Übungsstunde 0

Analysis 1

18. September 2020

1 Induktion

Analogie aus dem Alltag

Induktionsbeweise können für Aussagen über die natürlichen Zahlen gebraucht werden. Sie funktionieren wie Domino in folgendem Sinn. Den Stein, den man zu Beginn anstösst, ist die *Verankerung*. Die Tatsache, dass jeder Stein den folgenden Stein zum Umfallen bringt, ist der *Induktionsschritt*. Nehmen wir an, dass

- der erste Stein angestossen wird,
- das Umfallen eines Steins das Umfallen des nächsten verursacht,

können wir schliessen, dass alle Steine umfallen.

Mathematische Interpretation

Sei A_n eine Aussage über eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$. In der Mathematik heisst das, dass A_n entweder wahr oder falsch ist. Interpretieren wir das Umfallen des Dominosteins n oben als "A_n ist wahr", liefert das folgende Erkenntnis. Falls wir für ein $n_0 \in \mathbb{N}$ zeigen können, dass

- A_{n_0} wahr ist, und
- wenn immer A_n wahr ist, dann auch A_{n+1},

so gilt A_n für alle $n \geq n_0$. Dieses Prinzip nennt man "Induktion".

Beispiele

Behauptung. *Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Beweis. Wir machen die Verankerung bei $n = 2$, da das die erste nicht-pathologische Aussage ist. Interpretieren wir die Summe links richtig, so stimmt die Behauptung aber auch für $n = 0$ und $n = 1$. Berechne

$$1 + 2 = \frac{2(2+1)}{2}.$$

Also stimmt die Behauptung für $n = 2$. Nehmen wir nun an, dass

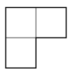
$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

für ein bestimmtes $n \in \mathbb{N}$, berechne

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

Das ist aber genau was wir behauptet haben, nur dass wir $(n+1)$ für n eingesetzt haben. $\square$

Behauptung. *Ein Brett der Grösse $2^n \times 2^n$ kann mit Steinen der Form*



bedeckt werden, so dass genau ein Feld frei bleibt.

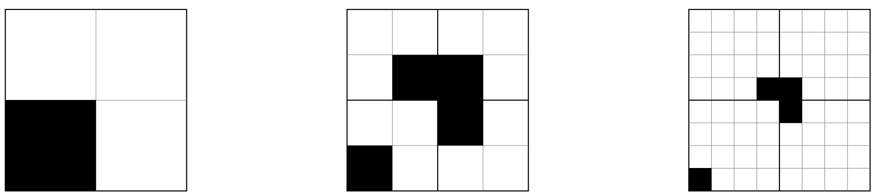


Abbildung 1: Verankerung und zwei Induktionsschritte

Beweisskizze. Die Verankerung kann man hier für $n = 0$ machen, aber auch hier ist das etwas pathologisch. Wir machen die Verankerung bei $n = 1$ wie in Abbildung 1. Wichtig ist hier zu bemerken, dass wir das so bewerkstelligen können, dass das freie Feld in einer Ecke liegt.

Für den Induktionsschritt, das heisst das Bedecken eines Bretts der Grösse $2^{n+1} \times 2^{n+1}$, nehmen wir zuerst vier mal bedeckte Bretter der Grösse $2^n \times 2^n$. Nach richtigem rotieren dieser kleineren Bretter erhalten wir etwas wie in Abbildung 1. Wir sehen, dass ein isoliertes Feld in der Ecke frei bleibt, und drei in der Mitte in der Form der Steine die wir zur Verfügung haben. Bedecken wir diese drei Felder erhalten wir die gesuchte Konstellation. □

2 Binomialkoeffizienten

Definition. Seien $k \leq n$ natürliche Zahlen. Der *Binomialkoeffizient* $\binom{n}{k}$ bezeichnet die Anzahl Art und Weisen, k Elemente aus n Elementen auszuwählen.

Beispiele. Ohne Formel können wir aus der Definition herauslesen, dass

- $\binom{n}{0} = 1$
- $\binom{n}{1} = n$
- $\binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{n-1} = n$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Lemma (Pascal)**.** *Seien $k \leq n$ natürliche Zahlen. Dann gilt*

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Beweis. Fixiere ein Element x. Jede Art und Weise, k Elemente aus $(n+1)$ Elementen auszuwählen, fällt in eine der folgenden Fälle.

(a) Unsere Auswahl lässt x aus.

(b) Unsere Auswahl enthält x.

Fall (a) liefert $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, und Fall (b) liefert $\binom{n}{k-1}$ Möglichkeiten. □

Dieses Lemma zeigt, dass wir Binomialkoeffizienten in Form des *Pascalschen Dreieck* anordnen können. Siehe Abbildung 2.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}
$$

Abbildung 2: Pascalsches Dreieck

Behauptung. *Seien $k \leq n$ natürliche Zahlen. Dann gilt*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Beweis. Wir zeigen diese Behauptung unter Verwendung des obigen Lemmas mit Induktion. Die Verankerung bei $n = 0$ hatten wir bereits als Beispiel oben. Für den Induktionsschritt, berechne:

$$
\begin{aligned}
\binom{n+1}{k} &= \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \\
&= \frac{n!}{k(k-1)!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!(n-k+1)} \\
&= \frac{(n-k+1)n! + kn!}{k(k-1)!(n-k)!(n-k+1)} \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k+1)!}.
\end{aligned}
$$

Das ist genau was wir zeigen wollten. □