Analysis I

Sebastian Baader

Herbstsemester 2020

Über dieses Dokument

Diese Vorlesungsnotizen werden in Echtzeit während der Vorlesung mitgeschrieben und werden deshalb viele Fehler enthalten. Ihr dürft mir diese und andere Verbesserungsvorschläge gerne zukommen lassen, am liebsten via GitHub auf dem Repository

`https://github.com/raw-bacon/ana1-notes`,

oder via E-Mail an `levi.ryffel@math.unibe.ch`.

Inhaltsverzeichnis

I Konstruktion der Reellen Zahlen **3**

1 Historische Motivation 3

2 Mengen im Vergleich 5

II Folgen und Reihen **9**

III Stetige Funktionen **10**

IV Differenzierbare Funktionen **11**

V Differentialrechnung **12**

VI Riemann Integral **13**

VII Funktionenfolgen **14**

Kapitel I

Konstruktion der Reellen Zahlen

1 Historische Motivation

In der Antike war Mathematik praktisch synonym mit Geometrie. Der Zahlenbegriff war direkt an das Konzept der *Länge* gekoppelt.

Definition (Euklid, 300 vor Christus)**.** Zwei Längen $a, b > 0$ heissen *kommensurabel*, falls eine Länge $L > 0$ existiert, so wie zwei natürliche Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$, so dass $a = mL$ und $b = nL$.

Hier ist
$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$
die Menge der Natürlichen Zahlen.

Satz (Euklid)**.** *Die Seite und Diagonale eines ebenen Quadrats sind nicht kommensurabel.*

Beweis. Dieser Beweis ist geometrisch, nach Euklid. Wir nehmen an, es gäbe $L > 0$ und $m, n \in \mathbb{N}$ mit $x = mL$ und $d = nL$. Wir zeigen, dass das zu einem Widerspruch führt. Wir stellen fest, dass die Längen $x_1 = d - x$ und $d_1 = 2x - d$ ebenfalls die Seite und Diagonale eines Quadrats bilden, siehe Abbildung I.1.

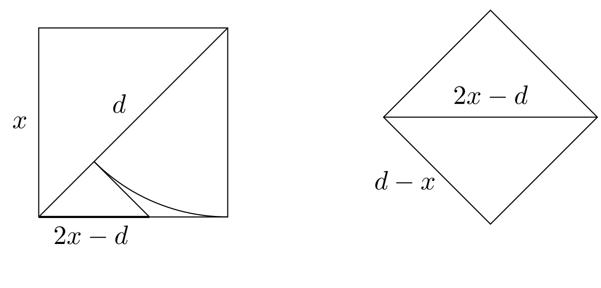

Abbildung I.1: Euklids Konstruktoin

Weiterhin gilt, dass sowohl x_1 als auch d_1, ganze Vielfache von L sind:

$$x_1 = d - x = (n - m)L$$
$$d_1 = 2x - d = (2m - n)L$$

Nach Pythagoras gilt $d^2 = 2x^2$, und somit $d \leq 3/2 \cdot x$, da $(3/2)^2 > 2$. Daraus folgt, dass

$$x_1 = d - x \leq \frac{1}{2} \cdot x.$$

Iteriere dieses Verfahren und erhalte eine Serie von Quadraten mit Seiten $x_2, x_3, \ldots$ und Diagonalen $d_2, d_3, \ldots$. Es gilt:

$$x_k \leq \frac{1}{2^k} \cdot x.$$

Ausserdem ist jedes x_k (und d_k) ein ganzes Vielfaches von L. Wähle nun k so gross, dass

$$x_k \leq \frac{1}{2^k} x < L.$$

Dies impliziert, dass $x_k = 0$, was unmöglich ist. Deshalb können x und d nicht kommensurabel sein. □

Wir haben diese Aussage mit einem sogenannten *Widerspruchsbeweis* bewiesen. Hierfür haben wir eine Annahme getroffen, und diese zu einem Widerspruch geführt. Dies zeigt, dass unsere Annahme falsch war.

Zeitgenössische Umformulierung

Seien $a, b > 0$ zwei kommensurable Längen. Das heisst, es existieren $L > 0$ und $m, n \in \mathbb{N}$ mit $a = mL$, $b = nL$. Dann gilt:

$$\frac{a}{b} = \frac{mL}{nL} = \frac{m}{n},$$

das heisst das Verhältnis a/b ist eine *rationale Zahl.* Zurück zum Quadrat mit Seite x und Diagonale d. Nach Pythagoras gilt $d^2 = 2x^2$. Falls $x = mL$ und $d = nL$ gilt, dann also

$$2 = \frac{d^2}{x^2} = \left(\frac{d}{x}\right)^2 = \left(\frac{n}{m}\right)^2,$$

und somit

$$2m^2 = n^2.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist durch 2 teilbar. Dies impliziert, dass n^2, und somit auch n, durch 2 teilbar ist. Schreibe nun $n = 2k$. Schreibe $n = 2k$ mit $k \in \mathbb{N}$. Setze ein und erhalte $2m^2 = (2k)^2 = 4k^2$, beziehungsweise

$$m^2 = 2k^2.$$

Die rechte Seite ist durch 2 teilbar, also auch m. Wir schliessen, dass sowohl n als auch m durch 2 teilbar sind. Schreibe noch $m = 2\ell$ mit $\ell \in \mathbb{N}$. Es gilt also

$$2 = \left(\frac{n}{m}\right)^2 = \left(\frac{k}{\ell}\right)^2.$$

In anderen Worten sind Zähler und Nenner beide gerade. Iteriere dieses Verfahren k mal, bis $n/2^k < 1$, Dann entsteht ein Widerspruch.

Korollar. *Die Gleichung $z^2 = 2$ hat keine rationale Lösung, das heisst, keine Lösung der Form $z = p/q$ mit $p, q \in \mathbb{N}$ und $q > 0$.*

Das Ziel für den Rest dieses Kapitels ist es, eine Zahlenmenge $\mathbb{R}$ (die Menge der *reellen Zahlen*) zu konstruieren, in welcher die Gleichung $z^2 = 2$ eine Lösung hat.

Übung. Die Gleichung $z = \sqrt{2}x + \sqrt{3}y$ hat keine ganze Lösungen ausser $(0,0,0)$.

2 Mengen im Vergleich

Wir haben bereits einige Mengen erwähnt, nämlich die *natürlichen Zahlen*

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\},$$

die Menge der *ganzen Zahlen*,

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\},$$

und die Menge der *rationalen Zahlen*

$$\mathbb{Q} = \{p/q \mid p, q \in \mathbb{Z},\ q > 0\}.$$

Wir wollen eine weitere Menge, die Menge $\mathbb{R}$ der *reellen Zahlen* einführen. Es gelten dann die Inklusionen

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Wichtige Grundbegriffe

Definition. Seien A, B zwei Mengen. Eine Abbildung $f : A \to B$ heisst

(i) *injektiv*, falls für alle $a_2, a_1 \in A$ mit $a_2 \neq a_1$ gilt, dass $f(a_1) \neq f(a_2)$,

(ii) *surjektiv*, falls für alle $b \in B$ ein Element $a \in A$ existiert mit $f(a) = b$,

(iii) *bijektiv*, falls f sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Beispiel.

(i) Seien $A = B = \{0, 1\}$. Es gibt 4 Abbildungen $f : A \to B$:

   (a) $0 \mapsto 0$ und $1 \mapsto 0$,
   (b) $0 \mapsto 1$ und $1 \mapsto 1$,
   (c) $0 \mapsto 0$ und $1 \mapsto 1$,
   (d) $0 \mapsto 1$ und $1 \mapsto 0$.

   Abbildungen (a) und (b) sind weder injektiv noch surjektiv. Abbildungen (c) und (d) sind beide bijektiv.

(ii) Seien $A = B = \mathbb{N}$. Betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto 2n. \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist injektiv, aber nicht surjektiv. Die Abbildung

$$\begin{aligned} g : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto \frac{2n - 1 + (-1)^n}{4}, \end{aligned}$$

also die Abbildung die durch 2 dividiert und dann abrundet, ist nicht injektiv, aber surjektiv. Um zu sehen, dass $g(n) = \lfloor n/2 \rfloor$, betrachte zwei Fälle:

(a) $n = 2k$ ist gerade. Dann ist $g(n) = (4k + 1 - 1)/4 = k$.

(b) $n = 2k + 1$ ist ungerade. Dann ist $g(n) = (4k + 2 - 1 - 1)/4 = k$.

Bemerkung.

(1) Bijektive Abbildungen $f : A \to B$ haben eine eindeutige *Umkehrabbildung* $f^{-1} : B \to A$. Die Konstruktion dafür ist wie folgt. Sei $b \in B$. Da f surjektiv ist, existiert $a \in A$ mit $f(a) = b$. Da f injektiv ist, ist dieses a eindeutig. Setze $f^{-1}(b) = a$. Es gilt dann

$$f^{-1}(f(a)) = a$$

für alle $a \in A$, und ebenso

$$f(f^{-1}(b))$$

für alle $b \in B$. Wir schreiben häufig

$$\begin{aligned} f^{-1} \circ f &= \mathrm{Id}_A, \\ f \circ f^{-1} &= \mathrm{Id}_B, \end{aligned}$$

in Worten, "f^{-1} verknüpft mit f ist die Identitätsabbildung auf A" und ähnlich, "f verknüpft mit f^{-1} ist die Identitätsabbildung auf B"

(2) Für endliche Mengen A und B gilt: Es existiert eine bijektive Abbildung $f : A \to B$, genau dann, wenn A und B gleich viele Elemente haben.

Definition. Eine Menge A heisst

(i) *unendlich*, falls eine injektive, nicht surjektive Abbildung $f : A \to A$ existiert,

(ii) *abzählbar*, falls eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to A$ existiert.

Beispiel. Sei $A = \mathbb{N}$. Die Abbildung f aus Beispiel 2 (ii) ist injektiv, aber nicht surjektiv. Also ist $\mathbb{N}$ eine unendliche Menge.

Beispiel. Sei M eine Menge, welche $\mathbb{N}$ als Teilmenge enthält (zum Beispiel $M = \mathbb{Q}$). Dann ist M unendlich. Betrachte dazu die Abbildung

$$\begin{aligned} f : M &\to M \\ x &\mapsto \begin{cases} x + 1 & \text{falls } x \in \mathbb{N} \subset M, \\ x & \text{falls } x \in M \setminus \mathbb{N} \end{cases} \end{aligned}$$

Folgende Proposition zeigt in einem gewissen Sinn, dass es gleich viele Brüche wie natürliche Zahlen gibt.

Proposition (1). *Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist abzählbar.*

Beweis. Konstruiere eine Bijektion $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$. Für $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 1$ definiere

$$A_k = \{p/q \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \geq 1, p/q \text{ ist gekürzt}, |p| + |q| = k\}.$$

Alle solchen $A_k \subset \mathbb{Q}$ sind endlich und

$$\mathbb{Q} = \dot{\bigcup_{k\geq 1}} A_k$$

ist die *disjunkte Vereinigung* dieser Mengen. Wir haben

$$A_1 = \{0/1\},\ A_2 = \{\pm 1/1\},\ A_3 = \{\pm 1/2, \pm 2/1\}, \ldots$$

Sei $a_k = |A_k|$ die Anzahl der Elemente in A_k. Definiere Teilmengen $B_k \subset \mathbb{N}$ mit $|B_k| = a_k$. Dazu setze $B_1 = \{0\}$, und für $k \geq 2$ setze

$$B_k = \{a_1 + \cdots + a_{k-1}, a_1 + \cdots + a_{k-1} + 1, \ldots, a_1 + \cdots + a_{k-1} + a_k - 1\}.$$

Es gilt dann

$$B_1 = \{0\},\ B_2 = \{1, 2\},\ B_3 = \{3, 4, 5, 6\}, \ldots.$$

Wähle eine Bijektion $\varphi_k : B_k \to A_k$ für alle $k \geq 1$. Definiere nun

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{N} &\to \mathbb{Q} \\ n &\mapsto \varphi_k(n) \text{ falls } n \in B_k. \end{aligned}$$

Die Abbildung φ ist eine Bijektion, da $\mathbb{N}$ die disjunkte Vereinigung der B_k und $\mathbb{Q}$ die disjunkte Vereinigung der A_k ist. □

Dieser Beweis zeigt allgemeiner, dass jede Menge, die eine abzählbare Vereinigung endlicher Mengen ist, selber abzählbar ist. Man könnte diese Aussage für Aufgabe 5 auf Serie 1 verwenden.

Frage. Ist jede unendliche Menge abzählbar?

Georg Cantor hat ca. 1870 als erste Person die Antwort "nein" auf diese Frage festgehalten. Dies wurde allerdings erst nach dem Krieg publiziert. Wir konstruieren nun eine Menge, die nicht abzählbar ist. Dazu betrachten wir die *Potenzmenge* $P(M)$ einer Menge M, definiert als die "Menge aller Teilmengen von M". Ein wenig formaler,

$$P(M) = \{A \mid A \subset M\}.$$

Beispiel. Sei $M = \{0, 1\}$. Dann ist

$$P(M) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}\{0, 1\}\}.$$

Hier bedeutet $\varnothing$ die *leere Menge.*

Bemerkung. Falls die Menge M selbst n Elemente hat, dann hat ihre Potenzmenge 2^n Elemente. Hierzu fassen wir jede Teilmenge von M als Funktion $f : M \to \{0, 1\}$ auf, die den Wert 1 hat, falls die Menge das eingesetzte Element enthält, und 0 sonst.

Proposition 2. *Sei M eine beliebige Menge. Dann existiert keine surjektive Abbildung $\varphi : M \to P(M)$. Insbesondere existiert keine Bijektion $\varphi : M \to P(M)$.*

Korollar. *Die Potenzmenge $P(\mathbb{N})$ ist nicht abzählbar.*

Beweis der Proposition. Wir führen einen klassischen Widerspruchsbeweis. Wir nehmen an, es gäbe doch eine solche Surjektion $\varphi : M \to P(M)$. Betrachte nun die Teilmenge A von M aller x, die nicht in $\varphi(x)$ enthalten sind. In Symbolen,

$$A = \{x \in M \mid x \notin \varphi(x)\}$$

Die Forderung $x \notin \varphi(x)$ macht Sinn, da $\varphi(x)$ selbst eine Teilmenge von M ist. Da φ surjektiv ist, muss ein $a \in M$ existieren mit $\varphi(a) = A$. Wir fragen nun, ob $a \in A$ ist oder nicht. Wäre $a \in A$, so müsste nach Definition von A gelten, dass $a \notin \varphi(a)$. Aber das widerspricht der Definition von $\varphi(a) = A$. Wäre jedoch $a \notin A$, dann wäre die Bedingung $a \notin \varphi(a)$ erfüllt, also $a \in A$. Aber da $A = \varphi(a)$, widerspricht auch dies der Definition von A. Somit führen beide Möglichkeiten zu einem Widerspruch. Dies bedeutet, dass unsere ursprüngliche Annahme, dass eine Surjektion $\varphi : M \to P(M)$ existiert, verworfen werden muss: Es kann keine solche Abbildung geben. □

Einschub: Beweismethoden

Ein *Beweis* ist eine "Deduktion einer Aussage aus bereits bewiesenen Aussagen oder Grundaxiomen". Wichtig ist hier, dass die Deduktion logisch korrekt erfolgt. Typische Beweismethoden sind

- geometrisch, zum Beispiel mit Hilfe von Euklids Axiomen,
- mit Aussagenlogik, zum Beispiel Widerspruchsbeweise,
- kombinatorische, zum Beispiel vollständige Induktion.

Kapitel II

Folgen und Reihen

Kapitel III

Stetige Funktionen

Kapitel IV

Differenzierbare Funktionen

Kapitel V

Differentialrechnung

Kapitel VI

Riemann Integral

Kapitel VII

Funktionenfolgen