Analysis II

Sebastian Baader

Frühlingssemester 2021

Über diese Vorlesung

Diese Vorlesung besteht aus drei Teilen, die in das Studium von Funktionen in mehreren reellen Variablen einführen soll. Der ganze Inhalt dieser Vorlesung (und mehr) ist in [1] zu finden, konkret in den Kapiteln XIV, XV für gewöhnliche Differentialgleichungen, XX für die Differentialrechnung, und XXI, XXIV für Gradientenfelder und Differentialformen.

Im Kapitel I geht es um "gewöhnliche Differentialgleichungen". Wir studieren dort Kurven $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, deren Ableitung durch die Position $\gamma(t)$ bestimmt ist. Wir werden Vektorfelder einführen um das präziser zu formulieren, und diese dann untersuchen. Im Kapitel II geht es um differenzierbare Ableitungen $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (was sich von Kurven dadurch unterscheidet, dass auch der Definitionsbereich dieser Funktionen mehrdimensional sein darf). Dieses Kapitel wird den grössten Teil dieser Vorlesung formen. Im Kapitel III lernen wir Gradientenfelder und Differentialformen kennen. Dort studieren wir Abbildungen $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Die leitende Frage in diesem Kapitel wird sein, welche Vektorfelder $X\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Gradientenfelder sind.

Über dieses Dokument

Das ist eine Mitschrift der Vorlesung "Analysis 2" von Prof. Dr. Sebastian Baader im Frühlingssemester 2021. Du darfst sie so verwenden, wie sie dir am meisten beim Verständnis des Materials hilft. Verantwortlich dafür was hier drin steht ist Levi Ryffel. Denke daran dass der Dozent dieses Dokument nicht schreibt (und vielleicht auch nicht liest). Ihn trifft keine Verantwortung, falls Unsinn steht.

Dein Beitrag zu den Notizen

Diese Vorlesungsnotizen werden in Echtzeit während der Vorlesung mitgeschrieben und werden deshalb viele Probleme enthalten. Damit sind allerlei Missgeschicke gemeint wie zum Beispiel Symbolverwechslungen, unpräzise Aussagen und Argumente, alternative Rechtschreibung und Grammatik, oder unattraktives Layout. Falls dir so etwas auffällt, auch wenn es dich nicht stark stört, und auch wenn du es als etwas subjektiv empfindest, poste doch auf

`https://github.com/raw-bacon/ana2-notes`,

ein "Issue", oder sende eine E-Mail an `levi.ryffel@math.unibe.ch`. Auf demselben Weg kannst du Wünsche und Verbesserungsvorschläge zu dieser Mitschrift anbringen.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel I

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Bevor wir Differentialgleichungen studieren können, müssen wir den Raum $\mathbb{R}^n$ besser verstehen. Wir erinnern uns nun an das Studium von Funktionen in einer Variable. Dort machen viele Definitionen vom Absolutbetrag Gebrauch.

Beispiele.

(1) Konvergenz einer Folge $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, in Symbolen

$$\lim_{n\to\infty} a(n) = \alpha \in \mathbb{R}$$

heisst folgendes. Für alle $\varepsilon > 0$ existiert $N \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \geq N$ gilt, dass $|a(n) - \alpha| \leq \varepsilon$.

(2) Stetigkeit einer Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Punkt $p \in \mathbb{R}$ heisst, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $q \in \mathbb{R}$ mit $|q - p| \leq \delta$ gilt, dass $|f(q) - f(p)| \leq \varepsilon$.

Beide dieser sehr zentralen Konzepte machen kritischen Gebrauch des Absolutbetrags. In $\mathbb{R}^n$ gibt es aber keinen kanonischen Ersatz für diesen. Dies motiviert unseren ersten Abschnitt in diesem Kapitel.

1 Normen auf reellen Vektorräumen

Die Normaxiome greifen die wichtigsten Eigenschaften des Absolutbetrags in $\mathbb{R}$ auf und verallgemeinern diese, so dass wir in allgemeinen reellen Vektorräumen Konzepte wie Konvergenz und Stetigkeit formalisieren können.

Definition. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Eine Abbildung $\|\cdot\|\colon V \to \mathbb{R}$ heisst *Norm* auf V, falls folgende Eigenschaften erfüllt werden.

(i) (Strikte Positivität) Für alle $v \in V$ gilt $\|v\| \geq 0$ und $\|v\| = 0$ genau dann, wenn $v = 0$.

(ii) (Homogenität) Für alle $v \in V$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$.

(iii) (Dreiecksungleichung) Für alle $v, w \in V$ gilt $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

Eigenschaft (ii) hätten wir auch folgendermassen formulieren können: Die Norm $\|\cdot\|$ auf einen eindimensionalen Unterraum von V verhält sich (bis auf Streckung) genau so wie der Absolutbetrag auf $\mathbb{R}$.

Definition. Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf einem rellen Vektorraum V. Die Menge

$$B_1 = \{v \in V \mid \|v\| \leq 1\} \subset V$$

heisst *Norm-Einheitsball*.

Beispiele. Sei $V = \mathbb{R}^n$ mit Standardbasis $e_1, \ldots, e_n$. Einen Vektor $v \in V$ können wir dann ausdrücken durch $v = v_1 e_1 + \cdots + v_n e_n$ mit $v_i \in \mathbb{R}$.

(1) Die *Summennorm* ist die Norm

$$\|v\|_1 = |v_1| + \cdots + |v_n|.$$

Wir prüfen nun die Normaxiome.

(i) Dank den Eigenschaften des Absolutsbetrag auf $\mathbb{R}$ haben wir sofort $\|v\|_1 \geq 0$ und $\|v\|_1 = 0$ genau dann, wenn alle v_i null sind.

(ii) Berechne $\|\lambda v\|_1 = |\lambda v_1| + \cdots |\lambda v_n| = |\lambda| \cdot \|v\|_1$.

(iii) Berechne

$$\begin{aligned} \|v + w\|_1 &= |v_1 + w_1| + \cdots + |v_n + w_n| \\ &\leq |v_1| + |w_1| + \cdots + |v_n| + |w_n| \\ &= \|v\|_1 + \|w\|_1. \end{aligned}$$

(2) Die *Maximumnorm* ist die Norm

$$\|v\|_\infty = \max\{|v_1|, \ldots |v_n|\}.$$

Wir prüfen wieder die Normaxiome.

(i) Wir haben $\|v\|_\infty \geq 0$ und auch $\|v\|_\infty$ genau dann, wenn alle v_i null sind.

(ii) Es gilt $\|\lambda v\|_\infty = \max\{v_1, \ldots, v_n\} = |\lambda| \cdot \|v\|_\infty$.

(iii) Berechne

$$\begin{aligned} \|v + w\|_\infty &= \max\{|v_1 + w_1|, \ldots |v_n + w_n|\} \\ &\leq \max\{|v_1|, \ldots, |v_n|\} + \max\{|w_1|, \ldots, |w_n|\} \\ &= \|v\|_\infty + \|w\|_\infty, \end{aligned}$$

da jeweils $|v_i + w_i| \leq |v_i| + |w_i|$ gilt.

(3) die *euklidische Norm* ist die Norm

$$\|v\|_2 = \sqrt{v_1^2 + \cdots v_n^2}.$$

Auch für diese Norm prüfen wir die Axiome.

(i) Es gilt $\|v\|_2 \geq 0$ und $\|v\|_2 = 0$ genau dann, wenn $v_1^2 + \cdots + v_n^2 = 0$ gilt, was äquivalent dazu ist, dass alle v_i null sind.

(ii) Berechne $\|\lambda v\|_2 = |\lambda| \cdot \|v\|_2$, da $\sqrt{\lambda^2} = |\lambda|$ gilt.

(iii) Hier stossen wir zum ersten mal auf Schwierigkeiten. Wir werden das im Lemma unten zeigen.

(4) Folgendes Beispiel rechtfertigt die Notation für obige Normen. Sei $p \geq 1$ für $p \geq 1$. Die *p-Norm* ist

$$\|v\|_p = \sqrt[p]{|v_1|^p + \cdots + |v_n|^p}.$$

Die Dreiecksungleichung $\|v + w\|_p \leq \|v\|_p + \|w\|_p$ heisst *Minkowski-Ungleichung*, die aus der Konkavität von log folgt. Siehe hier Abschnitt 59.3 in [1]. Die Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ sind Spezialfälle dieser Familie von Normen. Für alle $p \geq 1$ gilt, dass $\|v\|_\infty \leq \|v\|_p \leq \sqrt[p]{n}\|v\|_\infty$. Im Grenzwert $p \to \infty$ erhalten wir

$$\lim_{p\to\infty} \|v\|_p = \|v\|_\infty$$

da $\lim_{p\to\infty} \sqrt[p]{n} = 1$.

Die Normbälle der ersten drei Normen im Fall $n = 2$ sind in Abbildung I.1 zu sehen.

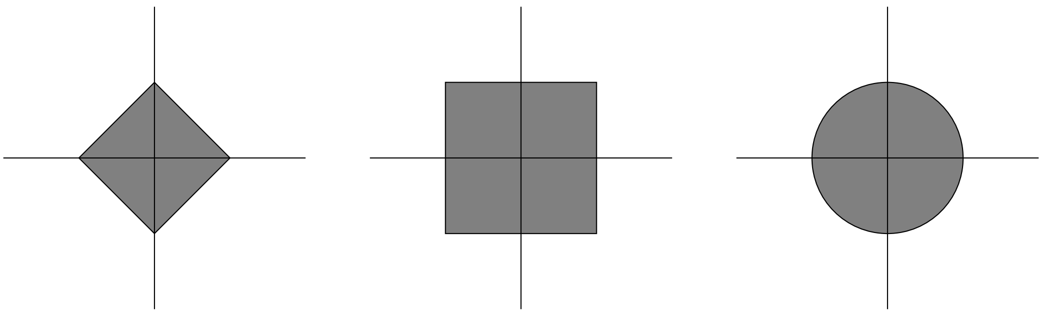

Abbildung I.1: Normbälle der Normen $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty, \|\cdot\|_2$

Normen aus Skalarprodukten

Definition. Ein *Skalarprodukt* auf einem reellen Vektorraum V ist eine strikt positive, symmetrische, bilineare Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle \colon V \times V \to \mathbb{R}$. Das heisst,

(i) für alle $v \in V$ gilt $\langle v, v \geq 0\rangle$ und $\langle v, v\rangle = 0$ genau dann, wenn $v = 0$,

(ii) für alle $v, w \in V$ gilt $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$,

(iii) für alle $u, v, w \in V$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt $\langle u, v + tw \rangle = \langle u, v \rangle + t\langle u, w \rangle$.

Lemma. *Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf V. Dann ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} \| \cdot \| \colon V &\to \mathbb{R} \\ v &\mapsto \sqrt{\langle v, v \rangle} \end{aligned}$$

eine Norm auf V.

Beweis. Wir prüfen die Normaxiome folgendermassen.

(i) Es gilt $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} \geq 0$ und $\|v\| = 0$ genau dann, wenn $\langle v, v \rangle = 0$, das heisst $v = 0$ gilt.

(ii) Berechne $\|\lambda v\| = \sqrt{\langle \lambda v, \lambda v \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \cdot \langle v, v \rangle} = |\lambda| \cdot \|v\|$.

(iii) Seien $v, w \in V$. Wir wollen zeigen, dass $\sqrt{\langle v + w, v + w \rangle} \leq \sqrt{\langle v, v \rangle} + \sqrt{\langle w, w \rangle}$. Da Quadrieren auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ monoton ist, reicht es zu zeigen, dass

$$\langle v + w, v + w \rangle \leq \langle v, v \rangle + \langle w, w \rangle + 2 \cdot \sqrt{\langle v, v \rangle} \cdot \sqrt{\langle w, w \rangle}.$$

Ausmultiplizieren der linken Seite und Subtraktion der Terme, die dann auf beiden Seiten erscheinen liefert, dass die Dreiecksungleichung für $\| \cdot \|$ äquivalent zur *Cauchy-Schwarz Ungleichung*

$$\langle v, w \rangle \leq \sqrt{\langle v, v \rangle} \cdot \sqrt{\langle w, w \rangle}$$

ist. Wir beweisen nun diese. Betrachte dazu die Funktion $h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch

$$h(t) = \langle v + tw, v + tw \rangle \geq 0$$

definiert ist. Es gilt also $h(t) = t^2\langle w, w \rangle + 2t\langle v, w \rangle + \langle v, v \rangle$. Dies beschreibt eine Parabel mit Diskriminante

$$D = b^2 - 4ac = 4\langle v, w \rangle^2 - 4\langle w, w \rangle \cdot \langle v, v \rangle.$$

Aus $h(t) \geq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ folgt, dass $D \leq 0$ ist. Wir schliessen, dass $\langle v, w \rangle^2 \leq \langle w, w \rangle \cdot \langle v, v \rangle$ gelten muss. □

Beispiele.

(1) Sei $V = \mathbb{R}^n$ und

$$\langle v, w \rangle = v_1 w_1 + \cdots + v_n w_n$$

das *Standardskalarprodukt.* Dann ist

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2} = \|v\|_2$$

die euklidische Norm.

(2) Sei $V = C[0,1]$ der Raum von stetigen Funktionen $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$. Das ist ein unendlichdimensionaler Vektorraum. Die Funktionen $1, x, x^2, \ldots$ sind linear unabhängig. Für $f, g \in V$ definieren wir

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \cdot g(x)\, dx.$$

Die Skalarproduktaxiome sind leicht zu überprüfen.

Bemerkung. Nicht jede Norm auf V stammt von einem Skalarprodukt. In den Übungen wird gezeigt, dass jede von einem Skalarprodukt induzierte Norm $\|\cdot\|$ die *Parallelogrammidentität*

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2)$$

erfüllt, und dass die Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ diese nicht erfüllen.

2 Stetigkeit

Definition. Seien V und W reelle Vektorräume mit Normen $\|\cdot\|_V$ und $\|\cdot\|_W$. Eine Abbildung $f\colon V \to W$ heisst *stetig im Punkt* $p \in V$, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $q \in V$ mit $\|q - p\|_V \le \delta$ folgt, dass $\|f(q) - f(p)\|_W \le \varepsilon$. Wir sagen, dass f *stetig* ist, falls f in allen Punkten von V stetig ist.

Beispiel. Im Fall $V = W = \mathbb{R}$ und $\|\cdot\| = |\cdot|$ erhalten wir den üblichen Stetigkeitsbegriff.

Wir untersuchen nun, wie der Stetigkeitsbegriff von den Normen auf V und W abhängt. Betrachte zunächst folgenden günstigen Fall. Sei $V = W = \mathbb{R}$. Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt dann

$$\|x\| = \|x \cdot 1\| = |x| \cdot \|1\|.$$

Sei nun $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bezüglich der Norm $|\cdot|$ im Punkt $p \in \mathbb{R}$ stetig. Wir zeigen nun, dass f auch bezüglich der Norm $\|\cdot\|$ im Punkt p stetig ist. Wähle $\delta > 0$ so, dass für alle $q \in \mathbb{R}$ mit $|q - p| \le \delta/\|1\|$ gilt, dass $|f(q)f(p) \le \varepsilon/\|1\|$. Das geht, da $\|1\| > 0$ aus $1 \ne 0$ folgt. Sei nun $q \in \mathbb{R}$ mit $\|q - p\| \le \delta$. Dann gilt $|q - p| \le \delta/\|1\|$. Wir schliessen, dass $|f(q) - f(p)| \le \varepsilon/\|1\|$, also $\|f(q) - f(p)\| = |f(q) - f(p)| \cdot \|1\| \le \varepsilon$. Insgesamt hängt also der Stetigkeitsbegriff auf $\mathbb{R}$ nicht von der Norm auf $\mathbb{R}$ ab.

Es gibt aber auch einen ungünstigen Fall. Sei $\mathbb{R}^\infty$ der Raum aller Folgen $(x_1, x_2, \ldots) \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ für welche $N > 0$ existiert, so dass für alle $n \ge N$ gilt, dass $x_n = 0$. Betrachte auf $\mathbb{R}^\infty$ die beiden Normen

$$\|v\|_2 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots}$$
$$\|v\|_\infty = \max\{|v_1|, |v_2|, \ldots\}.$$

Es gilt für alle $v \in \mathbb{R}^\infty$, dass $\|v\|_\infty \leq \|v\|_2$. Sei $V = (\mathbb{R}^\infty, \|\cdot\|_2)$ und $W = (\mathbb{R}^\infty, \|\cdot\|_\infty)$. Die Identitätsabbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{Id}\colon \mathbb{R}^\infty &\to \mathbb{R}^\infty \\ v &\mapsto v \end{aligned}$$

kann auf vier Arten als Abbildung zwischen normierten Räumen betrachtet werden, nämlich

- $f_1\colon V \to V$,
- $f_2\colon W \to W$,
- $f_3\colon V \to W$,
- $f_4\colon W \to V$.

Wir bemerken, dass f_1, f_2 und f_3 stetig sind, indem wir $\delta = \varepsilon$ wählen. Aber f_4 ist nicht stetig!. Betrachte dazu die Folge von Punkten $p_n = (1/n, 1/n, \dots, 1/n, 0, \dots) \in \mathbb{R}^\infty$, wobei das Glied $1/n$ gerade n^2 mal vorkommt. Es gilt $\|p_n\|_\infty = 1/n$ und $\|p_n\|_2 = 1$. Insbesondere gilt

$$\|f_4(p_n) - f_4(0)\|_2 = \|p_n\|_2 = 1$$

und $\|p_n\|_\infty = 1/n$, also ist f_4 im Punkt $p = 0$ nicht stetig.

Kapitel II

Differentialrechnung

Kapitel III

Gradientenfelder und Differentialformen

Literaturverzeichnis

[1] H. Heuser. *Lehrbuch der Analysis*. Mathematische Leitfäden. Vieweg+Teubner Verlag, 2009.

[2] E. Hairer and G. Wanner. *Analysis by Its History*. Undergraduate Texts in Mathematics / Readings in Mathematics. Springer New York, 2000.