Analysis I

Sebastian Baader

Herbstsemester 2020

Einleitung

Über dieses Dokument

Diese Vorlesungsnotizen werden in Echtzeit während der Vorlesung mitgeschrieben und werden deshalb viele Fehler enthalten. Ihr dürft mir diese und andere Verbesserungsvorschläge gerne zukommen lassen, am liebsten via GitHub auf dem Repository

`https://github.com/raw-bacon/ana1-notes`,

oder via E-Mail an `levi.ryffel@math.unibe.ch`.

Inhaltsverzeichnis

I Konstruktion der Reellen Zahlen **3**

1 Historische Motivation 3

II Natürliche Zahlen und vollständige Induktion **6**

III Reelle Zahlen **7**

IV Metrische Räume und Folgen **8**

V Komplexe Zahlen und Reihen **9**

VI Stetige Funktionen **10**

VII Differentialrechnung in den reellen Zahlen **11**

VIII Integralrechnung in den reellen Zahlen **12**

IX Taylorpolynome und Taylorreihen **13**

Kapitel I

Konstruktion der Reellen Zahlen

1 Historische Motivation

In der Antike war Mathematik praktisch synonym mit Geometrie. Der Zahlenbegriff war direkt an das Konzept der *Länge* gekoppelt.

Definition I.1 (Euklid, 300 vor Christus)**.** Zwei Längen $a, b > 0$ heissen *kommensurabel*, falls eine Länge $L > 0$ existiert, so wie zwei natürliche Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$, so dass $a = mL$ und $b = nL$.

Hier ist

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

die Menge der Natürlichen Zahlen.

Satz I.2 (Euklid)**.** *Die Seite und Diagonale eines ebenen Quadrats sind nicht kommensurabel.*

Beweis. Dieser Beweis ist geometrisch, nach Euklid. Wir nehmen an, es gäbe $L > 0$ und $m, n \in \mathbb{N}$ mit $x = mL$ und $d = nL$. Wir zeigen, dass das zu einem Widerspruch führt. Wir stellen fest, dass die Längen $x_1 = d - x$ und $d_1 = 2x - d$ ebenfalls die Seite und Diagonale eines Quadrats bilden, siehe Abbildung I.1.

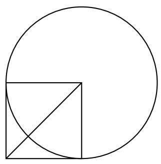

Abbildung I.1: Euklids Konstruktoin

Weiterhin gilt, dass sowohl x_1, als auch d_1, ganze Vielfache von L sind:

$$\begin{aligned} x_1 &= d - x = (n - m)L \\ d_1 &= 2x - d = (2m - n)L \end{aligned}$$

Nach Pythagoras gilt $d^2 = 2x^2$, und somit $d \leq 3/2 \cdot x$, da $(3/2)^2 > 2$. Daraus folgt, dass

$$x_1 = d - x \leq \frac{1}{2} \cdot x.$$

Iteriere dieses Verfahren und erhalte eine Serie von Quadraten mit Seiten $x_2, x_3, \ldots$ und Diagonalen $d_2, d_3, \ldots$. Es gilt:

$$x_k \leq \frac{1}{2^k} \cdot x.$$

Ausserdem ist jedes x_k (und d_k) ein ganzes Vielfaches von L. Wähle nun k so gross, dass

$$x_k \leq \frac{1}{2^k} x < L.$$

Dies impliziert, dass $x_k = 0$, was unmöglich ist. Deshalb können x und d nicht kommensurabel sein. □

Wir haben diese Aussage mit einem sogenannten *Widerspruchsbeweis* bewiesen. Hierfür haben wir eine Annahme getroffen, und diese zu einem Widerspruch geführt. Dies zeigt, dass unsere Annahme falsch war.

Wir sehen nun eine zeitgenössische Umformulierung dieses Antiken Resultats. Seien $a, b > 0$ zwei kommensurable Längen. Das heisst, es existieren $L > 0$ und $m, n \in \mathbb{N}$ mit $a = mL$, $b = nL$. Dann gilt:

$$\frac{a}{b} = \frac{mL}{nL} = \frac{m}{n},$$

das heisst das Verhältnis a/b ist eine *rationale Zahl*. Zurück zum Quadrat mit Seite x und Diagonale d. Nach Pythagoras gilt $d^2 = 2x^2$. Falls $x = mL$ und $d = nL$ gilt, dann also

$$2 = \frac{d^2}{x^2} = \left(\frac{d}{x}\right)^2 = \left(\frac{n}{m}\right)^2,$$

und somit

$$2m^2 = n^2.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist durch 2 teilbar. Dies impliziert, dass n^2, und somit auch n, durch 2 teilbar ist. Schreibe nun $n = 2k$. Schreibe $n = 2k$ mit $k \in \mathbb{N}$. Setze ein und erhalte $2m^2 = (2k)^2 = rk^2$, beziehungsweise

$$m^2 = 2k^2.$$

Die rechte Seite ist durch 2 teilbar, also auch m. Wir schliessen, dass sowohl n als auch m durch 2 teilbar sind. Schreibe noch $m = 2\ell$ mit $\ell \in \mathbb{N}$. Es gilt also

$$2 = \left(\frac{n}{m}\right)^2 = \left(\frac{k}{\ell}\right)^2.$$

In anderen Worten sind Zähler und Nenner beide gerade. Iteriere dieses Verfahren k mal, bis $n/2^k < 1$, Dann entsteht ein Widerspruch.

Korollar I.3. *Die Gleichung $z^2 = 2$ hat keine rationale Lösung, das heisst, keine Lösung der Form $z = p/1$ mit $p, q \in \mathbb{N}$ und $q > 0$.*

Das Ziel für den Rest dieses Kapitels ist es, eine Zahlenmenge $\mathbb{R}$ (die Menge der *reellen Zahlen*) zu konstruieren, in welcher die Gleichung $z^2 = 2$ eine Lösung hat.

Übung I.4. Die Gleichung $z = \sqrt{2}x + \sqrt{3}y$ hat keine ganze Lösungen ausser $(0, 0, 0)$.

Kapitel II

Natürliche Zahlen und vollständige Induktion

Kapitel III

Reelle Zahlen

Kapitel IV

Metrische Räume und Folgen

Kapitel V

Komplexe Zahlen und Reihen

Kapitel VI

Stetige Funktionen

Kapitel VII

Differentialrechnung in den reellen Zahlen

Kapitel VIII

Integralrechnung in den reellen Zahlen

Kapitel IX

Taylorpolynome und Taylorreihen