Analysis I

Sebastian Baader

Herbstsemester 2020

Über dieses Dokument

Das ist eine Mitschrift der Vorlesung "Analysis 1" von Prof. Dr. Sebastian Baader im Herbstsemester 2020. Du darfst sie so verwenden, wie sie dir am meisten beim Verständnis des Materials hilft. Verantwortlich dafür was hier drin steht ist Levi Ryffel. Denke daran dass der Dozent dieses Dokument nicht schreibt (und vielleicht auch nicht liest). Ihn trifft keine Verantwortung, falls Unsinn steht.

Dein Beitrag

Diese Vorlesungsnotizen werden in Echtzeit während der Vorlesung mitgeschrieben und werden deshalb viele Probleme enthalten. Damit sind allerlei Missgeschicke gemeint wie zum Beispiel Symbolverwechslungen, unpräzise Aussagen und Argumente, alternative Rechtschreibung und Grammatik, oder unattraktives Layout. Falls dir so etwas auffällt, auch wenn es dich nicht stark stört, und auch wenn du es als etwas subjektiv empfindest, poste doch auf

`https://github.com/raw-bacon/ana1-notes`,

ein "Issue", oder sende eine E-Mail an `levi.ryffel@math.unibe.ch`. Auf demselben Weg kannst du Wünsche und Verbesserungsvorschläge zu dieser Mitschrift anbringen.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel I

Konstruktion der Reellen Zahlen

1 Historische Motivation

In der Antike war Mathematik praktisch synonym mit Geometrie. Der Zahlenbegriff war direkt an das Konzept der *Länge* gekoppelt.

Definition (Euklid, 300 vor Christus)**.** Zwei Längen $a, b > 0$ heissen *kommensurabel*, falls eine Länge $L > 0$ existiert, so wie zwei natürliche Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$, so dass $a = mL$ und $b = nL$.

Hier ist

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

die Menge der Natürlichen Zahlen.

Theorem (Euklid)**.** *Die Seite und Diagonale eines ebenen Quadrats sind nicht kommensurabel.*

Beweis. Dieser Beweis ist geometrisch, nach Euklid. Wir nehmen an, es gäbe $L > 0$ und $m, n \in \mathbb{N}$ mit $x = mL$ und $d = nL$. Wir zeigen, dass das zu einem Widerspruch führt. Wir stellen fest, dass die Längen $x_1 = d - x$ und $d_1 = 2x - d$ ebenfalls die Seite und Diagonale eines Quadrats bilden, siehe Abbildung I.1.

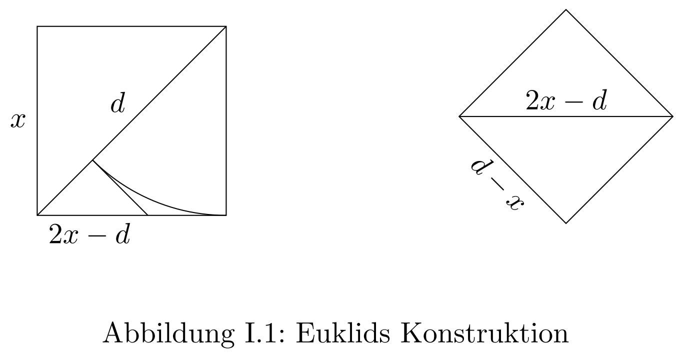

Abbildung I.1: Euklids Konstruktion

Weiterhin gilt, dass sowohl x_1 als auch d_1 ganze Vielfache von L sind:

$$x_1 = d - x = (n - m)L$$
$$d_1 = 2x - d = (2m - n)L$$

Nach Pythagoras gilt $d^2 = 2x^2$, und somit $d \leq 3/2 \cdot x$, da $(3/2)^2 > 2$. Daraus folgt, dass

$$x_1 = d - x \leq \frac{1}{2} \cdot x.$$

Iteriere dieses Verfahren und erhalte eine Serie von Quadraten mit Seiten $x_2, x_3, \ldots$ und Diagonalen $d_2, d_3, \ldots$. Es gilt:

$$x_k \leq \frac{1}{2^k} \cdot x.$$

Ausserdem ist jedes x_k (und d_k) ein ganzes Vielfaches von L. Wähle nun k so gross, dass

$$x_k \leq \frac{1}{2^k} x < L.$$

Dies, zusammen mit dem Fakt, dass x_k ein ganzes Vielfaches von L ist, impliziert, dass $x_k = 0$, was unmöglich ist. Deshalb können x und d nicht kommensurabel sein. □

Wir haben diese Aussage mit einem sogenannten *Widerspruchsbeweis* bewiesen. Hierfür haben wir eine Annahme getroffen, und diese zu einem Widerspruch geführt. Dies zeigt, dass unsere Annahme falsch war.

Zeitgenössische Umformulierung

Seien $a, b > 0$ zwei kommensurable Längen. Das heisst, es existieren $L > 0$ und $m, n \in \mathbb{N}$ mit $a = mL$, $b = nL$. Dann gilt:

$$\frac{a}{b} = \frac{mL}{nL} = \frac{m}{n},$$

das heisst, das Verhältnis a/b ist eine *rationale Zahl*. Zurück zum Quadrat mit Seite x und Diagonale d. Nach Pythagoras gilt $d^2 = 2x^2$. Falls $x = mL$ und $d = nL$ gilt, dann also

$$2 = \frac{d^2}{x^2} = \left(\frac{d}{x}\right)^2 = \left(\frac{n}{m}\right)^2,$$

und somit

$$2m^2 = n^2. \tag{1}$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist durch 2 teilbar. Dies impliziert, dass n^2, und somit auch n, durch 2 teilbar ist. Schreibe nun $n = 2k$. Schreibe $n = 2k$ mit $k \in \mathbb{N}$. Setze das in die Gleichung (1) ein und erhalte $2m^2 = (2k)^2 = 4k^2$, beziehungsweise

$$m^2 = 2k^2.$$

Die rechte Seite ist durch 2 teilbar, also auch m. Wir schliessen, dass sowohl n als auch m durch 2 teilbar sind. Schreibe noch $m = 2\ell$ mit $\ell \in \mathbb{N}$. Es gilt also

$$2 = \left(\frac{n}{m}\right)^2 = \left(\frac{k}{\ell}\right)^2.$$

In anderen Worten sind Zähler und Nenner beide gerade. Iteriere dieses Verfahren k mal, bis $n/2^k < 1$. Dann entsteht ein Widerspruch.

Korollar. *Die Gleichung $z^2 = 2$ hat keine rationale Lösung, das heisst, keine Lösung der Form $z = p/q$ mit $p, q \in \mathbb{N}$ und $q > 0$.*

Das Ziel für den Rest dieses Kapitels ist es, eine Zahlenmenge $\mathbb{R}$ (die Menge der *reellen Zahlen*) zu konstruieren, in welcher die Gleichung $z^2 = 2$ eine Lösung hat.

Übung. Die Gleichung $z = \sqrt{2}x + \sqrt{3}y$ hat keine ganze Lösungen ausser $(0, 0, 0)$.

2 Mengen im Vergleich

Wir haben bereits einige Mengen erwähnt, nämlich die *natürlichen Zahlen*

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\},$$

die Menge der *ganzen Zahlen*,

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\},$$

und die Menge der *rationalen Zahlen*

$$\mathbb{Q} = \{p/q \mid p, q \in \mathbb{Z},\ q > 0\}.$$

Wir wollen eine weitere Menge, die Menge $\mathbb{R}$ der *reellen Zahlen* einführen. Es gelten dann die Inklusionen

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Wichtige Grundbegriffe

Definition. Seien A, B zwei Mengen. Eine *Abbildung* zwischen A und B, in Symbolen, $f\colon A \to B$, ist eine Zuordnung $f(a) \in B$ für jedes $a \in A$. Eine Abbildung $f\colon A \to B$ heisst

(i) *injektiv*, falls für alle $a_2, a_1 \in A$ mit $a_2 \neq a_1$ gilt, dass $f(a_1) \neq f(a_2)$,

(ii) *surjektiv*, falls für alle $b \in B$ ein Element $a \in A$ existiert mit $f(a) = b$,

(iii) *bijektiv*, falls f sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Beispiele.

(i) Seien $A = B = \{0, 1\}$. Es gibt 4 Abbildungen $f\colon A \to B$:

(a) $0 \mapsto 0$ und $1 \mapsto 0$,

(b) $0 \mapsto 1$ und $1 \mapsto 1$,

(c) $0 \mapsto 0$ und $1 \mapsto 1$,

(d) $0 \mapsto 1$ und $1 \mapsto 0$.

Abbildungen (a) und (b) sind weder injektiv noch surjektiv. Abbildungen (c) und (d) sind beide bijektiv.

(ii) Seien $A = B = \mathbb{N}$. Betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto 2n. \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist injektiv, aber nicht surjektiv. Die Abbildung

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto \frac{2n - 1 + (-1)^n}{4}, \end{aligned}$$

also die Abbildung die durch 2 dividiert und dann abrundet, ist nicht injektiv, aber surjektiv. Um zu sehen, dass $g(n) = \lfloor n/2 \rfloor$, betrachte zwei Fälle:

(a) $n = 2k$ ist gerade. Dann ist $g(n) = (4k + 1 - 1)/4 = k$.

(b) $n = 2k + 1$ ist ungerade. Dann ist $g(n) = (4k + 2 - 1 - 1)/4 = k$.

Bemerkungen.

(1) Bijektive Abbildungen $f\colon A \to B$ haben eine eindeutige *Umkehrabbildung* $f^{-1}\colon B \to A$. Die Konstruktion dafür ist wie folgt. Sei $b \in B$. Da f surjektiv ist, existiert $a \in A$ mit $f(a) = b$. Da f injektiv ist, ist dieses a eindeutig. Setze $f^{-1}(b) = a$. Es gilt dann

$$f^{-1}(f(a)) = a$$

für alle $a \in A$, und ebenso

$$f(f^{-1}(b)) = b$$

für alle $b \in B$. Wir schreiben häufig

$$\begin{aligned} f^{-1} \circ f &= \mathrm{Id}_A, \\ f \circ f^{-1} &= \mathrm{Id}_B, \end{aligned}$$

in Worten, “f^{-1} verknüpft mit f ist die Identitätsabbildung auf A” und ähnlich, “f verknüpft mit f^{-1} ist die Identitätsabbildung auf B”.

(2) Für endliche Mengen A und B gilt: Es existiert eine bijektive Abbildung $f : A \to B$, genau dann, wenn A und B gleich viele Elemente haben.

Definition. Eine Menge A heisst

(i) *unendlich*, falls eine injektive, nicht surjektive Abbildung $f : A \to A$ existiert,

(ii) *abzählbar*, falls eine bijektive Abbildung $f\colon \mathbb{N} \to A$ existiert.

Beispiel. Sei $A = \mathbb{N}$. Die Abbildung f aus Beispiel (ii) ist injektiv, aber nicht surjektiv. Also ist $\mathbb{N}$ eine unendliche Menge.

Beispiel. Sei M eine Menge, welche $\mathbb{N}$ als Teilmenge enthält (zum Beispiel $M = \mathbb{Q}$). Dann ist M unendlich. Betrachte dazu die Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon M &\to M \\ x &\mapsto \begin{cases} x+1 & \text{falls } x \in \mathbb{N} \subset M, \\ x & \text{falls } x \in M \setminus \mathbb{N} \end{cases} \end{aligned}$$

Folgende Proposition zeigt in einem gewissen Sinn, dass es gleich viele Brüche wie natürliche Zahlen gibt. Dies ist unser erstes potentiell überraschendes Resultat.

Proposition 1. *Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist abzählbar.*

Beweis. Wir konstruieren eine Bijektion $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$. Für $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 1$ definiere

$$A_k = \{p/q \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \geq 1, p/q \text{ ist gekürzt}, |p| + |q| = k\}.$$

Alle solchen $A_k \subset \mathbb{Q}$ sind endlich und

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{k \geq 1} A_k$$

ist die *disjunkte Vereinigung* dieser Mengen, das heisst, $A_i \cap A_j = \emptyset$ für alle $i \neq j$. Wir haben

$$A_1 = \{0/1\},\ A_2 = \{\pm 1/1\},\ A_3 = \{\pm 1/2, \pm 2/1\}, \ldots.$$

Sei $a_k = |A_k|$ die Anzahl Elemente von A_k. Definiere Teilmengen $B_k \subset \mathbb{N}$ mit $|B_k| = a_k$. Dazu setze $B_1 = \{0\}$, und für $k \geq 2$ setze

$$B_k = \{a_1 + \cdots + a_{k-1}, a_1 + \cdots + a_{k-1} + 1, \ldots, a_1 + \cdots + a_{k-1} + a_k - 1\}.$$

Es gilt dann

$$B_1 = \{0\},\ B_2 = \{1, 2\},\ B_3 = \{3, 4, 5, 6\}, \ldots.$$

Wähle eine Bijektion $\varphi_k\colon B_k \to A_k$ für alle $k \geq 1$. Definiere nun

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbb{N} &\to \mathbb{Q} \\ n &\mapsto \varphi_k(n) \text{ falls } n \in B_k. \end{aligned}$$

Die Abbildung φ ist eine Bijektion, da $\mathbb{N}$ die disjunkte Vereinigung der B_k und $\mathbb{Q}$ die disjunkte Vereinigung der A_k ist. $\square$

Dieser Beweis zeigt allgemeiner, dass jede Menge, die eine abzählbare Vereinigung endlicher Mengen ist, selber abzählbar ist. Man könnte diese Aussage zum Beispiel für Aufgabe 5 auf Serie 1 verwenden.

Frage. Ist jede unendliche Menge abzählbar?

Georg Cantor hat ca. 1870 als erste Person die Antwort "nein" auf diese Frage festgehalten. Wir konstruieren nun nach seiner Idee eine Menge, die nicht abzählbar ist. Dazu betrachten wir die *Potenzmenge* $P(M)$ einer Menge M, definiert als die "Menge aller Teilmengen von M". Ein wenig formaler,

$$P(M) = \{A \mid A \subset M\}\,.$$

Beispiel. Sei $M = \{0, 1\}$. Dann ist

$$P(M) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}.$$

Das Symbol $\emptyset$ bezeichnet die *leere Menge.*

Bemerkung. Falls die Menge M selbst n Elemente hat, dann hat ihre Potenzmenge 2^n Elemente. Um das zu beweisen, bilden wir jede Teilmenge A von M auf die Funktion

$$\begin{aligned} f_A \colon M &\to \{0, 1\} \\ x &\mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } x \notin A, \\ 1, & \text{falls } x \in A, \end{cases} \end{aligned}$$

ab. Diese Abbildung $A \mapsto f_A$ ist eine Bijektion zwischen $P(M)$ und der Menge von Funktionen $f\colon M \to \{0, 1\}$, und es gibt 2^n solche Funktionen.

Proposition 2 (Cantor)**.** *Sei M eine beliebige Menge. Dann existiert keine surjektive Abbildung $\varphi\colon M \to P(M)$. Insbesondere existiert keine Bijektion $\varphi\colon M \to P(M)$.*

Korollar. *Die Potenzmenge $P(\mathbb{N})$ ist nicht abzählbar.*

Beweis der Proposition. Wir führen einen klassischen Widerspruchsbeweis. Wir nehmen an, es gäbe doch eine solche Surjektion $\varphi\colon M \to P(M)$. Betrachte nun die Teilmenge A von M aller x, die nicht in $\varphi(x)$ enthalten sind. In Symbolen,

$$A = \{x \in M \mid x \notin \varphi(x)\}\,.$$

Die Forderung $x \notin \varphi(x)$ macht Sinn, da $\varphi(x)$ selbst eine Teilmenge von M ist. Da φ surjektiv ist, muss ein $a \in M$ existieren mit $\varphi(a) = A$. Wir fragen nun, ob $a \in A$ ist oder nicht. Wäre $a \in A$, so müsste nach Definition von A gelten, dass $a \notin \varphi(a)$. Aber das widerspricht der Definition von $\varphi(a) = A$. Wäre jedoch $a \notin A$, dann wäre die Bedingung $a \notin \varphi(a)$ erfüllt, also $a \in A$. Aber da $A = \varphi(a)$, widerspricht auch dies der Definition von A. Somit führen beide Möglichkeiten zu einem Widerspruch. Dies bedeutet, dass unsere ursprüngliche Annahme, dass eine Surjektion $\varphi\colon M \to P(M)$ existiert, verworfen werden muss: Es kann keine solche Abbildung geben. $\square$

Einschub: Beweismethoden

Ein *Beweis* ist eine "Deduktion einer Aussage aus bereits bewiesenen Aussagen oder Grundaxiomen". Wichtig ist hier, dass die Deduktion logisch korrekt erfolgt. Folgende Beweismethoden sind typisch.

- Geometrische Beweise, zum Beispiel mit Hilfe von Euklids Axiomen. Das erste Theorem der Vorlesung haben wir so bewiesen.

- Beweise mithilfe von logischen Schlussfolgerungen, zum Beispiel Widerspruchsbeweise. Proposition 2 haben wir so bewiesen.

- Kombinatorische Beweise, zum Beispiel Beweise mit vollständiger Induktion.

Wir führen nun ein Beispiel eines Beweises durch vollständige Induktion.

Definition. Die n-te *Catalanzahl* C_n ist die Anzahl korrekte Klammerungen mit $2n$ Klammern (n linke und n rechte Klammern).

Beispiele.

- $C_1 = 1$, die einzige Korrekte Klammerung ist $()$.

- $C_2 = 2$, die Klammerungen $()()$ und $(())$ sind beide korrekt.

- $C_3 = 5$.

Behauptung. *Die n-te Catalanzahl C_n erfüllt $C_n \geq 2^{n-1}$.*

Beweis durch vollständige Induktion. Für die *Induktionsverankerung* testen wir die Aussage für $n = 1$: Tatsächlich ist $C_1 \geq 2^0$.

Die *Induktionsannahme* ist nun, dass die Aussage für ein festes $n \in \mathbb{N}$ stimmt.

Im *Induktionsschritt* leiten wir nun die Aussage für $n+1$ aus der Induktionsannahme (für n) her. Hier heisst das, dass wir $C_{n+1} \geq 2^n$ aus $C_n \geq 2^{n-1}$ herleiten wollen. Sei dazu K eine korrekte n-Klammerung, das heisst, eine korrekte Klammerung mit n linken und n rechten Klammern. Dann sind sowohl (K) als auch $()K$ korrekte $(n+1)$-Klammerungen. Weiter gilt, dass diese beiden Klammerungen verschieden sind: Die erste der beiden Klammerungen beginnt mit zwei geöffneten Klammern, wobei die zweite mit einer geöffneten und einer geschlossenen Klammer beginnt. Weiter gilt, dass für verschiedene korrekte n-Klammerungen K_1 und K_2 auch $()K_1, (K_1), ()K_2, (K_2)$ verschieden sind. Wir können also aus jeder korrekten n-Klammerung zwei korrekte $(n+1)$-Klammerungen konstruieren. Somit folgt, dass

$$C_{n+1} \geq 2C_n \geq 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n.$$

Dies zeigt die Aussage für $n+1$. $\square$

In Serie 1 sehen wir, dass sogar $C_n \geq 3^n$ gilt, jedenfalls für $n \geq 17$. Um dies zu zeigen reicht es aber nicht, zu bemerken, dass neben (K) und $()K$ auch $K()$ eine korrekte Klammerung ist. Diese könnte nämlich mit $()K$ übereinstimmen. Hierzu brauchen wir die Formel in folgender Bemerkung.

Bemerkung. Es gilt

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Die zweite Gleichheit ist eine einfache Rechnung. Wir rechtfertigen die erste Gleichheit. Der erste der Binomialkoeffizienten zählt alle n-Klammerungen (auch inkorrekte). Der zweite Binomialkoeffizient zählt die Anzahl inkorrekter Klammerungen. Man kann sich dies folgendermassen skizzenhaft überlegen. Eine inkorrekte Klammerung hat eine erste Position, wo eine rechte Klammer zu viel ist. Drehe alle Klammern hinter dieser Position um. Die Klammerung, die wir so erhalten, hat $n+1$ rechte Klammern. Weiter kann man diesen Prozess rückgängig machen: Jede Klammerung mit $n+1$ rechten Klammern liefert eine inkorrekte Klammerung mit n rechten Klammern. Also sind die schlechten n-Klammerungen in Bijektion mit der Anzahl Klammerungen mit $n+1$ rechten (und $n-1$ linken) Klammern.

3 Gruppen und Körper

Definition. Eine *Gruppe* ist eine Menge G mit einer *Verknüpfung* $\circ\colon G \times G \to G$, welche folgende Eigenschaften erfüllt.

(i) Es existiert ein Element $e \in G$, so dass für alle $g \in G$ gilt, dass $g \circ e = e \circ g = g$.

(ii) Für alle $g \in G$ existiert ein $h \in G$ mit $g \circ h = h \circ g = e$.

(iii) Für alle $a, b, c \in G$ gilt $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$.

Notation.

(i) Das Element e bezeichnen wir als das *neutrale Element*.

(ii) Wir schreiben häufig g^{-1} für h und nennen g^{-1} das zu g *inverse Element*.

(iii) Das Gesetz $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ nennt man das *Assoziativgesetz*.

Beispiele.

- Die Menge $G = \{e\}$ mit der Operation $e \circ e = e$ ist eine Gruppe (sie heisst *triviale Gruppe*).
- Die Menge $\{e, a\}$ mit Verknüpfungstabelle zu finden in Tabelle I.1 bildet eine Gruppe.

	e	a
e	e	a
a	a	e

Tabelle I.1: Verknüpfungstabelle von $\{e, a\}$

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

Tabelle I.2: Verknüpfungstabelle von $\{e, a, b\}$

- Die Menge $\{e, a, b\}$ mit Verknüpfungstabelle zu finden in Tabelle I.2 bildet eine Gruppe. Hier kann man a als ebene Drehung um 0 mit Winkel $2\pi/3$ interpretieren. Ähnlich ist b eine Drehung mit Winkel $4\pi/3$.
- $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine Gruppe.
- $(\mathbb{Z}, \cdot)$ ist keine Gruppe. Zum Beispiel hat die Zahl $2 \in \mathbb{Z}$ kein inverses Element.
- $(\mathbb{Q}, +)$ ist eine Gruppe.
- $(\mathbb{Q}, \cdot)$ ist keine Gruppe. Zum Beispiel hat $0 \in \mathbb{Q}$ kein inverses Element.

Proposition 3. *In jeder Gruppe G hat die Gleichung $a \circ x = c$ eine eindeutige Lösung $x \in G$. Hier sind a, c vorgegeben.*

Beweis. Wir zeigen Existenz und Eindeutigkeit separat. Wir wissen nach Axiom (ii), dass $b \in G$ existiert mit $b \circ a = e$. Verknüpfung mit b von links auf beiden Seiten liefert $b \circ (a \circ x) = b \circ c$. Axiom (iii) sagt, dass die linke Seite

$$(b \circ a) \circ x = e \circ x = x$$

ist. Also ist $x = b \circ c = a^{-1} \circ c$ eine Lösung. Um Eindeutigkeit zu zeigen seien $x_1, x_2 \in G$ mit

$$a \circ x_1 = c = a \circ x_2.$$

Verknüpfung von links wie oben mit b liefert

$$b \circ (a \circ x_1) = b \circ (a \circ x_2).$$

Wir erhalten

$$(b \circ a) \circ x_1 = (b \circ a) \circ x_2.$$

Sobald wir uns erinnern, dass $b \circ a = e$, schliessen wir, dass $x_1 = x_2$. □

Spezialfälle.

(1) Falls $a \circ x = a$ gilt, so ist $x = e$. Dies liefert Eindeutigkeit des neutralen Elements.

(2) Falls $a \circ x = e$ gilt, so ist $x = a^{-1}$. Dies liefert Eindeutigkeit des inversen Elements.

Körper

Definition. Eine Menge K mit zwei Verknüpfungen $+, \cdot \colon K \times K \to K$ heisst *Körper*, falls

(i) $(K, +)$ ist eine kommutative Gruppe mit neutralem Element $0 \in K$,

(ii) $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine kommutative Gruppe mit neutralem Element $1 \in K \setminus \{0\}$ (das heisst $1 \neq 0$),

(iii) für alle $x, y, z \in K$ gilt das Distributivgesetz $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Wir halten uns hier an die Konvention, dass die Multiplikation stärker bindet als die Addition. Konkret haben wir oben

$$x \cdot y + x \cdot z = (x \cdot y) + (x \cdot z).$$

Dass $(G, \circ)$ eine kommutative Gruppe ist, bedeutet, dass für alle $g, h \in G$ gilt, dass $g \circ h = h \circ g$.

Beispiele.

(1) $K = \mathbb{Q}$ mit der üblichen Addition

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

und üblichen Multiplikation

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

bildet einen Körper mit neutralen Elementen $0/1$ (für $+$) und $1/1$ (für $\cdot$). Die Rechengesetze (Assoziativität, Kommutativität und Distributivität) übertragen sich von den entsprechenden Gesetzen für die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ mit der üblichen Addition und Multiplikation. Diese wiederum wurden von Dedekind erstmals formal definiert ("was sind und sollen Zahlen"). Wir führen das in dieser Vorlesung nicht weiter aus.

(2) $K = \{0, 1\}$ mit Verknüpfungstabellen wie in Tabelle I.3 ist ein Körper (der kleinste).

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Tabelle I.3: Verknüpfungstabellen von $\{0, 1\}$

(3) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist kein Körper, da nur ± 1 multiplikative Inverse haben.

Ausblick (Algebra)**.** Sei $p \in \mathbb{N}$ prim. Dann ist die Menge

$$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, \ldots, p - 1\}$$

mit "Addieren und Multiplizieren modulo p" ein Körper.

4 Konstruktion der reellen Zahlen

Ziel. Wir konstruieren eine Zahlenmenge $\mathbb{R}$, die Menge der reellen Zahlen, mit folgender Eigenschaft: Jede stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche negative und positive Werte annimmt, hat eine Nullstelle in $\mathbb{R}$. Insbesondere soll jede Funktion der Form $f(x) = x^2 - a$ mit $a > 0$ eine Nullstelle in $\mathbb{R}$ haben. Folglich hat in $\mathbb{R}$ jede positive Zahl $a > 0$ eine Quadratwurzel.

Wir konstruieren die reellen Zahlen nach Dedekind, ca. 1872.

Definition. Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{Q}$ heisst *Dedekindscher Schnitt*, oder kurz *Schnitt*, falls

(1) $D \neq \emptyset$, $D \neq \mathbb{Q}$,

(2) für alle $x, y \in \mathbb{Q}$ mit $x \in D$ und $x \leq y$ gilt $y \in D$,

(3) D hat kein kleinstes Element.

Intuitiv ist ein Schnitt eine "rechte Hälfte" von $\mathbb{Q}$, wobei die Grenze zwischen den Hälften nicht unbedingt bei 0 ist und sie auch nicht als Element der rechten Hälfte gilt. Siehe auch Abbildung I.2.

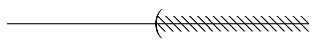

Abbildung I.2: Ein Dedekindscher Schnitt

Beispiel. Sei $x = p/q \in \mathbb{Q}$. Setze $D_x = \{y \in \mathbb{Q} \mid y > x\} \subset \mathbb{Q}$. Dann ist D_x ein Schnitt. Wir nennen D_x einen *rationalen Schnitt*, da diese später die rationalen Zahlen in $\mathbb{R}$ werden.

Bemerkung. Seien $D, D' \subset \mathbb{Q}$ zwei Schnitte mit $D \neq D'$. Dann existiert $x \in \mathbb{Q}$ mit entweder $x \in D$ und $x \notin D'$, oder $x \notin D$ und $x \in D'$. Im ersten Fall gilt $D' \subset D$, und im zweiten Fall gilt $D \subset D'$.

Frage. Sei $D \subset \mathbb{Q}$ ein beliebiger Schnitt. Existiert immer eine Zahl $x \in \mathbb{Q}$ mit $D = D_x$? (Hier ist D_x die Menge aus dem Beispiel oben.)

Wie erwartet ist die Antwort nein, siehe Proposition 4 unten.

Definition. Die Menge $\mathbb{R}$ der *reellen Zahlen* ist definiert als die Menge aller Dedekindscher Schnitte $D \subset \mathbb{Q}$.

Beispiele.

- Sei $p/q \in \mathbb{Q}$. Dann ist
$$D_{p/q} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > p/q\}$$
ein rationaler Schnitt. So erhalten wir eine "Einbettung" $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$.

- Nicht alle Schnitte sind rational. Zum Beispiel ist

$$D_{\sqrt{2}} = \left\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 > 2 \text{ und } x > 0\right\}$$

  kein rationaler Schnitt.

Proposition 4 (Cantor). *Die Menge $\mathbb{R}$ ist überabzählbar, das heisst, unendlich aber nicht abzählbar.*

Korollar. *Es gibt irrationale Schnitte, das heisst, Schnitte $D \subset \mathbb{Q}$, welche nicht vom Typ D_x für $x \in \mathbb{Q}$ sind.*

Beweis. Die Menge $\mathbb{Q}$ ist abzählbar (siehe Proposition 1). □

Beweis von Proposition 4. Wir erinnern uns an Proposition 2 und ihr Korollar, die sagten, dass die Potenzmenge $P(\mathbb{N})$ überabzählbar ist. Wir konstruieren nun eine injektive Abbildung $\psi\colon P(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$. Daraus folgt dann, dass $\mathbb{R}$ überabzählbar ist.

Die Konstruktion von ψ ist folgendermassen. Sei $B \in P(\mathbb{N})$, das heisst $B \subset \mathbb{N}$. Schreibe $B = \{n_0, n_1, n_2, \dots\}$ mit $n_0 < n_1 < n_2 < \dots$. Diese Menge könnte auch endlich sein. Definiere einen Schnitt

$$D_B = \left\{ x \in \mathbb{Q} \;\middle|\; x > \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n_k} \right\}.$$

Es gilt zum Beispiel:

(1) Sei $B = \emptyset$. Wir halten uns an die Konvention "leere Summe gleich 0". Es gilt also $D_\emptyset = D_0$.

(2) Sei $B = \mathbb{N}$, das heisst, $B = \{0, 1, 2, \dots\}$ (also $n_k = k$). Berechne

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{k} &= 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^{2} + \dots \\ &= \frac{1}{1 - 1/3} \\ &= \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Also ist $D_{\mathbb{N}} = D_{3/2}$.

Sei nun $B = \{n_0, n_1, \dots\} \subset \mathbb{N}$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned}0 &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n_k} \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{k} \\ &= \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Also gilt $D_0 \supset D_B \supset D_{3/2}$. Insbesondere ist $D_B \neq \emptyset$ und $D_B \neq \mathbb{Q}$, das heisst D_B ist wirklich ein Schnitt. Setze nun

$$\psi(B) = D_B \in \mathbb{R}.$$

Wir behaupten nun, dass ψ injektiv ist. Konkreter, seien $B_1, B_2 \in P(\mathbb{N})$ mit $B_1 \neq B_2$. Wir zeigen, dass $D_{B_1} \neq D_{B_2}$. Schreibe dazu

$$\begin{aligned} B_1 &= \{m_0, m_1, m_2, \dots\} \text{ mit } m_0 < m_1 < m_2 < \dots, \\ B_2 &= \{n_0, n_1, n_2, \dots\} \text{ mit } n_0 < n_1 < n_2 < \dots. \end{aligned}$$

Sei $\ell \in \mathbb{N}$ minimal mit $m_\ell \neq n_\ell$. So ein ℓ existiert, da $B_1 \neq B_2$. Wir nehmen an, dass $m_\ell < n_\ell$. Beispielsweise, für $B_1 = \{0,1,2\}$ und $B_2 = \{0,1,3,4,5\}$ ist $\ell = 2$, $m_2 = 2$ und $n_2 = 3$. Vergleiche die Summen

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{m_k} \geq \sum_{k=0}^{\ell} \left(\frac{1}{3}\right)^{m_k} = \sum_{k=0}^{\ell-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{m_k} + \left(\frac{1}{3}\right)^{m_\ell}, \\ S_2 &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n_k} = \sum_{k=0}^{\ell-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{n_k} + \sum_{k=\ell}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n_k}. \end{aligned}$$

Setzen wir

$$\begin{aligned} X &= \sum_{k=0}^{\ell-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{n_k}, \\ Y &= \sum_{k=\ell}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n_k}, \end{aligned}$$

so erhalten wir aus $n_\ell > m_\ell$, dass $n_\ell \geq m_\ell + 1$. Also folgt

$$Y \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{m_\ell} \cdot \left(\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots\right).$$

Es gilt also

$$\begin{aligned} S_1 &\geq X + \left(\frac{1}{3}\right)^{m_\ell}, \\ S_2 &\leq X + \left(\frac{1}{3}\right)^{m_\ell} \cdot \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Setze

$$x = X + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{m_\ell} \in \mathbb{Q}.$$

Dann ist $x < S_1$, also $x \notin D_{B_1}$, und $x > S_2$, also $x \in D_{B_2}$. Wir schliessen, dass $\psi(B_1) \neq \psi(B_2)$. Also ist ψ injektiv und $\mathbb{R}$ überabzählbar. $\square$

Frage. Wo kommen all diese Schnitte D_B her?

Es muss irrationale Schnitte D_B geben (sonst wären es abzählbar viele). Insbesondere muss es Teilmengen $B \subset \mathbb{N}$ geben, so dass die entsprechende Summe

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n_k}$$

keine rationale Zahl ist. Die Menge all dieser Summen heisst *Cantormenge.*

Eine Ordnung auf den reellen Zahlen

Seien $D, D' \in \mathbb{R}$ mit $D \neq D'$. Dann gilt entweder $D \subset D'$ oder $D' \subset D$ (siehe oben).

Definition. Wir schreiben $D < D'$ falls $D' \subset D$ und $D' \neq D$.

Bemerkung. Falls $D < D'$ (das heisst, $D' \subset D$ und $D' \neq D$), dann existiert $y \in \mathbb{Q}$ mit $y \in D$ und $y \notin D'$. Da D kein kleinstes Element enthält, existiert $x \in \mathbb{Q}$ mit $x < y$ und $x \in D$. Dann gilt $D' \subset D_x \subset D$, und all diese Inklusionen sind strikt. Die erste Inklusion ist strikt, da $x < y$. Das war nötig, da $D' = D_y$ gelten könnte. Wir haben also eine rationale Zahl $x \in \mathbb{Q}$ gefunden mit $D < D_x < D'$. Wir haben somit gezeigt, dass zwischen zwei verschiedenen reellen Zahlen immer eine rationale Zahl liegt. Dies ist überraschend, da die Menge $\mathbb{Q}$ abzählbar ist, aber nicht die Menge $\mathbb{R}$.

Kronecker hat aus diesem Grund Dedekinds Arbeit nicht akzeptiert, und Poincaré hat es sogar als Teufelswerk bezeichnet. Aus diesem Skeptizismus ist unter anderem der Konstruktivismus in der Logik entstanden. Dieser hat jedoch nicht mehr viele Vertreter.

Addition auf den reellen Zahlen

Definition. Seien $D, D' \in \mathbb{R}$ Dedekindsche Schnitte. Wir definieren die *Summe* von D und D' als

$$D + D' = \big\{ z \in \mathbb{Q} \mid \text{es existieren } x \in D \text{ und } y \in D' \text{ mit } z = x + y \big\} .$$

Man kann leicht überprüfen, dass $D + D'$ ein Schnitt ist.

Lemma 1. *$\mathbb{R}$ mit Addition ist eine kommutative Gruppe mit neutralem Element*

$$D_0 = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$$

Beweis.

- Kommutativität und Assoziativität übertragen sich von der Addition auf $\mathbb{Q}$.
- D_0 ist das neutrale Element. Zu prüfen ist für alle $D \in \mathbb{R}$, dass $D + D_0 = D$. Wir zeigen beide Inklusionen.

(a) Die Inklusion $D + D_0 \subset D$ folgt direkt aus der Definition: Wenn wir eine positive Zahl (ein Element von D_0) zu einem $x \in D$ addieren, erhalten wir eine grössere rationale Zahl als x, die dementsprechend auch in D ist.

(b) Die umgekehrte Inklusion $D + D_0 \supset D$ zeigen wir wie folgt. Sei $y \in D$. Dann existiert $x \in D$ mit $x < y$, da x nicht das kleinste Element von D ist. Dann gilt $y = x + (y - x) \in D + D_0$, da $x \in D$ und $0 < y - x \in D_0$.

Aus (a) und (b) folgt $D = D + D_0$, also ist D_0 das neutrale Element von $\mathbb{R}$.

- Die inversen Elemente müssen wir erst noch konstruieren. Das ist der womöglich schwierigste Schritt in diesem Beweis. Wir definieren

$$-D = -(\mathbb{Q} \setminus D) + D_0,$$

Das ist scheinbar die einfachste Art, dies aufzuschreiben. Für ein wenig Inutition dahinter, siehe Abbildung I.3. Hier ist zu beachten, dass das Minus auf der linken Seite anders zu interpretieren ist, als das Minus auf der rechten Seite. Wir behaupten nun, dass $D + (-D) = D_0$. Berechne dazu

$$D + (-D) = D + (-(\mathbb{Q} \setminus D)) + D_0.$$

Seien $x \in D$, $y \in -(\mathbb{Q} \setminus D)$, und $z \in D_0$. Dann gilt:

(i) $z > 0$,

(ii) $-y \in \mathbb{Q} \setminus D$, also $y \notin D$. Das heisst, $-y < x$, also $x + y > 0$.

Wir schliessen, dass $x + y + z > 0$, also $x + y + z \in D_0$. Das zeigt die Inklusion $D + (-D) \subset D_0$.

Sei umgekehrt $p/q \in D_0$, das heisst, $p/q > 0$. Wähle $y \in \mathbb{Q}$ mit $0 < y < p/q$, zum Beispiel $y = p/2q$. Es existiert $x \in D$, so dass $x - y \notin D$: Sei hierzu $x' \in D$ beliebig, und sei $n \in \mathbb{N}$ maximal, so dass $x' - ny \in D$. Dann erfüllt $x = x' - ny$ diese Eigenschaft. Aus $x - y \notin D$ folgt, dass $x - y \in \mathbb{Q} \setminus D$. Dann ist aber $y - x \in -(\mathbb{Q} \setminus D)$. Also ist $p/q = x + (y - x) + (p/q - y)$, wobei $x \in D$, $y - x \in -(\mathbb{Q} \setminus D)$, und $p/q - y \in D_0$. Also liegt p/q in $D + (-D) = D + (-(\mathbb{Q} \setminus D)) + D_0$, also $D + (-D) \supset D_0$. Wir haben beide Inklusionen gezeigt, und somit erhalten wir $D + (-D) = D_0$. □

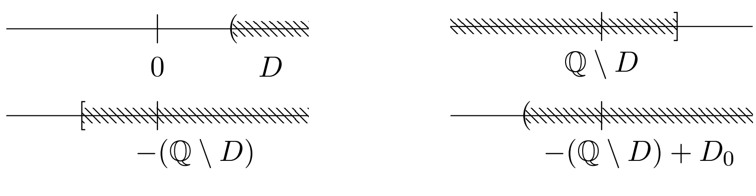

Abbildung I.3: Additive Inverse

Multiplikation auf den reellen Zahlen

Dieser Abschnitt verläuft völlig analog zum letzten, aber wir müssen mit den Vorzeichen vorsichtig sein.

Definition. Seien $D, D' \in \mathbb{R}$. Wir nehmen an, dass $D, D' \geq 0$, das heisst $D, D' \subset D_0$. Dann definieren wir das *Produkt* von D und D' als

$$D \cdot D' = \{z \in \mathbb{Q} \mid \text{es existieren } x \in D, y \in D' \text{ mit } z = x \cdot y\}.$$

Falls $D < 0$ und $D' \geq 0$, dann definieren wir

$$D \cdot D' = -(-D) \cdot D',$$

falls $D \geq 0$ und $D' < 0$, definieren wir ähnlich

$$D \cdot D' = -(D \cdot (-D')),$$

und falls $D < 0$ und $D' < 0$, definieren wir

$$D \cdot D' = (-D) \cdot (-D').$$

In dieser Definition bezeichnet "$-D$" das in obigem Abschnitt definierte additive Inverse von D (und nicht die gespiegelte Menge).

Lemma 2. *Die Menge $\mathbb{R} \setminus \{D_0\}$ mit Multiplikation ist eine kommutative Gruppe mit neutralem Element*

$$D_1 = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 1\}.$$

Beweis.

- Die Kommutativität und Assoziativität der Multiplikation übertragen sich von $\mathbb{Q}$ auf $\mathbb{R}$.

- Wir müssen zeigen, dass D_1 tatsächlich das neutrale Element von $\mathbb{R}$ ist. Sei $D \in \mathbb{R}$. Zu prüfen ist, dass $D \cdot D_1 = D$. Wir prüfen dies für $D > 0$. Die anderen Fälle sind nicht schwieriger, da müssen wir einfach an den entsprechenden Stellen ein Minussymbol hinschreiben. Wir zeigen wieder beide Inklusionen.

  (a) Die Inklusion $D \cdot D_1 \subset D$ ist klar nach Definition.

  (b) Sei umgekehrt $y \in D$. Wähle $x \in D$ mit $x < y$ und $x > 0$. Dann ist

  $$y = x \cdot \frac{y}{x} \in D \cdot D_1$$

  da $y/x > 1$.

  Also ist $D \cdot D_1 = D$.

- Sei $D \in \mathbb{R}$ mit $D \neq D_0$. Wir konstruieren D^{-1}, das multiplikative Inverse von D. Wir nehmen auch hier der Einfachheit halber $D > 0$ an, auch hier, um uns nicht zu viele Gedanken über das Platzieren der Minussymbole zu machen. Setze
$$D^{-1} = (D_0 \setminus D)^{-1} \cdot D_1.$$
Auch hier bedeutet das Symbol $^{-1}$ links etwas anderes als rechts. Für Intuition dazu betrachte Abbildung I.4. Wir testen wieder beide Inklusionen.
  (a) Für $x \in D$, $y \in (D_0 \setminus D)^{-1}$, und $z \in D_1$ ist $x \cdot y \cdot z > 1$. Wir schliessen, dass $D \cdot D^{-1} \subset D_1$.
  (b) Sei $p/q \in D_1$, das heisst $p/q > 1$. Wähle $y \in \mathbb{Q}$ mit $1 < y < p/q$, zum Beispiel
  $$y = \frac{p+q}{2q}.$$
  Wähle $x \in D$ mit $x/y \notin D$. Dann gilt:
  $$\frac{p}{q} = x \cdot \frac{y}{x} \cdot \frac{p/q}{y} \in D \cdot (D_0 \setminus D)^{-1} \cdot D_1.$$
  Da $x/y \notin D$ ist $x/y \in D_0 \setminus D$, also $y/x \in (D_0 \setminus D)^{-1}$. Wir erhalten die umgekehrte Inklusion $D \cdot D^{-1} \supset D_1$.

  Setzen wir (a) und (b) zusammen, erhalten wir $D \cdot D^{-1} = D_1$. □

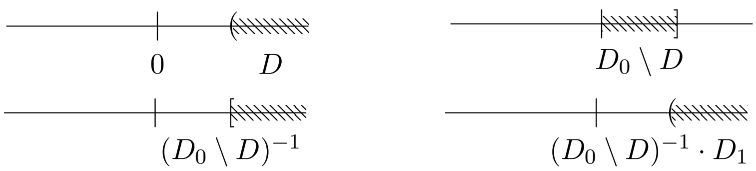

Abbildung I.4: Multiplikative Inverse

Übung. Überprüfe, dass $D_{\sqrt{2}} \cdot D_{\sqrt{2}} = D_2$.

Bemerkung (Zur Notation)**.** Ab jetzt schreiben wir p/q anstatt $D_{p/q}$, auch wenn wir p/q als reelle Zahl (also als Schnitt) meinen. Ebenso schreiben wir $\sqrt{2}$ statt $D_{\sqrt{2}}$. Ausserdem benutzen wir Variablen $x, y, z, \ldots$ für reelle Zahlen. Das ist ein bisschen gefährlich, da wir immer noch Axiome zu überprüfen haben, bis wir unser Ziel zu Beginn des Abschnitts erreichen. Das sollte jedoch nicht allzu viele Missverständnisse bereiten.

Eine Ordnung auf den reellen Zahlen (Reprise)

Definition. Seien $D, D' \in \mathbb{R}$. Wir schreiben $D \leq D'$ falls $D \supset D'$ und $D < D'$ falls $D \supset D'$ und $D \neq D'$.

Definition. Ein *geordneter Körper* ist ein Körper $(K, +, \cdot)$ zusammen mit einer binären Relation $\leq$, welche folgende Eigenschaften hat.

(i) Für alle $x, y \in K$ gilt $x \leq y$ oder $y \leq x$, und $x = y$ genau dann, wenn $x \leq y$ und $y \leq x$.

(ii) Für alle $x, y, z \in K$ gilt, dass immer wenn $x \leq y$ und $y \leq z$, dann auch $x \leq z$. Diese Eigenschaft nennt man *Transitivität.*

(iii) Für alle $x, y, z \in K$ gilt, dass immer wenn $x \leq y$, dann auch $x + z \leq y + z$.

(iv) Für alle $x, y, z \in K$ gilt, dass immer wenn $x \leq y$ und $0 \leq z$, dann auch $xz \leq yz$.

Bei den Eigenschaften (iii) und (iv) spricht man von additiver, beziehungsweise multiplikativer *Monotonie.*

Beispiel. Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ mit der üblichen Addition, Multiplikation und Ordnung ist ein geordneter Körper. Mit der "üblichen Ordnung" ist die Relation

$$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad \leq bc$$

falls $b, d > 0$, gemeint. Wie die Ordnung auf $\mathbb{Z}$ zu verstehen ist, überlassen wir den Mengentheoretikern und fassen das als intuitiv genug auf.

Theorem 1. *Die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit der oben definierten Addition, Multiplikation und Ordnung ist ein geordneter Körper.*

Beweis.

- Nach Lemma 1 und Lemma 2 sind $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ kommutative Gruppen.
- Das Distributivgesetz überträgt sich von $\mathbb{Q}$ auf $\mathbb{R}$.
- Die Ordnungsaxiome (i) bis (iv) sind leicht zu überprüfen. □

Vollständigkeit der reellen Zahlen

Eine sehr wichtige Eigenschaft von $\mathbb{R}$, die glücklicherweise direkt aus der Definition folgt, ist die Vollständigkeit. Vage gesagt bedeutet das, dass $\mathbb{R}$ keine "Löcher" hat.

Definition. Sei X eine geordnete Menge. Dann heisst X *vollständig*, falls für alle nichtleeren Teilmengen $A, B \subset X$ mit $A < B$ (das heisst für alle $a \in A$ und alle $b \in B$ gilt $a < b$) ein Element $c \in X$ mit $A \leq c \leq B$ existiert.

Behauptung. *Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist vollständig.*

Beweis. Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ nicht-leere Teilmengen mit $A < B$. Setze

$$D = \bigcup_{b \in B} D_b = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > b \text{ für ein } b \in B\}.$$

Diese Menge D ist ein Schnitt, da beliebige Vereinigungen von Schnitten Schnitte sind. Bemerke weiterhin:

- Es gilt für alle $b \in B$, dass $D \supset D_b$.
- Es gilt für alle $a \in A$ und $b \in B$, dass $D_a \supset D_b$.

Daraus folgt, dass

$$D_a \supset \bigcup_{b \in B} D_b = D.$$

Also repräsentiert der Schnitt D eine reelle Zahl c mit den gewünschten Eigenschaften: für alle $D_a \in A$ und alle $D_b \in B$ existiert $D = D_c$ mit $D_a \supset D_c \supset D_b$. $\square$

Bemerkung. In $\mathbb{Q}$ liegt zwischen jedem Paar von rationalen Zahlen $a/b < c/d$ eine rationale Zahl, zum Beispiel die Zahl

$$\frac{a+c}{b+d}.$$

Das heisst aber nicht, dass $\mathbb{Q}$ vollständig ist: Tatsächlich ist $\mathbb{Q}$ nicht vollständig. Betrachte beispielsweise $B = D_{\sqrt{2}} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > \sqrt{2}\}$ und $A = \mathbb{Q} \setminus D_{\sqrt{2}} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < \sqrt{2}\}$. Es existiert keine Zahl $c \in \mathbb{Q}$ mit $A \le c \le B$, da $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Einschub. Wie gut lässt sich $\sqrt{2}$ durch rationale Zahlen approximieren? Es finden sich rationale Zahlen p/q beliebig nahe an $\sqrt{2}$ mit

$$\left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q},$$

sogar

$$\left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2},$$

aber nicht so, dass

$$\left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{5q^2}.$$

Man kann das mit *Fordkreisen* veranschaulichen: Es ist nämlich nichts speziell an $\sqrt{2}$. Jede reelle Zahl lässt sich so genau approximieren.

Eindeutigkeit der reellen Zahlen

Theorem 2 (Dedekind). *Seien K_1 und K_2 zwei vollständig geordnete Körper. Dann existiert ein Körperisomorphismus $\varphi\colon K_1 \to K_2$, das heisst, für alle $x, y \in K_1$ gelten die Gleichungen $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$, und $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$, und φ ist bijektiv.*

Wir beweisen dies in dieser Vorlesung nicht. Man findet das in vielen Lehrbüchern der Analysis. Um die Hauptidee des Beweises selber zu entdecken, versuche zu zeigen, dass es nur einen Körperisomorphismus $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt.

Was dieses Theorem für uns bedeutet ist, dass wir ab jetzt nur noch die Eigenschaften von $\mathbb{R}$, aber nicht die Definition verwenden.

Folgerungen aus der Vollständigkeit

Das Supremumsprinzip

Supremumsprinzip. *Sei $A \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkt, das heisst, es existiert $b \in \mathbb{R}$, so dass für alle $a \in A$ gilt, dass $a \leq b$. Dann existiert eine eindeutige Zahl $S = \sup A$ mit folgenden Eigenschaften:*

(i) *$A \leq S$ (das heisst, S ist eine obere Schranke für A). Präziser: für alle $a \in A$ ist $a \leq S$.*

(ii) *für alle $y \in \mathbb{R}$ mit $y < S$ gilt, dass $A \not\leq y$ (das heisst, S ist die kleinste obere Schranke für A). Präziser: für alle $y \in \mathbb{R}$ mit $y < S$ existiert $a \in A$ mit $y < a$.*

Die Zahl $\sup A$ heisst *Supremum* von A. Falls $\sup A \in A$, dann heisst diese Zahl auch *Maximum* von A, notiert $\max A$.

Analog sind die Begriffe *Infimum* ($\inf A$) und *Minimum* ($\min A$) für nach unten beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$ definiert.

Beispiel. Sei $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \sqrt{2}\}$. Dann ist $\sup A = \sqrt{2}$ kein Maximum, da $\sqrt{2} \notin A$. Hingegen für $\bar{A} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \sqrt{2}\}$ ist $\sup \bar{A} = \sqrt{2}$ ein Maximum.

Die Menge $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < \sqrt{2}\}$ hat aber kein Supremum in $\mathbb{Q}$, wenn wir das analoge Konzept in diesem geordneten Körper definieren.

Beweis der Existenz von $\sup A$. Definiere

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{für alle } a \in A \text{ gilt } a < x\},$$

die Menge aller oberen Schranken von A. Es gilt $A < B$ nach der Definition von B. Nach Vollständigkeit existiert $c \in \mathbb{R}$ mit $A \leq c \leq B$. Insbesondere ist c eine obere Schranke für A. Wir nehmen nun widerspruchsweise an, es gäbe eine kleinere obere Schranke $y \in \mathbb{R}$ für A, das heisst, $A \leq y < c \leq B$. Dann gilt

$$A < \frac{y + c}{2} < B.$$

Nach Definition der Menge B wäre $(y+c)/2 \in B$, was im Widerspruch zu $(y+c)/2 < B$ steht. Die Zahl $\sup A = c$ hat also die gewünschten Eigenschaften. □

Das Archimedische Prinzip

Das Archimedische Prinzip ist sehr intuitiv, war aber in unserer Axiomatisierung nicht vertreten. Wir können es aber aus der Vollständigkeit herleiten.

Archimedisches Prinzip (Archimedisches Prinzip)**.** *Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann existiert eine natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}$ mit $a < N$.*

Beweis. Sei $a \in \mathbb{R}$ fest. Setze

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq a\} \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{R}.$$

Falls $A = \emptyset$, dann setze $N = 1$. Falls $A \neq \emptyset$, dann hat A ein Supremum $S = \sup A \in \mathbb{R}$, da A nach oben durch a beschränkt ist. Es ist dann $S - 1/2$ keine obere Schranke für A. Also existiert eine Zahl $M \in A$ mit $M > S - 1/2$. Also ist $M + 1 > S$ und somit $N = M + 1 > a$. Diese Zahl ist natürlich, da M als Element von A eine natürliche Zahl ist. $\square$

Kapitel II

Folgen und Reihen

1 Folgen

Definition. Eine *Folge* in $\mathbb{R}$ ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} a\colon \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto a_n. \end{aligned}$$

Wir notieren das häufig als $(a_0, a_1, a_2, \dots) = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Die für uns wichtigste Eigenschaft von Folgen ist deren Konvergenz.

Definition. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ heisst *konvergent* mit Grenzwert $L \in \mathbb{R}$, falls für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$ eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ gilt, dass $|a_n - L| \leq \varepsilon$. In diesem Fall schreiben wir

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

In anderen Worten bedeutet $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, dass für vorgegebenes $\varepsilon > 0$ ab einem gewissen Index die Folge für immer im Intervall $[L - \varepsilon, L + \varepsilon]$ liegt.

Beispiele.

(1) Sei $a_n = 1/n$ für $n \geq 1$. Wir behaupten, dass diese Folge konvergent mit Grenzwert $0 \in \mathbb{R}$ ist. Dazu sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Nach dem Archimedischen Prinzip existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $N > 1/\varepsilon$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$, dass $n > 1/\varepsilon$, also insbesondere nach dem zweiten Ordnungsaxiom, dass $1/n < \varepsilon$. Folglich ist

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

also

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Varianten davon sind

- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$,
- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$,
- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^a} = 0$ für eine "vernünftige" Potenz a.

(2) Sei $a_n = \sqrt[n]{n}$. Wir behaupten, dass

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Wir wollen zeigen, dass

$$\sqrt[n]{n} \leq 1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

Tatsächlich gilt

$$n \leq \left(1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}\right)^n,$$

denn Anwenden der binomischen Formel

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

liefert

$$\left(1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}\right)^n = 1 + n \cdot \sqrt{\frac{2}{n-1}} + \binom{n}{2}\left(\sqrt{\frac{2}{n-1}}\right)^2 + R$$

mit $R \geq 0$. Wir interessieren uns nur für den quadratischen Term. Bemerke, dass

$$\binom{n}{2}\left(\sqrt{\frac{2}{n-1}}\right)^2 = \frac{n(n-1)}{2}\frac{2}{n-1} = n.$$

Somit gilt für alle $n \geq 1$ die Ungleichung

$$1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

Aus

$$\lim_{n\to\infty} 1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}} = 1,$$

was eine Variation vom ersten Beispiel ist, folgt nun auch

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

(3) Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $q \geq 0$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & \text{falls } q < 1, \\ 1, & \text{falls } q = 1, \\ +\infty, & \text{falls } q > 1. \end{cases}$$

Die Notation

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

heisst, dass für alle $S > 0$ ein Index $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \geq N$ gilt, dass $a_n > S$ ist. Der zweite der Fälle ist klar. Für den dritten Fall, betrachte

$$q^n = (1 + (q-1))^n \geq 1 + n(q-1),$$

wobei $q - 1 > 0$. Sei $S > 0$ vorgegeben. Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit

$$N \geq \frac{S}{q-1}.$$

Für alle $n \geq N$ gilt dann $q^n \geq 1 + S > S$. Für den ersten Fall ersetze q durch $1/q$.

2 Cauchyfolgen

Definition. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ heisst *Cauchyfolge*, so dass für alle vorgegebenen $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n, m \geq N$ gilt, dass $|a_n - a_m| \leq \varepsilon$.

In anderen Worten, ab einem gewissen Index sind alle Folgenglieder höchstens ε voneinander entfernt. Die Definition der Konvergenz unterscheidet sich dadurch, dass bei Cauchyfolgen kein Grenzwert erwähnt wird: nur Folgeglieder werden verglichen.

Theorem 1 (Konvergenzprinzip von Cauchy, 1789–1857)**.** *Für Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ sind äquivalent:*

(i) *Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent.*

(ii) *Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge.*

Beweis. Die Implikation (i) $\Rightarrow$ (ii) ist eine Übung. Dazu kann

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - L| + |L - a_m|$$

verwendet werden. Diese Ungleichung wird auch *Dreiecksungleichung* genannt (das Dreieck ist hier degeneriert, das heisst es liegt auf einer Linie, und die Eckpunkte sind a_n, a_m und L).

Die Umkehrung (ii) $\Rightarrow$ (i) ist etwas schwieriger. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Betrachte für alle $k \in \mathbb{N}$ die Menge

$$A_k = \{a_k, a_{k+1}, \dots\} \subset \mathbb{R}.$$

Wir behaupten, dass diese Mengen A_k (von oben und unten) beschränkt sind. Zum Beweis betrachte $\varepsilon = 1 > 0$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass immer wenn $n, m \geq N$, dann folgt $|a_n - a_m| \leq 1$. Setze

$$S_k = \max\{|a_k|, |a_{k+1}|, \dots, |a_{N-1}|, |a_N| + 1\}.$$

Dann gilt für alle $n \geq k$, dass $|a_k| \leq S_k$. Tatsächlich ist für $n \geq N$ die Ungleichung $|a_n - a_N| \leq \varepsilon = 1$ erfüllt, also folgt $|a_n| \leq |a_N| + 1$. Analog existiert eine untere Schranke I_k für A_k. Dies zeigt die Behauptung.

Nun gilt für alle $k \in \mathbb{N}$, dass $I_k \leq A_k \leq S_k$ (wobei $A_k \subset \mathbb{R}$ und $I_k, S_k \in \mathbb{R}$). Wende die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ auf die beiden Teilmengen $\{I_0, I_1, \dots\}$ und $\{S_0, S_1, \dots\}$ an: Es existiert $L \in \mathbb{R}$, so dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, dass $I_k \leq L \leq S_k$.

Wir behaupten nun, dass

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

Um das zu beweisen, müssen wir die formale Definition der Konvergenz anwenden. Sei also $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$ so dass immer wenn $n, m \geq N$, dann auch $|a_n - a_m| \leq \varepsilon$, da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist. Daraus folgt, dass

$$|\sup A_N - \inf A_N| \leq \varepsilon,$$

da die nicht-strikte Ungleichung für alle Elemente von A_N gilt. Nach Konstruktion gilt $\inf A_N \leq L \leq \sup A_N$. Ausserdem gilt für alle $n \geq N$, dass

$$|a_n - L| \leq |S_N - I_N| \leq \varepsilon,$$

da $I_N \leq a_n \leq S_N$. $\square$

Zusammengefasst haben wir die Folgeglieder erst ab einem späten Index betrachtet und unter Verwendung der Vollständigkeit gezeigt, dass wir einen Grenzwert L finden können.

Bemerkung. In geordneten Körpern, die das archimedische Prinzip erfüllen, sind folgende Prinzipien äquivalent.

- Vollständigkeit,
- das Supremumsprinzip,
- das Konvergenzprinzip von Cauchy.

Die Beobachtung, dass die Folge $I_0, I_1, I_2, \dots$ im Beweis oben konvergiert, lässt sich verallgemeinern. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $a_n \leq a_{n+1}$, heisst *monoton wachsend.*

Monotonieprinzip. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge in $\mathbb{R}$, welche nach oben beschränkt ist. Dann konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert*

$$S = \sup\{a_0, a_1, a_2, \dots\}.$$

Beweis. Da $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ nach oben beschränkt ist, ist $S \in \mathbb{R}$ definiert und eine reelle Zahl. Wir zeigen nun, dass

$$\lim_{n\to\infty} a_n = S$$

gilt. Sei dazu $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann ist $S-\varepsilon$ keine obere Schranke für $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$, da S die kleinste obere Schranke ist. Also existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $a_N > S-\varepsilon$. Dann gilt für alle $n \geq N$, dass

$$S - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq S,$$

also $|a_n - S| \leq \varepsilon$. $\square$

Beispiel. Betrachte die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Es gilt $a_1 = 2$, $a_2 = 9/4$, $a_3 = 64/27, \dots$. Wir behaupten, dass

(i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist,

(ii) für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $a_n \leq 3$.

Der Beweis dieser Behauptung ist eine Übung auf der Serie 4. Hier machen wir deshalb nur eine Beweisskizze:

(i) Es kann gezeigt werden, dass

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1},$$

indem

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n &= \left(\frac{1 + \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n}}\right) \\ &\geq \frac{1}{1 + \frac{1}{n+1}} \\ &= 1 - \frac{1}{n+2}\end{aligned}$$

berechnet wird.

(ii) Die Ungleichung $(1 + 1/n)^n \leq 3$ ist äquivalent zur Ungleichung $(n+1)^n \leq 3n^n$. Man kann dann zeigen, dass

$$(n+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} n^k \leq \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) \cdot n^n.$$

Bemerkung. Der Grenzwert der Folge oben ist

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

die *Eulersche Zahl* (die wir noch nicht definiert haben).

Teilfolgen

Wir bemerken, dass

(i) jede konvergente Folge beschränkt ist,

(ii) es beschränkte Folgen gibt, welche nicht konvergieren, zum Beispiel $a_n = (-1)^n$ (wieso?).

Definition. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{N}$, welche streng monoton wachsend ist, das heisst

$$n_0 < n_1 < n_2 < \cdots .$$

Dann heisst die Folge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine *Teilfolge* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

In anderen Worten ist eine Teilfolge einer Folge die Folge die man erhält, wenn man Folgeglieder wegnimmt, so dass aber noch unendlich viele Folgeglieder übrigbleibt.

Theorem 2 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$, welche von oben und unten beschränkt ist. Dann hat die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge.*

Beispiel. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Folgegliedern $a_n = (-1)^n$ hat zwei naheliegende konvergente Teilfolgen, nämlich $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert 1, und $(a_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert -1. Es gibt aber noch mehr Folgen von Indizes $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, die konvergente Teilfolgen liefern.

Beweis von Theorem 2. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, das heisst es existieren $x, y \in \mathbb{R}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $x \leq a_k \leq y$. Wir unterscheiden nun zwei Fälle.

1. Die Menge $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ ist endlich. Dann hat die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konstante Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Diese ist konvergent.

2. Die Menge $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ ist unendlich. Wir konstruieren eine sogenannte Intervallschachtelung. Setze
$$I_0 = [x, y] = \{z \in \mathbb{R} \mid x \leq z \leq y\} .$$
Wähle $a_{n_0} = a_0 \in I_0$. Halbiere I_0, also schreibe
$$I_0 = \left[x, \frac{x+y}{2}\right] \cup \left[\frac{x+y}{2}, y\right] .$$
Eines dieser beiden Teilintervalle enthält unendlich viele Folgeglieder, das heisst Elemente der Menge $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$. Nenne dieses Intervall $I_1 = [x_1, y_1]$. Wähle $a_{n_1} \in I_1$ mit $n_1 > n_0$. Das können wir fordern, da es unendlich viele Folgeglieder in I_1 gibt. Halbiere wie oben I_1 und schreibe
$$I_1 = \left[x_1, \frac{x_1+y_1}{2}\right] \cup \left[\frac{x_1+y_1}{2}, y_1\right] .$$

Wieder enthält eines dieser Intervalle unendlich viele Folgeglieder. Nenne dieses Intervall $I_2 = [x_2, y_2]$. Wähle $a_{n_2} \in I_2$ mit $n_2 > n_1$. Iteriere dieses Verfahren und erhalte eine Teilfolge $a_{n_0}, a_{n_1}, a_{n_2}, \dots$.

Wir behaupten, dass $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge (und deshalb konvergent) ist. Zum Beweis berechnen wir die Breite des Intervalls I_k. Berechne

$$y_k - x_k = \frac{y-x}{2^k}.$$

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wähle $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\frac{y-x}{2^N} \leq \varepsilon.$$

Dann gilt für alle $k, \ell \geq N$, dass $a_{n_k}, a_{n_\ell} \in I_N$ höchstens ε voneinander entfernt sind. Konkreter,

$$|a_{n_k} - a_{n_\ell}| \leq \frac{y-x}{2^N} \leq \varepsilon.$$

□

Zusammengefasst haben wir die Intervalle iterativ halbiert, und uns immer für das Intervall entschieden, das immer noch unendlich viele Folgeglieder enthalten hat.

Definition. Eine Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ heisst *Häufungspunkt* einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$, falls es eine konvergente Folge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gibt mit

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \alpha.$$

Beispiele.

(i) Bei der Folge $a_n = (-1)^n$ ist die Menge der Häufungspunkte $\{-1, 1\}$.

(ii) Sei $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ eine beliebige Bijektion. Dann ist jede reelle Zahl ein Häufungspunkt, das heisst die Menge der Häufungspunkte ist $\mathbb{R}$. Das ist erstaunlich, da abzählbar viele Folgeglieder überabzählbar viele Häufungspunkte hervorrufen. Zum Beweis, dass tatsächlich jede reelle Zahl ein Häufungspunkt ist, sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|\alpha - a_{n_0}| \leq 1$. Wähle dann $n_1 > n_0$ mit $|\alpha - a_{n_1}| \leq 1/2$. Wähle iterativ $n_k > n_{k-1}$ mit $|\alpha - a_{n_k}| \leq 1/2^k$. Dies ist möglich, da jedes Intervall der Form $[\alpha - 1/2^k, \alpha + 1/2^k]$ unendlich viele rationale Zahlen enthält. Wir können auch $n_k > n_{k-1}$ einrichten, da bei der k-ten Wahl erst endlich viele rationale Zahlen bereits belegt sind. Es ist also

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \alpha.$$

Rechenregeln

Proposition 1. *Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen in $\mathbb{R}$ mit Grenzwerten*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ und } \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

Dann gilt:

(i) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$

(ii) $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

(iii) *Falls für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $a_n \neq 0$ und auch $a \neq 0$ gilt, dann ist*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}.$$

Bemerkung. Bei (iii) müssen wir tatsächlich annehmen, dass $a \neq 0$. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Folgegliedern

$$a_n = \frac{1}{n+1}$$

ist konvergent mit Grenzwert $a = 0$, aber die Folge $(1/a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht in $\mathbb{R}$.

Beweisskizze.

(i) $|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|$

(ii) $|a_n b_n - ab| \leq |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a|$. □

3 Reihen

Definition. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Dann heisst die formale Summe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$$

eine *Reihe*. Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heisst *konvergent* mit Grenzwert $S \in \mathbb{R}$, falls die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der *Partialsummen*

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

in $\mathbb{R}$ mit Grenzwert S konvergiert, das heisst

$$\lim_{n\to\infty} s_n = S$$

erfüllt. Wir schreiben in diesem Fall

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = S,$$

was zwei Aussagen sind: dass die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen konvergiert, und dass ihr Grenzwert S ist.

Die konstante Reihe

Sei $c \in \mathbb{R}$ und setze $a_k = c$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Die zugehörige Reihe ist dann

$$\sum_{k=0}^{\infty} c = c + c + c + \cdots .$$

Wir berechnen, dass $s_n = (n+1)c$. Falls $c \neq 0$ ist, dann ist die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (nach dem archimedischen Prinzip) unbeschränkt, also nicht konvergent. Falls $c = 0$, dann ist $s_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und somit

$$\sum_{k=0}^{\infty} 0 = 0.$$

Bemerkung. Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine konvergente Reihe. Dann ist insbesondere $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert also ein Index $N \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass immer wenn $n, m \geq N$, dann ist

$$|s_m - s_n| \leq \varepsilon.$$

Insbesondere folgt für $m = n + 1$, dass

$$|a_{n+1}| = |s_{n+1} - s_n| \leq \varepsilon.$$

Wir folgern, dass

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Diese Bedingung heisst *Cauchy-Bedingung*. Die Cauchy-Bedingung ist zwar notwendig, aber nicht hinreichend für Konvergenz einer Reihe.

Die harmonische Reihe

Aus der Divergenz der konstanten Reihe folgern wir nun die Divergenz der harmonischen Reihe. Sei $a_n = 1/n$ für $n \geq 1$. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ heisst die *harmonische Reihe*, ausgeschrieben

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots .$$

Bemerke, dass wir die Terme der harmonischen Reihe in Gruppen unterteilen können, deren Summe jeweils grösser oder gleich $1/2$ ist. Nämlich ist zum Beispiel

- $1/2 \geq 1/2$,
- $1/3 + 1/4 \geq 2 \cdot 1/4 = 1/2$,
- $1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 \geq 4 \cdot 1/8 = 1/2$.

Allgemeiner gilt:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq 2n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

und somit

$$s_n \geq \frac{n+1}{2}.$$

Also ist die Folge der Partialsummen s_n nicht beschränkt, und somit die harmonische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} 1/k$ nicht konvergent.

Die geometrische Reihe

Sei $q \in \mathbb{R}$. Die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + \cdots$$

heisst *geometrische Reihe.*

Behauptung. *Die Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ *ist konvergent, genau dann wenn* $|q| < 1$, *und in diesem Fall gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

Beweis.

- Falls $|q| \geq 1$, dann ist 0 nicht der Grenzwert der Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Nach der Cauchy-Bedingung ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ nicht konvergent.
- Falls $|q| < 1$, dann gilt $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$. Wir berechnen die Partialsummen

  $$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$$

  indem wir bemerken, dass

  $$q \cdot s_n - s_n = q^{n+1} - 1.$$

  Lösen wir nach s_n auf, erhalten wir

  $$s_n = \frac{q^{n+1} - 1}{q-1} = \frac{q^{n+1}}{q-1} - \frac{1}{q-1},$$

  und somit

  $$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-q}. \qquad \square$$

Folgerungen aus der Konvergenz der geometrischen Reihe

Aus der Konvergenz der geometrischen Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ für $|q| < 1$ können wir Konvergenz mehrerer interessanter Reihen herleiten.

(1) Sei $a_n = 1/n^2$ für $n \geq 1$. Wir untersuchen die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

indem wir die Partialsummen folgendermassen abschätzen. Zum Beispiel ist

- $1/2^2 + 1/3^2 < 2 \cdot 1/2^2$,
- $1/4^2 + 1/5^2 + 1/6^2 + 1/7^2 < 4 \cdot 1/4^2$,
- $1/8^2 + \cdots + 1/15^2 < 8 \cdot 1/8^2$.

Es gilt also für alle $n \in \mathbb{N}$, dass

$$s_n \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1 - 1/2} = 2.$$

Die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist also monoton wachsend und nach oben beschränkt, also konvergent. Also ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = S$$

mit $S \leq 2$. Euler hat gezeigt, dass $S = \pi^2/6$.

(2) Sei $a_n = 1/n^{1+\alpha}$ mit $\alpha > 0$. Schätze die Partialsummen folgendermassen ab:

- $1/2^{1+\alpha} + 1/3^{1+\alpha} < 2 \cdot 2 \cdot 1/2^{1+\alpha} = 1/2^{\alpha}$,
- $1/4^{1+\alpha} + \cdots + 1/7^{1+\alpha} < 4 \cdot 1/4^{1+\alpha} = 1/4^{\alpha}$,
- $1/8^{1+\alpha} + \cdots + 1/15^{1+\alpha} < 8 \cdot 1/8^{1+\alpha} = 1/8^{\alpha}$.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt also, dass

$$s_n \leq 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{8^\alpha} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^\alpha}\right)^k = \frac{1}{1 - 1/2^\alpha},$$

wobei wir die Konvergenz der geometrischen Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ für $q = 1/2^\alpha < 1$ angewendet haben.

(3) Sei $a_n = 1/n!$ (mit der Konvention $0! = 1$). Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} 1/k!$ kann man termweise durch eine geometrische Reihe abschätzen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 3.$$

Die Details hier sind eine Übung auf Serie 4. Wir schliessen, dass die monoton wachsende Folge

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

konvergiert, mit Grenzwert $S \leq 3$.

Bemerkung. Der Wert der obigen Reihe ist e, die Eulersche Zahl:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Wir zeigen die erste dieser Gleichungen später.

Zusammenfassung. Alle allgemein anwendbaren Verfahren zur Untersuchung der Konvergenz von Reihen mit positiven Termen basieren auf folgenden beiden Strategien.

- Um die Konvergenz einer Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ (mit $a_k > 0$) zu zeigen, schätzen wir diese nach oben durch eine geometrische Reihe ab.

- Um die Divergenz (nicht-Konvergenz) einer solchen Reihe zu zeigen, schätzen wir diese nach unten durch eine konstante Reihe ab.

Frage. Was, wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ auch negative Summanden $a_k < 0$ enthält?

Beispiel. Sei $a_n = (-1)^n \cdot 1/(n+1)$. Wir fragen uns, ob die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1}$$

konvergiert. Unsere obigen Verfahren scheinen nicht zu funktionieren (ausser man hat eine gute Idee).

Leibnizkriterium. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver reller Zahlen mit*

$$a_0 > a_1 > a_2 > \cdots > 0,$$

eine sogenannte monoton fallende Folge, mit

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0.$$

Dann konvergiert die alternierende Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k.$$

Beweis. Betrachte die Partialsummen $s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$. Wir stellen fest:

(i) Wir haben $s_0 \geq s_2 \geq s_4 \geq s_6 \geq \cdots$, da $s_{k+2} = s_{2k} - a_{2k+1} + a_{2k+2}$ und $a_{2k+2} < a_{2k+1}$.

(ii) Analog haben wir $s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq s_7 \leq \cdots$ (die Ungleichungen gehen in die andere Richtung).

(iii) Ausserdem gilt für alle $k \in \mathbb{N}$, dass $s_{2k+1} \leq s_{2k+2}$.

Aus diesen drei Beobachtungen folgt, dass

$$s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq \cdots \leq s_6 \leq s_4 \leq s_2 \leq s_0.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wähle eine ungerade Zahl $N \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass wenn immer $n \geq N$, dann ist $|a_n| \leq \varepsilon$. Solch ein N existiert, da wir angenommen haben, dass

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

(ersetze wenn nötig N durch $N+1$). Für alle $n \geq N$ gilt dann

$$s_N \leq s_n \leq s_{N+1}.$$

Ebenso gilt für alle $m \geq N$, dass $s_N \leq s_m \leq s_{N+1}$. Dann ist aber

$$|s_n - s_m| \leq |s_N - s_{N+1}| = |a_{N+1}| \leq \varepsilon.$$

Also ist die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ und somit konvergent. $\square$

Beispiele.

(1) Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

konvergiert (mit Grenzwert $\log(2)$, siehe später). Es gilt sicher:

$$0 < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots < 1,$$

da

- $1 - 1/2 > 0$, $1/3 - 1/4 > 0$, ...
- $-1/2 + 1/3 < 0$, $-1/4 + 1/5 < 0$, ...

(2) Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(n^2-n)/2} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + + - - + + - - \cdots$$

konvergiert. Fasse dazu jeweils zwei Terme zusammen und wende das Leibnizkriterium an.

(3) Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(n^3-n)/6} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + + + - + + + - \cdots$$

divergiert: Sie kann von unten mit

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} - \frac{1}{12} + \cdots$$

abgeschätzt werden, indem wir die Terme $1/5, 1/9, 1/13, \ldots$ ignorieren.

Definition. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe und $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Bijektion. Dann nennen wir die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ eine *Umordnung* der ursprünglichen Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Beispiel. Die Reihe

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{4} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{6} + \cdots,$$

die immer zwischen zwei positiven und einem negativen Folgeglied alterniert, ist eine Umordnung der alternierenden harmonischen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot 1/n$. Wir stellen fest, dass für alle $k \in 2\mathbb{N}$ mit $k \geq 2$ gilt, dass

$$\frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{k} > 0.$$

Dies kann man auf verschiedene Arten sehen, aber wir berechnen dazu

$$\frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k+1} = \frac{4k}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{4k}{4k^2-1} > \frac{4k}{4k^2} = \frac{1}{k}.$$

Also gilt für die umgeordnete Reihe, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{4} + \cdots > 1,$$

(wobei die Bijektion φ nur implizit beschrieben wurde), da $1/3 + 1/5 - 1/2 > 0$ gilt, und $1/7 + 1/9 - 1/4 > 0$, und so weiter. Die Umordnung einer konvergenten Reihe kann also den Grenzwert dieser Reihe ändern, oder sogar Divergenz herbeiführen. Siehe auch Aufgabe 4 auf Serie 5.

Absolute Konvergenz

Definition. Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heisst *absolut konvergent*, falls die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ der Beträge konvergiert.

Lemma. *Jede absolut konvergente Reihe in $\mathbb{R}$ ist konvergent (aber nicht umgekehrt).*

Beispiel. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ ist konvergent, aber nicht absolut konvergent, da die harmonische Reihe divergiert.

Beweis des Lemmas. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Da $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$ konvergiert, existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{n=N}^{\infty}|a_n| \leq \varepsilon$. Das liegt daran, dass die Folge der Partialsummen monoton (da die Terme nichtnegativ sind) und beschränkt (da konvergent) ist, also existiert ein solches N, das

$$\sum_{n=N}^{\infty}|a_n| = \sum_{n=0}^{\infty}|a_n| - \sum_{n=0}^{N}|a_n| \leq \varepsilon$$

erfüllt. Setze

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Seien nun $n > m \geq N$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |s_n - s_m| &= \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| \\ &\leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| \\ &\leq \sum_{k=N}^{\infty} |a_k| \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Also ist s_n eine Cauchyfolge und deshalb ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$ konvergent in $\mathbb{R}$. $\square$

Theorem 3. *Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent und $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine beliebige Bijektion. Dann konvergiert die Umordnung $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\varphi(k)}$, und zwar mit demselben Grenzwert.*

Zusatz (Riemannscher Umordnungssatz)**.** *Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent, aber nicht absolut konvergent. Dann existiert zu jeder Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ eine Bijektion $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ mit Grenzwert α konvergiert.*

Beweisidee (nicht so wichtig). Da die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent, aber nicht absolut konvergent ist, divergieren sowohl die positiven als auch die negativen Folgeglieder. Aber die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen null. Addiere also so lange positive Glieder, bis man über α hinausschiesst, und dann negative, bis man wieder unter α kommt. Iteriere dieses Verfahren. $\square$

Beweis von Theorem 3. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=N+1}^{\infty}|a_k| \leq \varepsilon$. Wähle $M \in \mathbb{N}$ mit $M > \varphi^{-1}(0), \varphi^{-1}(1), \ldots, \varphi^{-1}(N)$. Falls $k \geq M$, dann ist $\varphi(k) \geq N+1$ (nach Wahl von M). Also folgt

$$\sum_{k=M}^{\infty}|a_{\varphi(k)}| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty}|a_k| \leq \varepsilon.$$

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_{\varphi(k)}|$ ist also nach oben beschränkt, also ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ absolut konvergent, also konvergent.

Es bleibt zu zeigen, dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{\varphi(k)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k,$$

also die Grenzwerte übereinstimmen. Für $n \in \mathbb{N}$, setze dazu

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad \widetilde{s_n} = \sum_{k=0}^{n} a_{\varphi(k)}.$$

Für $n \geq M$ (das selbe M wie oben), gilt die sehr grobe Abschätzung

$$|\widetilde{s_n} - s_n| \leq \sum_{k=M}^{\infty} |a_{\varphi(k)}| + \sum_{k=M}^{\infty} |a_k| \leq 2\varepsilon,$$

wobei wir $\sum_{k=M}^{\infty} |a_{\varphi(k)}| \leq \varepsilon$ bereits oben abgeschätzt haben, und $\sum_{k=M}^{\infty} |a_k| \leq \varepsilon$ aus $M \geq N$ folgt. Folgich gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{\varphi(k)} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} (\widetilde{s_n} - s_n) = 0. \qquad \square$$

Das Cauchyprodukt zweier Reihen

Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ zwei konvergente Reihen mit Grenzwerten α und β in $\mathbb{R}$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k + b_k)$ mit Grenzwert $\alpha + \beta$.

Frage. Was ist das Produkt $(\sum_{i=0}^{\infty} a_i) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\right)$?

Definition. Das *Cauchyprodukt* der Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ und $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ mit den Summanden

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Also ist zum Beispiel

- $c_0 = a_0 b_0$,
- $c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$,
- $c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$.

Beispiel. Sei

$$a_k = b_k = (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

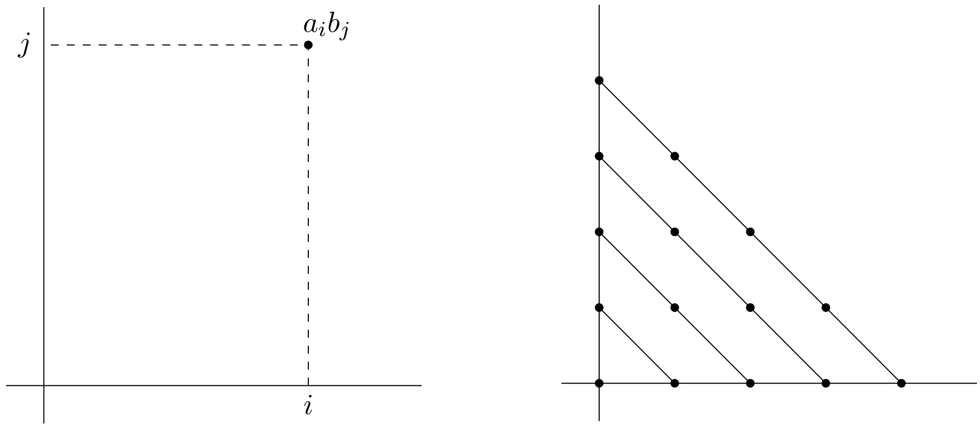

Abbildung II.1: Das Cauchyprodukt

Die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

konvergiert (nach dem Leibnizkriterium), da die Folge $(1/\sqrt{k+1})_{k \in \mathbb{N}}$ monoton fallend ist mit Grenzwert null. Wir bestimmen nun den Summanden c_n im Cauchyprodukt $(\sum_{i=0}^{\infty} a_i) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\right)$. Berechne

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k+1}} \cdot (-1)^{n-k} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-k+1}} \\ &= (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1}} \right). \end{aligned}$$

Jeder dieser $n+1$ Summanden in c_n ist grösser oder gleich $1/(n+1)$, denn

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-k+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{n+1}.$$

Also ist $|c_n| \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere ist $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ keine Nullfolge, also $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ nicht konvergent.

Theorem 4. *Seien $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ und $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ absolut konvergent mit Grenzwerten α und β in $\mathbb{R}$. Dann konvergiert das Cauchyprodukt $(\sum_{i=0}^{\infty} a_i) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\right)$ mit Grenzwert $\alpha \cdot \beta$.*

Beweis. Setze

$$A = \sum_{i=0}^{\infty} |a_i| \text{ und } B = \sum_{j=0}^{\infty} |b_j|.$$

Diese Grenzwerte existieren, da die beiden Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ und $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ absolut konvergieren. Im allgemeinen stimmen A und B aber nicht mit α und β überein. Sei $N \in \mathbb{N}$.

Wir schätzen ab:

$$\sum_{n=0}^{N} |c_n| \leq \left(\sum_{i=0}^{N} |a_i| \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{N} |b_j| \right) \leq A \cdot B$$

wobei

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

In Abbildung II.2 sind die Terme links alle Punkte unter der gestrichelten Linie. Also ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut konvergent.

Zu zeigen bleibt, dass der Grenzwert der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ gerade $\alpha \cdot \beta$ ist. Berechne dazu

$$\begin{aligned}
\left| \left(\sum_{i=0}^{N} a_i \right) \left(\sum_{j=0}^{N} b_j \right) - \sum_{n=0}^{N} c_n \right| &\leq \left(\sum_{i=N/2}^{\infty} |a_i| \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} |b_j| \right) + \left(\sum_{i=0}^{\infty} |a_i| \right) \left(\sum_{j=N/2}^{\infty} |b_j| \right) \\
&= \left(\sum_{i=N/2}^{\infty} |a_i| \right) B + A \left(\sum_{j=N/2}^{\infty} |b_j| \right),
\end{aligned}$$

siehe Abbildung II.2: die Terme rechts von der Ungleichung sind alle Punkte im grau markierten Bereich, und die Terme links von der Ungleichung sind alle Punkte im vollständig grauen Dreieck. Aber

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{i=N/2}^{\infty} |a_i| = 0 \text{ und } \lim_{N \to \infty} \sum_{j=N/2}^{\infty} |b_j| = 0,$$

also gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} c_n &= \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} c_n \\
&= \left(\lim_{N \to \infty} \sum_{i=0}^{N} a_i \right) \left(\lim_{N \to \infty} \sum_{j=0}^{N} b_j \right) \\
&= \alpha \cdot \beta.
\end{aligned}$$

□

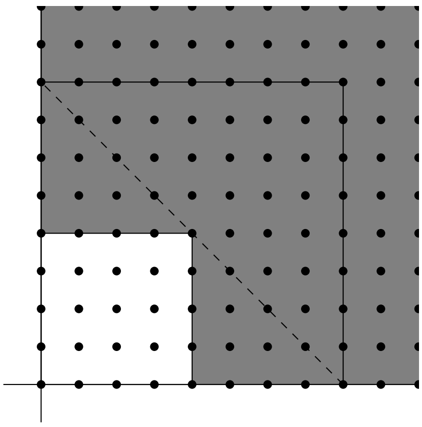

Abbildung II.2: Beweis der Konvergenz des Cauchyprodukts

4 Die Exponentialfunktion

Lemma. *Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ absolut konvergent.*

Beweis. Sei zunächst $x \geq 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $N+1 \geq 2x$. Dann gilt für alle $n > N$, dass

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^N}{N!} + \cdots \frac{x^n}{n!} \\ &= 1 + \cdots + \frac{x^N}{N!}\left(1 + \frac{x}{N+1} + \frac{x^2}{(N+1)(N+2)} + \cdots + \frac{x^{n-N}}{(N+1)\cdots n}\right) \\ &\leq 1 + x + \cdots \frac{x^{N-1}}{(N-1)!} + 2 \cdot \frac{x^N}{N!},\end{aligned}$$

da

- $x/(N+1) \leq 1/2$,
- $x^2/(N+1)(N+2) \leq 1/4$,
- $x^3/(N+1)(N+2)(N+3) \leq 1/8$,

und so weiter. Also ist die Folge der Partialsummen

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

nach oben beschränkt und monoton wachsend, da $x \geq 0$. Folglich ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ absolut konvergent. Für $x < 0$ bemerken wir, dass die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{x^k}{k!}\right| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!}$$

konvergiert (siehe oben), also auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$. $\square$

Definition. Die *Exponentialfunktion* ist die Funktion

$$\begin{aligned} \exp\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}. \end{aligned}$$

Theorem 5. *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y).$$

Beweis. Berechne das Cauchyprodukt der beiden absolut konvergenten Reihen $\exp(x)$ und $\exp(y)$ wie folgt:

$$\begin{aligned} \exp(x) \cdot \exp(y) &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^j}{j!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} \\ &= \exp(x+y) \end{aligned}$$

nach Theorem 4, da

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k}.$$ $\square$

Eigenschaften der Exponentialfunktion.

(i) $\exp(0) = 1$ und $\exp(1) = e$, die Eulersche Zahl (siehe Serie 4).

(ii) Für $h \geq 0$ gilt $\exp(h) \geq 1 + h$, und für $0 \leq h \leq 1$ gilt

$$1 + h \leq \exp(h) \leq 1 + 2h,$$

(siehe Serie 4).

(iii) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}.$$

Dazu berechne

$$\exp(0) = \exp(x - x) = \exp(x) \cdot \exp(-x)$$

nach Theorem 5.

(iv) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\exp(n) = \exp(1 + \cdots + 1) = (\exp(1))^n = e^n.$$

Notation. Wir schreiben von nun an auch

$$e^x = \exp(x).$$

Wir müssen das so definieren, da die Intuition aus Punkt (iv) nicht reicht, um zum Beispiel $e^{\sqrt{2}}$ zu definieren.

Proposition. *Die Exponentialfunktion* $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist positiv, streng monoton wachsend, und surjektiv als Funktion* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$.

Beweis.

- *Positivität.* Für $x \geq 0$ gilt $\exp(x) \geq 1$, und für $x < 0$ gilt $\exp(x) = 1/\exp(-x)$ (siehe Eigenschaft (iii)), also gilt auch in diesem Fall $\exp(x) > 0$.

- *Monotonie.* Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$. Dann gilt:

  $$\exp(y) = \exp(x + (y - x)) = \exp(x) \cdot \exp(y - x) > \exp(x),$$

  da $\exp(y - x) > 1$.

- *Surjektivität.* Sei $y > 0$. Wir behaupten, dass $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ existieren mit

  $$\exp(x_1) < y < \exp(x_2).$$

  Setze dazu $x_2 = y$. Dann ist $\exp(x_2) \geq 1 + y > y$. Für x_1 machen wir eine Fallunterscheidung. Falls $y > 1$, setze $x_1 = 0$. Dann ist $\exp(x_1) = 1 < y$. Für $y \leq 1$, setze $x = -1/y$. Dann ist

  $$\exp(x_1) = \frac{1}{\exp(1/y)} < \frac{1}{1/y} = y.$$

  Dies zeigt die Behauptung, dass wir jeden gewünschten Wert überbieten und auch unterbieten können.

  Zu zeigen bleibt, dass wir den gewünschten Wert auch tatsächlich treffen. Wir suchen also $s \in \mathbb{R}$ mit $\exp(s) = y$. Wir konstruieren dieses s mit dem Supremumsprinzip. Definiere $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \exp(x) \leq y\}$, siehe Abbildung II.3. Nach obiger Behauptung ist A nicht leer, da x_1 existiert mit $\exp(x_1) \leq y$. Weiter ist A nach oben beschränkt, da $y \leq \exp(x_2)$. Setze nun $s = \sup(A) \in \mathbb{R}$. Wir zeigen, dass $\exp(s) = y$ indem wir beide Ungleichungen zeigen.

  Nehme widerspruchsweise an, dass $\exp(s) < y$. Wähle $h \in \mathbb{R}$ mit $0 < h < 1$ und $1 + 2h \leq y/\exp(s)$. Dies funktioniert, da $y/\exp(s) > 1$. Es gilt dann

  $$\exp(s + h) = \exp(s) \cdot \exp(h) \leq \exp(s) \cdot (1 + 2h) \leq y$$

nach Eigenschaft (ii). Also ist $s+h \in A$, was im Widerspruch zu $s = \sup(A)$ steht. Somit folgt $\exp(s) \geq y$.

Umgekehrt, nehme widerspruchsweise an, dass $\exp(s) > y$. Ähnlich wie im ersten Schritt, wähle $h \in \mathbb{R}$ mit $0 < h \leq 1$ und $1 + 2h \leq \exp(s)/y$. Dann gilt

$$\exp(s-h) = \frac{\exp(s)}{\exp(h)} \geq \frac{\exp(s)}{1+2h} \geq y.$$

Also ist $s - h$ eine obere Schranke für A, im Widerspruch dazu dass $s = \sup(A)$ die kleinste obere Schranke für A ist. Folglich gilt $\exp(s) \leq y$. $\square$

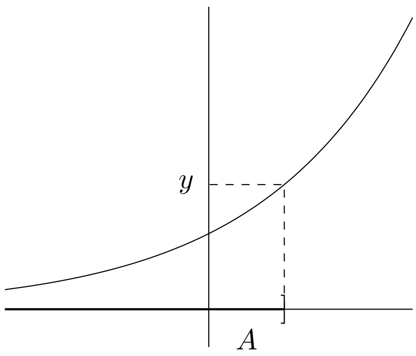

Abbildung II.3: Beweis der Surjektivität der Exponentialfunktion

Bemerkung. Die Menge $\exp(\mathbb{Q})$ ist nicht die Menge $\mathbb{Q}_{>0}$ der positiven rationalen Zahlen. Tatsächlich ist das Bild der meisten rationalen Zahlen nicht rational (das ist schwierig zu zeigen). Der Satz oben funktioniert also nur über $\mathbb{R}$.

Der Logarithmus

Wir wissen, dass die Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ streng monoton wachsend und surjektiv ist. Insbesondere ist exp bijektiv.

Definition. Die *Logarithmusfunktion* $\log\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ ist die eindeutige Umkehrfunktion der Exponentialfunktion, das heisst $\log = \exp^{-1}$.

Bemerkung. Es gilt für alle $a, b > 0$, dass

$$\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b).$$

Dazu bemerke, dass

$$\exp(\log(a) + \log(b)) = \exp(\log(a)) \cdot \exp(\log(b)) = a \cdot b = \exp(\log(a \cdot b)).$$

Da die Exponentialfunktion injektiv ist, folgt die Behauptung.

Definition. Sei $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$. Wir definieren die allgemeine *Potenzfunktion* $x \mapsto a^x$ durch

$$a^x = \exp(\log(a) \cdot x).$$

Bemerkung. Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y.$$

Kapitel III

Stetige Funktionen

1 Stetigkeit

Folgende Definition von Weierstrass ist aus gutem Grund sehr berühmt.

Definition. Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine beliebige Teilmenge. Eine Funktion $f\colon A \to \mathbb{R}$ heisst *stetig* im Punkt $p \in A$, falls für alle vorgegebenen $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $q \in A$ mit $|q-p| \leq \delta$ gilt, dass $|f(q) - f(p)| \leq \varepsilon$. Falls $f\colon A \to \mathbb{R}$ in allen Punkten $p \in A$ stetig ist, dann heisst f *stetig*.

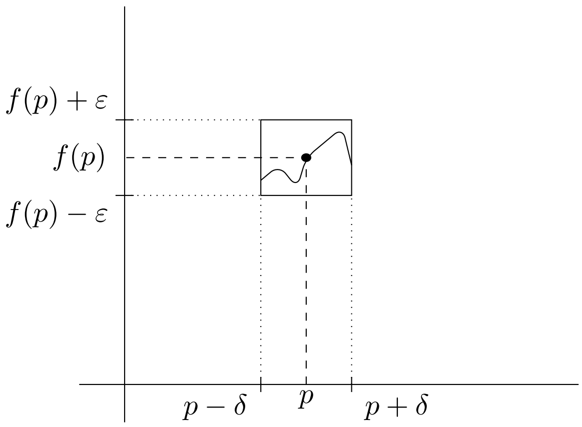

Abbildung III.1: Stetigkeit bedeutet, dass der Graph der Funktion den Rand des eingezeichneten Rechtecks nur rechts und links, aber nicht oben und unten durchdringt.

Beispiele.

(1) Die Identitätsfunktion

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ p &\mapsto p \end{aligned}$$

ist stetig. Sei dazu $p \in \mathbb{R}$ fest und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Setze $\delta = \varepsilon$. Dann gilt für alle $q \in \mathbb{R}$ mit $|q - p| \leq \delta$, dass $|f(q) - f(p)| = |q - p| \leq \delta = \varepsilon$.

(2) Sei

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \leq 0, \\ 1 & \text{falls } x > 0, \end{cases}$$

siehe Abbildung III.2. Dann ist f in allen Punkten ausser dem Nullpunkt stetig. Tatsächlich, sei $p \neq 0$ und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Setze $\delta = |p|/2 > 0$. Dann gilt für alle $q \in \mathbb{R}$ mit $|q - p| \leq \delta$, dass $|f(q) - f(p)| = 0 \leq \varepsilon$.

Sei nun $p = 0$. Betrachte $\varepsilon = 1/2$. Sei $\delta > 0$ beliebig. Dann gilt für $q = \delta/2$, dass $|q - p| = \delta/2 < \delta$. Es folgt

$$|f(q) - f(p)| = |1 - 0| = 1 > \varepsilon.$$

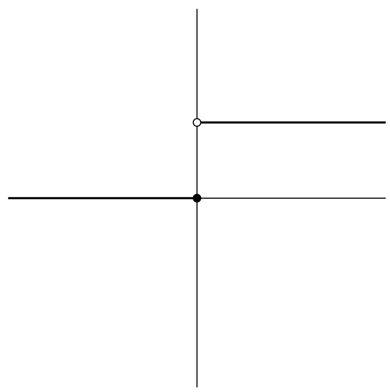

Abbildung III.2: Sprungstelle

(3) Sei

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

die *Dirichletfunktion*. Dann ist f in keinem Punkt stetig. Betrachte dazu $\varepsilon = 1/2$. Sei $p \in \mathbb{Q}$, das heisst, $f(p) = 1$. Für alle $\delta > 0$ finden wir eine irrationale Zahl $q \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $|q - p| \leq \delta$ und $|f(q) - f(p)| = 1 > \varepsilon$. Tatsächlich, wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt{2}/N \leq \delta$. Setze $q = p + \sqrt{2}/N$. Dann gilt $q \notin \mathbb{Q}$, also $f(q) = 0$.

Analog, sei $p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, das heisst, $f(p) = 0$. Für alle $\delta > 0$ finden wir eine Zahl $q \in \mathbb{Q}$ mit $|q - p| \leq \delta$ und $|f(q) - f(p)| = 1 > \varepsilon$. Tatsächlich, wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $1/N \leq \delta$. Dann existiert $a \in \mathbb{Z}$, so dass $|a/N - p| \leq 1/N$. Setze $q = a/N$.

(4) Sei $f(x) = x^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist f stetig auf $\mathbb{R}$. Sei also $p \in \mathbb{R}$ vorgegeben und sei $\varepsilon > 0$. Für $h \in \mathbb{R}$ mit $|h| \leq 1$ gilt

$$f(x+h) = (x+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k = x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2}h^2 + \cdots .$$

Es folgt, dass

$$|f(x+h) - f(x)| \leq |h| \cdot \left| \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \right|,$$

da $|h| \leq 1$. Setze jetzt

$$\delta_1 = \frac{\varepsilon}{t+1},$$

wobei

$$t = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} |p|^{n-k},$$

und $\delta = \min\{1, \delta_1\} > 0$. Für alle $h \in \mathbb{R}$ mit $|h| \leq \delta$ gilt also

$$|f(p+h) - f(p)| \leq |h| \cdot t \leq \delta_1 \cdot t = \varepsilon \cdot \frac{t}{t+1} \leq \varepsilon.$$

Also ist f stetig im Punkt p.

(5) Betrachte die Funktion

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{R} \setminus \{0\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 1/x. \end{aligned}$$

Dann ist f stetig in allen Punkten $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dies ist mühsam von Hand zu zeigen. Deshalb verwenden wir folgendes Lemma.

Lemma. *Sei $A \subset \mathbb{R}$ und seien $f, g \colon A \to \mathbb{R}$ im Punkt $p \in A$ stetig. Dann sind die Funktionen $f + g$ und $f \cdot g$ im Punkt p stetig. Falls $f(p) \neq 0$, dann existiert $a > 0$, so dass die Funktion $1/f$ auf der Menge $(p-a, p+a) \cap A$ definiert und im Punkt p stetig ist.*

Beweis. Als erstes zeigen wir, dass $f + g$ stetig ist. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wähle $\delta_f > 0$ und $\delta_g > 0$ so, dass für alle $q \in A$ mit $|q - p| \leq \delta_f$ gilt, dass $|f(q) - f(p)| \leq \varepsilon/2$, und so, dass für alle $q \in A$ mit $|q - p| \leq \delta_g$ gilt, dass $|g(p) - g(q)| \leq \varepsilon/2$. Setze $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g\}$. Dann gilt für alle $q \in A$ mit $|q - p| \leq \delta$, dass

$$\begin{aligned} |(f+g)(q) - (f+g)(p)| &= |f(q) + g(q) - f(p) - g(p)| \\ &\leq |f(q) - f(p)| + |g(q) - g(p)| \\ &\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass $f \cdot g$ stetig ist. Berechne

$$\begin{aligned}
|(f \cdot g)(q) - (f \cdot g)(p)| &= |f(q) \cdot g(q) - f(p) \cdot g(p)| \\
&= |f(q)g(q) - f(p)g(q) + f(p)g(q) - f(p)g(p)| \\
&\le |g(q)| \cdot |f(q) - f(p)| + |f(p)| \cdot |g(q) - g(p)|
\end{aligned}$$

Wähle $\delta_1 > 0$ so, dass immer wenn $|q - p| \le \delta_1$ gilt, dann auch $|g(q) - g(p)| \le 1$. Wähle $\delta_2 > 0$ so, dass immer wenn $|q - p| \le \delta_2$ gilt, dann auch

$$|f(q) - f(p)| \le \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{|g(p)| + 1}.$$

Wähle weiterhin $\delta_3 > 0$ so, dass immer wenn $|q - p| \le \delta_3$ gilt, dann auch

$$|g(q) - g(p)| \le \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{|f(p)| + 1}.$$

Setze $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. Für $q \in A$ mit $|q - p| \le \delta$ gilt dann:

$$\begin{aligned}
|(f \cdot g)(q) - (f \cdot g)(p)| &\le |g(q)| \cdot \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{|g(p)| + 1} + |f(p)| \cdot \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{|f(p)| + 1} \\
&\le (|g(p)| + 1)\frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{|g(p)| + 1} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Zuletzt behandeln wir $1/f$. Sei $p \in A$ mit $f(p) \neq 0$. Dann existiert nach Stetigkeit von f im Punkt p eine Zahl $a > 0$, so dass wenn $|q - p| \le a$ gilt, dann auch

$$|f(q) - f(p)| \le \frac{|f(p)|}{2}.$$

Also ist $1/f$ auf der Menge $(p - a, p + a) \cap A$ definiert, da dort $|f(q)| \ge \frac{|f(p)|}{2} > 0$. Sei nun $\varepsilon > 0$. Berechne

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{f(q)} - \frac{1}{f(p)} \right| &= \left| \frac{f(p) - f(q)}{f(q)f(p)} \right| \\
&\le 2 \cdot \frac{|f(p) - f(q)|}{|f(p)|^2}.
\end{aligned}$$

Wähle $\delta > 0$ so, dass $\delta \le a$ und immer wenn $|q - p| \le \delta$, dann auch

$$|f(q) - f(p)| \le \frac{\varepsilon}{2} \cdot |f(p)|^2.$$

Es folgt für $q \in A$ mit $|q - p| \le \delta$, dass

$$\left| \frac{1}{f(q)} - \frac{1}{f(p)} \right| \le 2 \cdot \frac{|f(p) - f(q)|}{|f(p)|^2} \le \varepsilon.$$

□

Anwendungen.

(1) Alle Funktionen der Form

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

sogenannte *Polynome*, mit Koeffizienten $a_k \in \mathbb{R}$ sind stetig auf $\mathbb{R}$, da die Identitätsfunktion $x \mapsto x$ und konstante Funktionen stetig sind.

(2) Die Funktion $f(x) = 1/x$ ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Folgenstetigkeit

Theorem 1. *Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge. Eine Funktion $f\colon A \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig im Punkt $p \in A$, wenn für alle konvergenten Folgen $a\colon \mathbb{N} \to A$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = p \in A$ gilt, dass*

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(p).$$

Beweis. Für die Hinrichtung "$\Rightarrow$" sei f im Punkt p stetig. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in A mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = p.$$

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann existiert $\delta > 0$, so dass immer wenn $|q - p| \leq \delta$, dann auch $|f(q) - f(p)| \leq \varepsilon$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ so, dass für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ gilt, dass $|a_n - p| \leq \delta$. Es gilt also für $n \geq N$, dass $|f(a_n) - f(p)| \leq \varepsilon$. Also gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(p).$$

Für die Rückrichtung "$\Leftarrow$", nimm an, dass f *folgenstetig* in p ist, das heisst, dass für alle konvergenten Folgen $a\colon \mathbb{N} \to A$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = p$ gilt, dass

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(p).$$

Wir beweisen durch Widerspruch, dass f stetig in p ist. Nimm an, dass f nicht stetig in p ist. Dann existiert $\varepsilon_0 > 0$, so dass für alle $\delta > 0$ ein $q \in A$ existiert, so dass $|q - p| \leq \delta$ und $|f(q) - f(p)| > \varepsilon_0$. Wähle nun eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie folgt. Wähle $a_n \in A$ so, dass $|a_n - p| \leq 1/(n+1)$ und $|f(a_n) - f(p)| > \varepsilon_0$. Nach Konstruktion gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = p$, aber

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) \neq f(p).$$

Dies widerspricht der Folgenstetigkeit von f. $\square$

Dieser Satz sagt, dass genau dann die Formel

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)$$

für alle konvergenten Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A mit Grenzwert in A gilt, wenn f stetig ist.

Anwendung. Seien $f\colon A \to \mathbb{R}$ und $g\colon B \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(A) \subset B$. Falls f im Punkt $p \in A$ stetig ist, und g im Punkt $f(p) \in B$ stetig ist, dann ist $g \circ f\colon A \to \mathbb{R}$ im Punkt p stetig.

Beweis. Wir verwenden die Folgenstetigkeit um einen schnellen Beweis zu liefern. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in A mit $\lim_{n\to\infty} a_n = p \in A$. Da f stetig in p ist, folgt

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(p).$$

Setze $b_n = f(a_n)$. Dann ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $f(A) \subset B$ mit Grenzwert $f(p)$. Da g stetig in $f(p)$ ist, folgt

$$\lim_{n\to\infty} g(b_n) = g(f(p)).$$

Wir folgern, dass

$$\lim_{n\to\infty} (g \circ f)(a_n) = (g \circ f)(p),$$

das heisst, $g \circ f$ ist stetig im Punkt p. $\square$

Beispiel. Betrachte die stetigen Funktionen

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x(x-1) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 1/x. \end{aligned}$$

Dann ist

$$(g \circ f)(x) = \frac{1}{x(x-1)}$$

stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Bemerkung. Die Funktion $f(x) = 1/x$ hat keine stetige Fortsetzung auf $\mathbb{R}$, das heisst, es existiert keine stetige Funktion $\overline{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass $\overline{f}|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} = f$. Hier ist

$$\overline{f}|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$$

die Funktion $\overline{f}$ *eingeschränkt* auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, gegeben durch $\overline{f}|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}(x) = f(x)$ für $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Es kann jedoch sein, dass für gewisse Funktionen g die Funktion $g \circ f$ eine stetige Fortsetzung auf $\mathbb{R}$ hat.

Beispiele.

(1) Sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g(x) = 0$ für alle x. Dann ist $g \circ f(x) = 0$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, was eine stetige Fortsetzung (die konstante Nullfunktion) auf $\mathbb{R}$ hat.

(2) Sei $g(x) = 1/x$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann hat $g \circ f(x)$ auf $\mathbb{R}$ eine stetige Fortsetzung (die Identitätsfunktion $x \mapsto x$) auf $\mathbb{R}$.

(3) Die Funktion $g(x) = e^{-x^2}$ ist auf $\mathbb{R}$ stetig. Also ist $g \circ f(x) = e^{-1/x^2}$ stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Es gilt
$$\lim_{x \to 0} e^{-1/x^2} = 0.$$
Die Funktion
$$h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0, \\ e^{-1/x^2} & \text{falls } x \neq 0 \end{cases}$$
ist stetig auf $\mathbb{R}$.

Später werden wir sehen, dass h im Punkt $x = 0$ unendlich oft differenzierbar ist und dass alle Ableitungen $h^{(n)}$ von h im Nullpunkt null sind, das heisst, $h^{(n)}(0) = 0$ erfüllen. Das bedeutet, dass h nur im Nullpunkt mit ihrer "Taylorreihe" bei 0 übereinstimmt.

2 Zwischenwertsatz

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$. Wir bezeichnen mit
$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$
das *abgeschlossene Intervall* zwischen a und b.

Theorem 2. *Sei $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) \leq 0 \leq f(b)$ oder $f(a) \geq 0 \geq f(b)$. Dann existiert $s \in [a, b]$ mit $f(p) = 0$.*

Beweis. Wir betrachten nur den Fall $f(a) \leq 0 \leq f(b)$. Betrachte die Menge
$$A = \{x \in [a, b] \mid f(x) \leq 0\},$$
siehe Abbildung III.3. Dann ist A nicht leer, da $a \in A$, und nach oben beschränkt durch b. Die Menge A hat also ein Supremum $s \in \mathbb{R}$. Es gilt, dass $s \in [a, b]$, da s die kleinste obere Schranke von A ist. Wir behaupten nun, dass $f(s) = 0$ und beweisen dies in zwei Schritten.

(i) Wir zeigen erst durch Widerspruch, dass $f(s) \geq 0$. Falls $f(s) < 0$, setze $\varepsilon = |f(s)| > 0$. Da f stetig in s ist, existiert $\delta > 0$, so dass für $q \in [a, b]$ mit $|q - s| \leq \delta$ gilt, dass $|f(q) - f(s)| \leq \varepsilon$. Insbesondere gilt
$$|f(s + \delta) - f(s)| \leq \varepsilon = |f(s)|,$$
also folgt $f(s + \delta) \leq f(s) + |f(s)| = 0$. Das heisst, dass $s + \delta \in A$, was $s = \sup(A)$ widerspricht.

(ii) Als nächstes zeigen wir durch Widerspruch, dass $f(s) \leq 0$. Falls $f(s) > 0$, setze $\varepsilon = f(s)/2 > 0$. Wiederum existiert $\delta > 0$, so dass für alle $q \in [a,b]$ mit $|q - s| \leq \delta$ gilt, dass $|f(q) - f(s)| \leq \varepsilon$. Es folgt, dass

$$f(q) \geq f(s) - |f(q) - f(s)| \geq f(s) - \varepsilon = \frac{f(s)}{2} > 0$$

für alle $q \in [s - \delta, s]$. Also ist $s - \delta$ eine obere Schranke für A, im Widerspruch zu $s = \sup(A)$.

Für den Fall $f(a) \geq 0 \geq f(b)$ kann man stattdessen $-f$ betrachten oder im Beweis oben alle Ungleichungen umdrehen. $\square$

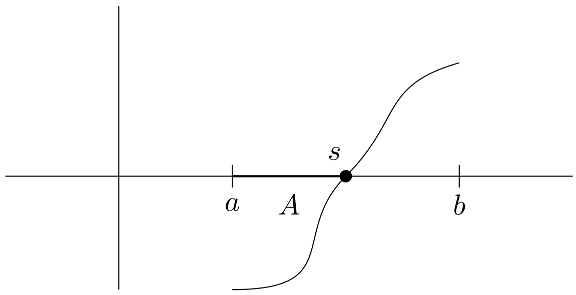

Abbildung III.3: Zwischenwertsatz

Folgerungen

Zwischenwertsatz. *Sei* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *stetig mit* $f(a) \leq f(b)$*. Dann gilt*

$$[f(a), f(b)] \subset f([a,b]).$$

In anderen Worten heisst das, dass stetige Funktionen jeden Wert zwischen zwei angenommenen Werten annehmen.

Beweis. Sei $y \in [f(a), f(b)]$. Betrachte auf $[a,b]$ die stetige Funktion $g(x) = f(x) - y$. Es gilt $g(a) = f(a) - y \leq 0$ und $g(b) = f(b) - y \geq 0$. Also existiert nach Theorem 2 ein Punkt $p \in [a,b]$ mit $g(p) = 0$, beziehungsweise $f(p) = y$. $\square$

Beispiel. Seien $a_1, a_2, \dots, a_{2k+1} \in \mathbb{R}$. Setze

$$f(x) = x^{2k+1} + a_1 x^{2k} + \cdots + a_{2k} x + a_{2k+1}.$$

Dann ist f ein *Polynom* von ungeradem *Grad* $2k+1$. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n^{2k+1}} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \cdots + \frac{a_{2k+1}}{n^{2k+1}}\right) = 1.$$

Folglich nimmt f beliebig hohe Werte an. Ähnlich gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(-n)}{n^{2k+1}} = \lim_{n\to\infty} \left(-1 + \frac{a_1}{n} - \frac{a_2}{n^2} \pm \cdots + \frac{a_{2k+1}}{n^{2k+1}}\right) = -1,$$

also nimmt f negative Werte mit beliebig hohem Betrag an. Nach dem Zwischenwertsatz ist f surjektiv, insbesondere hat f eine Nullstelle.

Bemerkung. Für Polynome mit geradem Grad ist das falsch: Die Funktion $f(x) = x^2+1$ hat keine Nullstelle in $\mathbb{R}$.

Fixpunktsatz von Brouwer. *Sei* $f\colon [a,b] \to [a,b]$ *stetig. Dann existiert* $p \in [a,b]$ *mit* $f(p) = p$.

Ein solcher Punkt p mit $f(p) = p$ heisst *Fixpunkt* von f. Siehe auch Abbildung III.4.

Beweis. Betrachte die auf dem Intervall $[a,b]$ stetige Funktion $g(x) = x - f(x)$. Es gilt $g(a) = a - f(a) \leq 0$ und $g(b) = b - f(b) \geq 0$. Nach dem Zwischenwertsatz existiert $p \in [a,b]$ mit $g(p) = 0$, beziehungsweise $f(p) = p$. $\square$

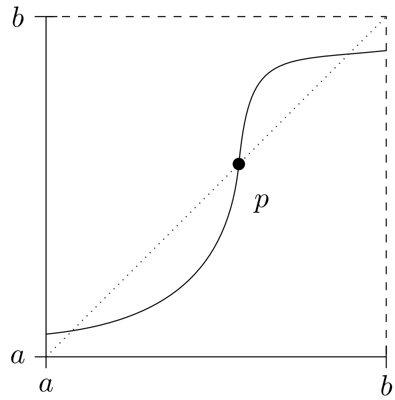

Abbildung III.4: Fixpunktsatz von Brouwer. Ein Schnittpunkt des Graphen von f mit der Gerade mit Steigung 1 ist ein Fixpunkt von f. Die eingezeichnete Abbildung hat sogar drei Fixpunkte, zum Beispiel p.

3 Stetige Funktionen auf kompakten Mengen

Frage. Sei $A \subset \mathbb{R}$ beschränkt, das heisst, es existiert $R > 0$ mit $A \subset [-R, R]$. Sei $f\colon A \to \mathbb{R}$ stetig. Ist dann $f(A) \subset \mathbb{R}$ beschränkt?

Die Antwort ist nein.

Beispiel. Sei

$$A = (0,1) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$$

und $f(x) = 1/x$. Dann ist $f((0,1)) = \mathbb{R}_{>1}$ unbeschränkt.

Definition. Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}$ heisst *offen*, falls für alle $p \in U$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $(p-\delta, p+\delta) \subset U$. Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ heisst *abgeschlossen*, falls $\mathbb{R} \setminus A$ offen ist.

Bemerkung. Jede (auch unendliche) Vereinigung offener Mengen ist offen (aber unendliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen sind nicht unbedingt abgeschlossen). Dazu seien $U_i \subset \mathbb{R}$ offene Teilmengen für $i \in I$, wobei i eine beliebige Indexmenge ist. Sei dann

$$x \in U = \bigcup_{i \in I} U_i$$

beliebig. Dann ist $x \in U_i$ für ein $i \in I$. Da U_i offen ist, existiert $\delta > 0$, so dass $(x-\delta, x+\delta) \subset U_i$. Aber U_i ist eine Teilmenge von U, also gilt auch $(x-\delta, x+\delta) \subset U$. Somit ist U offen.

Beispiele.

- Sei $a < b$. Dann ist das *offene Intervall*

$$U = (a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

zwischen a und b offen. Sei dazu $p \in (a,b)$. Setze $\delta = \min\{|p-a|, |p-b|\}$. Dann gilt $(p-\delta, p+\delta) \subset (a,b)$, siehe Abbildung III.5.

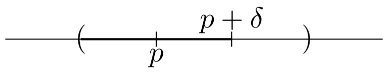

Abbildung III.5: Offene Intervalle sind offen

- Sei $a \leq b$. Dann ist das *abgeschlossene Intervall*

$$A = [a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

zwischen a und b abgeschlossen. Sei dazu $p \notin [a,b]$, das heisst, entweder $p < a$ oder $p > b$. Setze $\delta = \min\{|p-a|, |p-b|\} > 0$. Dann gilt $(p-\delta, p+\delta) \cap [a,b] = \emptyset$, also ist $\mathbb{R} \setminus [a,b]$ offen.

- Im Extremfall $a = b$ enthält das Intervall $[a,b] = \{a\}$ genau einen Punkt. Also sind einelementige Mengen abgeschlossen.

- Sei $A = \{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$. Dann ist A abgeschlossen, da

$$\mathbb{R} \setminus A = \mathbb{R}_{<0} \cup \mathbb{R}_{>1} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}} (1/(n+1), 1/n)$$

eine Vereinigung offener Mengen und somit selbst offen ist.

- Die Menge
$$B = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$$
ist weder offen noch abgeschlossen.

- Die Menge $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ist weder offen noch abgeschlossen.

- Die Menge
$$[0,1) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}$$
ist weder offen noch abgeschlossen.

Theorem 3. *Sei $A \subset \mathbb{R}$ nicht leer, abgeschlossen und beschränkt, und sei weiterhin $f\colon A \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f auf A ein Maximum beziehungsweise ein Minimum an, das heisst, es existiert $p \in A$, so dass für alle $q \in A$ gilt, dass $f(q) \leq f(p)$ beziehungsweise $f(q) \geq f(p)$.*

Für den Beweis von Theorem 3 brauchen wir noch etwas Vorarbeit.

Lemma (Folgenabgeschlossenheit)**.** *Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine nichtleere Teilmenge. Dann ist A genau dann abgeschlossen, wenn für alle konvergenten Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \in A$ gilt, dass auch der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n$ in A liegt.*

Eine Menge A, so dass für alle konvergenten Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \in A$ gilt, dass auch $\lim_{n\to\infty} a_n$ in A liegt, werden wir im Beweis "folgenabgeschlossen" nennen.

Beweis. Wir beweisen die Hinrichtung "$\Rightarrow$" durch Widerspruch. Sei
$$p = \lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R} \setminus A.$$
Da $\mathbb{R} \setminus A$ offen ist, existiert $\delta > 0$ mit $(p-\delta, p+\delta) \subset \mathbb{R} \setminus A$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \geq N$ gilt, dass $|a_n - p| < \delta$. Aber dann gilt $a_n \in (p-\delta, p+\delta) \subset \mathbb{R} \setminus A$, also $a_n \notin A$, was der Annahme, dass $a\colon \mathbb{N} \to A$ eine Folge in A ist, widerspricht.

Umgekehrt, für die Rückrichtung "$\Leftarrow$", sei $A \subset \mathbb{R}$ folgenabgeschlossen. Sei $p \in \mathbb{R} \setminus A$. Wir suchen $\delta > 0$, so dass $(p-\delta, p+\delta) \subset \mathbb{R} \setminus A$. Falls es kein solches $\delta > 0$ gibt, dann existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein Punkt $a_n \in A$, so dass $|a_n - p| \leq 1/n$. Dann gilt
$$\lim_{n\to\infty} a_n = p \in A,$$
da A folgenabgeschlossen ist. Das ist ein Widerspruch zu $p \in \mathbb{R} \setminus A$. $\square$

Bemerkung. Etwas pathologisch ist die leere Menge $\emptyset$ offen und somit $\mathbb{R}$ selbst abgeschlossen. Ausserdem ist $\mathbb{R}$ offen (da $\mathbb{R}$ jedes Intervall enthält) und somit $\emptyset$ abgeschlossen.

Es stellt sich heraus, dass $\mathbb{R}$ und $\emptyset$ die einzigen Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind, welche sowohl offen als auch abgeschlossen sind. Äquivalent dazu ist, dass keine abgeschlossenen nichtleeren Mengen $A, B \subset \mathbb{R}$ existieren, so dass $A \cap B = \emptyset$ und $A \cup B = \mathbb{R}$. Andernfalls könnten wir konvergente Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in B konstruieren, so dass
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Eine Art solche Folgen zu produzieren ist folgendermassen. Wähle beliebige $a_0 \in A$ und $b_0 \in B$. Nach Konstruieren von a_n und b_n betrachte den Mittelpunkt $c_n = (a_n + b_n)/2$ und unterscheide zwei Fälle. Falls $c_n \in A$, setze $a_{n+1} = c_n$ und $b_{n+1} = b_n$. Ansonsten, falls $c_n \in B$, setze $a_{n+1} = a_n$ und $b_{n+1} = c_n$. Die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllen dann die gewünschte Eigenschaft. Das ist aber ein Widerspruch zum Lemma oben: Der gemeinsame Grenzwert

$$c = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

liegt nach dem Lemma oben in $A \cap B = \emptyset$.

Beweis von Theorem 3. Sei $A \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen und $f\colon A \to \mathbb{R}$ stetig. Wir beweisen in zwei Schritten, dass f ein Maximum annimmt.

(i) Die Menge $f(A) \subset \mathbb{R}$ ist nach oben beschränkt. Andernfalls gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $a_n \in A$ mit $f(a_n) \geq n$. Da A beschränkt ist, hat die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert $p \in \mathbb{R}$. Da A abgeschlossen, also folgenabgeschlossen ist, gilt

$$p = \lim_{k\to\infty} a_{n_k} \in A.$$

Weiter ist f stetig, also folgenstetig in p, also gilt

$$f(p) = \lim_{k\to\infty} f(a_{n_k}) \geq \lim_{k\to\infty} n_k = +\infty,$$

was ein Widerspruch zu $+\infty \notin \mathbb{R}$ ist.

(ii) Die Funktion f nimmt ein Maximum an. Setze $M = \sup\{f(x) \mid x \in A\} \in \mathbb{R}$. Es ist bloss zu zeigen, dass $p \in A$ existiert, so dass $f(p) = M$. Für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ existiert $a_n \in A$ mit $f(a_n) \geq M - 1/n$. Da A beschränkt und abgeschlossen ist, hat die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie im ersten Schritt eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = p \in A.$$

Bemerke, dass

$$M - 1/n_k \leq f(a_{n_k}) \leq M.$$

Da f stetig, also folgenstetig in p ist, folgt

$$M = \lim_{k\to\infty} f(a_{n_k}) = f(p).$$

Um zu zeigen, dass f auch ein Minimum annimmt, bemerke lediglich, dass $-f$ ein Maximum annimmt. □

Definition. Eine Teilmenge $K \subset \mathbb{R}$ heisst *kompakt*, falls K beschränkt und abgeschlossen ist.

Beispiele.

- $K = [0, 1]$ ist kompakt.
- Die Menge $K = \{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{N}_{\geq 1}\} \subset [0, 1]$ ist kompakt.
- Betrachte die *Cantormenge*

$$K = [0, 1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n,$$

  wobei

  - $U_1 = (1/3, 2/3)$,
  - $U_2 = (1/9, 2/9) \cup (7/9, 8/9)$,
  - $U_3 = (1/27, 2/27) \cup (7/27, 8/27) \cup (19/27, 20/27) \cup (25/27, 26/27)$,

  und so weiter, siehe Abbildung III.6.

Abbildung III.6: Iterative Konstruktion der Cantormenge. Die erste Zeile ist $[0, 1]$, die zweite ist $[0, 1] \setminus U_1$, die dritte ist $[0, 1] \setminus (U_1 \cup U_2)$ und die vierte ist $[0, 1] \setminus (U_1 \cup U_2 \cup U_2)$.

Offensichtlich ist K beschränkt. Alle U_n sind offen, also auch die Vereinigung $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$. Somit ist K abgeschlossen, also kompakt. Eine lustige Tatsache ist, dass Elemente von K mit einem Weg in einem unendlich verzweigten binären Baum kodiert werden können, siehe Abbildung III.7: Die Menge K steht in einer Natürlichen Bijektion zur Menge $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, siehe auch den Beweis von Proposition 4 aus Kapitel I. Dort haben wir diese Bijektion explizit konstruiert. Das zeigt, dass die Cantormenge überabzählbar ist.

4 Kompakte Mengen

Proposition 1 (Folgenkompaktheit)**.** *Eine Teilmenge $K \subset \mathbb{R}$ ist kompakt, genau dann, wenn jede Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in K eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in K besitzt.*

Beweis. Für die Hinrichtung “$\Rightarrow$” sei K kompakt und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in K. Da K beschränkt ist, hat $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine in $\mathbb{R}$ konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, und da K abgeschlossen ist, liegt der Grenzwert $\lim_{k \to \infty} a_{n_k}$ in K.

Umgekehrt, für die Rückrichtung “$\Leftarrow$”, nimm an, dass K folgenkompakt ist. Wir zeigen in zwei Schritten, dass K kompakt ist.

(i) K ist beschränkt. Ansonsten gibt es $a_n \in K$ mit $|a_n| \geq n$. Aber dann hat die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in K keine konvergente Teilfolge.

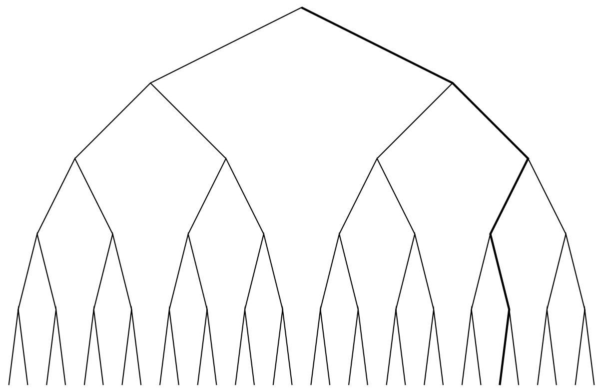

Abbildung III.7: Ein Weg $(1, 1, 0, 1, 0, \dots)$ in einem unendlich verzweigten Baum

(ii) K ist abgeschlossen. Sei $p \in \mathbb{R} \setminus K$. Gesucht ist ein $\delta > 0$ so dass $(p-\delta, p+\delta) \subset \mathbb{R} \setminus K$. Falls es kein solches Intervall gibt, dann existiert $a_n \in K$ mit $|a_n - p| \leq 1/n$. Dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in K mit Grenzwert p, also gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = p \in K,$$

da jede Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert p konvergiert. Das widerspricht aber $p \in \mathbb{R} \setminus K$. $\square$

Proposition 2. *Sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt und $f\colon K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f(K) \subset \mathbb{R}$ kompakt.*

Bemerkung. Die Aussage, dass stetige Bilder kompakter Mengen kompakt sind, ist in vielen Gebieten der Mathematik enorm wichtig. Sie ist erstaunlich, da zum Beispiel stetige Bilder offener Mengen nicht offen sein müssen und ebenso brauchen stetige Bilder abgeschlossener Mengen nicht abgeschlossen zu sein. Beispiele hier sind die konstante Funktion $x \mapsto 0$, denn das Bild von $\mathbb{R}$ ist $\{0\}$, was nicht offen ist, und $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, denn $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_{>0}$ ist nicht abgeschlossen.

Beweis von Proposition 2. Auch diese Proposition zeigen wir in zwei Schritten.

(i) $f(K) \subset \mathbb{R}$ ist beschränkt. Das folgt aus Theorem 3, welches besagt, dass f ein Maximum und ein Minimum annimmt.

(ii) $f(K)$ ist abgeschlossen. Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $f(K)$, welche mit Grenzwert $y \in \mathbb{R}$ konvergiert. Wähle $x_n \in K$ mit $f(x_n) = y_n$. Da K kompakt ist, hat $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert $p \in K$. Da f stetig, also folgenstetig in p ist, folgt

$$y = \lim_{k\to\infty} y_{n_k} = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(p).$$

Da $f(p) \in f(K)$ gilt, folgt also, dass $f(K)$ folgenabgeschlossen, also abgeschlossen ist. $\square$

Gleichmässige Stetigkeit

Definition. Sei $A \subset \mathbb{R}$ beliebig. Eine Funktion $f\colon A \to \mathbb{R}$ heisst *gleichmässig stetig*, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $p, q \in A$ mit $|p - q| \leq \delta$ gilt, dass $|f(p) - f(q)| \leq \varepsilon$.

Bemerkung. Das unterscheidet sich von der Definition der Stetigkeit in einem Detail: Bei der gleichmässigen Stetigkeit darf δ nicht vom Punkt p abhängen, was bei der herkömmlichen Stetigkeit erlaubt ist. Gleichmässige Stetigkeit impliziert also Stetigkeit in allen Punkten von A. Die Umkehrung gilt aber nicht.

Beispiel. Betrachte die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2. \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, zum Beispiel $\varepsilon = 1$, und $\delta > 0$ vorgegeben. Sei $x > 0$ und berechne

$$\begin{aligned} f\left(x + \frac{1}{n}\right) &= \left(x + \frac{1}{n}\right)^2 \\ &= x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} \\ &> f(x) + \frac{2x}{n}. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt

$$f\left(n\varepsilon + \frac{1}{n}\right) > f(n\varepsilon) + 2\varepsilon$$

für $n \in \mathbb{N}$. Wähle n so, dass $1/n \leq \delta$. Setze $q = n\varepsilon + 1/n$ und $p = n\varepsilon$. Dann gilt $|q - p| = 1/n \leq \delta$, aber $|f(q) - f(p)| > 2\varepsilon > \varepsilon$. Also ist f nicht gleichmässig stetig.

Proposition 3. *Sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt und $f\colon K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f gleichmässig stetig.*

Beweis. Wir beweisen die Proposition durch Widerspruch. Nimm an, dass $f\colon K \to \mathbb{R}$ nicht gleichmässig stetig ist. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $p_n \in K$ und ein $q_n \in K$ mit $|p_n - q_n| \leq 1/n$ existiert mit $|f(p_n) - f(q_n)| > \varepsilon$. Da K kompakt ist, hat die Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(p_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$p = \lim_{k\to\infty} p_{n_k} \in K.$$

Aus

$$|p_{n_k} - q_{n_k}| \leq 1/n_k \leq 1/k$$

folgt, dass $\lim_{k\to\infty} q_{n_k} = p$. Da f stetig in p ist, folgt, dass

$$\lim_{k\to\infty} f(p_{n_k}) = f(p) = \lim_{k\to\infty} f(q_{n_k}).$$

Das widerspricht aber der Forderung, dass $|f(p_{n_k}) - f(q_{n_k})| > \varepsilon > 0$. □

Topologische Charakterisierung der Kompaktheit

Wir erinnern uns, dass eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}$ offen ist, falls für alle $p \in U$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass der *Ball* $B_p(\delta) = (p - \delta, p + \delta)$ noch ganz in U liegt.

Bemerkung. Die offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ erfüllen die folgenden Axiome eines topologischen Raums (was erst später im Studium relevant wird).

(i) Beliebige Vereinigungen offener Mengen sind offen.

(ii) Endliche Schnitte offener Mengen sind offen.

(iii) Die leere Menge und $\mathbb{R}$ selbst sind offen.

Warnung. Beliebige Schnitte offener Mengen sind im allgemeinen nicht offen.

Beispiel. Der Schnitt

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (-1/n, 1/n) = \{0\}$$

ist nicht offen in $\mathbb{R}$.

Definition. Sei $X \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Eine Familie $\{U_i\}_{i \in I}$ offener Mengen $U_i \subset \mathbb{R}$ heisst *offene Überdeckung* von X, falls

$$X \subset \bigcup_{i \in I} U_i,$$

das heisst, für alle $p \in X$ existiert ein $i \in I$ mit $p \in U_i$. Hier ist I eine beliebige Indexmenge.

In allgemeinen topologischen Räumen ist folgendes Theorem die Definition der Kompaktheit.

Theorem 4 (Heine-Borel)**.** *Sei $K \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(i) *K ist kompakt.*

(ii) *Jede offene Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ von K enthält eine endliche offene Überdeckung, das heisst, es existieren $i_0, i_1, \ldots, i_n \in I$ mit*

$$K \subset \bigcup_{k=0}^{n} U_{i_k} = U_{i_0} \cup U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}.$$

Beispiele.

(1) Sei $X = \mathbb{R}$. Setze $U_i = (i-1, i+1) \subset \mathbb{R}$ für $i \in \mathbb{Z}$. Es gilt, dass

$$X = \mathbb{R} \subset \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} U_i,$$

Für alle endlichen Teilmengen $M \subset \mathbb{Z}$ gilt, dass

$$X \not\subset \bigcup_{i\in M} U_i.$$

Also ist $X = \mathbb{R}$ nicht kompakt.

(2) Sei $K = \{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{N}_{\geq 1}\}$. Sei $\{U_i\}_{i\in I}$ eine beliebige offene Überdeckung von K. Es existiert ein Index $i_0 \in I$ mit $0 \in U_{i_0}$. Da $U_{i_0} \subset \mathbb{R}$ offen ist, existiert $\delta > 0$ mit $(-\delta, \delta) \subset U_{i_0}$. Wähle nun $N \in \mathbb{N}$ mit $1/N < \delta$. Dann gilt für alle $n \geq N$, dass $1/n \in (-\delta, \delta) \subset U_{i_0}$. Für alle $k \in \{1, 2, \ldots, N\}$, wähle $i_k \in I$ mit $1/k \in U_{i_k}$. Dann gilt, dass

$$K \subset \bigcup_{k=0}^{N} U_{i_k} = U_{i_0} \cup U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_N}.$$

Also enthält $\{U_i\}_{i\in I}$ eine endliche Überdeckung von K. Folglich ist K kompakt.

Beweis von Theorem 4. Wir zeigen erst die Implikation (ii) $\Rightarrow$ (i). Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in K. Zu zeigen ist, dass eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert in K existiert. Andernfalls wäre kein Punkt $p \in K$ Grenzwert einer konvergenten Teilfolge. Dann existiert aber für jeden Punkt $p \in K$ ein $\delta_p > 0$, so dass der Ball $B_p(\delta_p) = (p - \delta_p, p + \delta_p)$ nur endlich viele Folgenglieder a_n enthält. Präziser: nur für endlich viele $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $a_n \in B_p(\delta_p)$. Setze $U_p = B_p(\delta_p)$ für $p \in K$. Offensichtlich gilt

$$K \subset \bigcup_{p\in K} U_p,$$

also ist $\{U_p\}_{p\in K}$ eine offene Überdeckung von K. Nach Annahme existieren endlich viele $p_0, p_1, \ldots, p_m \in K$ mit $K \subset U_{p_0} \cup U_{p_1} \cup \cdots \cup U_{p_m}$. Nach Konstruktion enthält jede Menge U_{p_k} nur endlich viele Folgenglieder a_n, also auch K. Das ist ein Widerspruch.

Für die Richtung (i) $\Rightarrow$ (ii) seien K kompakt und $\{U_i\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von K. Wir behaupten, dass $\delta_0 > 0$ existiert, so dass für alle $p \in K$ ein $i \in I$ existiert mit $B_p(\delta_0) \subset U_i$. Andernfalls existiert eine Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in K mit folgender Eigenschaft. Für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $i \in I$ gilt, dass $B_{p_n}(1/n) \not\subset U_i$. Da K kompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge $(p_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert

$$\lim_{k\to\infty} p_{n_k} = p \in K.$$

Es existiert $i_0 \in I$ mit $p \in U_{i_0}$. Es existiert sogar ein $\varepsilon > 0$, so dass $B_p(\varepsilon) \subset U_{i_0}$. Wähle $k \in \mathbb{N}$ mit $1/k < \varepsilon/2$ und $|p - p_{n_k}| < \varepsilon/2$. Dann gilt

$$B_{p_{n_k}}(1/n_k) \subset B_{p_{n_k}}(1/k). \subset B_p(1/k + \varepsilon/2) \subset B_p(\varepsilon) \subset U_{i_0},$$

siehe Abbildung III.8. Das widerspricht aber $B_{p_{n_k}}(1/n_k) \not\subset U_{i_0}$ und zeigt somit unsere Behauptung.

Sei nun $\delta_0 > 0$, so dass für alle $p \in K$ ein $i \in I$ existiert mit $B_p(\delta_0) \subset U_i$. Da K kompakt, also beschränkt ist, existiert $R > 0$ mit

$$K \subset [-R, R] = \{x \in \mathbb{R} \mid -R \leq x \leq R\}.$$

Sei $N \in \mathbb{N}$ mit $N > 2R/2\delta_0$. Dann existieren N offene Intervalle

$$(a_1, b_1), \ldots, (a_N, b_N) \subset \mathbb{R}$$

mit $b_k - a_k = 2\delta_0$ und

$$K \subset [-R, R] \subset \bigcup_{k=1}^{N} (a_k, b_k).$$

Nach der definierenden Eigenschaft von δ_0 existiert für alle $k \in \{1, \ldots, N\}$ ein U_{i_k} mit

$$B_{p_k}(\delta_0) = (a_k, b_k) \subset U_{i_k}$$

mit $p_k = (b_k + a_k)/2$. Somit gilt

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{N} (a_k, b_k) \subset \bigcup_{k=1}^{N} U_{i_k},$$

das heisst, die Familie $\{U_i\}_{i \in I}$ enthält eine endliche Überdeckung. $\square$

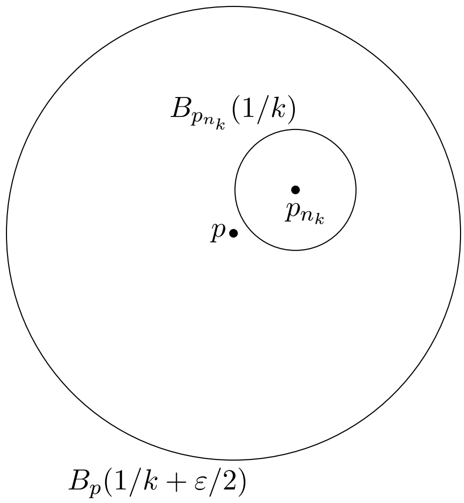

Abbildung III.8: Beweis von Theorem 4

Kapitel IV

Differenzierbarkeit

1 Differenzierbare Funktionen

Ziel. Formalisiere folgende Aussage: “der Funktionsgraph einer Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat im Punkt $(p, f(p))$ eine wohldefinierte Tangente”.

Affine Funktionen

$$\begin{aligned} A\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto ax + b \end{aligned}$$

für $a, b \in \mathbb{R}$, siehe Abbildung IV.1, sind der Prototyp einer solchen Funktion. Für alle $p \in \mathbb{R}$ und alle $h \in \mathbb{R}$ gilt

$$A(p + h) = a(p + h) + b = A(p) + L(h),$$

wobei

$$\begin{aligned} L\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ h &\mapsto ah \end{aligned}$$

linear ist (im Gegensatz zu der Funktion $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche “nur” affin ist). Wir erhalten, dass für festes p gilt, dass $A(p+h) = A(p)+L(h)$ die Summe einer konstanten Funktion mit einer linearen Funktion ist. Eine solche Aufteilung ist eine zu restriktive Bedingung für allgemeinere Funktionen, da diese nur für affine Funktionen gilt.

Dreigliedentwicklung

Definition. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Weiterhin sei $p \in (a, b)$ und $d > 0$ mit $(p - d, p + d) \subset (a, b)$. Die Funktion $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ heisst im Punkt $p \in (a, b)$ *differenzierbar*, falls eine lineare Funktion $(Df)_p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und eine Funktion $(Rf)_p\colon (-d, d) \to \mathbb{R}$ existieren, die folgende Eigenschaften erfüllen.

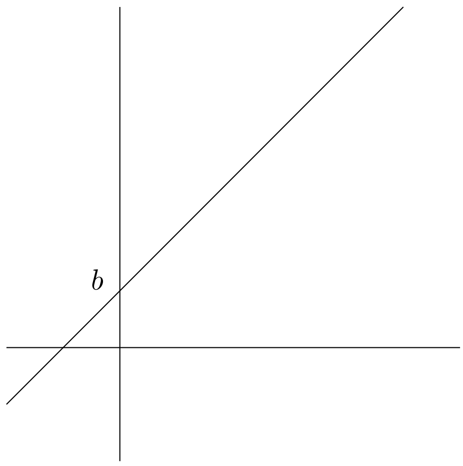

Abbildung IV.1: Der Graph einer affinen Funktion $x \mapsto ax + b$

(i) Für alle $h \in (-d, d)$ gilt

$$f(p+h) = f(p) + (Df)_p(h) + (Rf)_p(h).$$

(ii) Für alle $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$ mit $\delta \leq d$, so dass für alle $h \in (-\delta, \delta)$ gilt, dass

$$|(Rf)_p(h)| \leq \varepsilon \cdot |h|.$$

Die Aufteilung

$$f(p+h) = f(p) + (Df)_p(h) + (Rf)_p(h)$$

heisst *Dreigliedentwicklung* von f an der Stelle p. Die lineare Abbildung $(Df)_p \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst *Differential* von f an der Stelle p, und $(Rf)_p$ heisst der *Restterm*.

Für die Bedingung, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $\delta \leq d$ existiert, so dass für $h \in (-\delta, \delta)$ gilt, dass

$$|(Rf)_p(h)| \leq \varepsilon \cdot |h|,$$

schreiben wir häufig kurz

$$\lim_{|h| \to 0} \frac{|(Rf)_p(h)|}{|h|} = 0.$$

Wir sagen auch, dass $(Rf)_p \colon (-d, d) \to \mathbb{R}$ *relativ klein* in $|h|$ ist.

Beispiele.

(1) Sei $L \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ linear. Dann gilt für alle $p \in \mathbb{R}$ und alle $h \in \mathbb{R}$, dass

$$L(p+h) = L(p) + L(h) + 0.$$

Setze $(DL)_p = L\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diese Funktion ist linear. Setze $(RL)_p(h) = 0$. Diese Funktion erfüllt

$$\lim_{h\to 0} \frac{|(RL)_p(h)|}{|h|} = 0.$$

Also ist $L\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an der Stelle $p \in \mathbb{R}$ differenzierbar mit Differential

$$(DL)_p = L\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

(2) Betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2. \end{aligned}$$

Es gilt für alle $p \in \mathbb{R}$ und $h \in \mathbb{R}$, dass

$$f(p+h) = (p+h)^2 = p^2 + 2ph + h^2 = f(p) + 2ph + h^2.$$

Setze

$$(Df)_p(h) = 2ph$$

und

$$(Rf)_p(h) = h^2.$$

Die Funktion

$$\begin{aligned} (Df)_p\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ h &\mapsto 2ph \end{aligned}$$

ist linear (für festes p). Die Funktion

$$\begin{aligned} (Rf)_p\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ h &\mapsto h^2 \end{aligned}$$

erfüllt

$$\lim_{h\to 0} \frac{|(Rf)_p(h)|}{|h|} = 0.$$

Tatsächlich, sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Setze $\delta = \varepsilon > 0$. Für alle $h \in \mathbb{R}$ mit $|h| \leq \delta$ gilt, dass

$$|(Rf)_p(h)| = |h| \cdot |h| \leq \varepsilon \cdot |h|.$$

Also ist f im Punkt $p \in \mathbb{R}$ differenzierbar mit Differential

$$(Df)_p(h) = 2p \cdot h.$$

Eindeutigkeit der Dreigliedentwicklung

Seien

$$f(p+h) = f(p) + (Df)_p(h) + (Rf)_p(h) = f(p) + \widetilde{(Df)}_p(h) + \widetilde{(Rf)}_p(h)$$

zwei Dreigliedentwicklungen von $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$. Dann ist die Funktion

$$(Df)_p - \widetilde{(Df)}_p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

linear und die Funktion $\widetilde{(Rf)}_p - (Rf)_p$ relativ klein in $|h|$. Weiter gilt auf dem gemeinsamen Definitionsbereich der beiden Funktionen, dass

$$(Df)_p - \widetilde{(Df)}_p = \widetilde{(Rf)}_p - (Rf)_p$$

Lemma. *Sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ linear und relativ klein in $|h|$. Dann ist g die Nullfunktion.*

Beweis. Die Funktion g ist linear, das heisst, für alle $h \in \mathbb{R}$ gilt

$$g(h) = h \cdot g(1).$$

Weiter ist g relativ klein in $|h|$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $\delta > 0$ so dass für $|h| \leq \delta$ gilt, dass

$$|g(1)| \cdot |h| = |h \cdot g(1)| = |g(h)| \leq \varepsilon \cdot |h|,$$

also $|g(1)| \leq \varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $g(1) = 0$ und somit $g(h) = h \cdot g(1) = 0$. In anderen Worten ist g die Nullfunktion. $\square$

Korollar. *Die Dreigliedentwicklung ist eindeutig.*

Beweis. Seien

$$f(p+h) = f(p) + (Df)_p(h) + (Rf)_p(h) = f(p) + \widetilde{(Df)}_p(h) + \widetilde{(Rf)}_p(h)$$

zwei Dreigliedentwicklungen von $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$. Wir haben oben gesehen, dass

$$g = (Df)_p - \widetilde{(Df)}_p = \widetilde{(Rf)}_p - (Rf)_p$$

linear und relativ klein in $|h|$, also die Nullfunktion ist. $\square$

Anwendung. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *symmetrisch*, das heisst, $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und im Punkt 0 differenzierbar. Dann ist $(Df)_0 = 0$ die Nullfunktion.

Tatsächlich, sei

$$f(0+h) = f(0) + (Df)_0(h) + (Rf)_0(h)$$

die Dreigliedentwicklung von f bei $p = 0$. Da f symmetrisch ist, ist auch

$$f(0+h) = f(0-h) = f(0) + (Df)_0(-h) + (Rf)_0(-h).$$

Mit $(Df)_0(-h) = -(Df)_0(h)$ und Eindeutigkeit der Dreigliedentwicklung folgt, dass

$$(Df)_0 = -(Df)_0,$$

also $(Df)_0(h) = 0$ für alle h.

Beispiel. Betrachte die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto |x|, \end{aligned}$$

siehe Abbildung IV.2. Dann ist f symmetrisch. Wir behaupten, dass f im Punkt $p = 0$ nicht differenzierbar ist. Falls doch, ist muss $(Df)_0 = 0$ nach obiger Anwendung gelten, also Folgt

$$|h| = f(0+h) = f(0) + (Df)_0(h) + (Rf)_0(h) = (Rf)_0(h).$$

Aber die Funktion

$$(Rf)_0(h) = |h|$$

ist nicht relativ klein in $|h|$. Tatsächlich existiert für $\varepsilon < 1$ kein $h \neq 0$ mit

$$|(Rf)_p(h)| \leq \varepsilon \cdot |h|.$$

Das ist ein Widerspruch, also ist f im Nullpunkt nicht differenzierbar.

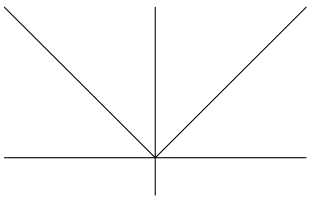

Abbildung IV.2: Der Graph der Funktion $x \mapsto |x|$

Beispiele.

(1) Sei $f(x) = c$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt für alle $p \in \mathbb{R}$ und $h \in \mathbb{R}$, dass

$$f(p+h) = f(p) + 0 + 0,$$

also ist f differenzierbar und $(Df)_p = 0$ ist die Nullfunktion.

(2) Sei $f(x) = x^n$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Die Fälle $n = 0$ und $n = 1$ haben wir mit dem konstanten und dem linearen Fall bereits behandelt. Für alle $p \in \mathbb{R}$ und $h \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(p+h) = (p+h)^n = p^n + np^{n-1}h + h^2 \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} p^{n-k} h^{k-2}.$$

Setze nun

$$(Df)_p(h) = np^{n-1}h$$

und

$$(Rf)_p(h) = h^2 \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} p^{n-k} h^{k-2}.$$

Dann ist $(Df)_p$ linear in h. Wir behaupten, dass $(Rf)_p(h)$ relativ klein in $|h|$ ist. Sei dazu $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Setze

$$M = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} |p|^{n-k} \geq 0$$

und

$$\delta = \min\{1, \varepsilon/(M+1)\}.$$

Dann gilt für alle $h \in \mathbb{R}$ mit $|h| \leq \delta$, dass

$$|(Rf)_p(h)| = |h|^2 \cdot \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \cdot |p|^{n-k} \cdot |h|^{k-2} = |h|^2 \cdot M \leq |h| \cdot \delta \cdot M \leq |h| \cdot \varepsilon.$$

Also ist $(Rf)_p(h)$ relativ klein in $|h|$ und somit ist f im Punkt p differenzierbar und

$$(Df)_p(h) = np^{n-1} \cdot h.$$

(3) Sei $f(x) = e^x$. Dann ist

$$f(p+h) = e^{p+h} = e^p \cdot e^h = e^p \cdot (1 + h + h^2/2! + \cdots)$$

Setze

$$(Df)_p(h) = e^p \cdot h$$

und

$$(Rf)_p(h) = e^p \cdot (h^2/2! + h^3/3! + \cdots).$$

Dann ist

$$e^{p+h} = e^p + (Df)_p(h) + (Rf)_p(h)$$

und $(Df)_p$ ist linear. Dass $(Rf)_p(h)$ relativ klein in $|h|$ ist, ist eine Aufgabe auf Serie 6.

(4) Sei $f(x) = \log(x)$, definiert auf $\mathbb{R}_{>0}$. Es ist schwierig, die Dreigliedentwicklung von f aufzuschreiben.

(5) Sei $f(x) = \sqrt{x}$, definiert auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Auch für diese Funktion f ist es schwierig, die Dreigliedentwicklung aufzuschreiben.

Wir werden später sehen, unter welchen Bedingungen die Umkehrfunktion einer bijektiven differenzierbaren Funktion differenzierbar ist.

Bemerkungen.

- Für $f(x) = x^n$ und $p \in \mathbb{R}$ beliebig gilt

$$(Df)_p(h) = np^{n-1} \cdot h.$$

- Für $f(x) = e^x$ und $p \in \mathbb{R}$ beliebig gilt

$$(Df)_p(h) = e^p \cdot h.$$

Diese Grössen vor dem h erkennen wir wohl wieder.

Definition. Sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar im Punkt $p \in (a,b)$. Dann heisst

$$f'(p) = (Df)_p(1)$$

die *Ableitung* von f an der Stelle p.

Proposition. *Sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $p \in (a,b)$ beliebig. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(i) *f ist an der Stelle p differenzierbar.*

(ii) *Der Grenzwert*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}$$

existiert.

Falls diese Aussagen zutreffen, gilt

$$f'(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}.$$

Bemerkung. Wieso verwenden wir nicht den Punkt (ii) der Proposition als Definition der Differenzierbarkeit? Das hat einen relativ einfachen Grund: In höheren Dimensionen ist der Ausdruck $(f(p+h) - f(p))/h$ nicht definiert.

Beispiel. Betrachte die Spiegelung

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\mapsto (x,-y) \end{aligned}$$

an der x-Achse, siehe Abbildung IV.3. Dann ist f linear.

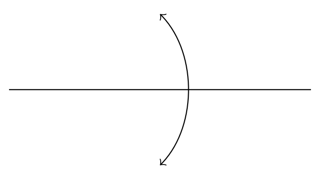

Abbildung IV.3: Spiegelung an der x-Achse

Versuche, $(f(p+h) - f(p))/h$ auszuwerten. Da f linear ist, folgt

$$f(p+h) = f(p) + f(h).$$

Daraus folgt, dass

$$\frac{f(p+h)-f(p)}{h}=\frac{f(h)}{h}=\frac{(h_1,-h_2)}{(h_1,h_2)}.$$

Aber das Verhältnis zweier linear unabhängiger Vektoren ist nicht definiert, das heisst der Punkt (ii) in der Proposition macht keinen Sinn. Die Funktion f ist aber sehr wohl nach unserer Definition differenzierbar, da sie linear ist. Die Dreigliedentwicklung ist

$$f(p+h)=f(p)+f(h)+0,$$

also ist $(Df)_p=f$.

In der Analysis 2, wenn wir Funktionen auf höherdimensionalen Räumen studieren, werden wir also auf die Dreigliedentwicklung angewiesen sein. Weiter werden sich alle Beweise, die wir hier über die Dreigliedentwicklung führen, auf diese kompliziertere Situation übertragen lassen.

Beweis der Proposition. Für die Implikation "(i) $\Rightarrow$ (ii)" sei

$$f(p+h)=f(p)+(Df)_p(h)+(Rf)_p(h)$$

die Dreigliedentwicklung von f an der Stelle p. Für $h\neq 0$ gilt, dass

$$\frac{f(p+h)-f(p)}{h}=\frac{(Df)_p(h)+(Rf)_p(h)}{h}=(Df)_p(1)+\frac{(Rf)_p(h)}{h}.$$

Da $(Rf)_p(h)$ relativ klein in $|h|$ ist, folgt dass

$$\lim_{h\to 0}\frac{|(Rf)_p(h)|}{|h|}=0,$$

also auch

$$\lim_{h\to 0}\frac{(Rf)_p(h)}{h}=0.$$

Wir folgern, dass

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(p+h)-f(p)}{h}=f'(p)+\lim_{h\to 0}\frac{(Rf)_p(h)}{h}=f'(p).$$

Insbesondere existiert dieser Grenzwert.

Wir beweisen nun die Implikation "(ii) $\Rightarrow$ (i)". Nehme an, der Grenzwert

$$a=\lim_{h\to 0}\frac{f(p+h)-f(p)}{h}\in\mathbb{R}$$

existiert. Im Hinblick auf $a=f'(p)=(Df)_p(1)$ machen wir den Ansatz

$$f(p+h)=f(p)+a\cdot h+(Rf)_p(h)$$

für eine Dreigliedentwicklung von f an der Stelle $p \in (a, b)$. Zu zeigen ist, dass $(Rf)_p(h)$ relativ klein in $|h|$ ist. Für $h \neq 0$ gilt

$$\frac{(Rf)_p(h)}{h} = \frac{f(p+h) - f(p) - ah}{h} = \frac{f(p+h) - f(h)}{h} - a.$$

Im Grenzwert gilt also

$$\lim_{h \to 0} \frac{(Rf)_p(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h} - a = a - a = 0.$$

Also folgt auch

$$\lim_{h \to 0} \frac{|(Rf)_p(h)|}{|h|} = 0,$$

und somit ist $(Rf)_p(h)$ relativ klein in $|h|$. Wir folgern, dass $(Df)_p(h) = a \cdot h$, also insbesondere haben wir

$$f'(p) = (Df)_p(1) = a = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}. \qquad \square$$

Geometrische Interpretation. Die Grösse

$$\frac{f(p+h) - f(p)}{h}$$

ist die Steigung der Sekante zwischen den Punkten $(p, f(p))$ und $(p+h, f(p+h))$ im Graph der Funktion f, siehe Abbildung IV.4 links. Lassen wir h gegen null gehen, so erhalten wir im Grenzwert die Tangente mit Steigung

$$f'(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}.$$

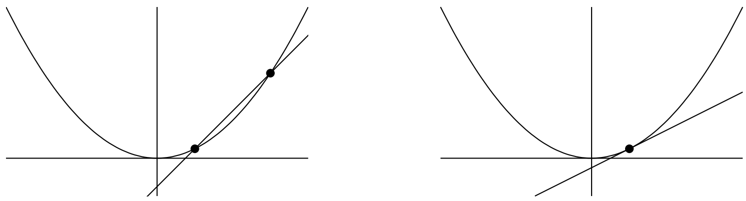

Abbildung IV.4: Sekante und Tangente

Beispiele.

(1) Sei $f(x) = \sqrt{x}$, definiert auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$, siehe Abbildung IV.5. Wir versuchen, die Ableitung von f an der Stelle 0 auszurechnen. Berechne

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{h}}{h},$$

aber dieser Grenzwert existiert nicht: die Tangente der Funktion im Nullpunkt ist vertikal, hat also unendliche Steigung. Wir folgern, dass es keine Funktion

$$\overline{f}\colon (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$$

mit folgenden Eigenschaften gibt.

(i) $\overline{f}$ ist differenzierbar an der Stelle $p = 0$.

(ii) Für alle $x \in [0, \delta]$ gilt $\overline{f}(x) = f(x)$.

Allgemeiner würde man Differenzierbarkeit auf einem Randpunkt auch über eine solche Erweiterung $\overline{f}$ definieren.

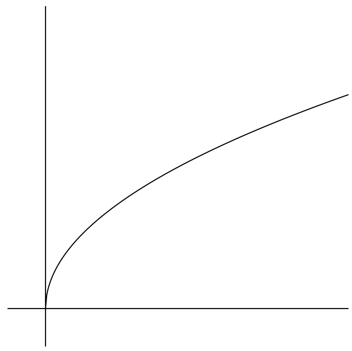

Abbildung IV.5: Die Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x}$

(2) Wir definieren geometrisch die Sinusfunktion und untersuchen diese auf Differenzierbarkeit. In einem Kreis mit Radius 1, sei x ein Winkel, das heisst, eine Strecke zwischen zwei Punkten auf dem Kreis. Wir definieren den *Sinus*, den *Cosinus* und den *Tangens* durch

$$\sin(x) = s, \ \cos(x) = c \text{ und } \tan(x) = t,$$

wobei s, c und t via Abbildung IV.6 definiert sind. Sowohl der Sinus als auch der Cosinus sind also beschränkte Funktionen. Es gilt, dass die Verhältnisse

$$c : 1 = s : t$$

übereinstimmen, das heisst

$$t = \frac{s}{c}.$$

Wir bemerken für $0 < x < \pi/2$, dass

$$\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1.$$

Dies folgt aus der geometrischen Tatsache, dass $s \leq x \leq t$, wovon wir uns vom Bild überzeugen lassen. Also folgt

$$\sin(x) \leq x \leq \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Weiter folgt

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1,$$

da

$$\lim_{x \to 0} \cos(x) = 1.$$

Wir folgern, dass

$$\sin'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x} = 1.$$

Das heisst die Funktion $\sin \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar bei $p = 0$. Aus den Additionstheoremen folgt leicht, dass die Sinusfunktion überall differenzierbar ist.

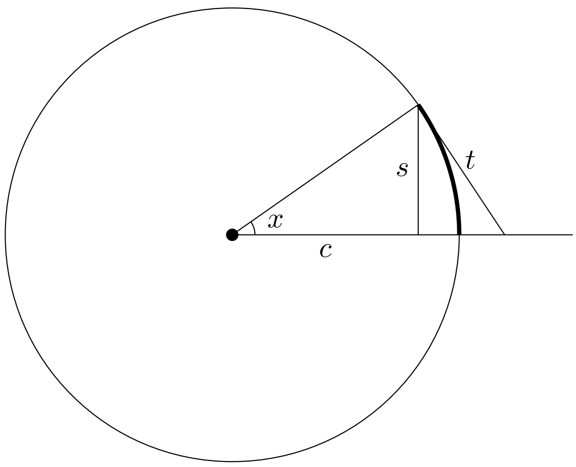

Abbildung IV.6: Sinus und Cosinus

(3) Betrachte die Funktion

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} x^2 & \text{falls } x \in \mathbb{Q}\ , \\ 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\ . \end{cases} \end{aligned}$$

Dann ist f an der Stelle $p = 0$ differenzierbar und es gilt $f'(0) = 0$. Wir beweisen das mit dem Ansatz

$$f(0 + h) = 0 + 0 + (Rf)_0(h)$$

für eine Dreigliedentwicklung bei $p = 0$. Zu zeigen ist, dass $(Rf)_0(h) = f(h)$ relativ klein in $|h|$ ist. Sei dazu $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Setze $\delta = \varepsilon$. Dann gilt für alle $h \in \mathbb{R}$ mit $|h| \leq \delta$, dass

$$|(Rf)_0(h)| = |f(h)| \leq |h| \cdot |h| \leq \delta \cdot |h| = \varepsilon \cdot |h|.$$

In allen Punkten $p \neq 0$ ist f nicht stetig, und deshalb auch nicht differenzierbar. Das Letztere folgt aus folgendem Lemma.

Lemma. *Sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ im Punkt $p \in \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann ist f im Punkt p stetig.*

Beweisskizze. Das ist eine Übung auf Serie 7. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Gesucht ist ein $\delta > 0$ so, dass für $h \in \mathbb{R}$ mit $|h| \leq \delta$ gilt, dass $|f(p+h) - f(p)| \leq \varepsilon$. Nach der Dreigliedentwicklung ist aber

$$|f(p+h) - f(p)| = |(Df)_p(h) - (Rf)_p(h)| \leq |h \cdot f'(p)| + |(Rf)_p(h)|$$

Wähle nun $\delta > 0$ geeignet. $\square$

Bemerkung. Es existieren stetige Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche in keinem Punkt differenzierbar sind. Solche Funktionen wurden erstmals vom Deutschen Mathematiker Weierstrass konstruiert.

2 Die Kettenregel

Kettenregel. *Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $c < d$, sei $g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion, deren Bild in (c,d) liegt, das heisst, $g((a,b)) \subset (c,d)$, und sei $f\colon (c,d) \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Falls g im Punkt $p \in (a,b)$ und f im Punkt $g(p) \in (c,d)$ differenzierbar sind, dann ist die Komposition $f \circ g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ im Punkt p differenzierbar, und es gilt*

$$(D(f \circ g))_p = (Df)_{g(p)} \circ (Dg)_p.$$

Bemerkung. Da $g'(p) = (Dg)_p(1)$ und ebenso $f'(g(p)) = (Df)_{g(p)}(1)$, haben wir, dass

$$\begin{aligned}
(f \circ g)'(p) &= (D(f \circ g))_p(1) \\
&= (Df)_{g(p)} \circ (Dg)_p(1) \\
&= (Df)_{g(p)}(g'(p)) \\
&= g'(p) \cdot (Df)_{g(p)}(1) \\
&= g'(p) \cdot f'(g(p)),
\end{aligned}$$

oder in einer Zeile,

$$(f \circ g)'(p) = f'(g(p)) \cdot g'(p),$$

was auch häufig als die *Kettenregel* bezeichnet wird.

Beweis der Kettenregel. Wir leiten eine Dreigliedentwicklung für $f \circ g$ an der Stelle $p \in (a, b)$ her. Schreibe mithilfe der Dreigliedentwicklung von g, dass

$$\begin{aligned} f \circ g(p+h) &= f(g(p+h)) \\ &= f(g(p) + (Dg)_p(h) + (Rg)_p(h)) \\ &= f(g(p) + \overline{h}) \end{aligned}$$

für $\overline{h} = (Dg)_p(h) + (Rg)_p(h)$. Wir können nun die Dreigliedentwicklung von f anwenden um zu sehen, dass

$$f \circ g(p+h) = f(g(p)) + (Df)_{g(p)}(\overline{h}) + (Rf)_{g(p)}(\overline{h}).$$

Nach Linearität von $(Df)_{g(p)}$ gilt, dass

$$f(g(p+h)) = f(g(p)) + (Df)_{g(p)}((Dg)_p(h)) + (Df)_{g(p)}((Rg)_p(h)) + (Rf)_{g(p)}(\overline{h}).$$

Setze

$$(D(f \circ g))_p(h) = (Df)_{g(p)}((Dg)_p(h)).$$

Setzen wir

$$R_1(h) = (Df)_{g(p)}((Rg)_p(h))$$

und

$$R_2(h) = (Rf)_{g(p)}(\overline{h}),$$

so bleibt zu zeigen, dass $R_1(h)$ und $R_2(h)$ relativ klein in $|h|$ sind.

(1) Berechne

$$\begin{aligned} R_1(h) &= (Rg)_p(h) \cdot (Df)_{g(p)}(1) \\ &= (Rg)_p(h) \cdot f'(g(p)), \end{aligned}$$

wobei $f'(g(p))$ konstant ist. Das heisst, $R_1(h)$ ist das Produkt einer Konstanten mit einem Term, der relativ klein in $|h|$ ist. Also ist $R_1(h)$ relativ klein in $|h|$.

(2) Berechne

$$R_2(h) = (Rf)_{g(p)}((Dg)_p(h) + (Rg)_p(h)).$$

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wähle $\delta_1 > 0$ so, dass für $h \in \mathbb{R}$ mit $|h| \leq \delta_1$ gilt, dass

$$|(Rg)_p(h)| \leq |h|.$$

Dann ist also

$$\begin{aligned} |\overline{h}| &= |(Dg)_p(h) + (Rg)_p(h)| \\ &\leq |(Dg)_p(h)| + |(Rg)_p(h)| \\ &\leq |g'(p)| \cdot |h| + |h| \\ &= (|g'(p)| + 1) \cdot |h| \\ &= \alpha \cdot |h| \end{aligned}$$

für $\alpha = |g'(p)| + 1$. Wähle nun $\delta_2 > 0$ so, dass für alle $\widetilde{h} \in \mathbb{R}$ mit $|\widetilde{h}| \leq \delta_2$ gilt, dass

$$|(Rf)_{g(p)}(\widetilde{h})| \leq \varepsilon/\alpha \cdot |\widetilde{h}|.$$

Dann gilt für alle $h \in \mathbb{R}$ mit $|h| \leq \delta_1$ und $|h| \leq \delta_2/\alpha$, dass

$$|R_2(h)| = |(Rf)_{g(p)}(\overline{h})| \leq \varepsilon/\alpha \cdot |\overline{h}| \leq \varepsilon \cdot |h|.$$

Hier haben wir verwendet, dass $|\overline{h}| \leq \alpha \cdot |h| \leq \delta_2$, was wir aus $|h| \leq \delta_1$ schliessen können. $\square$

Anwendungen der Kettenregel

Ableitungen von Umkehrfunktionen

Sei $f\colon (a,b) \to (c,d)$ differenzierbar und bijektiv. Dann existiert eine Umkehrfunktion von f, das heisst eine Funktion $g\colon (c,d) \to (a,b)$ mit $f \circ g = \mathrm{Id}_{(c,d)}$, die Identität des Intervalls (c,d). Das heisst, für alle $x \in (c,d)$ gilt

$$f(g(x)) = x.$$

Falls g im Punkt $p \in (c,d)$ differenzierbar ist, dann gilt

$$\left(D(\mathrm{Id}_{(c,d)})\right)_p = \left(D(f \circ g)\right)_p = (Df)_{g(p)} \circ (Dg)_p.$$

Da das Differential einer linearen Abbildung die lineare Abbildung selbst ist, folgt insbesondere, dass

$$\left(D(\mathrm{Id}_{(c,d)})\right)_p = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}.$$

Wir folgern, dass

$$(Df)_{g(p)} \circ (Dg)_p = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}},$$

das heisst, die beiden linearen Abbildungen $(Df)_{g(p)}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $(Dg)_p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind zueinander invers. Für die Ableitungen gilt, dass

$$f'(g(p)) \cdot g'(p) = 1,$$

also

$$g'(p) = \frac{1}{f'(g(p))}.$$

Beispiel. Betrachte

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_{>0} \\ x &\mapsto e^x. \end{aligned}$$

Wir wissen bereits, dass $f'(x) = e^x$ gilt. Die Umkehrfunktion

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R}_{>0} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \log(x) \end{aligned}$$

erfüllt also, falls g im Punkt $p > 0$ differenzierbar ist,

$$g'(p) = \frac{1}{f'(g(p))} = \frac{1}{p}.$$

Falls $\log\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist, dann gilt somit

$$\log'(x) = \frac{1}{x}.$$

Warnung. Aus $f(g(x)) = x$ und f differenzierbar folgt nicht, dass g differenzierbar ist.

Beispiel. Betrachte

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^3. \end{aligned}$$

Die Umkehrfunktion von f ist

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt[3]{x}, \end{aligned}$$

welches aufgrund einer vertikalen Tangente im Nullpunkt, siehe Abbildung IV.7, nicht differenzierbar ist.

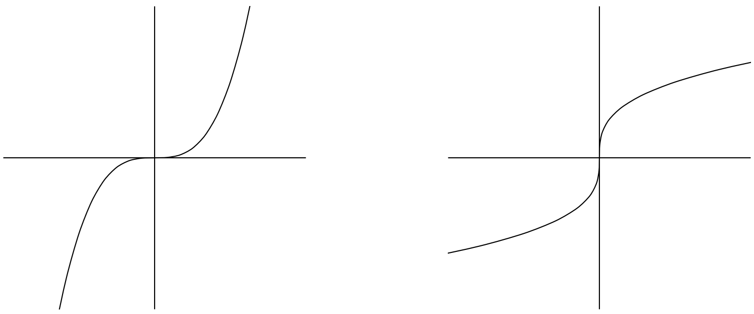

Abbildung IV.7: Die Umkehrfunktion von $x \mapsto x^3$ ist im Nullpunkt nicht differenzierbar.

Die Quotientenregel

Betrachte die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Dann gilt für $p \neq 0$ und für $h \in \mathbb{R}$ mit $p + h \neq 0$, dass

$$\frac{f(p+h) - f(p)}{h} = \frac{\frac{1}{p+h} - \frac{1}{p}}{h} = \frac{-1}{p(p+h)},$$

also

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(p+h)-f(p)}{h} = -\frac{1}{p^2}.$$

Somit ist f an der Stelle $p \neq 0$ differenzierbar und es gilt

$$f'(p) = \frac{-1}{p^2}.$$

Sei nun $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar an der Stelle $p \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$(f \circ g)'(p) = f'(g(p)) \cdot g'(p) = \frac{g'(p)}{g(p)^2}.$$

Zusammengefasst erhalten wir die *Quotientenregel*

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$$

Die Produktregel

Produktregel. *Seien $f, g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ im Punkt $p \in (a,b)$ differenzierbar. Dann ist das Produkt $f \cdot g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ im Punkt p differenzierbar und es gilt*

$$(D(f\cdot g))_p(h) = f(p) \cdot (Dg)_p(h) + g(p) \cdot (Df)_p(h)$$

Bemerkung. Für die Ableitung gilt

$$(f\cdot g)'(p) = f(p)\cdot g'(p) + g(p) \cdot f'(p),$$

was auch häufig als die *Produktregel* bezeichnet wird. Dies folgt direkt via einsetzen von $h = 1$.

Beweisskizze. Wir leiten eine Dreigliedentwicklung für $f \cdot g$ bei p wie folgt her. Berechne

$$\begin{aligned}
(f\cdot g)(p+h) &= f(p+h)\cdot g(p+h) \\
&= \Big(f(p) + (Df)_p(h) + (Rf)_p(h)\Big) \cdot \Big(g(p) + (Dg)_p(h) + (Rg)_p(h)\Big) \\
&= (f\cdot g)(p) + f(p)\cdot (Dg)_p(h) + g(p)\cdot (Df)_p(h) + (R(f\cdot g))_p(h),
\end{aligned}$$

wobei $(R(f\cdot g))_p$ aus 6 Resttermen besteht. Bemerke, dass

$$(D(f\cdot g))_p(h) = f(p) \cdot (Dg)_p(h) + g(p) \cdot (Df)_p(h)$$

linear in h ist. Die 6 Restterme sind

- $f(p)\cdot(Rg)_p(h)$ und $g(p)\cdot(Rf)_p(h)$, welche beide ein Produkt einer Konstanten mit einem Term der relativ klein in $|h|$ ist, sind,

- $(Df)_p(h) \cdot (Rg)_p(h)$, $(Rf)_p(h) \cdot (Dg)_p(h)$ und $(Rf)_p(h) \cdot (Rg)_p(h)$ welche nicht allzu schwierig zu untersuchen sind,
- $(Df)_p(h) \cdot (Dg)_p(h) = h^2 \cdot f'(p) \cdot g'(p)$, was ein Produkt einer Konstanten mit h^2 und somit relativ klein in $|h|$ ist.

Da die Summe von relativ kleinen Termen selbst relativ klein ist, haben wir die Produktregel bewiesen. $\square$

3 Der Mittelwertsatz

Frage. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f' = 0$ (die Nullfunktion), das heisst für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f'(x) = 0$. Ist dann f konstant?

Die Antwort ist (ausnahmsweise) ja. Das ist aber nicht ganz trivial, da wir die Integralrechnung noch nicht aufgebaut haben. Wir brauchen dafür den Mittelwertsatz (nicht zu verwechseln mit dem Zwischenwertsatz).

Mittelwertsatz. *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a,b). Dann existiert $p \in (a,b)$ mit $f(b) - f(a) = f'(p) \cdot (b-a)$.*

Geometrische Interpretation. Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a,b). Dann existiert $p \in (a,b)$ so, dass die Sehne zwischen $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ dieselbe Steigung wie die Tangente des Graphen von f zu $(p, f(p))$ hat. Siehe Abbildung IV.8.

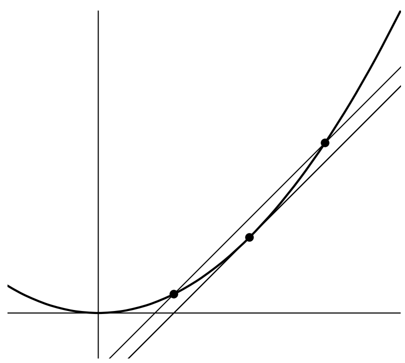

Abbildung IV.8: Geometrische Interpretation des Mittelwertsatzes

Ein Spezialfall des Mittelwertsatzes ist folgender Satz.

Satz von Rolle. *Sei $h\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf $(0,1)$ mit $h(0) = h(1)$. Dann existiert $t \in [0,1]$ mit $h'(t) = 0$.*

Beweis. Wir unterscheiden drei Fälle.

1. h ist konstant. Dann gilt für alle $t \in (0,1)$, dass $h'(t) = 0$.

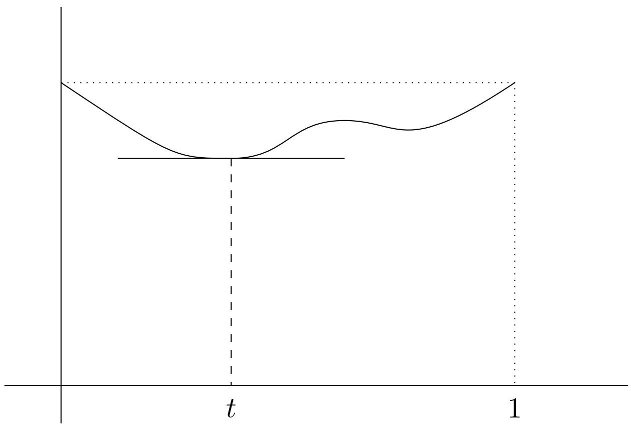

Abbildung IV.9: Satz von Rolle

2. Es existiert $p \in (0,1)$ mit $h(p) < h(0) = h(1)$. Das ist die Situation, die in Abbildung IV.9 dargestellt ist. Da $h\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig ist, nimmt h auf dem kompakten Intervall $[0,1]$ ein Minimum an. Es existiert also $t \in [0,1]$ so, dass für alle $q \in [0,1]$ gilt, dass $h(t) \leq h(q)$. Wegen $h(p) < h(0) = h(1)$ folgt, dass $t \in (0,1)$. Wir behaupten nun, dass $h'(t) = 0$. Für den Beweis, siehe das Lemma unten.

3. Es existiert $p \in (0,1)$ mit $h(p) > h(0) = h(1)$. Wie im 2. Fall folgt die Existenz eines Maximums an einer Stelle $t \in (0,1)$. Auch hier folgt aus dem Lemma unten, dass $h'(t) = 0$. □

Definition. Sei $h\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Wir sagen, dass h an der Stelle $p \in (a,b)$ ein *lokales Minimum* annimmt, falls $\delta > 0$ mit $(p-\delta, p+\delta) \subset (a,b)$ existiert, so dass für alle $q \in (p-\delta, p+\delta)$ gilt, dass $h(q) \geq h(p)$. Ähnlich sagen wir, dass h an der Stelle $p \in (a,b)$ ein *lokales Maximum* annimmt, falls $\delta > 0$ mit $(p-\delta, p+\delta) \subset (a,b)$ existiert, so dass für alle $q \in (p-\delta, p+\delta)$ gilt, dass $h(q) \leq h(p)$. Wir sagen weiterhin, dass h an der Stelle $p \in (a,b)$ ein *lokales Extremum* annimmt, falls h an der Stelle p ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum annimmt.

Lemma. *Sei $h\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit einem lokalen Extremum an einer Stelle $p \in (a,b)$. Dann gilt $h'(p) = 0$.*

Bemerkung. Die Umkehrung gilt nicht: Nur weil $h'(t) = 0$ gilt, heisst das nicht, dass t ein lokales Extremum von h ist.

Beispiel. Betrachte die Funktion

$$\begin{aligned} h\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^3, \end{aligned}$$

siehe Abbildung IV.7 links. Dann gilt $h'(0) = 0$, aber h nimmt hat kein lokales Extremum im Nullpunkt.

Beweis des Lemmas. Wir nehmen an, dass h an der Stelle p ein lokales Minimum annimmt. Der Fall, dass h ein lokales Maximum bei p annimmt, ist analog. Sei

$$\begin{aligned} h(p+k) &= h(p) + (Dh)_p(k) + (Rh)_p(k) \\ &= h(p) + h'(p) \cdot k + (Rh)_p(k). \end{aligned}$$

Wir unterscheiden nun drei Fälle, wobei zwei davon zu einem Widerspruch führen werden.

(1) $h'(p) = 0$. Das wollen wir zeigen.

(2) $h'(p) > 0$. Setze
$$\varepsilon = \frac{h'(p)}{2} > 0.$$
Dann existiert $\delta > 0$ so dass für alle $k \in \mathbb{R}$ mit $|k| \leq \delta$ gilt, dass $|(Rh)_p(k)| \leq \varepsilon \cdot |k|$. Für alle $k \in (0, \delta)$ gilt:
$$\begin{aligned} h(p-k) &= h(p) - k \cdot h'(p) + (Rh)_p(-k) \\ &\leq h(p) - k \cdot h'(p) + \frac{h'(p)}{2} \cdot k \\ &= h(p) - \frac{h'(p)}{2} \cdot k \\ &< h(p), \end{aligned}$$
was der Annahme, dass h ein lokales minimum bei p hat, widerspricht.

(3) $h'(p) < 0$. Setze
$$\varepsilon = \frac{|h'(p)|}{2} > 0.$$
Dann existiert wie im 2. Fall $\delta > 0$ so dass für alle $k \in \mathbb{R}$ mit $|k| \leq \delta$ gilt, dass $|(Rh)_p(k)| \leq \varepsilon \cdot |k|$. Für alle $k \in (0, \delta)$ gilt dann analog $h(p+k) < h(p)$, was auch ein Widerspruch ist. □

Beweis vom Mittelwertsatz. Betrachte die Hilfsfunktion

$$\begin{aligned} h \colon [0,1] &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto f((1-t)a + tb) - (1-t) \cdot f(a) - t \cdot f(b). \end{aligned}$$

Für $t \in (0,1)$ gilt
$$(1-t) \cdot a + t \cdot b = a + t \cdot (b-a) \in (a,b).$$

Die Funktion h ist stetig auf dem Intervall $[0,1]$, da sie eine Verknüpfung stetiger Funktionen ist, und differenzierbar auf $(0,1)$, da sie eine Verknüpfung differenzierbarer Funktionen ist. Es gilt

$$\begin{aligned} h(0) &= f(a) - f(a) = 0, \\ h(1) &= f(b) - f(b) = 0. \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Rolle folgt, dass $t_0 \in (0,1)$ mit $h'(t_0) = 0$ existiert. Wir berechnen

$$h'(t) = f'((1-t)a + tb) \cdot (b-a) + f(a) - f(b).$$

Setze nun

$$p = (1-t_0) \cdot a + t_0 \cdot b \in (a,b).$$

Es gilt

$$0 = h'(t_0) = f'(p) \cdot (b-a) + f(a) - f(b),$$

also

$$f'(p) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}. \qquad \square$$

Korollar 1. *Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f' = 0$, die Nullfunktion. Dann ist f konstant.*

Beweis. Sei $a < b$. Nach dem Mittelwertsatz existiert $p \in (a,b)$ mit

$$f(b) - f(a) = f'(p) \cdot (b-a) = 0,$$

also $f(p) = f(a)$. Dies gilt für alle $a < b$, also ist f konstant. $\square$

Definition. Eine Funktion $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ heisst *stetig differenzierbar* falls f differenzierbar und $f'\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ stetig ist.

Korollar 2. *Sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und sei $p \in (a,b)$ mit $f'(p) > 0$. Dann existiert $\delta > 0$, so dass $f|_{(p-\delta,p+\delta)}\colon (p-\delta, p+\delta) \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist, das heisst, für alle $x, y \in (p-\delta, p+\delta)$ mit $x < y$ gilt $f(x) < f(y)$.*

Beweis. Setze

$$\varepsilon = \frac{f'(p)}{2} > 0.$$

Da f' stetig im Punkt p ist, existiert $\delta > 0$ so, dass

(i) $(p-\delta, p+\delta) \subset (a,b)$,

(ii) für alle $q \in (p-\delta, p+\delta)$ gilt

$$|f'(q) - f'(p)| \leq \varepsilon.$$

Insbesondere gilt dann für $q \in (p-\delta, p+\delta)$, dass

$$f'(q) \geq f'(p) - \varepsilon \geq \frac{f'(p)}{2} > 0.$$

Seien nun $x, y \in (p-\delta, p+\delta)$ mit $x < y$. Nach dem Mittelwertsatz existiert $t \in (x,y)$ mit

$$f(y) - f(x) = f'(t) \cdot (y-x) > 0.$$

Also gilt $f(y) > f(x)$. $\square$

Konvexität

Mithilfe des Mittelwertsatzes können wir folgendes zeigen.

(i) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f' \geq 0$, das heisst, für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f'(x) \geq 0$. Dann ist f monoton wachsend. Tatsächlich, seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$. Dann existiert $p \in [x, y]$ mit
$$0 \leq f'(p) \cdot (y - x) = f(y) - f(x),$$
also gilt $f(x) \leq f(y)$.

(ii) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar, das heisst, f ist differenzierbar und f' ist differenzierbar mit $f'' \geq 0$. Dann ist f' monoton wachsend. Wende dazu Punkt (i) auf $f'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an. Salopp gesagt heisst das, dass die Steigung der Tangenten an den Funktionsgraph von f von links nach rechts zunimmt.

Definition. Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst *konvex*, falls für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a < c < b$ der Punkt $(c, f(c)) \in \mathbb{R}^2$ unter oder auf der Gerade durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ liegt, siehe Abbildung IV.10.

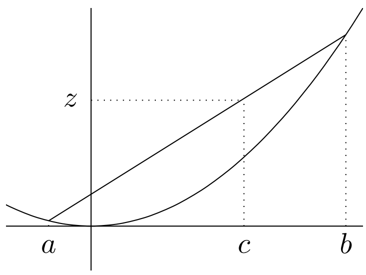

Abbildung IV.10: Konvexität

Formaler, schreibe $c = a + t \cdot (b - a)$ mit $t \in (0, 1)$. Berechne den Schnittpunkt (c, z) der Geraden g zwischen $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ mit der vertikalen Geraden durch $(c, 0)$ folgendermassen:
$$z = f(a) + t \cdot (f(b) - f(a)).$$
Die *Konvexitätsbedingung* ist also $f(c) \leq z$, das heisst,
$$f(a + t \cdot (b - a)) \leq f(a) + t \cdot (f(b) - f(a)).$$
Wir können also die Definition oben folgendermassen umformulieren.

Definition. Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst *konvex*, falls für alle $a < b$ und $t \in [0, 1]$ gilt, dass
$$f(a + t \cdot (b - a)) \leq f(a) + t \cdot (f(b) - f(a)).$$

Bemerkungen.

(1) Falls $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar ist und $f'' \geq 0$ gilt, so ist f konvex. Siehe dazu Serie 8.

(2) Nicht jede konvexe Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar.

Beispiel. Betrachte die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto |x|, \end{aligned}$$

siehe Abbildung IV.2. Diese Funktion f ist konvex, aber im Nullpunkt nicht differenzierbar. Aber f ist stetig.

Behauptung. *Jede konvexe Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig.*

Beweisskizze. Sei $x \in \mathbb{R}$. Betrachte die Geraden g durch $(x, f(x))$ und $(x-1, f(x-1))$ und h durch $(x, f(x))$ und $(x+1, f(x+1))$. Dann liegt der Funktionsgraph von f über dem Intervall $[x-1, x+1]$ zwischen g und h, siehe Abbildung IV.11. Das liegt daran, dass bei der Postulation eines beliebigen Punktes ausserhalb der grauen Region eine Sehne auftaucht, die über dem Funktionsgraph von f liegt. Es folgt, dass

$$\lim_{q \to x} f(q) = f(x),$$

das heisst f ist stetig in x. $\square$

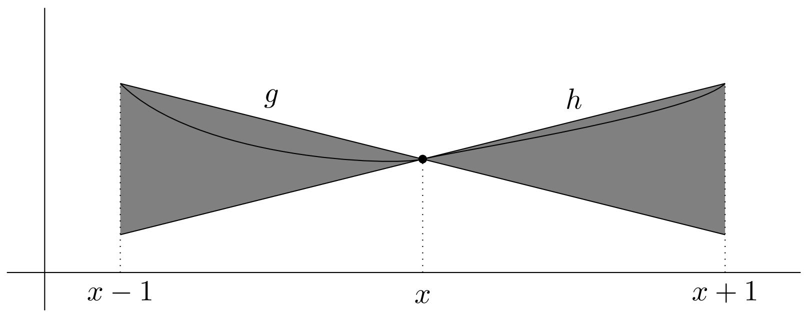

Abbildung IV.11: Konvexe Funktionen sind stetig

Mit einer Variation vom obigen Argument lässt sich zeigen, dass konvexe Funktionen differenzierbar in allen bis auf abzählbar vielen Punkten sind.

4 Der Umkehrsatz

Frage. Sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $p \in (a,b)$ mit $f'(p) > 0$. Existiert $\delta > 0$, so dass $f|_{(p-\delta, p+\delta)}\colon (p-\delta, p+\delta)$ streng monoton wachsend ist?

In Korollar 2 haben wir das nicht bewiesen, da wir dort stetige Differenzierbarkeit gefordert haben. Tatsächlich ist die Antwort nein.

Beispiel. Betrachte zunächst die Funktion

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } x = 0, \\ x^2 \cdot \sin(1/x), & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Es gilt

$$g'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h\to 0} h \cdot \sin(1/h) = 0,$$

da $|\sin(1/h)| \leq 1$ gilt. Für $x \neq 0$ gilt

$$g'(x) = 2x \cdot \sin(1/x) + x^2 \cdot \cos(1/x) \cdot (-1/x^2) = 2x \cdot \sin(1/x) - \cos(1/x).$$

Insbesondere gilt für alle $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \neq 0$, dass

$$g'(1/2\pi n) = -1.$$

Betrachte nun

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x + 2g(x). \end{aligned}$$

Dann ist f differenzierbar und es gilt

$$f'(0) = 1 + g'(0) = 1$$

und

$$f'(1/2\pi n) = 1 + 2 \cdot g'(1/2\pi n) = -1$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \neq 0$. Insbesondere existiert keine offene Umgebung von $p = 0$ in welcher f monoton wachsend ist, obwohl $f'(0) = 1$. Das Problem hier ist, dass f' an der Stelle $p = 0$ nicht stetig ist.

Umkehrsatz. *Sei $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $p \in (a, b)$ mit $f'(p) > 0$. Dann existiert $\delta > 0$ so, dass die Einschränkung $f|_{(p-\delta,p+\delta)}\colon (p-\delta, p+\delta) \to (f(p-\delta), f(p+\delta))$ injektiv und die Umkehrfunktion $g = f|_{(p-\delta,p+\delta)}^{-1}$ differenzierbar ist und fűr alle $q \in (f(p - \delta), f(p + \delta))$ die Bedingung*

$$g'(q) = \frac{1}{f'(g(q))}$$

erfüllt.

Bemerkung. Es ist wichtig, dass f stetig differenzierbar ist. Die Funktion $f(x) = x+2x^2 \sin(1/x)$ erfüllt $f'(0) = 1$, aber f ist in keiner offenen Umgebung von 0 umkehrbar, siehe obiges Beispiel.

Beweis. Wähle $\delta > 0$ so, dass

(i) $[p - \delta, p + \delta] \subset (a, b)$,

(ii) fűr alle $q \in (p - \delta, p + \delta)$ gilt

$$|f'(q) - f'(p)| \leq \frac{f'(p)}{2}.$$

Insbesondere gilt für alle $q \in (p - \delta, p + \delta)$, dass

$$f'(q) \geq \frac{f'(q)}{2} > 0.$$

Nach dem Mittelwertsatz ist f auf dem Intervall $(p-\delta, p+\delta)$ streng monoton wachsend, also injektiv. Nach dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen nimmt f auf dem Intervall $(p-\delta, p+-\delta)$ jeden Wert zwischen $f(p-\delta)$ und $f(p+\delta)$ an. Daraus folgt, dass die Einschränkung $f|_{(p-\delta,p+\delta)} \colon (p - \delta, p + \delta) \to (c, d)$, wobei $c = f(p - \delta)$ und $d = f(p + \delta)$, bijektiv ist.

Sei $g = f|^{-1}_{(p-\delta,p+\delta)}$ die Umkehrfunktion. Zu zeigen ist, dass g differenzierbar ist. Sei dazu $q \in (c, d)$ und $h \in \mathbb{R}$ so dass $q + h \in (c, d)$. Setze $\tilde{q} = g(q) \in (p - \delta, p + \delta)$ und $\tilde{h} = g(q + h) - g(q)$. Mit dieser Wahl gilt, dass

$$f(\tilde{q}) = f(g(q)) = q$$

und

$$f(\tilde{q} + \tilde{h}) = f(g(q + h)) = q + h.$$

Nach dem Mittelwertsatz existiert $t \in (\tilde{q}, \tilde{q} + \tilde{h})$ mit

$$h = f(\tilde{q} + \tilde{h}) - f(\tilde{q}) = f'(t) \cdot \tilde{h}.$$

Berechne nun

$$\frac{g(q + h) - g(q)}{h} = \frac{\tilde{h}}{h} = \frac{\tilde{h}}{f(\tilde{q} + \tilde{h}) - f(\tilde{q})} = \frac{1}{f'(t)}.$$

Bemerke, dass für $t \in (\tilde{q}, \tilde{q} + \tilde{h}) \subset (p - \delta, p + \delta)$ gilt, dass $f'(t) \geq f'(p)/2 > 0$, also ist $1/f'(t)$ definiert. Im Grenzűbergang $h \to 0$ erhalten wir

$$\lim_{h\to 0} \tilde{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{f'(t)} = 0,$$

da $f'(t) \geq f'(p)/2$, und somit folgt

$$\lim_{h\to 0} t = \tilde{q},$$

da $t \in (\tilde{q}, \tilde{q} + \tilde{h})$. Wir folgern, dass

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(q+h) - g(q)}{h} = \frac{1}{f'(\tilde{q})} = \frac{1}{f'(g(q))}.$$

Also ist g im Punkt $q \in (f(p-\delta), f(p+\delta))$ differenzierbar und es gilt wie gefordert $g'(q) = 1/f'(g(q))$. $\square$

Beispiele.

(1) Betrachte $f = \exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$. Wir bemerken, dass f stetig differenzierbar ist, da $f' = f$. Weiterhin gilt für alle $x \in \mathbb{R}$, dass $f'(x) = e^x > 0$, also ist die Umkehrfunktion $g = \log$ auf $\mathbb{R}_{>0}$ differenzierbar ist mit

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{f(g(x))} = \frac{1}{x}.$$

Für $x > 0$ gilt also

$$\log'(x) = 1/x.$$

(2) Betrachte die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}_{>0} &\to \mathbb{R}_{>0} \\ x &\mapsto x^2. \end{aligned}$$

Dann gilt $g(x) = \sqrt{x}$. Bemerke, dass $f'(x) = 2x$ stetig ist. Weiterhin gilt für alle $x > 0$, dass $f'(x) = 2x > 0$. Also ist g im Punkt x^2 differenzierbar, also auf ganz $\mathbb{R}_{>0}$. Für alle $x > 0$ gilt

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Zusammengefasst erhalten wir

$$\sqrt{x}' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Winkelfunktionen

Wir erinnern uns an die geometrische Überlegung, dass die Sinusfunktion sin an der Stelle $x = 0$ differenzierbar ist mit $\sin(0) = 1$. Weiter gilt nach dem Satz von Pythagoras für alle $x \in \mathbb{R}$, dass

$$(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 = 1,$$

also

$$\cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)}.$$

Gemäss Beispiel (2) und der Kettenregel ist cos an der Stelle $x = 0$ differenzierbar und es gilt

$$\cos'(0) = \frac{1}{2\sqrt{1 - \sin(0)}} \cdot (-2 \cdot \sin(0) \cdot \sin'(0)) = 0.$$

Frage. Sind sin und cos auch an Stellen $x \neq 0$ differenzierbar?

Die Antwort ist ja. Verwende dazu das Additionstheorem

$$\sin(x+y) = \sin(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \sin(y)$$

um zu zeigen, dass

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} &= \frac{\sin(x) \cdot \cos(h) + \cos(x) \cdot \sin(h) - \sin(x)}{h} \\ &= \sin(x) \cdot \frac{\cos(h) - \cos(0)}{h} + \cos(x) \cdot \frac{\sin(h) - \sin(0)}{h}.\end{aligned}$$

Es folgt, dass

$$\sin'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \sin(x) \cdot \cos'(0) + \cos(x) \cdot \sin'(0),$$

also

$$\sin'(x) = \cos x$$

und ebenso

$$\cos'(x) = -\sin(x).$$

Um das Additionstheorem, das wir verwendet haben, zu beweisen, betrachte die Drehungen D_x, D_y, D_{x+y} um den Nullpunkt in $\mathbb{R}^2$ mit Winkeln $x, y, x+y$. Es gilt $D_{x+y} = D_x \circ D_y$, also folgt

$$\begin{pmatrix} \cos(x+y) & -\sin(x+y) \\ \sin(x+y) & \cos(x+y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(y) & -\sin(y) \\ \sin(y) & \cos(y) \end{pmatrix}.$$

Die gesuchte Formel steht dann in einer Komponente der resultierenden Matrizen.

Kapitel V

Das Riemannsche Integral

Das Riemannsche Integrals wurde vom Schüler Bernhard Riemann (1826–1866) von Gauss eingeführt.

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f' = 0$ (die Nullfunktion). Dann ist f konstant (was wir bereits mithilfe des Mittelwertsatz gezeigt haben). Daraus können wir folgendes schliessen. Seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f' = g'$, das heisst, für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f'(x) = g'(x)$. Dann ist $f - g$ konstant. Wir folgern, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch ihre Ableitung $f'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und einen Wert $f(0)$ determiniert ist.

Frage. Wie bestimmen wir f aus f' und $f(0)$?

Spezialfall. Sei f affin. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$, dass

$$f(x) = f(0) + x \cdot f'(0).$$

Dies gilt im allgemeinen nicht: wir verwenden hier, dass f affin ist. Aber immerhin ist für kleine $|h|$ der Ausdruck $f(x) + h \cdot f'(x)$ eine gute Approximation von $f(x + h)$.

Dies führt zu der Überlegung, dass für beliebige Funktionen der Ausdruck

$$f(x) = f(0) + (f(x/N) - f(0)) + (f(2x/N) - f(x/N)) + \cdot + (f(x) - f((N-1)x/N))$$

zu einer Approximation von f aus f' führen könnte. Für grosse N sollte nämlich

$$f(x) - f(0) \approx \sum_{k=0}^{N-1} \frac{x}{N} \cdot f'(k \cdot x/N)$$

eine gute Approximation sein, wobei hier das Symbol $\approx$ für ein saloppes "ungefähr" steht. Im Grenzübergang erhalten wir das Integral

$$\int_0^x f'(t)\,dt = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{x}{N} f'(k \cdot x/N).$$

Nun definieren wir dieses Integral formal.

1 Die Definition des Riemannschen Integrals

Definition. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Eine *Partition* des Intervalls $[a, b]$ ist eine Unterteilung in endlich viele Teilintervalle der Form $I_k = [x_k, x_{k+1}]$ mit

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Wir notieren diese Partition als $P = [x_0, x_1, \ldots, x_n]$.

Sei nun $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ von oben und unten beschränkt und P eine Partition von $[a, b]$. Definiere die korrespondierende *Obersumme* durch

$$\overline{S}_P(f) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \cdot \sup \{f(x) \mid x \in I_k\}$$

und die korrespondierende *Untersumme* durch

$$\underline{S}_P(f) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \cdot \inf \{f(x) \mid x \in I_k\},$$

siehe Abbildung V.1.

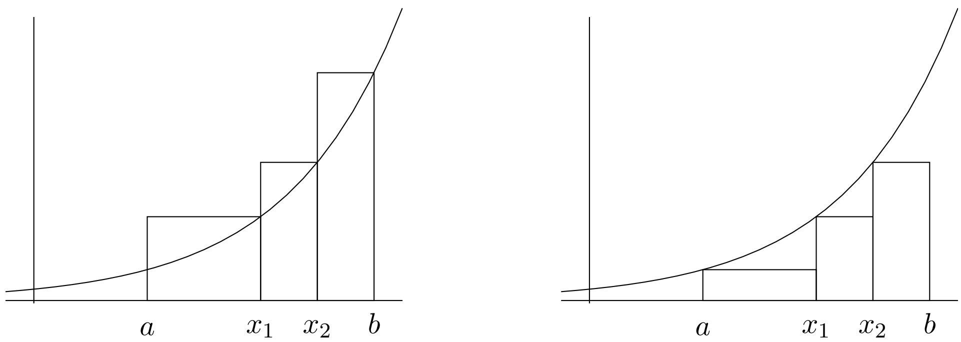

Abbildung V.1: Obersumme und Untersumme

Lemma. *Seien P_1 und P_2 Partitionen von $[a, b]$. Dann gilt $\underline{S}_{P_1} \leq \overline{S}_{P_2}$. In anderen Worten sind alle Untersummen kleiner als alle Obersummen.*

Beweis. Schreibe $P_1 = [x_0, x_1, \ldots, x_n]$ und $P_2 = [y_0, y_1, \ldots, y_m]$. Wähle eine Partition Q von $[a, b]$, welche alle x_i und y_j enthält, eine sogenannte *gemeinsame Verfeinerung* von P_1 und P_2. Dann gilt

$$\underline{S}_{P_1} \leq \underline{S}_Q \leq \overline{S}_Q \leq \overline{S}_{P_2}.$$

Dass die Untersummen beim Verfeinern grösser und die Obersummen kleiner werden, ist eine kleine Übung. □

Definition. Eine beschränkte Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ heisst *Riemann-integrierbar*, falls

$$\sup_P \underline{S}_P(f) = \inf_Q \overline{S}_Q(f)$$

gilt, wobei P und Q alle Partitionen von $[a,b]$ durchlaufen. Diese Zahl heisst dann *Riemann-Integral* von f über $[a,b]$ und wird mit

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

notiert.

Beispiele.

(1) Betrachte die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon [0,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases} \end{aligned}$$

Für alle Partitionen P von $[0,1]$ gilt

$$\overline{S}_P(f) = 1$$

und

$$\underline{S}_P(f) = 0.$$

Also ist f nicht Riemann-integrierbar.

(2) Betrachte die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon [-1,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x \leq 0, \\ 1 & \text{falls } x > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Betrachte die Partition $P = [-1, 0, 1/N, 1]$. Es gilt

$$\overline{S}_P(f) = 1$$

und

$$\underline{S}_P(f) = 1 - 1/N.$$

Somit folgt $\overline{S}_P - \underline{S}_P = 1/N$, also ist f Riemann-integrierbar und es gilt

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 1.$$

Theorem 1. *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f Riemann-integrierbar.*

Beweis. Da $[a,b]$ kompakt ist, impliziert die Stetigkeit von f sogar *gleichmässige Stetigkeit* auf $[0,1]$: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$ so, dass für alle $p, q \in [a,b]$ mit $|q-p| \leq \delta$ gilt, dass $|f(q) - f(p)| \leq \varepsilon$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{b-a}{N} \leq \delta.$$

Betrachte die Partition

$$P = \left[a, a + \frac{b-a}{N}, a + 2\frac{b-a}{N}, \dots, b\right].$$

Für diese gilt

$$\begin{aligned} \overline{S}_P(f) - \underline{S}_P(f) &\leq \sum_{k=0}^{N-1} \frac{b-a}{N} \cdot \varepsilon \\ & N\frac{b-a}{\varepsilon} \\ &= \varepsilon \cdot (b-a). \end{aligned}$$

Wir folgern, dass die Differenz $\overline{S}_P(f) - \underline{S}_P(f)$ beliebig kleine Werte annehmen kann. Insbesondere gilt, dass

$$\lim_{N\to\infty} \overline{S}_P(f) - \underline{S}_P(f) = 0.$$

Folglich ist f Riemann-integrierbar. □

Beispiel. Betrachte die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon [0,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^n \end{aligned}$$

für $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Betrachte die Partition

$$P = [0, 1/N, 2/N, \dots, 1].$$

Es gilt:

$$\overline{S}_P(f) = \frac{1}{N} \cdot \left(\left(\frac{1}{N}\right)^n + \dots + \left(\frac{N}{N}\right)^n\right)$$

und

$$\underline{S}_P(f) = \frac{1}{N} \cdot \left(0 + \left(\frac{1}{N}\right)^n + \dots + \left(\frac{N-1}{N}\right)^n\right).$$

Also folgt

$$\lim_{N\to\infty} \overline{S}_P(f) - \underline{S}_P(f) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} = 0,$$

was wir auch aus Theorem 1 schliessen konnten. Wir wissen aber immer noch nicht, was das Integral

$$I = \int_0^1 x^n \, dx$$

für einen Wert hat.

Geometrische Interpretation. Das Integral

$$\int_a^b f(x) \, dx$$

ist der Flächeninhalt zwischen der x-Achse und dessen Funktionsgraph zwischen a und b mit Gewichtung wie in Abbildung V.2. Wir werden dies als Definition des Wortes *Flächeninhalt* auffassen.

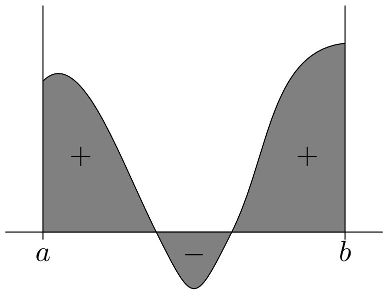

Abbildung V.2: Die Vorzeichen der Flächen

Bemerkung. Stetigkeit in allen Punkten von $[a, b]$ ist nicht notwendig: Es gibt unstetige Funktionen, die Riemann-integrierbar sind.

Beispiele.

(i) Die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon [-1,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 0 & x \le 0, \\ 1 & x > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

ist nicht stetig, aber dennoch Riemann-integrierbar.

(ii) Die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon [0,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1/x & x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

ist unbeschränkt und deshalb nicht Riemann-integrierbar. Für alle Partitionen P von $[0, 1]$ gilt $\overline{S}_P(f) = +\infty$. Dieses Phänomen ist der Grund dafür, dass wir Beschränktheit von f fordern.

Integrabilitätskriterium von Lebesgue

Henri Lebesgue (1875–1941) war ein Französischer Mathematiker. Sein Integrabilitätskriterium charakterisiert die Riemann-integrierbaren Funktionen, im Gegensatz zu Theorem 1, was nur eine hinreichende Bedingung darstellt.

Definition. Eine Teilmenge $\Delta \subset \mathbb{R}$ heisst *Lebesgue Nullmenge*, falls für alle $\varepsilon > 0$ abzählbar viele offene Intervalle

$$I_k = (a_k, b_k)$$

mit $k \in \mathbb{N}$ existieren, so dass

$$\Delta \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} I_k$$

und

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k - a_k \leq \varepsilon.$$

Beispiel. Sei $\Delta = \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wähle eine Bijektion $q \colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ und schreibe $q_k = q(k)$ für $k \in \mathbb{N}$. Setze

$$a_k = q_k - \frac{\varepsilon}{4} \cdot \frac{1}{2^k}$$

und

$$b_k = q_k + \frac{\varepsilon}{4} \cdot \frac{1}{2^k}.$$

Es gilt $q_k \in (a_k, b_k)$ und

$$b_k - a_k = \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.$$

Es folgt, dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k - a_k = \varepsilon \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = \varepsilon.$$

Wir haben also $\mathbb{Q}$ abgedeckt mit Intervallen, deren Gesamtlänge kleiner als ε ist. Also ist $\mathbb{Q}$ (und, mit dem selben Beweis, jede abzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}$) eine Lebesgue Nullmenge.

Theorem 2 (Lebesgue 1901)**.** *Sei $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(i) *f ist Riemann-integrierbar,*

(ii) *f ist beschränkt und beschränkt und die Menge Δ der Unstetigkeitsstellen von f ist eine Lebesgue Nullmenge.*

Beweis. Siehe zum Beispiel Abschnitt 84 in [1]. □

In anderen Vorlesungen, zum Beispiel Analysis 3, wird der Begriff der Lebesgue-Integrabilität diskutiert. Mit dem Lebesgue-Integral sind sogar noch mehr Funktionen integrierbar.

Beispiel. Die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon [0,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1/q & \text{falls } x = p/q \in \mathbb{Q} \text{ gekürzt ist,} \\ 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus Q \end{cases} \end{aligned}$$

ist beschränkt und auf $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ stetig, also Riemann-integrierbar. In den Übungen wird das "zu Fuss" mit der Definition des Riemann-Integrals gezeigt.

Elementare Eigenschaften des Riemann-Integrals

Notation. Die Menge $R[a,b]$ ist definiert als die Menge aller Riemann-integrierbaren Funktionen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$.

Wir stellen fest:

(i) $R[a,b]$ ist ein reeller Vektorraum.

(ii) die Abbildung

$$\begin{aligned} \int\colon R[a,b] &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto \int_a^b f(x)\,dx \end{aligned}$$

ist linear.

Konkret heisst das folgendes.

(i) Seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist $f + \lambda g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ auch Riemann-integrierbar.

(ii) Die Gleichung

$$\int_a^b f(x) + \lambda g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \lambda \cdot \int_a^b g(x)\,dx$$

ist für alle Riemann-integrierbaren $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ erfüllt.

Bemerkung. Der Vektorraum $R[a,b]$ ist unendlichdimensional, da die Funktionen

$$x \mapsto x^k$$

linear unabhängig sind.

An dieser Stelle halten wir ausserdem fest, dass für alle $c \in [a,b]$ und alle Riemann-integrierbaren $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ gilt, dass

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

2 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Definition. Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Eine differenzierbare Funktion $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist eine *Stammfunktion* von f, falls für alle $x \in [a,b]$ gilt, dass $F'(x) = f(x)$. Hier einigen wir uns auf die Konvention, dass Differenzierbarkeit im Punkt a bedeutet, dass der Grenzwert

$$F'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{F(a+|h|) - F(a)}{|h|} \in \mathbb{R}$$

existiert. Ähnlich heisst Differenzierbarkeit im Punkt b, dass der Grenzwert

$$F'(b) = \lim_{h\to 0} \frac{F(b-|h|) - F(b)}{-|h|}$$

existiert.

Theorem 3. *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist die Funktion*

$$\begin{aligned} F\colon [a,b] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_a^x f(t)\,dt \end{aligned}$$

eine Stammfunktion von f.

Beweis. Sei $p \in [a,b]$ und $h \in \mathbb{R}$ mit $p+h \in [a,b]$. Wir leiten nun eine Dreigliedentwicklung für F bei p her. Berechne

$$\begin{aligned} F(p+h) &= \int_a^{p+h} f(t)\,dt \\ &= \int_a^{p} f(t)\,dt + \int_p^{p+h} f(t)\,dt. \end{aligned}$$

Schreibe

$$\int_p^{p+h} f(t)\,dt = \int_p^{p+h} f(p)\,dt + \int_p^{p+h} f(t) - f(p)\,dt.$$

Bemerke, dass

$$\int_p^{p+h} f(p)\,dt = h \cdot f(p).$$

Setzen wir

$$(RF)_p(h) = \int_p^{p+h} f(t) - f(p)\,dt,$$

so gilt

$$F(p+h) = F(p) + h \cdot f(p) + (RF)_p(h).$$

Wir zeigen nun, dass $(RF)_p(h)$ relativ klein in $|h|$ ist. Sei dazu $\varepsilon > 0$ vorgegebn. Wähle $\delta > 0$ so, dass für alle $t \in [a, b]$ mit $|t - p| \leq \delta$ gilt, dass $|f(t) - f(p)| \leq \varepsilon$. Dann gilt für $h \in \mathbb{R}$ mit $|h| \leq \delta$, dass

$$\begin{aligned} |(RF)_p(h)| &= \left| \int_p^{p+h} f(t) - f(p) \, dt \right| \\ &\leq |h| \cdot \varepsilon, \end{aligned}$$

da für alle Obersummen gilt, da alle Partitionen die Bedingungen $\overline{S}_P(f|_{[p,p+h]}) \leq |h| \cdot \varepsilon$ und $\underline{S}_P(f|_{[p,p+h]}) \geq -\varepsilon \cdot h$ erfüllen. Wir schliessen, dass der Restterm $(RF)_p(h)$ relativ klein in $|h|$ ist. Also ist F differenzierbar im Punkt p mit

$$(DF)_p(h) = h \cdot f(p),$$

also gilt $F'(p) = f(p)$. □

Anwendung. Sei $U \subset \mathbb{R}$ offen und $g \colon U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Sei $[a, b] \subset U$. Dann gilt

$$\int_a^b g'(t) \, dt = g(b) - g(a).$$

Beweis. Betrachte die Funktion

$$\begin{aligned} G \colon [a, b] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_a^x g'(t) \, dt. \end{aligned}$$

Nach Theorem 3 ist G differenzierbar und $G'(x) = g'(x)$, das heisst $G - g$ ist auf $[a, b]$ konstant (nach dem Mittelwertsatz). Es existiert somit $c \in \mathbb{R}$ mit $G(x) = g(x) + c$. Setzen wir $x = a$ ein, so erhalten wir

$$G(a) = \int_a^a g'(t) \, dt = 0,$$

also gilt $c = -g(a)$. Wir schliessen, dass

$$\int_a^b g(t) \, dx = G(b) = g(b) - g(a).$$ □

Beispiel. Es gilt

$$\int_a^b x^n \, dx = \frac{1}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1})$$

für $n \in \mathbb{N}$, da die Funktion

$$\begin{aligned} G \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

eine Stammfunktion von

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^n \end{aligned}$$

ist. Der Spezialfall

$$\int_0^1 x^n \, dx = \frac{1}{n+1}$$

beschreibt nun das Integral, das wir nach dem Beweis von Theorem 1 noch nicht berechnen konnten.

Literaturverzeichnis

[1] H. Heuser. *Lehrbuch der Analysis.* Mathematische Leitfäden. Vieweg+Teubner Verlag, 2009.