ID01

Binärlogarithmus

$$\log_2 x = \frac{\log x}{\log 2}$$

Entscheidungsgehalt

$H_0 = \log_2 K$ mit $K =$ Anzahl Symbole

Informationsgehalt

$$I(a_k) = -\log_2 P(a_k) \text{ [Bit]}$$

- Je kleiner $P(a_k)$, desto größer I.
- Wenn $P(a_k) = 1$, dann $I(a_k) = 0$.

Entropie – mittlerer Info.gehalt

$$H = -\sum_{k=1}^{K} \left[P(a_k) \cdot \log_2 P(a_k) \right] \text{ [Bit]}$$

- Wenn alle Sym. gleich wahrscheinlich $I(a_k) = H_0 = H$
- Max. bei $P(a_k) = \frac{1}{K}$
- Einfachere Berechnung bei $P(a_k) = \frac{i_k}{c}$:

$$H = \frac{c \cdot \log(c) - \sum_{k=1}^{K} \left[i_k \cdot \log(i_k) \right]}{c \cdot \log(2)} \text{ [Bit]}$$

Redundanz

$$R = H_0 - H \text{ [Bit]}$$

- relative Red. $R = \dfrac{H_0 - H}{H}$

Ideale Codewortlänge

$$n = -\log_2 P(a_k) \text{ [Bit]}$$

Mittlere Codewortlänge

$$\overline{m} = \sum_{k=1}^{K} \left[P(a_k) \cdot m_k \right] \text{ [Bit]}$$

ID02

Verbundentropie

$$H(a_i, a_j) = -\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\left[P(a_i, a_j) \cdot \log_2(P(a_i, a_j))\right] \text{ [Bit]}$$

- Einfachere Berechnung bei $P(a_i, a_j) = \frac{m_{ij}}{c}$:

$$H(a_i, a_j) = \frac{c \cdot \log(c) - \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\left[m_{ij} \cdot \log(m_{ij})\right]}{c \cdot \log(2)} \text{ [Bit]}$$

Bedingte Entropie

$$H(a_i | a_j) = -\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\left[P(a_i, a_j) \log_2(P(a_i | a_j))\right] \text{ [Bit]}$$

Beziehungen zw. den Entropien

$$H(a_i, a_j) = H(a_i | a_j) + H(a_j)$$

Datenrate eines Kanals

$$C = 2 \cdot B \cdot \log_2(L) \text{ [Bit/s]}$$

- mit Anzahl der unterschiedlichen Amplituden L

$$C = B \cdot \log_2\left(1 + \frac{S}{N}\right)$$

für $\frac{S}{N} \ll 1$:

$$C \approx 1.44 \cdot \frac{B}{\text{Hz}} \cdot \frac{S}{N} \text{ [Bit/s]}$$

für $\frac{S}{N} \gg 1$:

$$C \approx 0.332 \cdot \frac{B}{\text{Hz}} \cdot \frac{SNR}{\text{dB}}$$

Kanalkapazität

$$C = \max_{P(a_k)}\left[T(X;Y)\right]$$

Transinformation

$$T(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X) = T(Y;X)$$

Kanal ist

- *verlustfrei*, wenn Verlustinformation $H(X|Y) = 0$.
  $\rightarrow C$ ist maximal, wenn alle Eingangssym. gleich wahrscheinlich
- *deterministisch*, wenn Störungsinformation $H(Y|X) = 0$.
  $\rightarrow C$ ist maximal, wenn alle Ausgangssym. gleich wahrscheinlich
- *ungestört*, wenn er sowohl verlustfrei als auch deterministisch ist
  $\rightarrow C$ ist maximal, wenn alle Ausgangssym. gleich wahrscheinlich oder alle Eingangssym. gleich wahrscheinlich

Theorem der Kanalcodierung

Wenn $H' \leq C'$ gilt, dann existiert immer eine Kanalcodierung, welche eine Übertragung der Quellensymbole mit beliebig kleiner Fehlerwahrscheinlichkeit ermöglicht (u. U. nur mit großem Aufwand).

Kraft'sche Ungleichung

Für einen eindeutigen, binären Code mit K Codewörtern der Länge m_k gilt:

$$\sum_{k=1}^{K} 2^{-m_k} \leq 1$$

Theorem der Quellencodierung

Die mittlere Länge $\overline{m}$ eines Präfixcodes kann stets so gewählt werden, dass gilt:

$$H \leq \overline{m} < H + 1$$

Beim Huffman-Code:

$$H \leq \overline{m} < H + p_{\max} + 0.086$$

bzw. wenn $p_{\max} > 0.5$:

$$H \leq \overline{m} < H + p_{\max}$$

ID03

ID04

Transformationen

WHT – Walsh-Hadamard
Einfach; Rechteck-Funktion mit -1 und 1.

DFT – Diskrete-Fourier
Sinus- und Cosinus-Funktionen als Basis

DCT – Diskrete-Cosinus
Cosinus-Funktionen als Basis
Guter Kompromiss aus Aufwand und Nutzen

KLT – Karhunen-Loeve
individuelle Basisfunktionen, hoher Rechenaufwand

1D-DCT-Hintransformation

$$\boldsymbol{F(u) = \frac{C(u)}{\sqrt{N}} \cdot \sum_{x=0}^{N-1} \left[f(x) \cdot \cos \frac{(2x+1) \cdot u \cdot \pi}{2N} \right]} \quad \text{für } \boldsymbol{u = 0, 1, \ldots, N-1}$$

$$\boldsymbol{C(u) = \begin{cases} 1 & \text{für } u = 0 \\ \sqrt{2} & \text{sonst} \end{cases}}$$

1D-DCT-Rücktransformation

$$\boldsymbol{f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} \left[\frac{C(u)}{\sqrt{N}} \cdot F(u) \cdot \cos \frac{(2x+1) \cdot u \cdot \pi}{2N} \right]} \quad \text{für } \boldsymbol{x = 0, 1, \ldots, N-1}$$

2 × 2-WHT-Hintransformation

$$\boldsymbol{F(u,v) = \frac{1}{2} \sum_{x=0}^{1} \sum_{y=0}^{1} f(x,y) \cdot (-1)^{x \cdot u + y \cdot v}} \quad \text{für } \boldsymbol{u = 0, 1} \text{ und } \boldsymbol{v = 0, 1}$$

2 × 2-WHT-Rücktransformation

$$\boldsymbol{f(x,y) = \frac{1}{2} \sum_{u=0}^{1} \sum_{v=0}^{1} F(u,v) \cdot (-1)^{x \cdot u + y \cdot v}} \quad \text{für } \boldsymbol{x = 0, 1} \text{ und } \boldsymbol{y = 0, 1}$$