text{Hz}}\cdot \frac{SNR}{\text{dB}}}$$

Kanalkapazität

$$\boldsymbol{C = \max_{P(a_k)}\left[T(X;Y)\right]}$$

Transinformation

$\boldsymbol{T(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X) = T(Y;X)}$

Kanal ist

- *verlustfrei*, wenn Verlustinformation $\boldsymbol{H(X|Y) = 0.}$
  $\rightarrow \boldsymbol{C}$ ist maximal, wenn alle Eingangssym. gleich wahrscheinlich
- *deterministisch*, wenn Störungsinformation $\boldsymbol{H(Y|X) = 0.}$
  $\rightarrow \boldsymbol{C}$ ist maximal, wenn alle Ausgangssym. gleich wahrscheinlich
- *ungestört*, wenn er sowohl verlustfrei als auch deterministisch ist
  $\rightarrow \boldsymbol{C}$ ist maximal, wenn alle Ausgangssym. gleich wahrscheinlich oder alle Eingangssym. gleich wahrscheinlich

Theorem der Kanalcodierung

Wenn $\boldsymbol{H' \leq C'}$ gilt, dann existiert immer eine Kanalcodierung, welche eine Übertragung der Quellensymbole mit beliebig kleiner Fehlerwahrscheinlichkeit zu übertragen (u. U. nur mit großem Aufwand).

Kraft'sche Ungleichung

Für einen eindeutigen, binären Code mit $\boldsymbol{K}$ Codewörtern der Länge $\boldsymbol{m_k}$ gilt:

$$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{K} 2^{-m_k} \leq 1}$$

ID03

ID04