

# Analysis I

Sebastian Baader

Herbstsemester 2020

## Über dieses Dokument

Das ist eine Mitschrift der Vorlesung “Analysis 1” von Prof. Dr. Sebastian Baader im Herbstsemester 2020. Du darfst sie so verwenden, wie sie dir am meisten beim Verständnis des Materials hilft. Verantwortlich dafür was hier drin steht ist Levi Ryffel. Denke daran dass der Dozent dieses Dokument nicht schreibt (und vielleicht auch nicht liest). Ihn trifft keine Verantwortung, falls Unsinn steht.

## Dein Beitrag

Diese Vorlesungsnotizen werden in Echtzeit während der Vorlesung mitgeschrieben und werden deshalb viele Probleme enthalten. Damit sind allerlei Missgeschicke gemeint wie zum Beispiel Symbolverwechslungen, unpräzise Aussagen und Argumente, alternative Rechtschreibung und Grammatik, oder unattraktives Layout. Falls dir so etwas auffällt, auch wenn es dich nicht stark stört, und auch wenn du es als etwas subjektiv empfindest, poste doch auf

<https://github.com/raw-bacon/ana1-notes>,

ein “Issue”, oder sende eine E-Mail an [levi.ryffel@math.unibe.ch](mailto:levi.ryffel@math.unibe.ch). Auf demselben Weg kannst du Wünsche und Verbesserungsvorschläge zu dieser Mitschrift anbringen.

# Inhaltsverzeichnis

<b>I</b>	<b>Konstruktion der Reellen Zahlen</b>	<b>3</b>
1	Historische Motivation . . . . .	3
2	Mengen im Vergleich . . . . .	5
3	Gruppen und Körper . . . . .	10
4	Konstruktion der reellen Zahlen . . . . .	13
<b>II</b>	<b>Folgen und Reihen</b>	<b>23</b>
1	Folgen . . . . .	23
2	Cauchyfolgen . . . . .	25
3	Reihen . . . . .	30
4	Die Exponentialfunktion . . . . .	39
<b>III</b>	<b>Stetige Funktionen</b>	<b>44</b>
1	Stetigkeit . . . . .	44
2	Zwischenwertsatz . . . . .	50
3	Stetige Funktionen auf kompakten Mengen . . . . .	52

# Kapitel I

## Konstruktion der Reellen Zahlen

### 1 Historische Motivation

In der Antike war Mathematik praktisch synonym mit Geometrie. Der Zahlenbegriff war direkt an das Konzept der *Länge* gekoppelt.

**Definition** (Euklid, 300 vor Christus). Zwei Längen  $a, b > 0$  heissen *kommensurabel*, falls eine Länge  $L > 0$  existiert, so wie zwei natürliche Zahlen  $m, n \in \mathbb{N}$ , so dass  $a = mL$  und  $b = nL$ .

Hier ist

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

die Menge der Natürlichen Zahlen.

**Theorem** (Euklid). *Die Seite und Diagonale eines ebenen Quadrats sind nicht kommensurabel.*

*Beweis.* Dieser Beweis ist geometrisch, nach Euklid. Wir nehmen an, es gäbe  $L > 0$  und  $m, n \in \mathbb{N}$  mit  $x = mL$  und  $d = nL$ . Wir zeigen, dass das zu einem Widerspruch führt. Wir stellen fest, dass die Längen  $x_1 = d - x$  und  $d_1 = 2x - d$  ebenfalls die Seite und Diagonale eines Quadrats bilden, siehe Abbildung I.1.

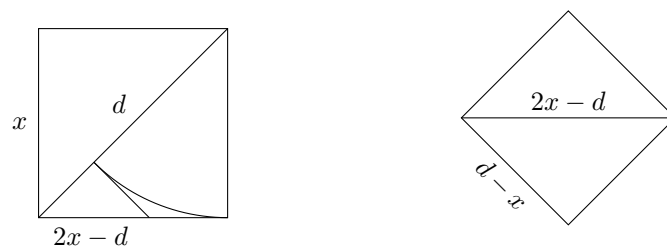


Abbildung I.1: Euklids Konstruktion

Weiterhin gilt, dass sowohl  $x_1$  als auch  $d_1$ , ganze Vielfache von  $L$  sind:

$$\begin{aligned}x_1 &= d - x = (n - m)L \\d_1 &= 2x - d = (2m - n)L\end{aligned}$$

Nach Pythagoras gilt  $d^2 = 2x^2$ , und somit  $d \leq 3/2 \cdot x$ , da  $(3/2)^2 > 2$ . Daraus folgt, dass

$$x_1 = d - x \leq \frac{1}{2} \cdot x.$$

Iteriere dieses Verfahren und erhalte eine Serie von Quadraten mit Seiten  $x_2, x_3, \dots$  und Diagonalen  $d_2, d_3, \dots$ . Es gilt:

$$x_k \leq \frac{1}{2^k} \cdot x.$$

Ausserdem ist jedes  $x_k$  (und  $d_k$ ) ein ganzes Vielfaches von  $L$ . Wähle nun  $k$  so gross, dass

$$x_k \leq \frac{1}{2^k} x < L.$$

Dies, zusammen mit dem Fakt, dass  $x_k$  ein ganzes Vielfaches von  $L$  ist, impliziert, dass  $x_k = 0$ , was unmöglich ist. Deshalb können  $x$  und  $d$  nicht kommensurabel sein.  $\square$

Wir haben diese Aussage mit einem sogenannten *Widerspruchsbeweis* bewiesen. Hierfür haben wir eine Annahme getroffen, und diese zu einem Widerspruch geführt. Dies zeigt, dass unsere Annahme falsch war.

## Zeitgenössische Umformulierung

Seien  $a, b > 0$  zwei kommensurable Längen. Das heisst, es existieren  $L > 0$  und  $m, n \in \mathbb{N}$  mit  $a = mL$ ,  $b = nL$ . Dann gilt:

$$\frac{a}{b} = \frac{mL}{nL} = \frac{m}{n},$$

das heisst das Verhältnis  $a/b$  ist eine *rationale Zahl*. Zurück zum Quadrat mit Seite  $x$  und Diagonale  $d$ . Nach Pythagoras gilt  $d^2 = 2x^2$ . Falls  $x = mL$  und  $d = nL$  gilt, dann also

$$2 = \frac{d^2}{x^2} = \left(\frac{d}{x}\right)^2 = \left(\frac{n}{m}\right)^2,$$

und somit

$$2m^2 = n^2. \tag{1}$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist durch 2 teilbar. Dies impliziert, dass  $n^2$ , und somit auch  $n$ , durch 2 teilbar ist. Schreibe nun  $n = 2k$ . Schreibe  $n = 2k$  mit  $k \in \mathbb{N}$ . Setze das in die Gleichung (1) ein und erhalte  $2m^2 = (2k)^2 = 4k^2$ , beziehungsweise

$$m^2 = 2k^2.$$

Die rechte Seite ist durch 2 teilbar, also auch  $m$ . Wir schliessen, dass sowohl  $n$  als auch  $m$  durch 2 teilbar sind. Schreibe noch  $m = 2\ell$  mit  $\ell \in \mathbb{N}$ . Es gilt also

$$2 = \left(\frac{n}{m}\right)^2 = \left(\frac{k}{\ell}\right)^2.$$

In anderen Worten sind Zähler und Nenner beide gerade. Iteriere dieses Verfahren  $k$  mal, bis  $n/2^k < 1$ , Dann entsteht ein Widerspruch.

**Korollar.** Die Gleichung  $z^2 = 2$  hat keine rationale Lösung, das heisst, keine Lösung der Form  $z = p/q$  mit  $p, q \in \mathbb{N}$  und  $q > 0$ .

Das Ziel für den Rest dieses Kapitels ist es, eine Zahlenmenge  $\mathbb{R}$  (die Menge der *reellen Zahlen*) zu konstruieren, in welcher die Gleichung  $z^2 = 2$  eine Lösung hat.

**Übung.** Die Gleichung  $z = \sqrt{2}x + \sqrt{3}y$  hat keine ganze Lösungen ausser  $(0, 0, 0)$ .

## 2 Mengen im Vergleich

Wir haben bereits einige Mengen erwähnt, nämlich die *natürlichen Zahlen*

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\},$$

die Menge der *ganzen Zahlen*,

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\},$$

und die Menge der *rationalen Zahlen*

$$\mathbb{Q} = \{p/q \mid p, q \in \mathbb{Z}, q > 0\}.$$

Wir wollen eine weitere Menge, die Menge  $\mathbb{R}$  der *reellen Zahlen* einführen. Es gelten dann die Inklusionen

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

### Wichtige Grundbegriffe

**Definition.** Seien  $A, B$  zwei Mengen. Eine *Abbildung* zwischen  $A$  und  $B$ , in Symbolen,  $f: A \rightarrow B$ , ist eine Zuordnung  $f(a) \in B$  für jedes  $a \in A$ . Eine Abbildung  $f: A \rightarrow B$  heisst

- (i) *injektiv*, falls für alle  $a_2, a_1 \in A$  mit  $a_2 \neq a_1$  gilt, dass  $f(a_1) \neq f(a_2)$ ,
- (ii) *surjektiv*, falls für alle  $b \in B$  ein Element  $a \in A$  existiert mit  $f(a) = b$ ,
- (iii) *bijektiv*, falls  $f$  sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

**Beispiel.**

- (i) Seien  $A = B = \{0, 1\}$ . Es gibt 4 Abbildungen  $f: A \rightarrow B$ :

- (a)  $0 \mapsto 0$  und  $1 \mapsto 0$ ,
- (b)  $0 \mapsto 1$  und  $1 \mapsto 1$ ,
- (c)  $0 \mapsto 0$  und  $1 \mapsto 1$ ,
- (d)  $0 \mapsto 1$  und  $1 \mapsto 0$ .

Abbildungen (a) und (b) sind weder injektiv noch surjektiv. Abbildungen (c) und (d) sind beide bijektiv.

- (ii) Seien  $A = B = \mathbb{N}$ . Betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} f: \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ n &\mapsto 2n. \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist injektiv, aber nicht surjektiv. Die Abbildung

$$\begin{aligned} g: \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ n &\mapsto \frac{2n - 1 + (-1)^n}{4}, \end{aligned}$$

also die Abbildung die durch 2 dividiert und dann abrundet, ist nicht injektiv, aber surjektiv. Um zu sehen, dass  $g(n) = \lfloor n/2 \rfloor$ , betrachte zwei Fälle:

- (a)  $n = 2k$  ist gerade. Dann ist  $g(n) = (4k + 1 - 1)/4 = k$ .
- (b)  $n = 2k + 1$  ist ungerade. Dann ist  $g(n) = (4k + 2 - 1 - 1)/4 = k$ .

**Bemerkung.**

- (1) Bijektive Abbildungen  $f: A \rightarrow B$  haben eine eindeutige *Umkehrabbildung*  $f^{-1}: B \rightarrow A$ . Die Konstruktion dafür ist wie folgt. Sei  $b \in B$ . Da  $f$  surjektiv ist, existiert  $a \in A$  mit  $f(a) = b$ . Da  $f$  injektiv ist, ist dieses  $a$  eindeutig. Setze  $f^{-1}(b) = a$ . Es gilt dann

$$f^{-1}(f(a)) = a$$

für alle  $a \in A$ , und ebenso

$$f(f^{-1}(b)) = b$$

für alle  $b \in B$ . Wir schreiben häufig

$$\begin{aligned} f^{-1} \circ f &= \text{Id}_A, \\ f \circ f^{-1} &= \text{Id}_B, \end{aligned}$$

in Worten, “ $f^{-1}$  verknüpft mit  $f$  ist die Identitätsabbildung auf  $A$ ” und ähnlich, “ $f$  verknüpft mit  $f^{-1}$  ist die Identitätsabbildung auf  $B$ ”.

- (2) Für endliche Mengen  $A$  und  $B$  gilt: Es existiert eine bijektive Abbildung  $f: A \rightarrow B$ , genau dann, wenn  $A$  und  $B$  gleich viele Elemente haben.

**Definition.** Eine Menge  $A$  heisst

- (i) *unendlich*, falls eine injektive, nicht surjektive Abbildung  $f: A \rightarrow A$  existiert,
- (ii) *abzählbar*, falls eine bijektive Abbildung  $f: \mathbb{N} \rightarrow A$  existiert.

**Beispiel.** Sei  $A = \mathbb{N}$ . Die Abbildung  $f$  aus Beispiel (ii) ist injektiv, aber nicht surjektiv. Also ist  $\mathbb{N}$  eine unendliche Menge.

**Beispiel.** Sei  $M$  eine Menge, welche  $\mathbb{N}$  als Teilmenge enthält (zum Beispiel  $M = \mathbb{Q}$ ). Dann ist  $M$  unendlich. Betrachte dazu die Abbildung

$$f: M \rightarrow M$$

$$x \mapsto \begin{cases} x+1 & \text{falls } x \in \mathbb{N} \subset M, \\ x & \text{falls } x \in M \setminus \mathbb{N} \end{cases}$$

Folgende Proposition zeigt in einem gewissen Sinn, dass es gleich viele Brüche wie natürliche Zahlen gibt. Dies ist unser erstes potentiell überraschendes Resultat.

**Proposition 1.** Die Menge  $\mathbb{Q}$  der rationalen Zahlen ist abzählbar.

*Beweis.* Wir konstruieren eine Bijektion  $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ . Für  $k \in \mathbb{N}$  mit  $k \geq 1$  definiere

$$A_k = \{p/q \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \geq 1, p/q \text{ ist gekürzt}, |p| + |q| = k\}.$$

Alle solchen  $A_k \subset \mathbb{Q}$  sind endlich und

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{k \geq 1} A_k$$

ist die *disjunkte Vereinigung* dieser Mengen. Wir haben

$$A_1 = \{0/1\}, A_2 = \{\pm 1/1\}, A_3 = \{\pm 1/2, \pm 2/1\}, \dots$$

Sei  $a_k = |A_k|$  die Anzahl Elemente von  $A_k$ . Definiere Teilmengen  $B_k \subset \mathbb{N}$  mit  $|B_k| = a_k$ . Dazu setze  $B_1 = \{0\}$ , und für  $k \geq 2$  setze

$$B_k = \{a_1 + \dots + a_{k-1}, a_1 + \dots + a_{k-1} + 1, \dots, a_1 + \dots + a_{k-1} + a_k - 1\}.$$

Es gilt dann

$$B_1 = \{0\}, B_2 = \{1, 2\}, B_3 = \{3, 4, 5, 6\}, \dots$$

Wähle eine Bijektion  $\varphi_k: B_k \rightarrow A_k$  für alle  $k \geq 1$ . Definiere nun

$$\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$$

$$n \mapsto \varphi_k(n) \text{ falls } n \in B_k.$$

Die Abbildung  $\varphi$  ist eine Bijektion, da  $\mathbb{N}$  die disjunkte Vereinigung der  $B_k$  und  $\mathbb{Q}$  die disjunkte Vereinigung der  $A_k$  ist. □



Dieser Beweis zeigt allgemeiner, dass jede Menge, die eine abzählbare Vereinigung endlicher Mengen ist, selber abzählbar ist. Man könnte diese Aussage zum Beispiel für Aufgabe 5 auf Serie 1 verwenden.

**Frage.** Ist jede unendliche Menge abzählbar?

Georg Cantor hat ca. 1870 als erste Person die Antwort “nein” auf diese Frage festgehalten. Wir konstruieren nun nach seiner Idee eine Menge, die nicht abzählbar ist. Dazu betrachten wir die *Potenzmenge*  $P(M)$  einer Menge  $M$ , definiert als die “Menge aller Teilmengen von  $M$ ”. Ein wenig formaler,

$$P(M) = \{A \mid A \subset M\}.$$

**Beispiel.** Sei  $M = \{0, 1\}$ . Dann ist

$$P(M) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}.$$

Das Symbol  $\emptyset$  bezeichnet die *leere Menge*.

**Bemerkung.** Falls die Menge  $M$  selbst  $n$  Elemente hat, dann hat ihre Potenzmenge  $2^n$  Elemente. Um das zu beweisen, bilden wir jede Teilmenge  $A$  von  $M$  auf die Funktion

$$f_A: M \rightarrow \{0, 1\}$$

$$x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } x \notin A, \\ 1, & \text{falls } x \in A, \end{cases}$$

ab. Diese Abbildung  $A \mapsto f_A$  ist eine Bijektion zwischen  $P(M)$  und der Menge von Funktionen  $f: M \rightarrow \{0, 1\}$ , und es gibt  $2^n$  solche Funktionen.

**Proposition 2** (Cantor). *Sei  $M$  eine beliebige Menge. Dann existiert keine surjektive Abbildung  $\varphi: M \rightarrow P(M)$ . Insbesondere existiert keine Bijektion  $\varphi: M \rightarrow P(M)$ .*

**Korollar.** *Die Potenzmenge  $P(\mathbb{N})$  ist nicht abzählbar.*

*Beweis der Proposition.* Wir führen einen klassischen Widerspruchsbeweis. Wir nehmen an, es gäbe doch eine solche Surjektion  $\varphi: M \rightarrow P(M)$ . Betrachte nun die Teilmenge  $A$  von  $M$  aller  $x$ , die nicht in  $\varphi(x)$  enthalten sind. In Symbolen,

$$A = \{x \in M \mid x \notin \varphi(x)\}.$$

Die Forderung  $x \notin \varphi(x)$  macht Sinn, da  $\varphi(x)$  selbst eine Teilmenge von  $M$  ist. Da  $\varphi$  surjektiv ist, muss ein  $a \in M$  existieren mit  $\varphi(a) = A$ . Wir fragen nun, ob  $a \in A$  ist oder nicht. Wäre  $a \in A$ , so müsste nach Definition von  $A$  gelten, dass  $a \notin \varphi(a)$ . Aber das widerspricht der Definition von  $\varphi(a) = A$ . Wäre jedoch  $a \notin A$ , dann wäre die Bedingung  $a \notin \varphi(a)$  erfüllt, also  $a \in A$ . Aber da  $A = \varphi(a)$ , widerspricht auch dies der Definition von  $A$ . Somit führen beide Möglichkeiten zu einem Widerspruch. Dies bedeutet, dass unsere ursprüngliche Annahme, dass eine Surjektion  $\varphi: M \rightarrow P(M)$  existiert, verworfen werden muss: Es kann keine solche Abbildung geben.  $\square$

## Einschub: Beweismethoden

Ein *Beweis* ist eine “Deduktion einer Aussage aus bereits bewiesenen Aussagen oder Grundaxiomen”. Wichtig ist hier, dass die Deduktion logisch korrekt erfolgt. Folgende Beweismethoden sind typisch.

- Geometrische Beweise, zum Beispiel mit Hilfe von Euklids Axiomen. Das erste Theorem der Vorlesung haben wir so bewiesen.
- Beweise mithilfe von logischen Schlussfolgerungen, zum Beispiel Widerspruchsbeweise. Proposition 2 haben wir so bewiesen.
- Kombinatorische Beweise, zum Beispiel Beweise mit vollständiger Induktion.

Wir führen nun ein Beispiel eines Beweises durch vollständige Induktion.

**Definition.** Die  $n$ -te *Catalanzahl*  $C_n$  ist die Anzahl korrekte Klammerungen mit  $2n$  Klammern ( $n$  linke und  $n$  rechte Klammern).

### Beispiele.

- $C_1 = 1$ , die einzige Korrekte Klammerung ist  $()$ .
- $C_2 = 2$ , die Klammerungen  $()()$  und  $(())$  sind beide korrekt.
- $C_3 = 5$ .

**Behauptung.** Die  $n$ -te *Catalanzahl*  $C_n$  erfüllt  $C_n \geq 2^{n-1}$ .

*Beweis durch vollständige Induktion.* Für die *Induktionsverankerung* testen wir die Aussage für  $n = 1$ : Tatsächlich ist  $C_1 \geq 2^0$ .

Die *Induktionsannahme* ist nun, dass die Aussage für ein festes  $n \in \mathbb{N}$  stimmt.

Im *Induktionsschritt* leiten wir nun die Aussage für  $n + 1$  aus der Induktionsannahme (für  $n$ ) her. Hier heisst das, dass wir  $C_{n+1} \geq 2^n$  aus  $C_n \geq 2^{n-1}$  herleiten wollen. Sei dazu  $K$  eine korrekte  $n$ -Klammerung, das heisst eine korrekte Klammerung mit  $n$  linken und  $n$  rechten Klammern. Dann sind sowohl  $(K)$  als auch  $()K$  korrekte  $(n + 1)$ -Klammerungen. Weiter gilt, dass diese beiden Klammerungen verschieden sind: Die erste der beiden Klammerungen beginnt mit zwei geöffneten Klammern, wobei die zweite mit einer geöffneten und einer geschlossenen Klammer beginnt. Weiter gilt, dass für verschiedene korrekte  $n$ -Klammerungen  $K_1$  und  $K_2$  auch  $()K_1, (K_1), ()K_2, (K_2)$  verschieden sind (wieso?). Wir können also aus jeder korrekten  $n$ -Klammerung zwei korrekte  $(n + 1)$ -Klammerungen konstruieren. Somit folgt, dass

$$C_{n+1} \geq 2C_n \geq 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n.$$

Dies zeigt die Aussage für  $n + 1$ . □

In Serie 1 sehen wir, dass sogar  $C_n \geq 3^n$  gilt, jedenfalls für  $n \geq 17$ . Um dies zu zeigen reicht es aber nicht, zu bemerken, dass neben  $(K)$  und  $()K$  auch  $K()$  eine korrekte Klammerung ist. Diese könnte nämlich mit  $()K$  übereinstimmen. Hierzu brauchen wir die Formel in folgender Bemerkung.

**Bemerkung.** Es gilt

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Die zweite Gleichheit ist eine einfache Rechnung. Wir rechtfertigen die erste Gleichheit. Der erste der Binomialkoeffizienten zählt alle  $n$ -Klammerungen (auch inkorrekte). Der zweite Binomialkoeffizient zählt die Anzahl inkorrektur Klammerungen. Man kann sich dies folgendermassen skizzenhaft überlegen. Eine inkorrekte Klammerung hat eine erste Position, wo eine rechte Klammer zuviel ist. Drehe alle Klammern hinter dieser Position um. Die Klammerung die wir so erhalten, hat  $n+1$  rechte Klammern. Weiter kann man diesen Prozess rückgängig machen: Jede Klammerung mit  $n+1$  rechten Klammern liefert eine inkorrekte Klammerung mit  $n$  rechten Klammern. Also sind die schlechten  $n$ -Klammerungen in Bijektion mit der Anzahl Klammerungen mit  $n+1$  rechten (und  $n-1$  linken) Klammern.

### 3 Gruppen und Körper

**Definition.** Eine *Gruppe* ist eine Menge  $G$  mit einer *Verknüpfung*  $\circ: G \times G \rightarrow G$ , welche folgende Eigenschaften erfüllt.

- (i) Es existiert ein Element  $e \in G$ , so dass für alle  $g \in G$  gilt, dass  $g \circ e = e \circ g = g$ .
- (ii) Für alle  $g \in G$  existiert ein  $h \in G$  mit  $g \circ h = h \circ g = e$ .
- (iii) Für alle  $a, b, c \in G$  gilt  $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ .

**Notation.**

- (i) Das Element  $e$  bezeichnen wir als das *neutrale Element*.
- (ii) Wir schreiben häufig  $g^{-1}$  für  $h$  und nennen  $g^{-1}$  das zu  $g$  *inverse Element*.
- (iii) Das Gesetz  $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$  nennt man das *Assoziativgesetz*.

**Beispiele.**

- Die Menge  $G = \{e\}$  mit der Operation  $e \circ e = e$  ist eine Gruppe (sie heisst *triviale Gruppe*).
- Die Menge  $\{e, a\}$  mit Verknüpfungstabelle zu finden in Tabelle I.1 bildet eine Gruppe.
- Die Menge  $\{e, a, b\}$  mit Verknüpfungstabelle zu finden in Tabelle I.2 bildet eine Gruppe. Hier kann man  $a$  als ebene Drehung um 0 mit Winkel  $2\pi/3$  interpretieren. Ähnlich ist  $b$  eine Drehung mit Winkel  $4\pi/3$ .

	$e$	$a$
$e$	$e$	$a$
$a$	$a$	$e$

Tabelle I.1: Verknüpfungstabelle von  $\{e, a\}$

	$e$	$a$	$b$
$e$	$e$	$a$	$b$
$a$	$a$	$b$	$e$
$b$	$b$	$e$	$a$

Tabelle I.2: Verknüpfungstabelle von  $\{e, a, b\}$

- $(\mathbb{Z}, +)$  ist eine Gruppe.
- $(\mathbb{Z}, \cdot)$  ist keine Gruppe. Zum Beispiel hat die Zahl  $2 \in \mathbb{Z}$  kein inverses Element.
- $(\mathbb{Q}, +)$  ist eine Gruppe.
- $(\mathbb{Q}, \cdot)$  ist keine Gruppe. Zum Beispiel hat  $0 \in \mathbb{Q}$  kein inverses Element.

**Proposition 3.** *In jeder Gruppe  $G$  hat die Gleichung  $a \circ x = c$  eine eindeutige Lösung  $x \in G$ . Hier sind  $a, c$  vorgegeben.*

*Beweis.* Wir zeigen Existenz und Eindeutigkeit separat. Wir wissen nach Axiom (ii), dass  $b \in G$  existiert mit  $b \circ a = e$ . Verknüpfung mit  $b$  von links auf beiden Seiten liefert  $b \circ (a \circ x) = b \circ c$ . Axiom (iii) sagt, dass die linke Seite

$$(b \circ a) \circ x = e \circ x = x$$

ist. Also ist  $x = b \circ c = a^{-1} \circ c$  eine Lösung. Um Eindeutigkeit zu zeigen seien  $x_1, x_2 \in G$  mit

$$a \circ x_1 = c = a \circ x_2.$$

Verknüpfung von links wie oben mit  $b$  liefert

$$b \circ (a \circ x_1) = b \circ (a \circ x_2).$$

Wir erhalten

$$(b \circ a) \circ x_1 = (b \circ a) \circ x_2.$$

Sobald wir uns erinnern, dass  $b \circ a = e$ , schliessen wir, dass  $x_1 = x_2$ . □

### Spezialfälle.

- (1) Falls  $a \circ x = a$  gilt, so ist  $x = e$ . Dies liefert Eindeutigkeit des neutralen Elements.
- (2) Falls  $a \circ x = e$  gilt, so ist  $x = a^{-1}$ . Dies liefert Eindeutigkeit des inversen Elements.

## Körper

**Definition.** Eine Menge  $K$  mit zwei Verknüpfungen  $+, \cdot : K \times K \rightarrow K$  heisst *Körper*, falls

- (i)  $(K, +)$  ist eine kommutative Gruppe mit neutralem Element  $0 \in K$ ,
- (ii)  $(K \setminus \{0\}, \cdot)$  ist eine kommutative Gruppe mit neutralem Element  $1 \in K \setminus \{0\}$  (das heisst  $1 \neq 0$ ),
- (iii) für alle  $x, y, z \in K$  gilt das Distributivgesetz  $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ .

Wir halten uns hier an die Konvention, dass die Multiplikation stärker bindet als die Addition. Konkret haben wir oben

$$x \cdot y + x \cdot z = (x \cdot y) + (x \cdot z).$$

Dass  $(G, \circ)$  eine kommutative Gruppe ist, bedeutet, dass für alle  $g, h \in G$  gilt, dass  $g \circ h = h \circ g$ .

### Beispiele.

- (1)  $K = \mathbb{Q}$  mit der üblichen Addition

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

und üblichen Multiplikation

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

bildet einen Körper mit neutralen Elementen  $0/1$  (für  $+$ ) und  $1/1$  (für  $\cdot$ ). Die Rechengesetze (Assoziativität, Kommutativität und Distributivität) übertragen sich von den entsprechenden Gesetzen für die Menge der ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$  mit der üblichen Addition und Multiplikation. Diese wiederum wurden von Dedekind erstmals formal definiert (“was sind und sollen Zahlen”). Wir führen das in dieser Vorlesung nicht weiter aus.

- (2)  $K = \{0, 1\}$  mit Verknüpfungstabellen wie in Tabelle I.3 ist ein Körper (der kleinste).

+	0	1	·	0	1
0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1

Tabelle I.3: Verknüpfungstabellen von  $\{0, 1\}$

- (3)  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  ist kein Körper, da nur  $\pm 1$  multiplikative Inverse haben.

**Ausblick** (Algebra). Sei  $p \in \mathbb{N}$  prim. Dann ist die Menge

$$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$$

mit “Addieren und Multiplizieren modulo  $p$ ” ein Körper.

## 4 Konstruktion der reellen Zahlen

**Ziel.** Wir konstruieren eine Zahlenmenge  $\mathbb{R}$ , die Menge der reellen Zahlen, mit folgender Eigenschaft: Jede stetige Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , welche negative und positive Werte annimmt, hat eine Nullstelle in  $\mathbb{R}$ . Insbesondere soll jede Funktion der Form  $f(x) = x^2 - a$  mit  $a > 0$  eine Nullstelle in  $\mathbb{R}$  haben. Folglich hat in  $\mathbb{R}$  jede positive Zahl  $a > 0$  eine Quadratwurzel.

Wir konstruieren die reellen Zahlen nach Dedekind, ca. 1872.

**Definition.** Eine Teilmenge  $D \subset \mathbb{Q}$  heisst *Dedekindscher Schnitt*, oder kurz *Schnitt*, falls

- (1)  $D \neq \emptyset, D \neq \mathbb{Q}$ ,
- (2) für alle  $x, y \in \mathbb{Q}$  mit  $x \in D$  und  $x \leq y$  gilt  $y \in D$ ,
- (3)  $D$  hat kein kleinstes Element.

Intuitiv ist ein Schnitt eine “rechte Hälfte” von  $\mathbb{Q}$ , wobei die Grenze zwischen den Hälften nicht unbedingt bei 0 ist, und sie auch nicht als Element der rechten Hälfte gilt. Siehe auch Abbildung I.2.



Abbildung I.2: Ein Dedekindscher Schnitt

**Beispiel.** Sei  $x = p/q \in \mathbb{Q}$ . Setze  $D_x = \{y \in \mathbb{Q} \mid y > x\} \subset \mathbb{Q}$ . Dann ist  $D_x$  ein Schnitt. Wir nennen  $D_x$  einen *rationalen Schnitt*, da diese später die rationalen Zahlen in  $\mathbb{R}$  werden.

**Bemerkung.** Seien  $D, D' \subset \mathbb{Q}$  zwei Schnitte mit  $D \neq D'$ . Dann existiert  $x \in \mathbb{Q}$  mit entweder  $x \in D$  und  $x \notin D'$ , oder  $x \notin D$  und  $x \in D'$ . Im ersten Fall gilt  $D' \subset D$ , und im zweiten Fall gilt  $D \subset D'$ .

**Frage.** Sei  $D \subset \mathbb{Q}$  ein Schnitt. Existiert eine Zahl  $x \in \mathbb{Q}$  mit  $D = D_x$ ? (Hier ist  $D_x$  die Menge aus dem Beispiel oben.)

Wie erwartet ist die Antwort nein, siehe Proposition 4 unten.

**Definition.** Die Menge  $\mathbb{R}$  der *reellen Zahlen* ist definiert als die Menge aller Dedekindscher Schnitte  $D \subset \mathbb{Q}$ .

**Beispiele.**

- Sei  $p/q \in \mathbb{Q}$ . Dann ist

$$D_{p/q} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > p/q\}$$

ein rationaler Schnitt. So erhalten wir eine “Einbettung”  $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ .

- Nicht alle Schnitte sind rational. Zum Beispiel ist

$$D_{\sqrt{2}} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 > 2 \text{ oder } x < 0\}$$

kein rationaler Schnitt.

**Proposition 4** (Cantor). *Die Menge  $\mathbb{R}$  ist überabzählbar, das heisst unendlich aber nicht abzählbar.*

**Korollar.** *Es gibt irrationale Schnitte, das heisst Schnitte  $D \subset \mathbb{Q}$ , welche nicht vom Typ  $D_x$  für  $x \in \mathbb{Q}$  sind.*

*Beweis.* Die Menge  $\mathbb{Q}$  ist abzählbar (siehe Proposition 1). □

*Beweis von Proposition 4.* Wir erinnern uns an Proposition 2 und ihr Korollar, die sagten, dass die Potenzmenge  $P(\mathbb{N})$  überabzählbar ist. Wir konstruieren nun eine injektive Abbildung  $\psi: P(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}$ . Daraus folgt dann, dass  $\mathbb{R}$  überabzählbar ist.

Die Konstruktion von  $\psi$  ist folgendermassen. Sei  $B \in P(\mathbb{N})$ , das heisst  $B \subset \mathbb{N}$ . Schreibe  $B = \{n_0, n_1, n_2, \dots\}$  mit  $n_0 < n_1 < n_2 < \dots$ . Diese Menge könnte auch endlich sein. Definiere einen Schnitt

$$D_B = \left\{ x \in \mathbb{Q} \mid x > \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n_k} \right\}.$$

Es gilt zum Beispiel:

- (1) Sei  $B = \emptyset$ . Wir halten uns an die Konvention “leere Summe gleich 0”. Es gilt also  $D_{\emptyset} = D_0$ .
- (2) Sei  $B = \mathbb{N}$ , das heisst  $B = \{0, 1, 2, \dots\}$  (also  $n_k = k$ ). Berechne

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k &= 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots \\ &= \frac{1}{1 - 1/3} \\ &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Also ist  $D_{\mathbb{N}} = D_{3/2}$ .

Sei nun  $B = \{n_0, n_1, \dots\} \subset \mathbb{N}$  beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n_k} \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k \\ &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Also gilt  $D_0 \supset D_B \supset D_{3/2}$ . Insbesondere ist  $D_B \neq \emptyset$  und  $D_B \neq \mathbb{Q}$ , das heisst  $D_B$  ist wirklich ein Schnitt. Setze nun

$$\psi(B) = D_B \in \mathbb{R}.$$

Wir behaupten nun, dass  $\psi$  injektiv ist. Konkreter, seien  $B_1, B_2 \in P(\mathbb{N})$  mit  $B_1 \neq B_2$ . Wir zeigen, dass  $D_{B_1} \neq D_{B_2}$ . Schreibe dazu

$$\begin{aligned} B_1 &= \{m_0, m_1, m_2, \dots\} \text{ mit } m_0 < m_1 < m_2 < \dots, \\ B_2 &= \{n_0, n_1, n_2, \dots\} \text{ mit } n_0 < n_1 < n_2 < \dots \end{aligned}$$

Sei  $\ell \in \mathbb{N}$  minimal mit  $m_\ell \neq n_\ell$ . So ein  $\ell$  existiert, da  $B_1 \neq B_2$ . Wir nehmen an, dass  $m_\ell < n_\ell$ . Beispielsweise, für  $B_1 = \{0, 1, 2\}$  und  $B_2 = \{0, 1, 3, 4, 5\}$  ist  $\ell = 2$ ,  $m_2 = 2$  und  $n_2 = 3$ . Vergleiche die Summen

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{m_k} \geq \sum_{k=0}^{\ell} \left(\frac{1}{3}\right)^{m_k} = \sum_{k=0}^{\ell-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{m_k} + \left(\frac{1}{3}\right)^{m_\ell}, \\ S_2 &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n_k} = \sum_{k=0}^{\ell-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{n_k} + \sum_{k=\ell}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n_k}. \end{aligned}$$

Setzen wir

$$\begin{aligned} X &= \sum_{k=0}^{\ell-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{n_k}, \\ Y &= \sum_{k=\ell}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n_k}, \end{aligned}$$

so erhalten wir aus  $n_\ell > m_\ell$ , dass  $n_\ell \geq m_\ell + 1$ . Also folgt

$$Y \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{m_\ell} \cdot \left(\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots\right).$$

Es gilt also

$$\begin{aligned} S_1 &\geq X + \left(\frac{1}{3}\right)^{m_\ell}, \\ S_2 &\leq X + \left(\frac{1}{3}\right)^{m_\ell} \cdot \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Setze

$$x = X + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{m_\ell} \in \mathbb{Q}.$$

Dann ist  $x < S_1$ , also  $x \notin D_{B_1}$ , und  $x > S_2$ , also  $x \in D_{B_2}$ . Wir schliessen, dass  $\psi(B_1) \neq \psi(B_2)$ . Also ist  $\psi$  injektiv und  $\mathbb{R}$  überabzählbar.  $\square$

**Frage.** Wo kommen all diese Schnitte  $D_B$  her?



Es muss irrationale Schnitte  $D_B$  geben (sonst wären es abzählbar viele). Insbesondere muss es Teilmengen  $B \subset \mathbb{N}$  geben, so dass die entsprechende Summe

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n_k}$$

keine rationale Zahl ist. Die Menge all dieser Summen heisst *Cantormenge*.

## Eine Ordnung auf den reellen Zahlen

Seien  $D, D' \in \mathbb{R}$  mit  $D \neq D'$ . Dann gilt entweder  $D \subset D'$  oder  $D' \subset D$  (siehe oben).

**Definition.** Wir schreiben  $D < D'$  falls  $D' \subset D$  und  $D' \neq D$ .

**Bemerkung.** Falls  $D < D'$  (das heisst  $D' \subset D$  und  $D' \neq D$ ), dann existiert  $y \in \mathbb{Q}$  mit  $y \in D$  und  $y \notin D'$ . Da  $D$  kein kleinstes Element enthält, existiert  $x \in \mathbb{Q}$  mit  $x < y$  und  $x \in D$ . Dann gilt  $D' \subset D_x \subset D$ , und all diese Inklusionen sind strikt. Die erste Inklusion ist strikt, da  $x < y$ . Das war nötig, da  $D' = D_y$  gelten könnte. Wir haben also eine rationale Zahl  $x \in \mathbb{Q}$  gefunden mit  $D < D_x < D'$ . Wir haben somit gezeigt, dass zwischen zwei verschiedenen reellen Zahlen immer eine rationale Zahl liegt. Dies ist überraschend, da die Menge  $\mathbb{Q}$  abzählbar ist, aber nicht die Menge  $\mathbb{R}$ .

Kronecker hat aus diesem Grund Dedekinds Arbeit nicht akzeptiert, und Poincaré hat es sogar als Teufelswerk bezeichnet. Aus diesem Skeptizismus ist unter anderem der Konstruktivismus in der Logik entstanden. Dieser hat jedoch nicht mehr viele Vertreter.

## Addition auf den reellen Zahlen

**Definition.** Seien  $D, D' \in \mathbb{R}$  Dedekindsche Schnitte. Wir Definieren die *Summe* von  $D$  und  $D'$  als

$$D + D' = \{z \in \mathbb{Q} \mid \text{es existieren } x \in D \text{ und } y \in D' \text{ mit } z = x + y\}.$$

Man kann leicht überprüfen, dass  $D + D'$  ein Schnitt ist.

**Lemma 1.**  $\mathbb{R}$  mit Addition ist eine kommutative Gruppe mit neutralem Element

$$D_0 = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$$

*Beweis.*

- Kommutativität und Assoziativität übertragen sich von der Addition auf  $\mathbb{Q}$ .
- $D_0$  ist das neutrale Element. Zu prüfen ist für alle  $D \in \mathbb{R}$ , dass  $D + D_0 = D$ . Wir zeigen beide Inklusionen.
  - (a) Die Inklusion  $D + D_0 \subset D$  folgt direkt aus der Definition: Wenn wir eine positive Zahl (ein Element von  $D_0$ ) zu einem  $x \in D$  addieren, erhalten wir eine grössere rationale Zahl als  $x$ , die dementsprechend auch in  $D$  ist.

- (b) Die umgekehrte Inklusion  $D + D_0 \supset D$  zeigen wir wie folgt. Sei  $y \in D$ . Dann existiert  $x \in D$  mit  $x < y$ , da  $x$  nicht das kleinste Element von  $D$  ist. Dann gilt  $y = x + (y - x) \in D + D_0$ , da  $x \in D$  und  $0 < y - x \in D_0$ .

Aus (a) und (b) folgt  $D = D + D_0$ , also ist  $D_0$  das neutrale Element von  $\mathbb{R}$ .

- Die inversen Elemente müssen wir erst noch konstruieren. Das ist der womöglich schwierigste Schritt in diesem Beweis. Wir definieren

$$-D = -(\mathbb{Q} \setminus D) + D_0,$$

Das ist scheinbar die einfachste Art, dies aufzuschreiben. Für ein wenig Intuition dahinter, siehe Abbildung I.3. Hier ist zu beachten, dass das Minus auf der linken Seite anders zu interpretieren ist, als das Minus auf der rechten Seite. Wir behaupten nun, dass  $D + (-D) = D_0$ . Berechne dazu

$$D + (-D) = D + (-(\mathbb{Q} \setminus D)) + D_0.$$

Seien  $x \in D$ ,  $y \in -(\mathbb{Q} \setminus D)$ , und  $z \in D_0$ . Dann gilt:

- (i)  $z > 0$ ,
- (ii)  $-y \in \mathbb{Q} \setminus D$ , also  $y \notin D$ . Das heisst  $-y < x$ , also  $x + y > 0$ .

Wir schliessen, dass  $x + y + z > 0$ , also  $x + y + z \in D_0$ . Das zeigt die Inklusion  $D + (-D) \subset D_0$ .

Sei umgekehrt  $p/q \in D_0$ , das heisst  $p/q > 0$ . Wähle  $y \in \mathbb{Q}$  mit  $0 < y < p/q$ , zum Beispiel  $y = p/2q$ . Es existiert  $x \in D$ , so dass  $x - y \notin D$ : Sei hierzu  $x' \in D$  beliebig, und sei  $n \in \mathbb{N}$  maximal so dass  $x' - ny \in D$ . Dann erfüllt  $x = x' - ny$  diese Eigenschaft. Aus  $x - y \notin D$  folgt, dass  $x - y \in \mathbb{Q} \setminus D$ . Dann ist aber  $y - x \in -(\mathbb{Q} \setminus D)$ . Also ist  $p/q = x + (y - x) + (p/q - y)$ , wobei  $x \in D$ ,  $y - x \in -(\mathbb{Q} \setminus D)$ , und  $p/q - y \in D_0$ . Also liegt  $p/q$  in  $D + (-D) = D + (-(\mathbb{Q} \setminus D)) + D_0$ , also  $D + (-D) \supset D_0$ . Wir haben beide Inklusionen gezeigt, und somit erhalten wir  $D + (-D) = D_0$ .  $\square$

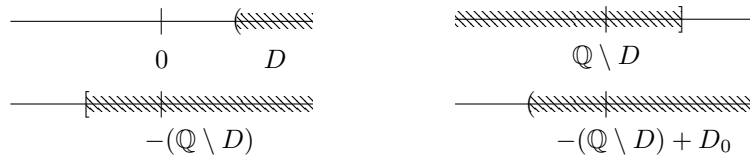


Abbildung I.3: Additive Inverse

## Multiplikation auf den reellen Zahlen

Dieser Abschnitt verläuft völlig analog zum letzten, aber wir müssen mit den Vorzeichen vorsichtig sein.

**Definition.** Seien  $D, D' \in \mathbb{R}$ . Wir nehmen an, dass  $D, D' \geq 0$ , das heisst  $D, D' \subset D_0$ . Dann definieren wir das *Produkt* von  $D$  und  $D'$  als

$$D \cdot D' = \{z \in \mathbb{Q} \mid \text{es existieren } x \in D, y \in D' \text{ mit } z = x \cdot y\}.$$

Falls  $D < 0$  und  $D' \geq 0$ , dann definieren wir

$$D \cdot D' = -(-D) \cdot D',$$

falls  $D \geq 0$  und  $D' < 0$ , definieren wir ähnlich

$$D \cdot D' = -(D \cdot (-D')),$$

und falls  $D < 0$  und  $D' < 0$  definieren wir

$$D \cdot D' = (-D) \cdot (-D').$$

In dieser Definition bezeichnet “ $-D$ ” das in obigem Abschnitt definierte additive Inverse von  $D$  (und nicht die gespiegelte Menge).

**Lemma 2.** Die Menge  $\mathbb{R} \setminus \{D_0\}$  mit Multiplikation ist eine kommutative Gruppe mit neutralem Element

$$D_1 = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 1\}.$$

*Beweis.*

- Die Kommutativität und Assoziativität der Multiplikation übertragen sich von  $\mathbb{Q}$  auf  $\mathbb{R}$ .
- Wir müssen zeigen, dass  $D_1$  tatsächlich das neutrale Element von  $\mathbb{R}$  ist. Sei  $D \in \mathbb{R}$ . Zu prüfen ist, dass  $D \cdot D_1 = D$ . Wir prüfen dies für  $D > 0$ . Die anderen Fälle sind nicht schwieriger, da müssen wir einfach an den entsprechenden Stellen ein Minussymbol hinschreiben. Wir zeigen wieder beide Inklusionen.

(a) Die Inklusion  $D \cdot D_1 \subset D$  ist klar nach Definition.

(b) Sei umgekehrt  $y \in D$ . Wähle  $x \in D$  mit  $x < y$  und  $x > 0$ . Dann ist

$$y = x \cdot \frac{y}{x} \in D \cdot D_1$$

da  $y/x > 1$ .

Also ist  $D \cdot D_1 = D$ .

- Sei  $D \in \mathbb{R}$  mit  $D \neq D_0$ . Wir konstruieren  $D^{-1}$ , das multiplikative Inverse von  $D$ . Wir nehmen auch hier der Einfachheit halber  $D > 0$  an, auch hier, um uns nicht zu viele Gedanken über das Platzieren der Minussymbole zu machen. Setze

$$D^{-1} = (D_0 \setminus D)^{-1} \cdot D_1.$$

Auch hier bedeutet das Symbol  $^{-1}$  links etwas anderes als rechts. Für Intuition dazu betrachte Abbildung I.4. Wir testen wieder beide Inklusionen.

- (a) Für  $x \in D$ ,  $y \in (D_0 \setminus D)^{-1}$ , und  $z \in D_1$  ist  $x \cdot y \cdot z > 1$ . Wir schliessen, dass  $D \cdot D^{-1} \subset D_1$ .
- (b) Sei  $p/q \in D_1$ , das heisst  $p/q > 1$ . Wähle  $y \in \mathbb{Q}$  mit  $1 < y < p/q$ , zum Beispiel

$$y = \frac{p+q}{2q}.$$

Wähle  $x \in D$  mit  $x/y \notin D$ . Dann gilt:

$$\frac{p}{q} = x \cdot \frac{y}{x} \cdot \frac{p/q}{y} \in D \cdot (D_0 \setminus D)^{-1} \cdot D_1.$$

Da  $x/y \notin D$  ist  $x/y \in D_0 \setminus D$ , also  $y/x \in (D_0 \setminus D)^{-1}$ . Wir erhalten die umgekehrte Inklusion  $D \cdot D^{-1} \supset D_1$ .

Setzen wir (a) und (b) zusammen, erhalten wir  $D \cdot D^{-1} = D_1$ . □



Abbildung I.4: Multiplikative Inverse

**Übung.** Überprüfe, dass  $D_{\sqrt{2}} \cdot D_{\sqrt{2}} = D_2$ .

**Bemerkung** (Zur Notation). Ab jetzt schreiben wir  $p/q$  anstatt  $D_{p/q}$ , auch wenn wir  $p/q$  als reelle Zahl (also als Schnitt) meinen. Ebenso schreiben wir  $\sqrt{2}$  statt  $D_{\sqrt{2}}$ . Ausserdem benutzen wir Variablen  $x, y, z, \dots$  für reelle Zahlen. Das ist ein bisschen gefährlich, da wir immer noch Axiome zu überprüfen haben, bis wir unser Ziel zu Beginn des Abschnitts erreichen. Das sollte jedoch nicht allzu viele Missverständnisse bereiten.

## Eine Ordnung auf den reellen Zahlen (Reprise)

**Definition.** Seien  $D, D' \in \mathbb{R}$ . Wir schreiben  $D \leq D'$  falls  $D \supset D'$  und  $D < D'$  falls  $D \supset D'$  und  $D \neq D'$ .

**Definition.** Ein *geordneter Körper* ist ein Körper  $(K, +, \cdot)$  zusammen mit einer binären Relation  $\leq$ , welche folgende Eigenschaften hat.

- (i) Für alle  $x, y \in K$  gilt  $x \leq y$  oder  $y \leq x$ , und  $x = y$  genau dann, wenn  $x \leq y$  und  $y \leq x$ .
- (ii) Für alle  $x, y, z \in K$  gilt, dass immer wenn  $x \leq y$  und  $y \leq z$ , dann auch  $x \leq z$ . Diese Eigenschaft nennt man *Transitivität*.
- (iii) Für alle  $x, y, z \in K$  gilt, dass immer wenn  $x \leq y$ , dann auch  $x + z \leq y + z$ .

(iv) Für alle  $x, y, z \in K$  gilt, dass immer wenn  $x \leq y$  und  $0 \leq z$ , dann auch  $xz \leq yz$ .

Bei den Eigenschaften (iii) und (iv) spricht man von additiver, beziehungsweise multiplikativer *Monotonie*.

**Beispiel.** Die Menge der rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  mit der üblichen Addition, Multiplikation und Ordnung, ist ein geordneter Körper. Mit der “üblichen Ordnung” ist die Relation

$$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad \leq bc$$

falls  $b, d > 0$ , gemeint. Wie die Ordnung auf  $\mathbb{Z}$  zu verstehen ist, überlassen wir den Mengentheoretikern und fassen das als intuitiv genug auf.

**Theorem 1.** *Die Menge der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  mit der oben definierten Addition, Multiplikation und Ordnung, ist ein geordneter Körper.*

*Beweis.*

- Nach Lemma 1 und Lemma 2 sind  $(\mathbb{R}, +)$  und  $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$  kommutative Gruppen.
- Das Distributivgesetz überträgt sich von  $\mathbb{Q}$  auf  $\mathbb{R}$ .
- Die Ordnungsaxiome (i) bis (iv) sind leicht zu überprüfen. □

## Vollständigkeit der reellen Zahlen

Eine sehr wichtige Eigenschaft von  $\mathbb{R}$ , die glücklicherweise direkt aus der Definition folgt, ist die Vollständigkeit. Vage gesagt bedeutet das, dass  $\mathbb{R}$  keine “Löcher” hat.

**Definition.** Sei  $X$  eine geordnete Menge. Dann heisst  $X$  *vollständig*, falls für alle nicht-leeren Teilmengen  $A, B \subset X$  mit  $A < B$  (das heisst für alle  $a \in A$  und alle  $b \in B$  gilt  $a < b$ ) ein Element  $c \in X$  mit  $A \leq c \leq B$  existiert.

**Behauptung.** *Die Menge  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen ist vollständig.*

*Beweis.* Setze

$$D = \bigcup_{b \in B} D_b = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > b \text{ für ein } b \in B\}.$$

Diese Menge  $D$  ist ein Schnitt (wieso?)

- Es gilt für alle  $b \in B$ , dass  $D \supset D_b$ .
- Es gilt für alle  $a \in A$  und  $b \in B$ , dass  $D_a \supset D_b$ .

Daraus folgt, dass

$$D_a \supset \bigcup_{b \in B} D_b = D.$$

Also repräsentiert der Schnitt  $D$  eine reelle Zahl  $c$  mit den gewünschten Eigenschaften: für alle  $D_a \in A$  und alle  $D_b \in B$  existiert  $D = D_c$  mit  $D_a \supset D_c \supset D_b$ . □

**Bemerkung.** In  $\mathbb{Q}$  liegt zwischen jedem Paar von rationalen Zahlen  $a/b < c/d$  eine rationale Zahl, zum Beispiel die Zahl

$$\frac{a+c}{b+d}.$$

Das heisst aber nicht, dass  $\mathbb{Q}$  vollständig ist: Tatsächlich ist  $\mathbb{Q}$  nicht vollständig. Betrachte beispielsweise  $B = D_{\sqrt{2}} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > \sqrt{2}\}$  und  $A = \mathbb{Q} \setminus D_{\sqrt{2}} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < \sqrt{2}\}$ . Es existiert keine Zahl  $c \in \mathbb{Q}$  mit  $A \leq c \leq B$ , da  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ .

**Einschub.** Wie gut lässt sich  $\sqrt{2}$  durch rationale Zahlen approximieren? Es finden sich rationale Zahlen  $p/q$  beliebig nahe an  $\sqrt{2}$  so dass

$$\left| \sqrt{2} - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q},$$

sogar

$$\left| \sqrt{2} - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2q^2},$$

aber nicht so, dass

$$\left| \sqrt{2} - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{5q^2}.$$

Man kann das mit *Fordkreisen* veranschaulichen: Es ist nämlich nichts speziell an  $\sqrt{2}$ . Jede reelle Zahl lässt sich so genau approximieren.

## Eindeutigkeit der reellen Zahlen

**Theorem 2** (Dedekind). *Seien  $K_1$  und  $K_2$  zwei vollständig geordnete Körper. Dann existiert ein Körperisomorphismus  $\varphi: K_1 \rightarrow K_2$ , das heisst für alle  $x, y \in K_1$  ist  $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ , und  $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ , und  $\varphi$  ist bijektiv.*

Wir beweisen dies in dieser Vorlesung nicht. Man findet das in vielen Lehrbüchern der Analysis. Um die Hauptidee des Beweises selber zu entdecken, versuche zu zeigen, dass es nur einen Körperisomorphismus  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gibt.

Was dieses Theorem für uns bedeutet ist, dass wir ab jetzt nur noch die Eigenschaften von  $\mathbb{R}$ , aber nicht die Definition verwenden.

## Folgerungen aus der Vollständigkeit

### Das Supremumsprinzip

**Supremumsprinzip.** *Sei  $A \subset \mathbb{R}$  nach oben beschränkt, das heisst es existiert  $b \in \mathbb{R}$  so dass für alle  $a \in A$  gilt, dass  $a \leq b$ . Dann existiert eine eindeutige Zahl  $S = \sup A$  mit folgenden Eigenschaften:*

- (i)  $A \leq S$  (das heisst  $S$  ist eine obere Schranke für  $A$ ). Präziser: für alle  $a \in A$  ist  $a \leq S$ .

(ii) für alle  $y \in \mathbb{R}$  mit  $y < S$  gilt, dass  $A \not\subseteq y$  (das heisst  $S$  ist die kleinste obere Schranke für  $A$ ). Präziser: für alle  $y \in \mathbb{R}$  mit  $y < S$  existiert  $a \in A$  mit  $y < a$ .

Die Zahl  $\sup A$  heisst *Supremum* von  $A$ . Falls  $\sup A \in A$ , dann heisst diese Zahl auch *Maximum* von  $A$ , notiert  $\max A$ .

Analog sind die Begriffe *Infimum* ( $\inf A$ ) und *Minimum* ( $\min A$ ) für nach unten beschränkte Teilmengen von  $\mathbb{R}$  definiert.

**Beispiel.** Sei  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \sqrt{2}\}$ . Dann ist  $\sup A = \sqrt{2}$  kein Maximum, da  $\sqrt{2} \notin A$ . Hingegen für  $\bar{A} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \sqrt{2}\}$  ist  $\sup \bar{A} = \sqrt{2}$  ein Maximum.

Die Menge  $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < \sqrt{2}\}$  hat aber kein Supremum in  $\mathbb{Q}$ , wenn wir das analoge Konzept in diesem geordneten Körper definieren.

*Beweis der Existenz von  $\sup A$ .* Definiere

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{für alle } a \in A \text{ gilt } a < x\},$$

die Menge aller oberen Schranken von  $A$ . Es gilt  $A < B$  nach der Definition von  $B$ . Nach Vollständigkeit existiert  $c \in \mathbb{R}$  mit  $A \leq c \leq B$ . Insbesondere ist  $c$  eine obere Schranke für  $A$ . Wir nehmen nun widerspruchswise an, es gäbe eine kleinere obere Schranke  $y \in \mathbb{R}$  für  $A$ , das heisst  $A \leq y < c \leq B$ . Dann gilt

$$A < \frac{y+c}{2} < B.$$

Nach Definition der Menge  $B$  wäre  $(y+c)/2 \in B$ , was im Widerspruch zu  $(y+c)/2 < B$  steht. Die Zahl  $\sup A = c$  hat also die gewünschten Eigenschaften.  $\square$

## Das Archimedische Prinzip

Das Archimedische Prinzip ist sehr intuitiv, war aber in unserer Axiomatisierung nicht vertreten. Wir können es aber aus der Vollständigkeit herleiten.

**Archimedisches Prinzip** (Archimedisches Prinzip). Sei  $a \in \mathbb{R}$ . Dann existiert eine natürliche Zahl  $N \in \mathbb{N}$  mit  $a < N$ .

*Beweis.* Sei  $a \in \mathbb{R}$  fest. Setze

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq a\} \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{R}.$$

Falls  $A = \emptyset$ , dann setze  $N = 1$ . Falls  $A \neq \emptyset$ , dann hat  $A$  ein Supremum  $S = \sup A \in \mathbb{R}$ , da  $A$  nach oben durch  $a$  beschränkt ist. Es ist dann  $S - 1/2$  keine obere Schranke für  $A$ . Also existiert eine Zahl  $M \in A$  mit  $M > S - 1/2$ . Also ist  $M + 1 > S$  und somit  $N = M + 1 > a$ . Diese Zahl ist natürlich, da  $M$  als Element von  $A$  eine natürliche Zahl ist.  $\square$

# Kapitel II

## Folgen und Reihen

### 1 Folgen

**Definition.** Eine *Folge* in  $\mathbb{R}$  ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} a: \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{R} \\ n &\mapsto a_n. \end{aligned}$$

Wir notieren das häufig als  $(a_0, a_1, a_2, \dots) = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Die für uns wichtigste Eigenschaft von Folgen ist deren Konvergenz.

**Definition.** Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{R}$  heisst *konvergent* mit Grenzwert  $L \in \mathbb{R}$ , falls für alle  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  mit  $\varepsilon > 0$  eine Zahl  $N \in \mathbb{N}$  existiert, so dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq N$  gilt, dass  $|a_n - L| \leq \varepsilon$ . In diesem Fall schreiben wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L.$$

In anderen Worten bedeutet  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ , dass für vorgegebenes  $\varepsilon > 0$  ab einem gewissen Index die Folge für immer im Intervall  $[L - \varepsilon, L + \varepsilon]$  liegt.

**Beispiele.**

- (1) Sei  $a_n = 1/n$  für  $n \geq 1$ . Wir behaupten, dass diese Folge konvergent mit Grenzwert  $0 \in \mathbb{R}$  ist. Dazu sei  $\varepsilon > 0$  vorgegeben. Nach dem Archimedischen Prinzip existiert  $N \in \mathbb{N}$  mit  $N > 1/\varepsilon$ . Dann gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq N$ , dass  $n > 1/\varepsilon$ , also insbesondere nach dem zweiten Ordnungsaxiom, dass  $1/n < \varepsilon$ . Folglich ist

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Varianten davon sind



- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$ ,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ ,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^a} = 0$  für eine “vernünftige” Potenz  $a$ .

(2) Sei  $a_n = \sqrt[n]{n}$ . Wir behaupten, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Wir wollen zeigen, dass

$$\sqrt[n]{n} \leq 1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

Tatsächlich gilt

$$n \leq \left(1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}\right)^n,$$

denn Anwenden der binomischen Formel

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

liefert

$$\left(1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}\right)^n = 1 + n \cdot \sqrt{\frac{2}{n-1}} + \binom{n}{2} \left(\sqrt{\frac{2}{n-1}}\right)^2 + R$$

mit  $R \geq 0$ . Wir interessieren uns nur für den quadratischen Term. Bemerke, dass

$$\binom{n}{2} \left(\sqrt{\frac{2}{n-1}}\right)^2 = \frac{n(n-1)}{2} \frac{2}{n-1} = n.$$

Somit gilt für alle  $n \geq 1$  die Ungleichung

$$1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

Aus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}} = 1,$$

was eine Variation vom ersten Beispiel ist folgt nun auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

(3) Sei  $q \in \mathbb{R}$  mit  $q \geq 0$ . Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0, & \text{falls } q < 1, \\ 1, & \text{falls } q = 1, \\ +\infty, & \text{falls } q > 1. \end{cases}$$

Die Notation

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$$

heisst, dass für alle  $S > 0$  ein Index  $N \in \mathbb{N}$  existiert, so dass für alle  $n \geq N$  gilt, dass  $a_n > S$  ist. Der zweite der Fälle ist klar. Für den dritten Fall, betrachte

$$q^n = (1 + (q - 1))^n \geq 1 + n(q - 1),$$

wobei  $q - 1 > 0$ . Sei  $S > 0$  vorgegeben. Wähle  $N \in \mathbb{N}$  mit

$$N \geq \frac{S}{q - 1}.$$

Für alle  $n \geq N$  gilt dann  $q^n \geq 1 + S > S$ . Für den ersten Fall ersetze  $q$  durch  $1/q$ .

## 2 Cauchyfolgen

**Definition.** Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{R}$  heisst *Cauchyfolge*, so dass für alle vorgegebenen  $\varepsilon$  ein  $N \in \mathbb{N}$  existiert, so dass für alle  $n, m \in \mathbb{N}$  mit  $n, m \geq N$  gilt, dass  $|a_n - a_m| \leq \varepsilon$ .

In anderen Worten, ab einem gewissen Index sind alle Folgenglieder höchstens  $\varepsilon$  voneinander entfernt. Die Definition der Konvergenz unterscheidet sich dadurch, dass bei Cauchyfolgen kein Grenzwert erwähnt wird: nur Folgeglieder werden verglichen.

**Theorem 1** (Konvergenzprinzip von Cauchy, 1789–1857). *Für Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{R}$  sind äquivalent:*

- (i) *Die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist konvergent.*
- (ii) *Die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine Cauchyfolge.*

*Beweis.* Die Implikation (i)  $\Rightarrow$  (ii) ist eine Übung. Dazu kann

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - L| + |L - a_m|$$

verwendet werden. Diese Ungleichung wird auch *Dreiecksungleichung* genannt (das Dreieck ist hier degeneriert, das heisst es liegt auf einer Linie, und die Eckpunkte sind  $a_n, a_m$  und  $L$ ).

Die Umkehrung (ii)  $\Rightarrow$  (i) ist etwas schwieriger. Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge. Betrachte für alle  $k \in \mathbb{N}$  die Menge

$$A_k = \{a_k, a_{k+1}, \dots\} \subset \mathbb{R}.$$

Wir behaupten, dass diese Mengen  $A_k$  (von oben und unten) beschränkt sind. Zum Beweis betrachte  $\varepsilon = 1 > 0$ . Dann existiert ein  $N \in \mathbb{N}$  mit der Eigenschaft, dass immer wenn  $n, m \geq N$ , dann folgt  $|a_n - a_m| \leq 1$ . Setze

$$S_k = \max\{|a_k|, |a_{k+1}|, \dots, |a_{N-1}|, |a_N| + 1\}.$$

Dann gilt für alle  $n \geq k$ , dass  $|a_k| \leq S_k$ . Tatsächlich ist für  $n \geq N$  die Ungleichung  $|a_n - a_N| \leq \varepsilon = 1$  erfüllt, also folgt  $|a_n| \leq |a_N| + 1$ . Analog existiert eine untere Schranke  $I_k$  für  $A_k$ . Dies zeigt die Behauptung.

Nun gilt für alle  $k \in \mathbb{N}$ , dass  $I_k \leq A_k \leq S_k$  (wobei  $A_k \subset \mathbb{R}$  und  $I_k, S_k \in \mathbb{R}$ ). Wende die Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$  auf die beiden Teilmengen  $\{I_0, I_1, \dots\}$  und  $\{S_0, S_1, \dots\}$  an: Es existiert  $L \in \mathbb{R}$ , so dass für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt, dass  $I_k \leq L \leq S_k$ .

Wir behaupten nun, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L.$$

Um das zu beweisen, müssen wir die formale Definition der Konvergenz anwenden. Sei also  $\varepsilon > 0$  vorgegeben. Dann existiert  $N \in \mathbb{N}$  so dass immer wenn  $n, m \geq N$ , dann auch  $|a_n - a_m| \leq \varepsilon$  (da  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge ist). Daraus folgt, dass

$$|\sup A_N - \inf A_N| \leq \varepsilon,$$

da die nicht-strikte Ungleichung ja für alle Elemente von  $A_N$  gilt. Nach Konstruktion gilt  $\inf A_N \leq L \leq \sup A_N$ . Ausserdem gilt für alle  $n \geq N$ , dass

$$|a_n - L| \leq |S_N - I_N| \leq \varepsilon,$$

da  $I_N \leq a_n \leq S_N$ . □

Zusammengefasst haben wir die Folgeglieder erst ab einem späten Index betrachtet und unter Verwendung der Vollständigkeit (!) gezeigt, dass wir einen Grenzwert  $L$  finden können.

**Bemerkung.** In  $\mathbb{R}$  (und auch in einem allgemeineren Setting) sind folgende Prinzipien äquivalent.

- Vollständigkeit,
- das Supremumsprinzip,
- das Konvergenzprinzip von Cauchy.

Die Beobachtung, dass die Folge  $I_0, I_1, I_2, \dots$  im Beweis oben konvergiert, lässt sich verallgemeinern.

**Monotonieprinzip.** Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine monoton wachsende Folge in  $\mathbb{R}$  (das heisst, für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt, dass  $a_n \leq a_{n+1}$ ), welche nach oben beschränkt ist. Dann konvergiert  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit Grenzwert

$$S = \sup\{a_0, a_1, a_2, \dots\}.$$

*Beweis.* Da  $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$  nach oben beschränkt ist, ist  $S \in \mathbb{R}$  definiert und eine reelle Zahl. Wir zeigen nun, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = S$$

gilt. Sei dazu  $\varepsilon > 0$  vorgegeben. Dann ist  $S - \varepsilon$  keine obere Schranke für  $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ , da  $S$  ja die kleinste obere Schranke ist. Also existiert  $N \in \mathbb{N}$  mit  $a_N > S - \varepsilon$ . Dann gilt für alle  $n \geq N$ , dass

$$S - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq S,$$

also  $|a_n - S| \leq \varepsilon$ . □

**Beispiel.** Betrachte die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegeben durch

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Es gilt  $a_1 = 2$ ,  $a_2 = 9/4$ ,  $a_3 = 64/27, \dots$ . Wir behaupten, dass

- (i)  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  monoton wachsend ist,
- (ii) für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt, dass  $a_n \leq 3$ .

Der Beweis dieser Behauptung ist eine Übung auf der Serie 4. Hier machen wir deshalb nur eine Beweisskizze:

- (i) Es kann gezeigt werden, dass

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1},$$

indem

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n &= \left(\frac{1 + \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n}}\right)^n \\ &\geq \frac{1}{1 + \frac{1}{n+1}} \\ &= 1 - \frac{1}{n+2} \end{aligned}$$

berechnet wird.

- (ii) Die Ungleichung  $(1 + 1/n)^n \leq 3$  ist äquivalent zur Ungleichung  $(n+1)^n \leq 3n^n$ . Man kann dann zeigen, dass

$$(n+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} n^k \leq \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) \cdot n^n.$$

**Bemerkung.** Der Grenzwert der Folge oben ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

die *Eulersche Zahl* (die wir noch nicht definiert haben).

## Teilfolgen

Wir bemerken, dass

- (i) jede konvergente Folge beschränkt ist,
- (ii) es beschränkte Folgen gibt, welche nicht konvergieren, zum Beispiel  $a_n = (-1)^n$  (wieso?).

**Definition.** Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{R}$  und  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{N}$ , welche streng monoton wachsend ist, das heisst

$$n_0 < n_1 < n_2 < \dots.$$

Dann heisst die Folge  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  eine *Teilfolge* von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

In anderen Worten ist eine Teilfolge einer Folge die Folge die man erhält, wenn man Folgeglieder wegnimmt, so dass aber noch unendlich viele Folgeglieder übrigbleibt.

**Theorem 2** (Bolzano-Weierstrass). *Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{R}$ , welche von oben und unten beschränkt ist. Dann hat die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Teilfolge.*

**Beispiel.** Die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit Folgegliedern  $a_n = (-1)^n$  hat zwei naheliegende konvergente Teilfolgen, nämlich  $(a_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$  mit Grenzwert 1, und  $(a_{2k+1})_{k \in \mathbb{N}}$  mit Grenzwert  $-1$ . Es gibt aber noch mehr Folgen von Indizes  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , die konvergente Teilfolgen liefern.

*Beweis von Theorem 2.* Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt, das heisst es existieren  $x, y \in \mathbb{R}$ , so dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt, dass  $x \leq a_k \leq y$ . Wir unterscheiden nun zwei Fälle.

1. Die Menge  $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$  ist endlich. Dann hat die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine konstante Teilfolge  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ . Diese ist konvergent.
2. Die Menge  $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$  ist unendlich. Wir konstruieren eine sogenannte Intervallschachtelung. Setze

$$I_0 = [x, y] = \{z \in \mathbb{R} \mid x \leq z \leq y\}.$$

Wähle  $a_{n_0} = a_0 \in I_0$ . Halbiere  $I_0$ , also schreibe

$$I_0 = \left[ x, \frac{x+y}{2} \right] \cup \left[ \frac{x+y}{2}, y \right].$$

Eines dieser beiden Teilintervalle enthält unendlich viele Folgeglieder, das heisst Elemente der Menge  $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ . Nenne dieses Intervall  $I_1 = [x_1, y_1]$ . Wähle  $a_{n_1} \in I_1$  mit  $n_1 > n_0$ . Das können wir fordern, da es unendlich viele Folgeglieder in  $I_1$  gibt. Halbiere wie oben  $I_1$  und schreibe

$$I_1 = \left[ x_1, \frac{x_1 + y_1}{2} \right] \cup \left[ \frac{x_1 + y_1}{2}, y_1 \right].$$

Wieder enthält eines dieser Intervalle unendlich viele Folgenglieder. Nenne dieses Intervall  $I_2 = [x_2, y_2]$ . Wähle  $a_{n_2} \in I_2$  mit  $n_2 > n_1$ . Iteriere dieses Verfahren und erhalte eine Teilfolge  $a_{n_0}, a_{n_1}, a_{n_2}, \dots$ .

Wir behaupten, dass  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge (und deshalb konvergent) ist. Zum Beweis berechnen wir die Breite des Intervalls  $I_k$ . Berechne

$$y_k - x_k = \frac{y - x}{2^k}.$$

Sei  $\varepsilon > 0$  vorgegeben. Wähle  $N \in \mathbb{N}$ , so dass

$$\frac{y - x}{2^N} \leq \varepsilon.$$

Dann gilt für alle  $k, \ell \geq N$ , dass  $a_{n_k}, a_{n_\ell} \in I_N$  höchstens  $\varepsilon$  voneinander entfernt sind. Konkreter,

$$|a_{n_k} - a_{n_\ell}| \leq \frac{y - x}{2^N} \leq \varepsilon. \quad \square$$

Zusammengefasst haben wir die Intervalle iterativ halbiert, und uns immer für das Intervall entschieden, das immer noch unendlich viele Folgenglieder enthalten hat.

**Definition.** Eine Zahl  $\alpha \in \mathbb{R}$  heisst *Häufungspunkt* einer Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{R}$ , falls es eine konvergente Folge  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  gibt mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = \alpha.$$

**Beispiel.**

- (i) Bei der Folge  $a_n = (-1)^n$  ist die Menge der Häufungspunkte  $\{-1, 1\}$ .
- (ii) Sei  $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$  eine beliebige Bijektion. Dann ist jede reelle Zahl ein Häufungspunkt, das heisst die Menge der Häufungspunkte ist  $\mathbb{R}$ . Das ist erstaunlich, da abzählbar viele Folgenglieder überabzählbar viele Häufungspunkte hervorrufen. Zum Beweis, dass tatsächlich jede reelle Zahl ein Häufungspunkt ist, sei  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Wähle  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $|\alpha - a_{n_0}| \leq 1$ . Wähle dann  $n_1 > n_0$  mit  $|\alpha - a_{n_1}| \leq 1/2$ . Wähle iterativ  $n_k > n_{k-1}$  mit  $|\alpha - a_{n_k}| \leq 1/2^k$ . Dies ist möglich, da jedes Intervall der Form  $[\alpha - 1/2^k, \alpha + 1/2^k]$  unendlich viele rationale Zahlen enthält. Wir können auch  $n_k > n_{k-1}$  einrichten, da bei der  $k$ -ten Wahl erst endlich viele rationale Zahlen bereits belegt sind. Es ist also

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = \alpha.$$

## Rechenregeln

**Proposition 1.** Seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zwei konvergente Folgen in  $\mathbb{R}$  mit Grenzwerten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b.$$

Dann gilt:

- (i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$
- (ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
- (iii) Falls für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt, dass  $a_n \neq 0$  und auch  $a \neq 0$  gilt, dann ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}.$$

**Bemerkung.** Bei (iii) müssen wir tatsächlich annehmen, dass  $a \neq 0$ . Die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit Folgegliedern

$$a_n = \frac{1}{n+1}$$

ist konvergent mit Grenzwert  $a = 0$ , aber die Folge  $(1/a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert nicht in  $\mathbb{R}$ .

*Beweisskizze.*

- (i)  $|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|$
- (ii)  $|a_n b_n - ab| \leq |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leq |a_n| |b_n - b| + |b| |a_n - a|.$  □

### 3 Reihen

**Definition.** Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{R}$ . Dann heisst die formale Summe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \dots$$

eine *Reihe*. Eine Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  heisst *konvergent* mit Grenzwert  $S \in \mathbb{R}$ , falls die Folge  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  der *Partialsummen*

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

in  $\mathbb{R}$  mit Grenzwert  $S$  konvergiert, das heisst

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = S$$

erfüllt. Wir schreiben in diesem Fall

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = S,$$

was zwei Aussagen sind: dass die Folge  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  der Partialsummen konvergiert, und dass ihr Grenzwert  $S$  ist.

## Die konstante Reihe

Sei  $c \in \mathbb{R}$  und setze  $a_k = c$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Die zugehörige Reihe ist dann

$$\sum_{k=0}^{\infty} c = c + c + c + \dots$$

Wir berechnen, dass  $s_n = (n+1)c$ . Falls  $c \neq 0$  ist, dann ist die Folge  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  (nach dem archimedischen Prinzip) unbeschränkt, also nicht konvergent. Falls  $c = 0$ , dann ist  $s_n = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , und somit

$$\sum_{k=0}^{\infty} 0 = 0.$$

**Bemerkung.** Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  eine konvergente Reihe. Dann ist insbesondere  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge. Für jedes  $\varepsilon > 0$  existiert also ein Index  $N \in \mathbb{N}$  mit der Eigenschaft, dass immer wenn  $n, m \geq N$ , dann ist

$$|s_m - s_n| \leq \varepsilon.$$

Insbesondere folgt für  $m = n+1$ , dass

$$|a_{n+1}| = |s_{n+1} - s_n| \leq \varepsilon.$$

Wir folgern, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Diese Bedingung heisst *Cauchy-Bedingung*. Die Cauchy-Bedingung ist zwar notwendig, aber nicht hinreichend für Konvergenz einer Reihe.

## Die harmonische Reihe

Aus der Divergenz der konstanten Reihe folgern wir nun die Divergenz der harmonischen Reihe. Sei  $a_n = 1/n$  für  $n \geq 1$ . Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$  heisst die *harmonische Reihe*, ausgeschrieben

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots$$

Bemerke, dass wir die Terme der harmonischen Reihe in Gruppen unterteilen können, deren Summe jeweils grösser oder gleich  $1/2$  ist. Nämlich ist zum Beispiel

- $1/2 \geq 1/2$ ,
- $1/3 + 1/4 \geq 2 \cdot 1/4 = 1/2$ ,
- $1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 \geq 4 \cdot 1/8 = 1/2$ .

Allgemeiner gilt:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geq 2n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$



und somit

$$s_n \geq \frac{n+1}{2}.$$

Also ist die Folge der Partialsummen  $s_n$  nicht beschränkt, und somit die harmonische Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} 1/k$  nicht konvergent.

## Die geometrische Reihe

Sei  $q \in \mathbb{R}$ . Die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + \dots$$

heisst *geometrische Reihe*.

**Behauptung.** Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$  ist konvergent, genau dann, wenn  $|q| < 1$ , und in diesem Fall gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

*Beweis.*

- Falls  $|q| \geq 1$ , dann ist 0 nicht der Grenzwert der Folge  $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Nach der Cauchy-Bedingung ist die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$  nicht konvergent.
- Falls  $|q| < 1$ , dann gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ . Wir berechnen die Partialsummen

$$s_n = \sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$$

indem wir bemerken, dass

$$q \cdot s_n - s_n = q^{n+1} - 1.$$

Lösen wir nach  $s_n$  auf, erhalten wir

$$s_n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = \frac{q^{n+1}}{q - 1} - \frac{1}{q - 1},$$

und somit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{1-q}.$$

□

## Folgerungen aus der Konvergenz der geometrischen Reihe

Aus der Konvergenz der geometrischen Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$  für  $|q| < 1$  können wir Konvergenz mehrerer interessanter Reihen herleiten.

(1) Sei  $a_n = 1/n^2$  für  $n \geq 1$ . Wir untersuchen die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

indem wir die Partialsummen folgendermassen abschätzen. Zum Beispiel ist

- $1/2^2 + 1/3^2 < 2 \cdot 1/2^2$ ,
- $1/4^2 + 1/5^2 + 1/6^2 + 1/7^2 < 4 \cdot 1/4^2$ ,
- $1/8^2 + \dots + 1/15^2 < 8 \cdot 1/8^2$ .

Es gilt also für alle  $n \in \mathbb{N}$ , dass

$$s_n \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1 - 1/2} = 2.$$

Die Folge  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist also monoton wachsend und nach oben beschränkt, also konvergent. Also ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = S$$

mit  $S \leq 2$ . Euler hat gezeigt, dass  $S = \pi^2/6$ .

(2) Sei  $a_n = 1/n^{1+\alpha}$  mit  $\alpha > 0$ . Schätze die Partialsummen folgendermassen ab:

- $1/2^{1+\alpha} + 1/3^{1+\alpha} < 2 \cdot 2 \cdot 1/2^{1+\alpha} = 1/2^\alpha$ ,
- $1/4^{1+\alpha} + \dots + 1/7^{1+\alpha} < 4 \cdot 1/4^{1+\alpha} = 1/4^\alpha$ ,
- $1/8^{1+\alpha} + \dots + 1/15^{1+\alpha} < 8 \cdot 1/8^{1+\alpha} = 1/8^\alpha$ .

Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt also, dass

$$s_n \leq 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{8^\alpha} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^\alpha}\right)^k = \frac{1}{1 - 1/2^\alpha},$$

wobei wir die Konvergenz der geometrischen Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$  für  $q = 1/2^\alpha < 1$  angewendet haben.

(3) Sei  $a_n = 1/n!$  (mit der Konvention  $0! = 1$ ). Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} 1/k!$  kann man termweise durch eine geometrische Reihe abschätzen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 3.$$

Die Details hier sind eine Übung auf Serie 4. Wir schliessen, dass die monoton wachsende Folge

$$s_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

konvergiert, mit Grenzwert  $S \leq 3$ .

**Bemerkung.** Der Wert der obigen Reihe ist  $e$ , die Eulersche Zahl:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Wir zeigen die erste dieser Gleichungen später.

**Zusammenfassung.** Alle allgemein anwendbaren Verfahren zur Untersuchung der Konvergenz von Reihen von positiven Termen basieren auf folgenden beiden Strategien.

- Um die Konvergenz einer Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  (mit  $a_k > 0$ ) zu zeigen, schätzen wir diese nach oben durch eine geometrische Reihe ab.
- Um die Divergenz (nicht-Konvergenz) einer solchen Reihe zu zeigen, schätzen wir diese nach unten durch eine konstante Reihe ab.

**Frage.** Was, wenn die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  auch negative Summanden  $a_k < 0$  enthält?

**Beispiel.** Sei  $a_n = (-1)^n \cdot 1/(n+1)$ . Wir fragen uns, ob die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1}$$

konvergiert. Unsere obigen Verfahren scheinen nicht zu funktionieren (ausser man hat eine gute Idee).

**Leibnizkriterium.** Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge positiver reeller Zahlen mit

$$a_0 > a_1 > a_2 > \dots > 0,$$

eine sogenannte monoton fallende Folge, mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Dann konvergiert die alternierende Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k.$$

*Beweis.* Betrachte die Partialsummen  $s_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$ . Wir stellen fest:

- Wir haben  $s_0 \geq s_2 \geq s_4 \geq s_6 \geq \dots$ , da  $s_{k+2} = s_{2k} - a_{2k+1} + a_{2k+2}$  und  $a_{2k+2} < a_{2k+1}$ .
- Analog haben wir  $s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq s_7 \leq \dots$  (die Ungleichungen gehen in die andere Richtung).
- Ausserdem gilt für alle  $k \in \mathbb{N}$ , dass  $s_{2k+1} \leq s_{2k+2}$ .

Aus diesen drei Beobachtungen folgt, dass

$$s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq \dots \leq s_6 \leq s_4 \leq s_2 \leq s_0.$$

Sei nun  $\varepsilon > 0$  vorgegeben. Wähle eine ungerade Zahl  $N \in \mathbb{N}$  mit der Eigenschaft, dass wenn immer  $n \geq N$ , dann ist  $|a_n| \leq \varepsilon$ . Solch ein  $N$  existiert, da wir angenommen haben, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

(ersetze wenn nötig  $N$  durch  $N+1$ ). Für alle  $n \geq N$  gilt dann

$$s_N \leq s_n \leq s_{N+1}.$$

Ebenso gilt für alle  $m \geq N$ , dass  $s_N \leq s_m \leq s_{N+1}$ . Dann ist aber

$$|s_n - s_m| \leq |s_N - s_{N+1}| = |a_{N+1}| \leq \varepsilon.$$

Also ist die Folge  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge in  $\mathbb{R}$  und somit konvergent.  $\square$

**Beispiel.** Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

konvergiert (mit Grenzwert  $\log(2)$ , siehe später). Es gilt sicher:

$$0 < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots < 1,$$

da

- $1 - 1/2 > 0$ ,  $1/3 - 1/4 > 0$ , ...
- $-1/2 + 1/3 < 0$ ,  $-1/4 + 1/5 < 0$ , ....

**Definition.** Sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  eine Reihe und  $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  eine Bijektion. Dann nennen wir die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)}$  eine *Umordnung* der ursprünglichen Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ .

**Beispiel.** Die Reihe

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{4} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{6} + \dots,$$

die immer zwischen zwei positiven und einem negativen Folgenglied alterniert, ist eine Umordnung der alternierenden harmonischen Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot 1/n$ . Wir stellen fest, dass für alle  $k \in 2\mathbb{N}$  mit  $k \geq 2$  gilt, dass

$$\frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{k} > 0.$$

Dies kann man auf verschiedene Arten sehen, aber wir berechnen dazu

$$\frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k+1} = \frac{4k}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{4k}{4k^2-1} > \frac{4k}{4k^2} = \frac{1}{k}.$$

Also ist die umgeordnete Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{4} + \dots > 1,$$

(wobei die Bijektion  $\varphi$  nur implizit beschrieben wurde), da  $1/3 + 1/5 - 1/2 > 0$  gilt, und  $1/7 + 1/9 - 1/4 > 0$ , und so weiter. Die Umordnung einer konvergenten Reihe kann also den Grenzwert dieser Reihe ändern, oder sogar Divergenz herbeiführen. Siehe Aufgabe 4 auf Serie 5.

## Absolute Konvergenz

**Definition.** Eine Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  heisst *absolut konvergent*, falls die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$  der Beträge konvergiert.

**Lemma.** Jede absolut konvergente Reihe in  $\mathbb{R}$  ist konvergent (aber nicht umgekehrt).

**Beispiel.** Die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$  ist konvergent, aber nicht absolut konvergent, da die harmonische Reihe divergiert.

*Beweis des Lemmas.* Sei  $\varepsilon > 0$  vorgegeben. Da  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$  konvergiert, existiert  $N \in \mathbb{N}$  mit  $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| \leq \varepsilon$ . Das liegt daran, dass die Folge der Partialsummen monoton (da die Terme nichtnegativ sind) und beschränkt (da konvergent) ist, also existiert ein solches  $N$ , das

$$\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| - \sum_{n=0}^N |a_n| \leq \varepsilon$$

erfüllt. Setze

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k$$

Seien nun  $n > m \geq N$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} |s_n - s_m| &= \left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| \\ &\leq \sum_{k=m+1}^n |a_k| \\ &\leq \sum_{k=N}^{\infty} |a_k| \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Also ist  $s_n$  eine Cauchyfolge und deshalb ist  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  konvergent in  $\mathbb{R}$ . □

**Theorem 3.** Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  absolut konvergent und  $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  eine beliebige Bijektion. Dann konvergiert die Umordnung  $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ , und zwar mit demselben Grenzwert.

**Zusatz** (Riemannscher Umordnungssatz). Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  konvergent, aber nicht absolut konvergent. Dann existiert zu jeder Zahl  $\alpha \in \mathbb{R}$  eine Bijektion  $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , so dass die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\varphi(k)}$  mit Grenzwert  $\alpha$  konvergiert.

*Beweisidee (nicht so wichtig).* Da die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  konvergent, aber nicht absolut konvergent ist, divergieren sowohl die positiven als auch die negativen Folgenglieder. Aber die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert gegen null. Addiere also so lange positive Glieder, bis man über  $\alpha$  hinausschiesst, und dann negative, bis man wieder unter  $\alpha$  kommt. Iteriere dieses Verfahren. □

*Beweis von Theorem 3.* Sei  $\varepsilon > 0$  vorgegeben. Wähle  $N \in \mathbb{N}$  mit  $\sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| \leq \varepsilon$ . Wähle  $M \in \mathbb{N}$  mit  $M > \varphi^{-1}(0), \varphi^{-1}(1), \dots, \varphi^{-1}(N)$ . Falls  $k \geq M$ , dann ist  $\varphi(k) \geq N+1$  (nach Wahl von  $M$ ). Also folgt

$$\sum_{k=M}^{\infty} |a_{\varphi(k)}| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| \leq \varepsilon.$$

Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_{\varphi(k)}|$  ist also nach oben beschränkt, also ist die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\varphi(k)}$  absolut konvergent, also konvergent.

Es bleibt zu zeigen, dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{\varphi(k)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k,$$

also die Grenzwerte übereinstimmen. Für  $n \in \mathbb{N}$ , setze dazu

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k, \quad \tilde{s}_n = \sum_{k=0}^n a_{\varphi(k)}.$$

Für  $n \geq M$  (das selbe  $M$  wie oben), gilt die sehr grobe Abschätzung

$$|\tilde{s}_n - s_n| \leq \sum_{k=M}^{\infty} |a_{\varphi(k)}| + \sum_{k=M}^{\infty} |a_k| \leq 2\varepsilon,$$

wobei wir  $\sum_{k=M}^{\infty} |a_{\varphi(k)}| \leq \varepsilon$  bereits oben abgeschätzt haben, und  $\sum_{k=M}^{\infty} |a_k| \leq \varepsilon$  aus  $M \geq N$  folgt. Folglich gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{\varphi(k)} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} (\tilde{s}_n - s_n) = 0. \quad \square$$

## Das Cauchyprodukt zweier Reihen

Seien  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  zwei konvergente Reihen mit Grenzwerten  $\alpha$  und  $\beta$  in  $\mathbb{R}$ . Dann konvergiert die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k)$  mit Grenzwert  $\alpha + \beta$ .

**Frage.** Was ist das Produkt  $(\sum_{i=0}^{\infty} a_i) \cdot (\sum_{j=0}^{\infty} b_j)$ ?

**Definition.** Das *Cauchyprodukt* der Reihen  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$  und  $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$  ist die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  mit den Summanden

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

Also ist zum Beispiel

- $c_0 = a_0 b_0$ ,
- $c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$ ,
- $c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$ .

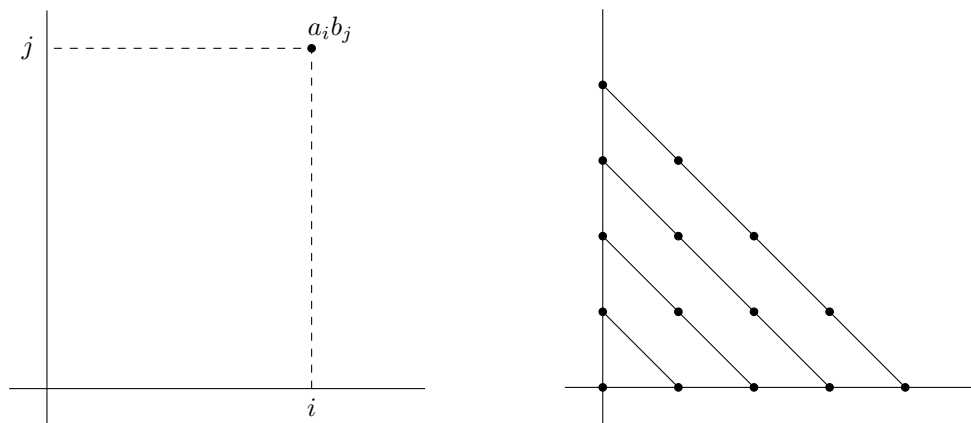


Abbildung II.1: Das Cauchyprodukt

**Beispiel.** Sei

$$a_k = b_k = (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

Die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

konvergiert (nach dem Leibnizkriterium), da die Folge  $(1/\sqrt{k+1})_{k \in \mathbb{N}}$  monoton fallend ist mit Grenzwert null. Wir bestimmen nun den Summanden  $c_n$  im Cauchyprodukt  $(\sum_{i=0}^{\infty} a_i) \cdot (\sum_{j=0}^{\infty} b_j)$ . Berechne

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k+1}} \cdot (-1)^{n-k} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-k+1}} \\ &= (-1)^n \left( \frac{1}{\sqrt{1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1}} \right). \end{aligned}$$

Jeder dieser  $n+1$  Summanden in  $c_n$  ist grösser oder gleich  $1/(n+1)$ , denn

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-k+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{n+1}.$$

Also ist  $|c_n| \geq 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Insbesondere ist  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  keine Nullfolge, also  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  nicht konvergent.

**Theorem 4.** Seien  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$  und  $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$  absolut konvergent mit Grenzwerten  $\alpha$  und  $\beta$  in  $\mathbb{R}$ . Dann konvergiert das Cauchyprodukt  $(\sum_{i=0}^{\infty} a_i) \cdot (\sum_{j=0}^{\infty} b_j)$  mit Grenzwert  $\alpha \cdot \beta$ .

*Beweis.* Setze

$$A = \sum_{i=0}^{\infty} |a_i| \text{ und } B = \sum_{j=0}^{\infty} |b_j|.$$

Diese Grenzwerte existieren, da die beiden Reihen  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$  und  $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$  absolut konvergieren. Im allgemeinen stimmen  $A$  und  $B$  aber nicht mit  $\alpha$  und  $\beta$  überein. Sei  $N \in \mathbb{N}$ . Wir schätzen ab:

$$\sum_{n=0}^N |c_n| \leq \left( \sum_{i=0}^N |a_i| \right) \cdot \left( \sum_{j=0}^N |b_j| \right) \leq A \cdot B$$

wobei

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

In Abbildung II.2 sind die Terme links alle Punkte unter der gestrichelten Linie. Also ist die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  absolut konvergent.

Zu zeigen bleibt, dass der Grenzwert der Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  gerade  $\alpha \cdot \beta$  ist. Berechne dazu

$$\begin{aligned} \left| \left( \sum_{i=0}^N a_i \right) \left( \sum_{j=0}^N b_j \right) - \sum_{n=0}^N c_n \right| &\leq \left( \sum_{i=N/2}^{\infty} |a_i| \right) \left( \sum_{j=0}^{\infty} |b_j| \right) + \left( \sum_{i=0}^{\infty} |a_i| \right) \left( \sum_{j=N/2}^{\infty} |b_j| \right) \\ &= \left( \sum_{i=N/2}^{\infty} |a_i| \right) B + A \left( \sum_{j=N/2}^{\infty} |b_j| \right), \end{aligned}$$

siehe Abbildung II.2: die Terme rechts von der Ungleichung sind alle Punkte im grau markierten Bereich. Aber

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=N/2}^{\infty} |a_i| = 0 \text{ und } \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=N/2}^{\infty} |b_j| = 0,$$

also gilt

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} c_n &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N c_n \\ &= \left( \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^N a_i \right) \left( \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^N b_j \right) \\ &= \alpha \cdot \beta. \end{aligned}$$

□

## 4 Die Exponentialfunktion

**Lemma.** Sei  $x \in \mathbb{R}$ . Dann ist die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$  absolut konvergent.



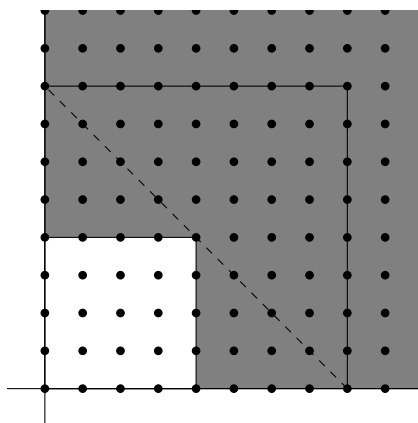


Abbildung II.2: Beweis der Konvergenz des Cauchyprodukts

*Beweis.* Sei zunächst  $x \geq 0$ . Wähle  $N \in \mathbb{N}$  mit  $N + 1 \geq 2x$ . Dann gilt für alle  $n > N$ , dass

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^N}{N!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \\ &= 1 + \cdots + \frac{x^N}{N!} \left( 1 + \frac{x}{N+1} + \frac{x^2}{(N+1)(N+2)} + \cdots + \frac{x^{n-N}}{(N+1) \cdots n} \right) \\ &\leq 1 + x + \cdots + \frac{x^{N-1}}{(N-1)!} + 2 \cdot \frac{x^N}{N!}, \end{aligned}$$

da

- $x/(N+1) \leq 1/2$ ,
- $x^2/(N+1)(N+2) \leq 1/4$ ,
- $x^3/(N+1)(N+2)(N+3) \leq 1/8$ ,

und so weiter. Also ist die Folge der Partialsummen

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

nach oben beschränkt und monoton wachsend, da  $x \geq 0$ . Folglich ist die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$  absolut konvergent. Für  $x < 0$  bemerken wir, dass die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{x^k}{k!} \right| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!}$$

konvergiert (siehe oben), also auch die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ . □

**Definition.** Die *Exponentialfunktion* ist die Funktion

$$\begin{aligned}\exp: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.\end{aligned}$$

**Theorem 5.** Für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt

$$\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y).$$

*Beweis.* Berechne das Cauchyprodukt der beiden absolut konvergenten Reihen  $\exp(x)$  und  $\exp(y)$  wie folgt:

$$\begin{aligned}\exp(x) \cdot \exp(y) &= \left( \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \right) \left( \sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^j}{j!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} \\ &= \exp(x+y)\end{aligned}$$

nach Theorem 4, da

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k}.$$

□

### Eigenschaften der Exponentialfunktion.

(i)  $\exp(0) = 1$  und  $\exp(1) = e$ , die Eulersche Zahl (siehe Serie 4).

(ii) Für  $h \geq 0$  gilt  $\exp(h) \geq 1 + h$ , und für  $0 \leq h \leq 1$  gilt

$$1 + h \leq \exp(h) \leq 1 + 2h,$$

(siehe Serie 4).

(iii) Für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}.$$

Dazu berechne

$$\exp(0) = \exp(x - x) = \exp(x) \cdot \exp(-x)$$

nach Theorem 5.

(iv) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$\exp(n) = \exp(1 + \dots + 1) = (\exp(1))^n = e^n.$$

**Notation.** Wir schreiben von nun an auch

$$e^x = \exp(x).$$

Wir müssen das so definieren, da die Intuition aus Punkt (iv) nicht reicht, um zum Beispiel  $e^{\sqrt{2}}$  zu definieren.

**Proposition.** Die Exponentialfunktion  $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist positiv, streng monoton wachsend, und surjektiv als Funktion  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ .

*Beweis.*

- *Positivität.* Für  $x \geq 0$  gilt  $\exp(x) \geq 1$ , und für  $x < 0$  gilt  $\exp(x) = 1/\exp(-x)$  (siehe Eigenschaft (iii)), also auch in diesem Fall  $\exp(x) > 0$ .
- *Monotonie.* Seien  $x, y \in \mathbb{R}$  mit  $x < y$ . Dann gilt:

$$\exp(y) = \exp(x + (y - x)) = \exp(x) \cdot \exp(y - x) > \exp(x),$$

da  $\exp(y - x) > 1$ .

- *Surjektivität.* Sei  $y > 0$ . Wir behaupten, dass  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  existieren mit

$$\exp(x_1) < y < \exp(x_2).$$

Setze dazu  $x_2 = y$ . Dann ist  $\exp(x_2) \geq 1 + y > y$ . Für  $x_1$  machen wir eine Fallunterscheidung. Falls  $y > 1$ , setze  $x_1 = 0$ . Dann ist  $\exp(x_1) = 1 < y$ . Für  $y \leq 1$ , setze  $x = -1/y$ . Dann ist

$$\exp(x_1) = \frac{1}{\exp(1/y)} < \frac{1}{1/y} = y.$$

Dies zeigt die Behauptung, dass wir jeden gewünschten Wert überbieten und auch unterbieten können.

Zu zeigen bleibt, dass wir den gewünschten Wert auch tatsächlich treffen. Wir suchen also  $s \in \mathbb{R}$  mit  $\exp(s) = y$ . Wir konstruieren dieses  $s$  mit dem Supremumsprinzip. Definiere  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \exp(x) \leq y\}$ , siehe Abbildung II.3. Nach obiger Behauptung ist  $A$  nicht leer, da  $x_1$  existiert mit  $\exp(x_1) \leq y$ . Weiter ist  $A$  nach oben beschränkt, da  $y \leq \exp(x_2)$ . Setze nun  $s = \sup(A) \in \mathbb{R}$ . Wir zeigen, dass  $\exp(s) = y$  indem wir beide Ungleichungen zeigen.

Nehme widerspruchswise an, dass  $\exp(s) < y$ . Wähle  $h \in \mathbb{R}$  mit  $0 < h < 1$  und  $1 + 2h \leq y/\exp(s)$ . Dies funktioniert, da  $y/\exp(s) > 1$ . Es gilt dann

$$\exp(s + h) = \exp(s) \cdot \exp(h) \leq \exp(s) \cdot (1 + 2h) \leq y$$

nach Eigenschaft (ii). Also ist  $s + h \in A$ , was im Widerspruch zu  $s = \sup(A)$  steht. Somit folgt  $\exp(s) \geq y$ .

Umgekehrt, nehme widerspruchswise an, dass  $\exp(s) > y$ . Ähnlich wie im ersten Schritt, wähle  $h \in \mathbb{R}$  mit  $0 < h \leq 1$  und  $1 + 2h \leq \exp(s)/y$ . Dann gilt

$$\exp(s - h) = \frac{\exp(s)}{\exp(h)} \geq \frac{\exp(s)}{1 + 2h} \geq y.$$

Also ist  $s - h$  eine obere Schranke für  $A$ , im Widerspruch dazu dass  $s = \sup(A)$  die kleinste obere Schranke für  $A$  ist. Folglich gilt  $\exp(s) \leq y$ .  $\square$

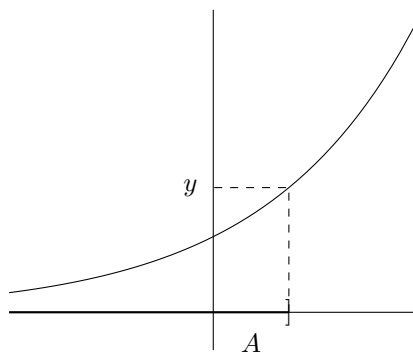


Abbildung II.3: Beweis der Surjektivität der Exponentialfunktion

**Bemerkung.** Die Menge  $\exp(\mathbb{Q})$  ist nicht die Menge  $\mathbb{Q}_{>0}$  der positiven rationalen Zahlen. Tatsächlich ist das Bild der meisten rationalen Zahlen nicht rational (das ist schwierig zu zeigen). Der Satz oben funktioniert also nur über  $\mathbb{R}$ .

## Der Logarithmus

Wir wissen, dass die Exponentialfunktion  $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  streng monoton wachsend und surjektiv ist. Insbesondere ist  $\exp$  bijektiv.

**Definition.** Die *Logarithmusfunktion*  $\log: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$  ist die eindeutige Umkehrfunktion der Exponentialfunktion, das heisst  $\log = \exp^{-1}$ .

**Bemerkung.** Es gilt für alle  $a, b > 0$ , dass

$$\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b).$$

Dazu bemerke, dass

$$\exp(\log(a) + \log(b)) = \exp(\log(a)) \cdot \exp(\log(b)) = a \cdot b = \exp(\log(a \cdot b)).$$

Da die Exponentialfunktion injektiv ist, folgt die Behauptung.

**Definition.** Sei  $a > 0$  und  $x \in \mathbb{R}$ . Wir definieren die allgemeine *Potenzfunktion*  $x \mapsto a^x$  durch

$$a^x = \exp(\log(a) \cdot x).$$

**Bemerkung.** Für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y.$$

# Kapitel III

## Stetige Funktionen

### 1 Stetigkeit

Folgende Definition von Weierstrass ist aus gutem Grund sehr berühmt.

**Definition.** Sei  $A \subset \mathbb{R}$  eine beliebige Teilmenge. Eine Funktion  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  heisst *stetig* im Punkt  $p \in A$ , falls für alle vorgegebenen  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so dass für alle  $q \in A$  mit  $|q - p| \leq \delta$  gilt, dass  $|f(q) - f(p)| \leq \varepsilon$ . Falls  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  in allen Punkten  $p \in A$  stetig ist, dann heisst  $f$  *stetig*.

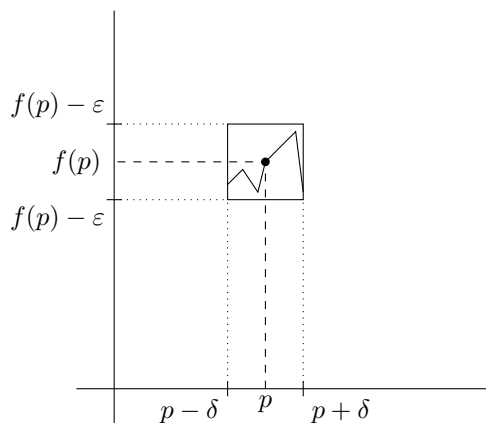


Abbildung III.1: Stetigkeit

**Beispiele.**

(1) Die Identitätsfunktion

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto p \end{aligned}$$

ist stetig. Sei dazu  $p \in \mathbb{R}$  fest und  $\varepsilon > 0$  vorgegeben. Setze  $\delta = \varepsilon$ . Dann gilt für alle  $q \in \mathbb{R}$  mit  $|q - p| \leq \delta$ , dass  $|f(q) - f(p)| = |q - p| \leq \delta = \varepsilon$ .

(2) Sei

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \leq 0, \\ 1 & \text{falls } x > 0, \end{cases}$$

siehe Abbildung III.2. Dann ist  $f$  in allen Punkten ausser dem Nullpunkt stetig. Tatsächlich, sei  $p \neq 0$  und  $\varepsilon > 0$  vorgegeben. Setze  $\delta = |p|/2 > 0$ . Dann gilt für alle  $q \in \mathbb{R}$  mit  $|q - p| \leq \delta$ , dass  $|f(q) - f(p)| = 0 \leq \varepsilon$ .

Sei nun  $p = 0$ . Betrachte  $\varepsilon = 1/2$ . Sei  $\delta > 0$  beliebig. Dann gilt für  $q = \delta/2$ , dass  $|q - p| = \delta/2 < \delta$ . Es folgt

$$|f(q) - f(p)| = |1 - 0| = 1 > \varepsilon.$$

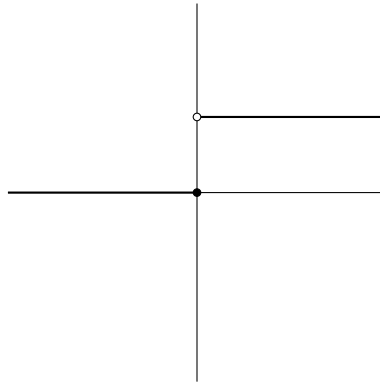


Abbildung III.2: Sprungstelle

(3) Sei

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

die *Dirichletfunktion*. Dann ist  $f$  in keinem Punkt stetig. Betrachte dazu  $\varepsilon = 1/2$ . Sei  $p \in \mathbb{Q}$ , das heisst  $f(p) = 1$ . Für alle  $\delta > 0$  finden wir eine irrationale Zahl  $q \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  mit  $|q - p| \leq \delta$  und  $|f(q) - f(p)| = 1 > \varepsilon$ . Tatsächlich, wähle  $N \in \mathbb{N}$  mit  $\sqrt{2}/N \leq \delta$ . Setze  $q = p + \sqrt{2}/N$ . Dann gilt  $q \notin \mathbb{Q}$ , also  $f(q) = 0$ .

Analog, sei  $p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , das heisst  $f(p) = 0$ . Für alle  $\delta > 0$  finden wir eine Zahl  $q \in \mathbb{Q}$  mit  $|q - p| \leq \delta$  und  $|f(q) - f(p)| = 1 > \varepsilon$ . Tatsächlich, wähle  $N \in \mathbb{N}$  mit  $1/N \leq \delta$ . Dann existiert  $a \in \mathbb{Z}$  so dass  $|a/N - p| \leq 1/N$ . Setze  $q = a/N$ .

- (4) Sei  $f(x) = x^n$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $f$  stetig auf  $\mathbb{R}$ . Sei also  $p \in \mathbb{R}$  vorgegeben und sei  $\varepsilon > 0$ . Für  $h \in \mathbb{R}$  mit  $|h| \leq 1$  gilt

$$f(x+h) = (x+h)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} h^k = x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \dots$$

Es folgt, dass

$$|f(x+h) - f(x)| \leq |h| \cdot \left| \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^{n-k} \right|,$$

da  $|h| \leq 1$ . Setze jetzt

$$\delta_1 = \frac{\varepsilon}{t+1},$$

wobei

$$t = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} |p|^{n-k},$$

und  $\delta = \min\{1, \delta_1\} > 0$ . Für alle  $h \in \mathbb{R}$  mit  $|h| \leq \delta$  gilt also

$$|f(p+h) - f(p)| \leq |h| \cdot t \leq \delta_1 \cdot t = \varepsilon \cdot \frac{t}{t+1} \leq \varepsilon.$$

Also ist  $f$  stetig im Punkt  $p$ .

- (5) Betrachte die Funktion

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 1/x. \end{aligned}$$

Dann ist  $f$  stetig in allen Punkten  $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Dies ist mühsam von Hand zu zeigen. Deshalb verwenden wir folgendes Lemma.

**Lemma.** Sei  $A \subset \mathbb{R}$  und seien  $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$  im Punkt  $p \in A$  stetig. Dann sind die Funktionen  $f+g$  und  $f \cdot g$  im Punkt  $p$  stetig. Falls  $f(p) \neq 0$ , dann existiert  $a > 0$ , so dass die Funktion  $1/f$  auf der Menge  $(p-a, p+a) \cap A$  definiert und im Punkt  $p$  stetig ist.

*Beweis.* Als erstes zeigen wir, dass  $f+g$  stetig ist. Sei  $\varepsilon > 0$  vorgegeben. Wähle  $\delta_f > 0$  und  $\delta_g > 0$  so dass für alle  $q \in A$  mit  $|q-p| \leq \delta_f$  gilt, dass  $|f(q) - f(p)| \leq \varepsilon/2$ , und so dass für alle  $q \in A$  mit  $|q-p| \leq \delta_g$  gilt, dass  $|g(q) - g(p)| \leq \varepsilon/2$ . Setze  $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g\}$ . Dann gilt für alle  $q \in A$  mit  $|q-p| \leq \delta$ , dass

$$\begin{aligned} |(f+g)(q) - (f+g)(p)| &= |f(q) + g(q) - f(p) - g(p)| \\ &\leq |f(q) - f(p)| + |g(q) - g(p)| \\ &\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass  $f \cdot g$  stetig ist. Berechne

$$\begin{aligned} |(f \cdot g)(q) - (f \cdot g)(p)| &= |f(q) \cdot g(q) - f(p) \cdot g(p)| \\ &= |f(q)g(q) - f(p)g(q) + f(p)g(q) - f(p)g(p)| \\ &\leq |g(q)| \cdot |f(q) - f(p)| + |f(p)| \cdot |g(q) - g(p)| \end{aligned}$$

Wähle  $\delta_1 > 0$  so, dass immer wenn  $|q - p| \leq \delta_1$  gilt, dann auch  $|g(q) - g(p)| \leq 1$ . Wähle  $\delta_2 > 0$  so, dass immer wenn  $|q - p| \leq \delta_2$  gilt, dann auch

$$|f(q) - f(p)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{|g(p)| + 1}.$$

Wähle weiterhin  $\delta_3 > 0$  so, dass immer wenn  $|q - p| \leq \delta_3$  gilt, dann auch

$$|g(q) - g(p)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{|f(p)| + 1}.$$

Setze  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ . Für  $q \in A$  mit  $|q - p| \leq \delta$  gilt dann:

$$\begin{aligned} |(f \cdot g)(q) - (f \cdot g)(p)| &\leq |g(q)| \cdot \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{|g(p)| + 1} + |f(p)| \cdot \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{|f(p)| + 1} \\ &\leq (|g(p)| + 1) \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{|g(p)| + 1} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Zuletzt behandeln wir  $1/f$ . Sei  $p \in A$  mit  $f(p) \neq 0$ . Dann existiert nach Stetigkeit von  $f$  im Punkt  $p$  eine Zahl  $a > 0$ , so dass wenn  $|q - p| \leq a$  gilt, dann auch

$$|f(q) - f(p)| \leq \frac{|f(p)|}{2}.$$

Also ist  $1/f$  auf der Menge  $(p - a, p + a) \cap A$  definiert, da dort  $|f(q)| > 0$ . Sei nun  $\varepsilon > 0$ . Berechne

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{f(q)} - \frac{1}{f(p)} \right| &= \left| \frac{f(p) - f(q)}{f(q)f(p)} \right| \\ &\leq 2 \cdot \frac{|f(p) - f(q)|}{|f(p)|^2}. \end{aligned}$$

Wähle  $\delta > 0$ , so dass  $\delta \leq a$  und immer wenn  $|q - p| \leq \delta$ , dann auch

$$|f(q) - f(p)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot |f(p)|^2.$$

Es folgt für  $q \in A$  mit  $|q - p| \leq \delta$ , dass

$$\left| \frac{1}{f(q)} - \frac{1}{f(p)} \right| \leq 2 \cdot \frac{|f(p) - f(q)|}{|f(p)|^2} \leq \varepsilon. \quad \square$$



## Anwendungen.

(1) Alle Funktionen der Form

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

sogenannte *Polynome*, mit Koeffizienten  $a_k \in \mathbb{R}$  sind stetig auf  $\mathbb{R}$ , da die Funktion  $x \mapsto x$  und konstante Funktionen stetig sind.

(2) Die Funktion  $f(x) = 1/x$  ist stetig auf  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

## Folgenstetigkeit

**Theorem 1.** Sei  $A \subset \mathbb{R}$  eine Teilmenge. Eine Funktion  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann stetig im Punkt  $p \in A$ , wenn für alle konvergenten Folgen  $a: \mathbb{N} \rightarrow A$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = p$  gilt, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(p).$$

*Beweis.* Für die Hinrichtung “ $\Rightarrow$ ” sei  $f$  im Punkt  $p$  stetig. Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $A$  mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = p.$$

Sei  $\varepsilon > 0$  vorgegeben. Dann existiert  $\delta > 0$  so dass immer wenn  $|q - p| \leq \delta$ , dann auch  $|f(q) - f(p)| \leq \varepsilon$ . Wähle  $N \in \mathbb{N}$ , so dass für  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq N$  gilt, dass  $|a_n - p| \leq \delta$ . Es gilt also für  $n \geq N$ , dass  $|f(a_n) - f(p)| \leq \varepsilon$ . Also gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(p).$$

Für die Rückrichtung “ $\Leftarrow$ ”, nehme an, dass  $f$  *folgenstetig* in  $p$  ist, das heisst dass für alle konvergenten Folgen  $a: \mathbb{N} \rightarrow A$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = p$  gilt, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(p).$$

Wir beweisen durch Widerspruch, dass  $f$  stetig in  $p$  ist. Nehme an, dass  $f$  nicht stetig in  $p$  ist. Dann existiert  $\varepsilon_0 > 0$ , so dass für alle  $\delta > 0$  ein  $q \in A$  existiert, so dass  $|q - p| \leq \delta$  und  $|f(q) - f(p)| > \varepsilon_0$ . Wähle nun eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  wie folgt. Wähle  $a_n \in A$  so dass  $|a_n - p| \leq 1/(n+1)$  und  $|f(a_n) - f(p)| > \varepsilon_0$ . Nach Konstruktion gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = p$ , aber

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \neq f(p).$$

Dies widerspricht der Folgenstetigkeit von  $f$ . □

Dieser Satz sagt, dass genau dann die Formel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right)$$

gilt, wenn  $f$  stetig ist.

**Anwendung.** Seien  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g: B \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen mit  $f(A) \subset B$ . Falls  $f$  im Punkt  $p \in A$  stetig ist, und  $g$  im Punkt  $f(p) \in B$  stetig ist, dann ist  $g \circ f: A \rightarrow \mathbb{R}$  im Punkt  $p$  stetig.

*Beweis.* Wir verwenden die Folgenstetigkeit um einen schnellen Beweis zu liefern. Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Folge in  $A$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = p \in A$ . Da  $f$  stetig in  $p$  ist, folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(p).$$

Setze  $b_n = f(a_n)$ . Dann ist  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Folge in  $f(A) \subset B$  mit Grenzwert  $f(p)$ . Da  $g$  stetig in  $f(p)$  ist, folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} g(b_n) = g(f(p)).$$

Wir folgern, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (g \circ f)(a_n) = (g \circ f)(p),$$

das heisst  $g \circ f$  ist stetig im Punkt  $p$ . □

**Beispiel.** Betrachte die stetigen Funktionen

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x(x-1) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 1/x. \end{aligned}$$

Dann ist

$$(g \circ f)(x) = \frac{1}{x(x-1)}$$

stetig auf  $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ .

**Bemerkung.** Die Funktion  $f(x) = 1/x$  hat keine stetige Fortsetzung auf  $\mathbb{R}$ , das heisst es existiert keine stetige Funktion  $\bar{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass  $\bar{f}|_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} = f$ . Hier ist  $\bar{f}|_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  die Funktion  $\bar{f}$  *eingeschränkt* auf  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , gegeben durch  $\bar{f}|_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}(x) = f(x)$  für  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Es kann jedoch sein, dass für gewisse Funktionen  $g$  die Funktion  $g \circ f$  eine stetige Fortsetzung auf  $\mathbb{R}$  hat.

**Beispiele.**

- (1) Sei  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $g(x) = 0$  für alle  $x$ . Dann ist  $g \circ f(x) = 0$  auf  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , was eine stetige Fortsetzung (die konstante Nullfunktion) auf  $\mathbb{R}$  hat.
- (2) Sei  $g(x) = 1/x$  auf  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Dann hat  $g \circ f(x)$  auf  $\mathbb{R}$  eine stetige Fortsetzung (die Identitätsfunktion  $x \mapsto x$ ) auf  $\mathbb{R}$ .

- (3) Die Funktion  $g(x) = e^{-x^2}$  ist auf  $\mathbb{R}$  stetig. Also ist  $g \circ f(x) = e^{-1/x^2}$  stetig auf  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{-1/x^2} = 0.$$

Die Funktion

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0, \\ e^{-1/x^2} & \text{falls } x \neq 0 \end{cases}$$

ist stetig auf  $\mathbb{R}$ .

Später werden wir sehen, dass  $h$  im Punkt  $x = 0$  unendlich oft differenzierbar ist, und alle Ableitungen  $h^{(n)}$  von  $h$  erfüllen  $h^{(n)}(0) = 0$ . Das bedeutet, dass  $h$  nur im Nullpunkt mit ihrer "Taylorreihe" bei 0 übereinstimmt.

## 2 Zwischenwertsatz

Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a \leq b$ . Wir bezeichnen mit

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

das *abgeschlossene Intervall* zwischen  $a$  und  $b$ .

**Theorem 2.** Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig mit  $f(a) \leq 0 \leq f(b)$  oder  $f(a) \geq 0 \geq f(b)$ . Dann existiert  $s \in [a, b]$  mit  $f(s) = 0$ .

*Beweis.* Wir betrachten nur den Fall  $f(a) \leq 0 \leq f(b)$ . Betrachte die Menge

$$A = \{x \in [a, b] \mid f(x) \leq 0\}.$$

Dann ist  $A$  nicht leer, da  $a \in A$ , und nach oben beschränkt durch  $b$ , hat also ein Supremum  $s \in \mathbb{R}$ . Es gilt, dass  $s \in [a, b]$ , da  $s$  die kleinste obere Schranke von  $A$  ist. Wir behaupten nun, dass  $f(s) = 0$  und beweisen dies in zwei Schritten.

- (i) Wir zeigen erst durch Widerspruch, dass  $f(s) \geq 0$ . Falls  $f(s) < 0$ , setze  $\varepsilon = |f(s)| > 0$ . Da  $f$  stetig in  $s$  ist, existiert  $\delta > 0$  so dass für  $q \in [a, b]$  mit  $|q - s| \leq \delta$  gilt, dass  $|f(q) - f(s)| \leq \varepsilon$ . Insbesondere gilt

$$|f(s + \delta) - f(s)| \leq \varepsilon = |f(s)|,$$

also folgt  $f(s + \delta) \leq f(s) + |f(s)| = 0$ . Das heisst, dass  $s + \delta \in A$ , was  $s = \sup(A)$  widerspricht.

- (ii) Als nächstes zeigen wir durch Widerspruch, dass  $f(s) \leq 0$ . Falls  $f(s) > 0$ , setze  $\varepsilon = f(s)/2 > 0$ . Wiederum existiert  $\delta > 0$  so dass für alle  $q \in [a, b]$  mit  $|q - s| \leq \delta$  gilt, dass  $|f(q) - f(s)| \leq \varepsilon$ . Insbesondere gilt

$$|f(s - \delta) - f(s)| \geq f(s) - \varepsilon = \frac{f(s)}{2} > 0.$$

Also ist

$$|f(q) - f(s)| \geq f(s) - \varepsilon = \frac{f(s)}{2} > 0$$

für alle  $q \in [s - \delta, s]$ . Also ist  $s - \delta$  eine obere Schranke für  $A$ , im Widerspruch zu  $s = \sup(A)$ .

Für den Fall  $f(a) \geq 0 \geq f(b)$  kann man stattdessen  $-f$  betrachten, oder im Beweis oben alle Ungleichungen umdrehen.  $\square$

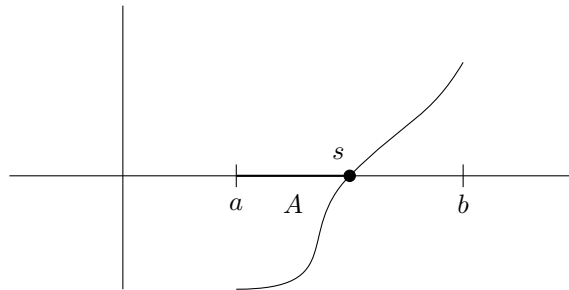


Abbildung III.3: Zwischenwertsatz

## Folgerungen

**Zwischenwertsatz.** Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig mit  $f(a) \leq f(b)$ . Dann gilt

$$[f(a), f(b)] \subset f([a, b]).$$

*Beweis.* Sei  $y \in [f(a), f(b)]$ . Betrachte auf  $[a, b]$  die stetige Funktion  $g(x) = f(x) - y$ . Es gilt  $g(a) = f(a) - y \leq 0$  und  $g(b) = f(b) - y \geq 0$ . Also existiert nach Theorem 2 ein Punkt  $p \in [a, b]$  mit  $g(p) = 0$ , beziehungsweise  $f(p) = y$ .  $\square$

**Beispiel.** Seien  $a_1, a_2, \dots, a_{2k+1} \in \mathbb{R}$ . Setze

$$f(x) = x^{2k+1} + a_1 x^{2k} + \dots + a_{2k} x + a_{2k+1}.$$

Dann ist  $f$  ein *Polynom* von ungeradem Grad  $2k + 1$ . Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n^{2k+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \dots + \frac{a_{2k+1}}{n^{2k+1}} \right) = 1.$$

Folglich nimmt  $f$  beliebig hohe Werte an. Ähnlich gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(-n)}{n^{2k+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( -1 + \frac{a_1}{n} - \frac{a_2}{n^2} + \dots + \frac{a_{2k+1}}{n^{2k+1}} \right) = -1,$$

also nimmt  $f$  negative Werte mit beliebig hohem Betrag an. Nach dem Zwischenwertsatz ist  $f$  surjektiv, insbesondere hat  $f$  eine Nullstelle.

**Bemerkung.** Für Polynome mit geradem Grad ist das falsch: Die Funktion  $f(x) = x^2 + 1$  hat keine Nullstelle in  $\mathbb{R}$ .

**Fixpunktsatz von Brouwer.** Sei  $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$  stetig. Dann existiert  $p \in [a, b]$  mit  $f(p) = p$ .

Ein solcher Punkt  $p$  mit  $f(p) = p$  heisst *Fixpunkt* von  $f$ .

*Beweis.* Betrachte die auf dem Intervall  $[a, b]$  stetige Funktion  $g(x) = x - f(x)$ . Es gilt  $g(a) = a - f(a) \leq 0$  und  $g(b) = b - f(b) \geq 0$ . Nach dem Zwischenwertsatz existiert  $p \in [a, b]$  mit  $g(p) = 0$ , beziehungsweise  $f(p) = p$ .  $\square$

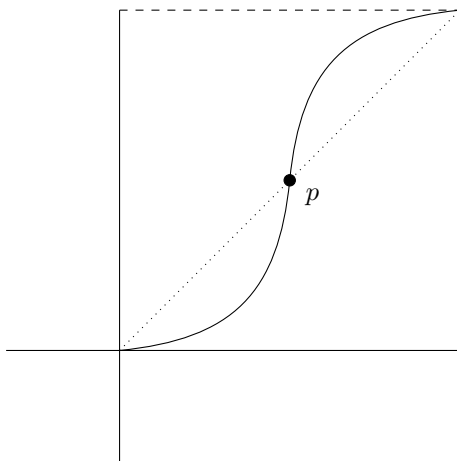


Abbildung III.4: Fixpunktsatz von Brouwer

### 3 Stetige Funktionen auf kompakten Mengen

**Frage.** Sei  $A \subset \mathbb{R}$  beschränkt, das heisst es existiert  $R > 0$  mit  $A \subset [-R, R]$ . Sei  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Ist dann  $f(A) \subset \mathbb{R}$  beschränkt?

**Beispiel.** Die Antwort ist nein. Sei

$$A = (0, 1) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$$

und  $f(x) = 1/x$ . Dann ist  $f((0, 1)) = \mathbb{R}_{>0}$  unbeschränkt.

**Definition.** Eine Teilmenge  $U \subset \mathbb{R}$  heisst *offen*, falls für alle  $p \in U$  ein  $\delta > 0$  existiert, so dass  $(p - \delta, p + \delta) \subset U$ . Eine Teilmenge  $A \subset \mathbb{R}$  heisst *abgeschlossen*, falls  $\mathbb{R} \setminus A$  offen ist.

**Bemerkung.** Jede (auch unendliche) Vereinigung offener Mengen ist offen.

**Beispiele.**

- Sei  $a < b$ . Dann ist das *offene Intervall*

$$U = (a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

zwischen  $a$  und  $b$  offen. Sei dazu  $p \in (a, b)$ . Setze  $\delta = \min\{|p - a|, |p - b|\}$ . Dann gilt  $(p - \delta, p + \delta) \subset (a, b)$ , siehe Abbildung III.5.

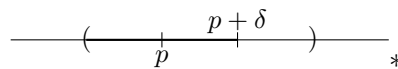


Abbildung III.5: Offene Intervalle sind offen

- Sei  $a \leq b$ . Dann ist das *abgeschlossene Intervall*

$$A = [a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

zwischen  $a$  und  $b$  abgeschlossen. Sei dazu  $p \notin [a, b]$ , das heisst entweder  $p < a$  oder  $p > b$ . Setze  $\delta = \min\{|p - a|, |p - b|\} > 0$ . Dann gilt  $(p - \delta, p + \delta) \cap [a, b] = \emptyset$ , also ist  $\mathbb{R} \setminus [a, b]$  offen.

- Sei  $A = \{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$ . Dann ist  $A$  abgeschlossen, da

$$\mathbb{R} \setminus A = \mathbb{R}_{<0} \cup \mathbb{R}_{>1} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}} (1/(n+1), 1/n)$$

eine Vereinigung offener Mengen und somit selbst offen ist.

- Die Menge

$$B = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$$

ist weder offen noch abgeschlossen.

- Die Menge  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  ist weder offen noch abgeschlossen.
- Die Menge

$$[0, 1) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}$$

ist weder offen noch abgeschlossen.

**Theorem 3.** Sei  $A \subset \mathbb{R}$  abgeschlossen und beschränkt, und sei weiterhin  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann nimmt  $f$  auf  $A$  ein Maximum und ein Minimum an, das heisst es existiert  $p \in A$ , so dass für alle  $q \in A$  gilt, dass  $f(q) \leq f(p)$ , beziehungsweise  $f(q) \geq f(p)$ .

Für den Beweis von Theorem 3 brauchen wir noch etwas Vorarbeit.

**Lemma.** *Sei  $A \subset \mathbb{R}$  abgeschlossen und  $a: \mathbb{N} \rightarrow A$  eine konvergente Folge. Dann liegt der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  in  $A$ .*

*Beweis.* Wir beweisen das Lemma durch Kontraposition. Sei

$$p = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in \mathbb{R} \setminus A.$$

Da  $\mathbb{R} \setminus A$  offen ist, existiert  $\delta > 0$  mit  $(p - \delta, p + \delta) \subset \mathbb{R} \setminus A$ . Wähle  $N \in \mathbb{N}$  so dass für alle  $n \geq N$  gilt, dass  $|a_n - p| < \delta$ . Aber dann gilt  $a_n \in (p - \delta, p + \delta) \subset \mathbb{R} \setminus A$ , also  $a_n \notin A$ , was der Annahme, dass  $a: \mathbb{N} \rightarrow A$  eine Folge in  $A$  ist.  $\square$