

# Analysis I

Sebastian Baader

Herbstsemester 2020

## Über dieses Dokument

Diese Vorlesungsnotizen werden in Echtzeit während der Vorlesung mitgeschrieben und werden deshalb viele Fehler enthalten. Ihr dürft mir diese und andere Verbesserungsvorschläge gerne zukommen lassen, am liebsten via GitHub auf dem Repository

`https://github.com/raw-bacon/anal-notes,`

oder via E-Mail an `levi.ryffel@math.unibe.ch`.

# Inhaltsverzeichnis

<b>I</b>	<b>Konstruktion der Reellen Zahlen</b>	<b>3</b>
1	Historische Motivation . . . . .	3
2	Mengen im Vergleich . . . . .	5
3	Gruppen und Körper . . . . .	9
<b>II</b>	<b>Folgen und Reihen</b>	<b>10</b>
<b>III</b>	<b>Stetige Funktionen</b>	<b>11</b>
<b>IV</b>	<b>Differenzierbare Funktionen</b>	<b>12</b>
<b>V</b>	<b>Differentialrechnung</b>	<b>13</b>
<b>VI</b>	<b>Riemann Integral</b>	<b>14</b>
<b>VII</b>	<b>Funktionenfolgen</b>	<b>15</b>

# Kapitel I

## Konstruktion der Reellen Zahlen

### 1 Historische Motivation

In der Antike war Mathematik praktisch synonym mit Geometrie. Der Zahlenbegriff war direkt an das Konzept der *Länge* gekoppelt.

**Definition** (Euklid, 300 vor Christus). Zwei Längen  $a, b > 0$  heissen *kommensurabel*, falls eine Länge  $L > 0$  existiert, so wie zwei natürliche Zahlen  $m, n \in \mathbb{N}$ , so dass  $a = mL$  und  $b = nL$ .

Hier ist

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

die Menge der Natürlichen Zahlen.

**Satz** (Euklid). *Die Seite und Diagonale eines ebenen Quadrats sind nicht kommensurabel.*

*Beweis.* Dieser Beweis ist geometrisch, nach Euklid. Wir nehmen an, es gäbe  $L > 0$  und  $m, n \in \mathbb{N}$  mit  $x = mL$  und  $d = nL$ . Wir zeigen, dass das zu einem Widerspruch führt. Wir stellen fest, dass die Längen  $x_1 = d - x$  und  $d_1 = 2x - d$  ebenfalls die Seite und Diagonale eines Quadrats bilden, siehe Abbildung I.1.

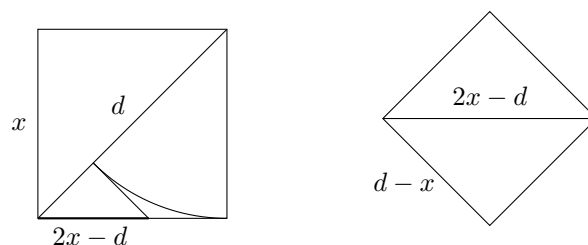


Abbildung I.1: Euklids Konstruktion

Weiterhin gilt, dass sowohl  $x_1$  als auch  $d_1$ , ganze Vielfache von  $L$  sind:

$$\begin{aligned}x_1 &= d - x = (n - m)L \\d_1 &= 2x - d = (2m - n)L\end{aligned}$$

Nach Pythagoras gilt  $d^2 = 2x^2$ , und somit  $d \leq 3/2 \cdot x$ , da  $(3/2)^2 > 2$ . Daraus folgt, dass

$$x_1 = d - x \leq \frac{1}{2} \cdot x.$$

Iteriere dieses Verfahren und erhalte eine Serie von Quadraten mit Seiten  $x_2, x_3, \dots$  und Diagonalen  $d_2, d_3, \dots$ . Es gilt:

$$x_k \leq \frac{1}{2^k} \cdot x.$$

Ausserdem ist jedes  $x_k$  (und  $d_k$ ) ein ganzes Vielfaches von  $L$ . Wähle nun  $k$  so gross, dass

$$x_k \leq \frac{1}{2^k} x < L.$$

Dies impliziert, dass  $x_k = 0$ , was unmöglich ist. Deshalb können  $x$  und  $d$  nicht kommensurabel sein.  $\square$

Wir haben diese Aussage mit einem sogenannten *Widerspruchsbeweis* bewiesen. Hierfür haben wir eine Annahme getroffen, und diese zu einem Widerspruch geführt. Dies zeigt, dass unsere Annahme falsch war.

## Zeitgenössische Umformulierung

Seien  $a, b > 0$  zwei kommensurable Längen. Das heisst, es existieren  $L > 0$  und  $m, n \in \mathbb{N}$  mit  $a = mL$ ,  $b = nL$ . Dann gilt:

$$\frac{a}{b} = \frac{mL}{nL} = \frac{m}{n},$$

das heisst das Verhältnis  $a/b$  ist eine *rationale Zahl*. Zurück zum Quadrat mit Seite  $x$  und Diagonale  $d$ . Nach Pythagoras gilt  $d^2 = 2x^2$ . Falls  $x = mL$  und  $d = nL$  gilt, dann also

$$2 = \frac{d^2}{x^2} = \left(\frac{d}{x}\right)^2 = \left(\frac{n}{m}\right)^2,$$

und somit

$$2m^2 = n^2.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist durch 2 teilbar. Dies impliziert, dass  $n^2$ , und somit auch  $n$ , durch 2 teilbar ist. Schreibe nun  $n = 2k$ . Schreibe  $n = 2k$  mit  $k \in \mathbb{N}$ . Setze ein und erhalte  $2m^2 = (2k)^2 = 4k^2$ , beziehungsweise

$$m^2 = 2k^2.$$

Die rechte Seite ist durch 2 teilbar, also auch  $m$ . Wir schliessen, dass sowohl  $n$  als auch  $m$  durch 2 teilbar sind. Schreibe noch  $m = 2\ell$  mit  $\ell \in \mathbb{N}$ . Es gilt also

$$2 = \left(\frac{n}{m}\right)^2 = \left(\frac{k}{\ell}\right)^2.$$

In anderen Worten sind Zähler und Nenner beide gerade. Iteriere dieses Verfahren  $k$  mal, bis  $n/2^k < 1$ , Dann entsteht ein Widerspruch.

**Korollar.** Die Gleichung  $z^2 = 2$  hat keine rationale Lösung, das heisst, keine Lösung der Form  $z = p/q$  mit  $p, q \in \mathbb{N}$  und  $q > 0$ .

Das Ziel für den Rest dieses Kapitels ist es, eine Zahlenmenge  $\mathbb{R}$  (die Menge der *reellen Zahlen*) zu konstruieren, in welcher die Gleichung  $z^2 = 2$  eine Lösung hat.

**Übung.** Die Gleichung  $z = \sqrt{2}x + \sqrt{3}y$  hat keine ganze Lösungen ausser  $(0, 0, 0)$ .

## 2 Mengen im Vergleich

Wir haben bereits einige Mengen erwähnt, nämlich die *natürlichen Zahlen*

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\},$$

die Menge der *ganzen Zahlen*,

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\},$$

und die Menge der *rationalen Zahlen*

$$\mathbb{Q} = \{p/q \mid p, q \in \mathbb{Z}, q > 0\}.$$

Wir wollen eine weitere Menge, die Menge  $\mathbb{R}$  der *reellen Zahlen* einführen. Es gelten dann die Inklusionen

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

### Wichtige Grundbegriffe

**Definition.** Seien  $A, B$  zwei Mengen. Eine Abbildung  $f: A \rightarrow B$  heisst

- (i) *injektiv*, falls für alle  $a_2, a_1 \in A$  mit  $a_2 \neq a_1$  gilt, dass  $f(a_1) \neq f(a_2)$ ,
- (ii) *surjektiv*, falls für alle  $b \in B$  ein Element  $a \in A$  existiert mit  $f(a) = b$ ,
- (iii) *bijektiv*, falls  $f$  sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

**Beispiel.**

- (i) Seien  $A = B = \{0, 1\}$ . Es gibt 4 Abbildungen  $f: A \rightarrow B$ :

- (a)  $0 \mapsto 0$  und  $1 \mapsto 0$ ,
- (b)  $0 \mapsto 1$  und  $1 \mapsto 1$ ,
- (c)  $0 \mapsto 0$  und  $1 \mapsto 1$ ,
- (d)  $0 \mapsto 1$  und  $1 \mapsto 0$ .

Abbildungen (a) und (b) sind weder injektiv noch surjektiv. Abbildungen (c) und (d) sind beide bijektiv.

- (ii) Seien  $A = B = \mathbb{N}$ . Betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} f: \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ n &\mapsto 2n. \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist injektiv, aber nicht surjektiv. Die Abbildung

$$g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$n \mapsto \frac{2n - 1 + (-1)^n}{4},$$

also die Abbildung die durch 2 dividiert und dann abrundet, ist nicht injektiv, aber surjektiv. Um zu sehen, dass  $g(n) = \lfloor n/2 \rfloor$ , betrachte zwei Fälle:

- (a)  $n = 2k$  ist gerade. Dann ist  $g(n) = (4k + 1 - 1)/4 = k$ .
- (b)  $n = 2k + 1$  ist ungerade. Dann ist  $g(n) = (4k + 2 - 1 - 1)/4 = k$ .

**Bemerkung.**

- (1) Bijektive Abbildungen  $f: A \rightarrow B$  haben eine eindeutige *Umkehrabbildung*  $f^{-1}: B \rightarrow A$ . Die Konstruktion dafür ist wie folgt. Sei  $b \in B$ . Da  $f$  surjektiv ist, existiert  $a \in A$  mit  $f(a) = b$ . Da  $f$  injektiv ist, ist dieses  $a$  eindeutig. Setze  $f^{-1}(b) = a$ . Es gilt dann

$$f^{-1}(f(a)) = a$$

für alle  $a \in A$ , und ebenso

$$f(f^{-1}(b))$$

für alle  $b \in B$ . Wir schreiben häufig

$$f^{-1} \circ f = \text{Id}_A,$$

$$f \circ f^{-1} = \text{Id}_B,$$

in Worten, “ $f^{-1}$  verknüpft mit  $f$  ist die Identitätsabbildung auf  $A$ ” und ähnlich, “ $f$  verknüpft mit  $f^{-1}$  ist die Identitätsabbildung auf  $B$ ”

- (2) Für endliche Mengen  $A$  und  $B$  gilt: Es existiert eine bijektive Abbildung  $f: A \rightarrow B$ , genau dann, wenn  $A$  und  $B$  gleich viele Elemente haben.

**Definition.** Eine Menge  $A$  heisst

- (i) *unendlich*, falls eine injektive, nicht surjektive Abbildung  $f: A \rightarrow A$  existiert,
- (ii) *abzählbar*, falls eine bijektive Abbildung  $f: \mathbb{N} \rightarrow A$  existiert.

**Beispiel.** Sei  $A = \mathbb{N}$ . Die Abbildung  $f$  aus Beispiel 2 (ii) ist injektiv, aber nicht surjektiv. Also ist  $\mathbb{N}$  eine unendliche Menge.

**Beispiel.** Sei  $M$  eine Menge, welche  $\mathbb{N}$  als Teilmenge enthält (zum Beispiel  $M = \mathbb{Q}$ ). Dann ist  $M$  unendlich. Betrachte dazu die Abbildung

$$f: M \rightarrow M$$

$$x \mapsto \begin{cases} x + 1 & \text{falls } x \in \mathbb{N} \subset M, \\ x & \text{falls } x \in M \setminus \mathbb{N} \end{cases}$$

Folgende Proposition zeigt in einem gewissen Sinn, dass es gleich viele Brüche wie natürliche Zahlen gibt. Dies ist unser erstes potentiell überraschendes Resultat.

**Proposition 1.** *Die Menge  $\mathbb{Q}$  der rationalen Zahlen ist abzählbar.*

*Beweis.* Wir konstruieren eine Bijektion  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ . Für  $k \in \mathbb{N}$  mit  $k \geq 1$  definiere

$$A_k = \{p/q \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \geq 1, p/q \text{ ist gekürzt}, |p| + |q| = k\}.$$

Alle solchen  $A_k \subset \mathbb{Q}$  sind endlich und

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{k \geq 1} A_k$$

ist die *disjunkte Vereinigung* dieser Mengen. Wir haben

$$A_1 = \{0/1\}, A_2 = \{\pm 1/1\}, A_3 = \{\pm 1/2, \pm 2/1\}, \dots$$

Sei  $a_k = |A_k|$  die Anzahl Elemente von  $A_k$ . Definiere Teilmengen  $B_k \subset \mathbb{N}$  mit  $|B_k| = a_k$ . Dazu setze  $B_1 = \{0\}$ , und für  $k \geq 2$  setze

$$B_k = \{a_1 + \dots + a_{k-1}, a_1 + \dots + a_{k-1} + 1, \dots, a_1 + \dots + a_{k-1} + a_k - 1\}.$$

Es gilt dann

$$B_1 = \{0\}, B_2 = \{1, 2\}, B_3 = \{3, 4, 5, 6\}, \dots$$

Wähle eine Bijektion  $\varphi_k : B_k \rightarrow A_k$  für alle  $k \geq 1$ . Definiere nun

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{Q} \\ n &\mapsto \varphi_k(n) \text{ falls } n \in B_k. \end{aligned}$$

Die Abbildung  $\varphi$  ist eine Bijektion, da  $\mathbb{N}$  die disjunkte Vereinigung der  $B_k$  und  $\mathbb{Q}$  die disjunkte Vereinigung der  $A_k$  ist.  $\square$

Dieser Beweis zeigt allgemeiner, dass jede Menge, die eine abzählbare Vereinigung endlicher Mengen ist, selber abzählbar ist. Man könnte diese Aussage für Aufgabe 5 auf Serie 1 verwenden.

**Frage.** Ist jede unendliche Menge abzählbar?

Georg Cantor hat ca. 1870 als erste Person die Antwort “nein” auf diese Frage festgehalten. Dies wurde allerdings erst nach dem Krieg publiziert. Wir konstruieren nun eine Menge, die nicht abzählbar ist. Dazu betrachten wir die *Potenzmenge*  $P(M)$  einer Menge  $M$ , definiert als die “Menge aller Teilmengen von  $M$ ”. Ein wenig formaler,

$$P(M) = \{A \mid A \subset M\}.$$

**Beispiel.** Sei  $M = \{0, 1\}$ . Dann ist

$$P(M) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}.$$

Hier bedeutet  $\emptyset$  die *leere Menge*.



**Bemerkung.** Falls die Menge  $M$  selbst  $n$  Elemente hat, dann hat ihre Potenzmenge  $2^n$  Elemente. Hierzu fassen wir jede Teilmenge  $A$  von  $M$  als Funktion

$$f_A : M \rightarrow \{0, 1\}$$

$$x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } x \notin A, \\ 1, & \text{falls } x \in A, \end{cases}$$

auf. Diese Funktion enthält die selbe Information wie  $A$  selbst.

**Proposition 2** (Cantor). *Sei  $M$  eine beliebige Menge. Dann existiert keine surjektive Abbildung  $\varphi : M \rightarrow P(M)$ . Insbesondere existiert keine Bijektion  $\varphi : M \rightarrow P(M)$ .*

**Korollar.** *Die Potenzmenge  $P(\mathbb{N})$  ist nicht abzählbar.*

*Beweis der Proposition.* Wir führen einen klassischen Widerspruchsbeweis. Wir nehmen an, es gäbe doch eine solche Surjektion  $\varphi : M \rightarrow P(M)$ . Betrachte nun die Teilmenge  $A$  von  $M$  aller  $x$ , die nicht in  $\varphi(x)$  enthalten sind. In Symbolen,

$$A = \{x \in M \mid x \notin \varphi(x)\}$$

Die Forderung  $x \notin \varphi(x)$  macht Sinn, da  $\varphi(x)$  selbst eine Teilmenge von  $M$  ist. Da  $\varphi$  surjektiv ist, muss ein  $a \in M$  existieren mit  $\varphi(a) = A$ . Wir fragen nun, ob  $a \in A$  ist oder nicht. Wäre  $a \in A$ , so müsste nach Definition von  $A$  gelten, dass  $a \notin \varphi(a)$ . Aber das widerspricht der Definition von  $\varphi(a) = A$ . Wäre jedoch  $a \notin A$ , dann wäre die Bedingung  $a \notin \varphi(a)$  erfüllt, also  $a \in A$ . Aber da  $A = \varphi(a)$ , widerspricht auch dies der Definition von  $A$ . Somit führen beide Möglichkeiten zu einem Widerspruch. Dies bedeutet, dass unsere ursprüngliche Annahme, dass eine Surjektion  $\varphi : M \rightarrow P(M)$  existiert, verworfen werden muss: Es kann keine solche Abbildung geben.  $\square$

## Einschub: Beweismethoden

Ein *Beweis* ist eine “Deduktion einer Aussage aus bereits bewiesenen Aussagen oder Grundaxiomen”. Wichtig ist hier, dass die Deduktion logisch korrekt erfolgt. Typische Beweismethoden sind

- geometrisch, zum Beispiel mit Hilfe von Euklids Axiomen,
- mit Aussagenlogik, zum Beispiel Widerspruchsbeweise,
- kombinatorische, zum Beispiel vollständige Induktion.

Wir führen nun ein Beispiel eines Beweises durch vollständige Induktion.

**Definition.** Die  $n$ -te *Catalanzahl*  $C_n$  ist die Anzahl korrekte Klammerungen mit  $2n$  Klammern ( $n$  linke und  $n$  rechte Klammern).

**Beispiele.**

- $C_1 = 1$ , die einzige Korrekte Klammerung ist  $()$ .
- $C_2 = 2$ , die Klammerungen  $()()$  und  $(( ))$  sind beide korrekt.

- $C_3 = 5$ .

**Behauptung.** Die  $n$ -te Catalanzahl  $C_n$  erfüllt  $C_n \geq 2^{n-1}$ .

*Beweis.* Für die *Induktionsverankerung* testen wir die Aussage für  $n = 1$ : Tatsächlich ist  $C_1 \geq 2^0$ . Die *Induktionsannahme* ist nun, dass die Aussage für ein festes  $n \in \mathbb{N}$  stimmt. Im *Induktionsschritt* leiten wir nun die Aussage für  $n + 1$  aus der Induktionsannahme her. Hier heisst das, dass wir  $C_{n+1} \geq 2^n$  aus  $C_n \geq 2^{n-1}$  herleiten wollen. Sei dazu  $K$  eine korrekte  $n$ -Klammerung, das heisst eine korrekte Klammerung mit  $n$  linken und  $n$  rechten Klammern. Dann sind sowohl  $(K)$  als auch  $()K$  korrekte  $(n+1)$ -Klammerungen. Weiter gilt, dass diese beiden Klammerungen verschieden sind: Die erste der beiden Klammerungen beginnt mit zwei geöffneten Klammern, wobei die zweite mit einer geöffneten und einer geschlossenen Klammer beginnt. Weiter gilt, dass für verschiedene korrekte  $n$ -Klammerungen  $K_1$  und  $K_2$  auch  $()K_1, (K_1), ()K_2, (K_2)$  verschieden sind (wieso?). Wir können also aus jeder korrekten  $n$ -Klammerung zwei korrekte  $(n+1)$ -Klammerungen konstruieren. Somit folgt, dass

$$C_{n+1} \geq 2C_n \geq 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n.$$

Dies zeigt die Aussage für  $n + 1$ . □

**Bemerkung.** Es gilt

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Der erste der Binomialkoeffizienten zählt alle  $n$ -Klammerungen (auch inkorrekte). Der zweite Binomialkoeffizient zählt die Anzahl inkorrekturer Klammerungen. Man kann sich dies folgendermassen skizzenhaft überlegen. Eine inkorrekte Klammerung hat eine erste Position, wo eine rechte Klammer zuviel ist. Drehe alle Klammern hinter dieser Position um. Die Klammerung die wir so erhalten, hat  $n+1$  rechte Klammern. Weiter kann man diesen Prozess rückgängig machen: Jede Klammerung mit  $n+1$  rechten Klammern liefert eine inkorrekte Klammerung mit  $n$  rechten Klammern durch Umkehren dieses Prozesses. Also sind die schlechten  $n$ -Klammerungen in Bijektion mit der Anzahl Klammerungen mit  $n+1$  rechten (und  $n-1$  linken) Klammern.

### 3 Gruppen und Körper

**Definition.** Eine *Gruppe* ist eine Menge  $G$  mit einer *Verknüpfung*  $\circ : G \times G \rightarrow G$ , welche folgende Eigenschaften erfüllt.

- (i) Es existiert ein Element  $e \in G$ , so dass für alle  $g \in G$  gilt, dass

$$g \circ e = e \circ g = g.$$

- (ii) Für alle  $g \in G$  existiert ein  $h \in G$  mit

$$g \circ h = h \circ g = e.$$

- (iii) Für alle  $a, b, c \in G$  gilt

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c).$$

### Notation.

- (i) Das Element  $e$  bezeichnen wir als das *neutrale Element*.
- (ii) Wir schreiben häufig  $g^{-1}$  für  $h$  und nennens  $g^{-1}$  das zu  $g$  *inverse Element*.
- (iii) Dieses Gesetz nennt man das *Assoziativgesetz*.

### Beispiele.

- Die Gruppe  $G = \{e\}$  mit  $e \circ e = e$  heisst *triviale Gruppe*.

- Die Menge  $\{e, a\}$  mit Multiplikationstabelle
 

	$e$	$a$
$e$	$e$	$a$
$a$	$a$	$e$

 bildet eine Gruppe.

- Die Menge  $\{e, a, b\}$  mit Multiplikationstabelle
 

	$e$	$a$	$b$
$e$	$e$	$a$	$b$
$a$	$a$	$b$	$e$
$b$	$b$	$e$	$a$

 bildet eine Gruppe. Hier kann man  $a$  als ebene Drehung um 0 mit Winkel  $2\pi/3$  interpretieren.

- $(\mathbb{Z}, +)$  ist eine Gruppe.
- $(\mathbb{Z}, \cdot)$  ist keine Gruppe. Zum Beispiel hat die Zahl  $2 \in \mathbb{Z}$  kein inverses Element.
- $(\mathbb{Q}, +)$  ist eine Gruppe.
- $(\mathbb{Q}, \cdot)$  ist keine Gruppe. Zum Beispiel hat  $0 \in \mathbb{Q}$  kein inverses Element.

**Proposition 3.** In jeder Gruppe  $G$  hat die Gleichung  $a \circ x = c$  eine eindeutige Lösung  $x \in G$ . Hier sind  $a, c$  vorgegeben.

*Beweis.* Wir zeigen Existenz und Eindeutigkeit separat. Wir wissen nach Axiom (ii), dass  $b \in G$  existiert mit  $b \circ a = e$ . Multiplikation mit  $b$  von links auf beiden Seiten liefert  $b \circ (a \circ x) = b \circ c$ . Axiom (iii) sagt, dass die linke Seite

$$(b \circ a) \circ x = e \circ x = x$$

ist. Also ist  $x = b \circ c = a^{-1} \circ c$  eine Lösung. Um Eindeutigkeit zu zeigen seien  $x_1, x_2 \in G$  mit

$$a \circ x_1 = c = a \circ x_2.$$

Linksmultiplikation wie oben mit  $b$  liefert

$$b \circ (a \circ x_1) = b \circ (a \circ x_2).$$

Wir erhalten

$$(b \circ a) \circ x_1 = (b \circ a) \circ x_2.$$

Sobald wir uns erinnern, dass  $b \circ a = e$ , schliessen wir, dass  $x_1 = x_2$ . □

## Kapitel II

# Folgen und Reihen

## Kapitel III

# Stetige Funktionen

## Kapitel IV

# Differenzierbare Funktionen

## Kapitel V

# Differentialrechnung

## Kapitel VI

# Riemann Integral



## Kapitel VII

# Funktionenfolgen