3,120 Methoden: Statistik

Übungsblatt 5: Hypothesentests

Mathis Mörke
Michael Schürle
und Alois Weigand

Universität St.Gallen (HSG)

Herbstsemester 2024

Rcap I: Schätzverfahren

- **Punktschätzer**
  - mit Zufallsstichprobe einen Parameter aus der Grundgesamtheit schätzen
  - Stichprobenmittelwert $\overline{x}$ für μ der Grundgesamtheit
  - Stichprobenanteilswert p für π der Grundgesamtheit
  - Stichprobenvarianz s für σ aus Grundgesamtheit

- **Zentraler Grenzwertsatz**
  - $\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ standardnormalverteilt:

    $$Prob\left(-z < \frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < +z\right) = F_{Sn}(z) - F_{Sn}(-z)$$

  - $\frac{P-\pi}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}}$ standardnormalverteilt:

    $$Prob\left(-z < \frac{P-\pi}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}} < +z\right) = F_{Sn}(z) - F_{Sn}(-z)$$

Recap II: Direkter Schluss und Intervallschätzung

- **Direkter Schluss**
  - $Prob(\mu - z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \overline{X} < \mu + z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = F_{Sn}(z) - F_{Sn}(-z) = D(z)$
  - $Prob(\pi - z \cdot \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}} < P < \pi + z \cdot \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}) = D(z)$
- **Intervallschätzung**
  - $Prob(\overline{x} - z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = F_{Sn}(z) - F_{Sn}(-z) = 1 - \alpha$
  - $Prob(p - z \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} < \pi < p + z \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}) = 1 - \alpha$

  mit Konfidenzwahrscheinlichkeit $1 - \alpha$ und Irrtumswahrscheinlichkeit α

Refresher: Hypothesentests

- **Idee:**
  - Man hat eine Vermutung (Nullhypothese) über einen Parameter der Grundgesamtheit, z.B. Erwartungswert $\mu = \mu_0$ oder Anteilswert $\pi = \pi_0$
  - Hypothese wird mit Stichprobe aus Grundgesamtheit überprüft, z.B. Stichprobenmittelwert $\overline{x}$ oder -anteilswert p

- **Problem:** Stichprobenwert ist Zufallsvariable (Schwankungen)
  - geringfügige Abweichung kann durch Zufallsschwankungen erklärt werden

Refresher: Hypothesentests

- **Idee:**
  - falls die Nullhypothese stimmt ($\mu = \mu_0$), kann man ein Intervall angeben, in welches der Stichprobenmittelwert $\overline{X}$ mit WK $(1 - \alpha)$ fällt:

    $$P(\mu_0 - z\sigma_{\overline{x}} < \overline{X} < \mu_0 + z\sigma_{\overline{x}}) = 1 - \alpha$$

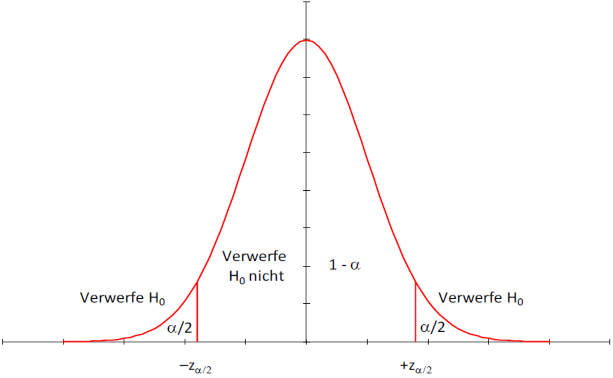
  - mit Irrtumswahrscheinlichkeit α liegt $\overline{X}$ nicht im Intervall
  - **Entscheidungsregel**: Ablehnung der Nullhypothese wenn $\overline{x} \notin [\mu_0 - z_{\alpha/2}\sigma_{\overline{X}}; \mu_0 + z_{\alpha/2}\sigma_{\overline{X}}]$
  - Nullhypothese wird abgelehnt, wenn $\overline{X}$ signifikant von der Nullhypothese abweicht
  - Wahrscheinlichkeit (α), dass so grosse Abweichung zufällig ist, bei korrekter Nullhypothese sehr gering (aber möglich!!!)

Refresher: Hypothesentests

- **Bilde Teststatistik**

$$Prob(\mu_0 - z_{\alpha/2}\sigma_{\overline{x}} < \overline{X} < \mu_0 + z_{\alpha/2}\sigma_{\overline{x}}) = 1 - \alpha$$

  - **Umformen:** $Prob(-z_{\alpha/2} < \frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma_{\overline{x}}} < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$



Refresher: Hypothesentests

- **Bilde Teststatistik**

$$Prob(-z_{\alpha/2} < \frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma_{\overline{x}}} < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

1) kritischer Wert $z_{\alpha/2}$ (zweiseitiger Test) durch α vorgegeben

2) Teststatistik $\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma_{\overline{x}}}$

3) Vergleich Teststatistik mit kritischem Wert

- Entscheidungsregel: $\frac{|\overline{x}-\mu_0|}{\sigma_{\overline{x}}} > z_{\alpha/2}$
  $\Rightarrow$ Verwerfe Nullhypothese $H_0 : \mu = \mu_0$ (zweiseitiger Test)

Refresher: Hypothesentests

- **Jede Testentscheidung mit Risiko behaftet**
  - bei richtiger Nullhypothese: Wert mit Wahrscheinlichkeit α im Ablehnungsbereich
    $\Rightarrow$ **Ablehnung der Nullhypothese, obwohl sie richtig ist.**
    $\Rightarrow$ Irrtumswahrscheinlichkeit
  - Nichtablehnung der Nullhypothese ist kein Beweis, dass sie richtig ist
    $\Rightarrow$ **Nichtablehnung der Nullhypothese, obwohl sie falsch ist.**

Refresher: Hypothesentests

- **H_0 ist korrekt und wir verwerfen H_0 nicht**
  - Richtige Entscheidung
- **H_0 ist korrekt und wir verwerfen H_0**
  - Fehler 1. Art (α-Fehler): Fehlerwahrscheinlichkeit von α (Signifikanzniveau)
- **H_0 ist falsch und wir verwerfen H_0**
  - Richtige Entscheidung
- **H_0 ist falsch und wir verwerfen H_0 nicht**
  - Fehler 2. Art (β-Fehler)

Refresher: Hypothesentests- Schritte

1. Aufstellung von Null- H_0 und Alternativhypothese H_A sowie Festlegung des Signifikanzniveaus.
2. Wahl einer geeigneten Prüfgrösse und Testverteilung unter Gültigkeit der Nullhypothese
3. Bestimme den kritischen Wert (durch Signifikanzniveau α gegeben) $\Rightarrow$ Wert aus der Tabelle
   $\Rightarrow$ z_α beim einseitigen Test
   $\Rightarrow$ $z_{\alpha/2}$ beim zweiseitigen Test
4. Berechnung der Prüfgrösse
5. Vergleich der Teststatistik mit kritischem Wert
   $\Rightarrow$ Überschreitet die Teststatistik (absoluter Wert) den kritischen Wert? $\rightarrow$ Verwerfe die Nullhypothese

Recap: Hypothesentests über Mittelwerte

- H_0 : $\mu = \mu_0$ vs. H_A: $\mu \neq \mu_0$
  - wenn σ bekannt ist und...
    Grundgesamtheit normalverteilt (1)
    oder $n \geq 30$ (2)
  - Teststatistik $Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_{\overline{X}}}$

    mit $\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ und μ_0 aus H_0
    mit $\overline{X} = \hat{\mu}$ als Schätzer für μ

Recap: Hypothesentests über Mittelwerte

- $H_0 : \mu = \mu_0$ vs. H_A: $\mu \neq \mu_0$
  - wenn σ unbekannt ist, und...
    Grundgesamtheit normalverteilt (1)
    oder $n < 30$ (2)
  - Teststatistik $t = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\hat{\sigma}_{\overline{X}}}$

    mit $\hat{\sigma}_{\overline{X}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$ und μ_0 aus H_0
    Standardabweichung s aus Stichprobe
    $n - 1$ Freiheitsgraden (für kritischen Wert aus t-Tabelle)
    $\overline{x} = \hat{\mu}$ als Schätzer für μ

Recap: Hypothesentests über Anteilswerte

- H_0 : $\pi = \pi_0$ vs. H_A: $\pi \neq \pi_0$
  - wenn $n\pi_0 \geq 5$ und $n(1 - \pi_0) \geq 5$
  - Teststatistik $Z = \frac{P - \pi_0}{\sigma_P}$

    mit $\sigma_P = \sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}$ und π_0 aus H_0

Aufgabe 1

Bei welchen der folgenden Probleme sollte man einen zweiseitigen und bei welchem einen einseitigen Test durchführen? Wie müsste jeweils die Nullhypothese lauten?

- Untersuchung über die Änderung des Alkoholkonsums pro Kopf der erwachsenen Bevölkerung.
- Untersuchung über die Zunahme der Luftverschmutzung.
- Prüfung der Abweichung eines technischen Normteils von der vorgegebenen Norm.
- Untersuchung der Chancen einer kleinen Partei, die sogenannte 5%-Hürde zu überwinden, wie sie im deutschen Wahlrecht vorgesehen ist.

Aufgabe 1

- H_0: 'Der Alkoholkonsum hat sich nicht verändert'
  $\Rightarrow$ Zweiseitig, da Abweichungen vom ursprünglichen Verbrauch nach beiden Seiten interessieren.
- H_0: 'Die Luftverschmutzung hat nicht zugenommen.'
  $\Rightarrow$ Einseitig, da nur Abweichungen nach oben interessieren.
- H_0: 'Die Norm wird eingehalten.'
  $\Rightarrow$ Zweiseitig.
- H_0: 'Der Stimmenanteil der Partei beträgt weniger als 5%'
  $\Rightarrow$ Einseitig.

Aufgabe 2

Eine Stanzmaschine produziert ein gewisses **Bauteil mit einer Länge von 2 cm**. Bisherige Messungen ergaben, dass die Maschine mit einer (tolerierbaren) Genauigkeit von $\sigma = 0.7$ mm arbeitet. Eine **Stichprobe von 35 Bauteilen ergab einen Stichprobenmittelwert von 2.025 cm**. Testen Sie mit einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0.01$, ob es angebracht ist, die Maschine neu zu justieren.
Bestimmen und interpretierten sie den *p*-Wert für diesen Test.

Aufgabe 2

- Was wissen wir?
  - Bestimme das Signifikanzniveau: $\alpha = 0.01$
  - zweiseitiger Test: $\alpha/2 = 0.005 \Rightarrow 1 - 0.005 = 0.995$
  - aus Tabelle: für WK 0.995 $\rightarrow z_{\alpha/2} = 2.58$
  - Stichprobengrösse $n = 35$
  - Standardabweichung σ bekannt

- Stelle Null- und Alternativhypothese auf:
  - H_0: $\mu = 2$ ($\mu_0 = 2$)
  - H_1: $\mu \neq 2$

Aufgabe 2

- Teststatistik $Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_{\overline{X}}}$
  mit Stichprobenmittelwert $\overline{x}$

- Einsetzen:
  - $Z = \frac{2.025 - 2}{0.07/\sqrt{35}} = 2.11$

    mit $\overline{x} = 2.025$, $n = 35$, $\sigma = 0.07$
    mit $\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Aufgabe 2

- Vergleich Teststatistik mit kritischem Wert $z_{\alpha/2}$
  - für $\alpha/2 = 0.005 \Rightarrow 1 - 0.005 = 0.995$
  - aus Tabelle: für WK $0.995 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.58$
  - $z_p = 2.11 < 2.58 = z_{\alpha/2}$
  - $\Rightarrow H_0$ kann nicht verworfen werden
- Abweichung des Stichprobenmittelwerts vom Sollwert scheint zufällig zu sein.

Aufgabe 2

- p-**Wert**: $Prob(|Z| > |z|)$ mit $z = \frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma_{\overline{X}}} = 2.11$
  oder $Prob(|\overline{X}| > |\overline{x}|)$ falls gilt: $\mu = \mu_0$
- Angenommen H_0 ist korrekt, was ist die Wahrscheinlichkeit, mit der man einen z-Wert von 2.11 oder einen noch extremeren Wert beobachten würde
- p-Wert (mit Hilfe der Tabelle der Standardnormalverteilung)
  - aus Tabelle: für z-Wert von 2.11 $\rightarrow$ 0.9826
  - wir suchen: $1 - 0.9826 = 0.0174$
  - aber zweiseitiger Test: $2 \cdot 0.0174 = 0.0348$

Aufgabe 2

- p-**Wert als empirisches Signifikanzniveau**
  - Je kleiner der p-Wert, desto unwahrscheinlicher ist zufällige Abweichung
  - Warum? Falls H_0 stimmt, wäre Eintrittswahrscheinlichkeit eines solchen beobachteten Wertes (oder noch extremeren) sehr gering.
- Intuitiv: empirisches Signifikanzniveau
  - indifferent zwischen Verwerfen und Nicht verwerfen der Nullhypothese
  - empirische Wahrscheinlichkeit des α-Fehlers, wenn Nullhypothese verworfen wird

Aufgabe 2

- **Ist der p-Wert kleiner als das Signifikanzniveau α?**
  - **Ja** $\Rightarrow$ **Verwerfe die Nullhypothese** (Abweichung zu gross als dass wir gewillt sind zu glauben, dass sie zufällig ist)
  - **Nein** $\Rightarrow$ **Verwerfe die Nullhypothese nicht**.

- Signifikanzniveau α willkürlich
  - p-Wert $0.0348 < \alpha = 0.1 \Rightarrow$ Verwerfe H_0 für $\alpha = 0.1$
  - p-Wert $0.0348 < \alpha = 0.05 \Rightarrow$ Verwerfe H_0 für $\alpha = 0.05$
  - p-Wert $0.0348 > \alpha = 0.01 \Rightarrow$ H_0 nicht verwerfen für $\alpha = 0.01$

Aufgabe 3

Als engagierter Buddy packen Sie viele Starterkits für angehende Erstsemester nach untenstehender Packliste. Um die Erstsemester nicht zu “überlasten”, müssen die Pakete im Mittel weniger als 5 kg wiegen. Sie haben je $n = 25$ Stück von jedem Artikel gewogen und hinter der Packliste Mittelwerte und Standardabweichungen der Gewichte notiert (Annahme: Die Paketgewichte sind unabhängig voneinander und identisch normalverteilt).

Anzahl	Artikel		$\overline{x}_j$	s_j
3	Jumbo-Ravioli-Dosen	à	1000g	10g
1	Beutel Müsli	à	1005g	10g
1	HSG-Sweater	à	505g	10g
1	Olma-Bratwurst	à	260g	10g
1	Packung Vitaminpräparate	à	110g	3g
1	Verpackung für das Ganze	à	110g	4g

1. Schätzen Sie Mittelwert und Standardabweichung des Gewichts eines Paketes.
2. Weisen Sie durch einen einseitigen statistischen Test nach, dass die Pakete im Mittel weniger als 5kg wiegen (Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$).

Aufgabe 3

- **Schätzen Sie Mittelwert und Standardabweichung des Gewichts eines Paketes**
  - Annahme: Gewichte der Teile sind unabhängig
  - pro Paket i gibt es $j = 8$ Artikel (3 Dosen, 1 Beutel Müsli, 1 Sweater,...)
  - pro Artikel 25 Stück $\Rightarrow$ 25 Pakete
  - X_{ij} ist Gewicht von Artikel j für Paket i

Aufgabe 3

- **Schätzen Sie Mittelwert und Standardabweichung des Gewichts eines Paketes**
  - Gewicht des Pakets $X_i = \sum_{j=1}^{8} X_{ij}$
  - Schätzer für $E(X_i) = \sum_{j=1}^{8} E(X_{ij})$:
    $\overline{x} = \sum_{j=1}^{8} \overline{x_j}$
    $\overline{x} = 4990 = 3 \times 1000 + 1005 + 505 + 260 + 110 + 110$
  - Der Erwartungswert des Paketgewichts ermittelt sich als Summe der Erwartungswerte der Gewichte einzelner Artikel

Aufgabe 3

- **Schätzen Sie Mittelwert und Standardabweichung des Gewichts eines Paketes**

  - Gewicht des Pakets $X_i = \sum_{j=1}^{8} X_{ij}$
  - Schätzer für $Var(X_i) = \sum_{j=1}^{8} Var(X_{ij})$:
    $s_x^2 = \sum_{j=1}^{8} s_j^2$
    $s_x^2 = 100 \times 6 + 9 + 16 = 625$
    Standardabweichung $s_x = \sqrt{625} = 25$

- Sind die einzelnen **Gewichte der Artikel unabhängig voneinander**, dann bildet sich die **Varianz des Paketgewichts ebenfalls als Summe der Varianzen** der einzelnen Artikelgewichte

- **Aber:** Wir müssen zuerst die Varianz bilden (nicht Summe der Standardabweichungen)

  $\Rightarrow$ Die Summe von quadrierten Werten ist nicht der quadrierte Wert der Summe!!

Aufgabe 3

- **Weisen Sie durch einen einseitigen statistischen Test nach, dass die Pakete im Mittel weniger als 5kg wiegen (Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$).**

- Was wissen wir?
  - Annahme: Paketgewichte sind unabhängig voneinander identisch normalverteilt
  - $H_0 : E(X_i) \geq 5000g$ und $H_A : E(X_i) < 5000$
    $\Rightarrow$ einseitiger Test!
  - Varianz der Grundgesamtheit unbekannt
    $\Rightarrow$ muss geschätzt werden!
    $\Rightarrow$ t-Verteilung mit $df = 25 - 1 = 24$ Freiheitsgrade

Aufgabe 3

- **Weisen Sie durch einen einseitigen statistischen Test nach, dass die Pakete im Mittel weniger als 5kg wiegen (Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$).**

- Vergleich Teststatistik mit kritischem Wert
  - einseitiger Test
  - für $\alpha = 0.05 \Rightarrow t_\alpha = 1.711$
  - Teststatistik: $t = \frac{\overline{x}-\mu_0}{s_{\overline{x}}}$
    mit $s_{\overline{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$

    $\Rightarrow t = \frac{4990-5000}{25/\sqrt{25}} = -10/5 = -2$
  - absoluter Wert: $t = |\frac{\overline{x}-\mu_0}{s_{\overline{x}}}| = |2|$
- H_0 wird verworfen, da $|t| > t_\alpha \Rightarrow$ Die Pakete sind im Mittel leicht genug.

Aufgabe 4

Die langjährige Erfahrung zeigt, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Examenskanditaten, die Abschlussprüfung im ersten Anlauf zu bestehen, 0.8 beträgt. Beim letzten Examenstermin von 100 Kanditaten haben 88 das Examen bestanden. **Lässt sich dieses Ergebnis mit der Hypothese** $H_0 : \pi = 0.8$ **vereinbaren**? Verwenden Sie einen **zweiseitigen Test mit** $\alpha = 0.05$.

Aufgabe 4

- **Testen der Hypothese** $H_0 : \pi = 0.8$ **mit** $\alpha = 0.05$

- Was wissen wir?
  - $n\pi = 80 > 5$ und $n(1 - \pi) = 20 > 5$
    $\Rightarrow$ Approximation durch Normalverteilung
  - Stichprobenumfang $n = 100$
  - Anteilswert $P = X/n$ mit $E(P) = \pi$, $Var(P) = \pi(1 - \pi)/n$
  - Anteilswert aus Stichprobe: $p = \hat{\pi} = p = 0.88$

- Erstelle Null- und Alternativhypothese
  - Nullhypothese $H_0 : \pi = 0.8$ $(\pi_0 = 0.8)$
  - Alternativhypothese $H_A : \pi \neq 0.8$

Aufgabe 4

- **Testen der Hypothese** $H_0 : \pi = 0.8$ **mit** $\alpha = 0.05$
- Vergleich Teststatistik mit kritischem Wert
  - zweiseitiger Test mit $\alpha = 0.05$
  - für $\alpha = 0.05$ (zweiseitig) $\Rightarrow$ 1.96 aus Tabelle
  - Teststatistik $z = \frac{p-\pi}{\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}} = \frac{0.88-0.8}{0.04} = 2$
  - Teststatistik $z = 2 > 1.96 = z_{\alpha/2} = z_{0.975}$
- Wert der Prüfgrösse ist grösser als der kritische Wert
- Nullhypothese wird auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0.05$ verworfen.

Aufgabe 5

Die mittlere Lebensdauer einer technischen Einheit beträgt $\mu_0 = 2051$ Stunden mit einer Standardabweichung von $\sigma = 250$ Stunden ($N = 1$ Mio.). Nach einer Änderung des Herstellungsverfahrens soll durch eine Probeserie im Umfang von $n = 100$ nachgewiesen werden, dass eine **Erhöhung der Lebensdauer eingetreten ist (Testen von H_0: $\mu \leq \mu_0$)**. Bestimmen Sie bei einem $\alpha = 0.025$ das **Risiko eines β-Fehlers**, wenn der **tatsächliche Wert der mittleren Lebensdauer nach Änderung des Herstellungsverfahrens $\mu_1 = 2150$ Stunden beträgt**.

Aufgabe 5

- **Bestimme bei $\alpha = 0.025$ das Risiko eines β-Fehlers**

- β-Fehler: Nichtablehnung einer falschen Nullhypothese
- Was wissen wir?
  - H_0: $\mu \leq \mu_0 = 2051$ gegen H_a: $\mu > \mu_0$
  - einseitiger Test! $z = 1.96$ (aus Tabelle für 0.975)
  - kein Korrekturfaktor notwendig $n/N < 0.05$
  - $n > 30$ und σ aus GG bekannt
  - $\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{250}{\sqrt{100}} = 25$

- Annahmebereich des Stichprobenmittelwerts:

  $\overline{x} < \mu_0 + 1.96\sigma_{\overline{x}} = 2051 + 1.96 \times 25 = 2100$

  $\overline{x} < 2100$

Aufgabe 5

- **Bestimme bei** $\alpha = 0.025$ **das Risiko eines** β**-Fehlers**

- β-Fehler: Nichtablehnung einer falschen Nullhypothese
- Wahrscheinlichkeit β hängt vom tatsächlichen Wert des Parameters ab

  $\Rightarrow$ **tatsächlicher Wert** $\mu_1 = 2150$

  $\Rightarrow$ Nullhypothese H_0: $\mu \leq 2051$ ist falsch

- für $\mu_1 = 2150$: Was ist die Wahrscheinlichkeit β, dass H_0 nicht verworfen wird? (obwohl H_0 falsch ist)

Aufgabe 5

- **Bestimme bei** $\alpha = 0.025$ **das Risiko eines** β**-Fehlers**

- Fehler 2. Art (β-Fehler): Wahrscheinlichkeit, dass die Testgrösse $\overline{x}$ für $\mu_1 = 2150$ im Annahmebereich liegt (kleiner als 2100 ist)

  $\beta(\mu_1 = 2150) = Prob(\overline{X} < 2100 | \mu = 2150)$
- oder: $\beta(\mu_1 = 2150) = Prob(Z < \frac{2100-2150}{25})$

- Wert aus Tabelle für $z = \frac{2100-2150}{25} = -2$: 0.0228 (1-0.9772)
  $\Rightarrow$ Fehler 2. Art (β-Fehler)von 2.28%

Recap: Hypothesentests (Stichprobenvergleich)

- **Vergleich zweier Mittelwerte**
  - 2 Grundgesamtheiten
  - Sind die Mittelwerte verschieden?
    $\Rightarrow$ Weicht Differenz $\mu_1 - \mu_2$ von Null ab?
- **Vergleich zweier Anteilswerte**
  - 2 Grundgesamtheiten
  - Sind die Anteilswerte verschieden?
  - $\Rightarrow$ Weicht Differenz $\pi_1 - \pi_2$ von Null ab?
- **Vergleich zweier Varianzen**
  - Weichen die Varianzen σ_1^2 und σ_2^2 voneinander ab?
    $\Rightarrow$ Test, ob $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$

Recap: Hypothesentests (Vergleich zweier Mittelwerte)

- 2 Stichproben: Sind die Mittelwerte μ_1 und μ_2 gleich?
- Nullhypothese H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$

Fall 1: z-Test für gleiche Varianzen

- Stichproben sind voneinander unabhängig
- Verteilung der Grundgesamtheit normalverteilt,
- $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$
- Test Statistik $z = \frac{(\overline{x_1} - \overline{x_2}) - (\mu_1 - \mu_2)_0}{\sqrt{\sigma^2(1/n_1 + 1/n_2)}}$

Recap: Hypothesentests (Vergleich zweier Mittelwerte)

- 2 Stichproben: Sind die Mittelwerte μ_1 und μ_2 gleich?
- Nullhypothese H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$

Fall 2: *z*-Test für ungleiche Varianzen

- Stichproben voneinander unabhängig
- Verteilung der Grundgesamtheit normalverteilt,
- $\sigma_1 \neq \sigma_2$
- Test Statistik $z = \frac{(\overline{x_1} - \overline{x_2}) - (\mu_1 - \mu_2)_0}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}}$

Recap: Hypothesentests (Vergleich zweier Mittelwerte)

- 2 Stichproben: Sind die Mittelwerte μ_1 und μ_2 gleich?
- Nullhypothese H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$

Fall 3: *z*-Test für ungleiche Varianzen

- Stichproben sind voneinander unabhängig
- Verteilung der Grundgesamtheit irrelevant,
- aber: n_1, n_2 beide ≥ 30
- $\sigma_1 \neq \sigma_2$

- Test Statistik $z = \frac{(\overline{x_1} - \overline{x_2}) - (\mu_1 - \mu_2)_0}{\sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}}$

- wenn Varianzen der Grundgesamtheit bekannt:
  $\Rightarrow \sigma_1$ und σ_2 statt Stichprobenvarianzen

Recap: Hypothesentests (Vergleich zweier Mittelwerte)

- 2 Stichproben: Sind die Mittelwerte μ_1 und μ_2 gleich?
- Nullhypothese H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$

Fall 4: *t*-Test für gleiche Varianzen

- Stichproben sind voneinander unabhängig
- Grundgesamtheiten in etwa normalverteilt
- $\sigma_1 = \sigma_2$ (aber unbekannt)

  $\Rightarrow$ Varianzen gepoolt $s_p^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$

- Test Statistik $t = \frac{(\overline{x_1}-\overline{x_2})-(\mu_1-\mu_2)_0}{\sqrt{s_p^2(1/n_1+1/n_2)}}$
  mit $df = n_1 + n_2 - 2$ Freiheitsgraden

Recap: Hypothesentests (Vergleich zweier Mittelwerte)

- 2 Stichproben: Sind die Mittelwerte μ_1 und μ_2 gleich?
- Nullhypothese H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$

Fall 5: *t*-Test für ungleiche Varianzen

- Stichproben sind voneinander unabhängig
- Grundgesamtheit in etwa normalverteilt
- $\sigma_1 \neq \sigma_2$ (und unbekannt)

- Test Statistik $t = \frac{(\overline{x_1} - \overline{x_2}) - (\mu_1 - \mu_2)_0}{\sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}}$

  mit $df = \frac{[(s_1^2/n_1) + (s_2^2/n_2)]^2}{(s_1^2/n_1)^2/(n_1 - 1) + (s_2^2/n_2)^2/(n_2 - 1)}$ Freiheitsgraden

Aufgabe 6

Die Autoreifen zweier Marken (A und B) sollen miteinander bezüglich ihrer Lebensdauer (gemessen in gefahrenen Kilometern) verglichen werden. Zur Überprüfung führt man eine Stichprobenerhebung durch, die folgende Daten liefert:

$$\begin{array}{rcl} n_1 = 101 & / & \bar{x}_1 = 52800km; \quad s_1 = 4000km \\ n_2 = 46 & / & \bar{x}_2 = 51500km; \quad s_2 = 3000km \end{array}$$

Legen Sie als Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ zugrunde und testen Sie ob die beiden Reifentypen als gleichwertig bezüglich ihrer Lebensdauer angesehen werden können.

Aufgabe 6

- **Reifentypen gleichwertig bezüglich Lebensdauer?**

- Was wissen wir?
  - $\alpha = 0.05$
  - jeweiligen Stichprobenumfänge > 30
  - σ_1 und σ_2 sind unbekannt
  - unterschiedliche Marken $\Rightarrow$ 2 Verteilungen

- Stelle Null- und Alternativhypothese auf
  - $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \qquad H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

Aufgabe 6

- **Reifentypen gleichwertig bezüglich Lebensdauer?**
- Berechne Teststatistik: $z = \frac{(\overline{x_1} - \overline{x_2}) - (\mu_1 - \mu_2)_0}{\sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}}$
  - Einsetzen: $z = \frac{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{595.04} = 2.185$
- Vergleich Teststatistik mit kritischem Wert
  - zweiseitiger Test: für $\alpha/2 = 0.025$
    $\Rightarrow$ kritischer Wert von $z_\alpha = 1.96$
  - $z > z_\alpha \Rightarrow$ verwerfe Nullhypothese
- bei α von 5%: Es besteht ein Unterschied zwischen den Lebensdauern der Marken.

Recap: Hypothesentests (Vergleich zweier Anteilswerte)

- Anteilswertvergleich π_1 und $\pi_2 \Rightarrow H_0$: $\pi_1 - \pi_2 = 0$
- folgende Bedingungen müssen erfüllt sein:
  - $n_1 \geq 30$ und $n_2 \geq 30$
  - $n_1 p_1 \geq 5$ und $n_1(1 - p_1) \geq 5$
  - $n_2 p_2 \geq 5$ und $n_2(1 - p_2) \geq 5$
    $\Rightarrow$ Normalverteilung als Approximation für Bernoulli-Verteilung
- Test Statistik $z = \frac{(p_1 - p_2)}{\sqrt{\overline{p}(1-\overline{p})(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}}$
- gepoolter Schätzer $\overline{p} = \frac{n_1 p_1 + n_2 p_2}{n_1 + n_2}$ des Anteils in Grundgesamtheit

Aufgabe 7

An der HSG als auch an der Uni Bern wurde eine umfassende Befragung über die Einführung einer bargeldlosen Chip-Karte für die Mensa und die ihr angeschlossenen Cafeteria duchgeführt. Die Befragung ergab folgende Werte:

Universität	Anzahl der befragten Personen n_i	Anzahl der Anhänger	Anteil der Anhänger p_i
Bern	1200	672	0.56
HSG	900	549	0.61

Prüfen Sie ob ein Unterschied im Anteil der Befürworter fortschrittlicher Zahlungsmittel an den beiden Unis besteht (Signifikanzniveau α=0.05).

Aufgabe 7

- **Unterschied im Anteil der Befürworter (α=0.05)?**

- Was wissen wir?
  - $\alpha = 0.05$
  - Stichproben jeweils > 30
  - $n_1 p_1 = 672 > 5$ und $n_1(1 - p_1) = 528 > 5$
  - $n_2 p_2 = 549 > 5$ und $n_2(1 - p_2) = 351 > 5$

- Stelle Null- und Alternativhypothese auf
  - $H_0 : \pi_1 = \pi_2$ bzw. $\pi_1 - \pi_2 = 0$
  - $H_A : \pi_1 \neq \pi_2$ bzw. $\pi_1 - \pi_2 \neq 0$

Aufgabe 7

- **Unterschied im Anteil der Befürworter (α=0.05)?**

- Was brauchen wir?
  - $\overline{p} = \frac{n_1 p_1 + n_2 p_2}{n_1 + n_2} = \frac{1200 \times 0.56 + 900 \times 0.61}{1200 + 900} = 0.58$

  $\Rightarrow$ gepoolter Schätzer des Anteilswerts

- Teststatistik $z = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\overline{p}(1-\overline{p})(1/n_1 + 1/n_2)}}$
  - einsetzen: $z = \frac{-0.05}{0.58(1-0.58)(1/1200+1/900)} = -2.297$

Aufgabe 7

- **Unterschied im Anteil der Befürworter (α=0.05)?**
- Vergleich Teststatistik mit kritischem Wert
  - $\alpha = 0.05$ (zweiseitig) $\Rightarrow 1.96 = z_\alpha$
  - Vergleich: $z = |-2.297| > 1.96 = z_\alpha$
- Nullhypothese muss für $\alpha = 0.05$ verworfen werden. Es scheint einen statistisch signifikanten Unterschied zwischen beiden Universitäten zu geben.

Recap: Hypothesentests (Vergleich zweier Varianzen)

- Varianzvergleich σ_1^2 und σ_2^2
- Nullhypothese H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$
- Alternativhypothese: H_A: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

- Teststatistik (F-test) $F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$ (mit $s_1^2 > s_2^2$)

- kritischer Wert aus $F(\alpha/2, v_1, v_2)$

  α Signifikanzniveau
  $v_1 = (n_1 - 1)$ und $v_2 = (n_2 - 1)$ Freiheitsgrade
  $\Rightarrow$ n_1 Stichprobengrösse der grösseren Varianz
  $\Rightarrow$ F-Verteilung nur für Werte > 1 tabelliert

- Verwerfe Nullhypothese, wenn F-test $>$ kritischer Wert

Aufgabe 8

Die Firma T-fix verpackt Tee zu 100g-Packungen. Tee hat die unangenehme Eigenschaft, je nach Luftfeuchtigkeit mehr oder weniger in seinem Gewicht zu schwanken. Eine Stichprobe ergab folgende Packungsgewichte (in g):

100.3	99.9	102.0	98.7	103.2	101.1	100.8	99.2
98.7	100.5	100.1	97.9	101.3	100.1	98.2	101.2

Arithmetisches Mittel dieser Stichprobe: 100.2,
Stichprobenvarianz: 2.04
(a) Wenn man die **Grundgesamtheit als normalverteilt ansieht**, kann man die Nullhypothese, dass das mittlere Packungsgewicht 100g beträgt, zum Niveau $\alpha = 0.05$ verwerfen?

Aufgabe 8

(b) Nach der Beschaffung einer neuen Abfüllanlage ermittelt man in einer einfachen Zufallsstichprobe folgende Packungsgewichte (in g):

99.9	100.3	100.2	100.0	100.5	100.0
100.1	99.5	100.2	100.4	99.6	101.1

Testen Sie $H_0 : \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$ **vs.** $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ **zum Niveau** $\alpha = 0.05$.

Aufgabe 8

- **(a) Beträgt das mittlere Packungsgewicht 100g?**

- Was wissen wir?
  - $\alpha = 0.05$
  - σ^2 unbekannt
  - Grundgesamtheit normalverteilt
  - Stichprobenmittelwert $\overline{x} = 100.2$
  - Stichprobenvarianz $s^2 = 2.04$

- Stelle Null- und Alternativhypothese auf

  $\Rightarrow H_0 : \mu = 100$ versus $H_A : \mu \neq 100$
- Abweichung des Stichprobenmittelwerts von den 100g nur zufällig?

Aufgabe 8

- **(a) Beträgt das mittlere Packungsgewicht 100g?**

- Varianz muss geschätzt werden
- Kleine Stichprobe aus normalverteilten GG

  $\Rightarrow$ t-test $t = \frac{\overline{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{100.2-100}{\sqrt{2.04}/\sqrt{16}} = 0.56$

- Vergleich Teststatistik mit kritischem Wert
  - $\alpha = 0.05$
  - zweiseitig $\alpha/2 = 0.025$ und 15 Freiheitsgrade (df)
  - kritischer Wert: $t_{0.025,15} = 2.131$
  - Vergleich: $t = 0.56 < t_{0.975,15} = 2.131$
- Nullhypothese kann auf dem Niveau $\alpha = 0.05$ nicht verworfen werden.

Aufgabe 8

- **(b) Test:** $H_0 : \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$ **vs.** $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ **für** $\alpha = 0.05$

- $H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq 1$

- $s_1^2 = 2.04$ (alte Stichprobenvarianz)
- neue Stichprobe: $s_2^2 = 0.177 = 0.18$
  (mit Stichprobenmittelwert 100.15)

- Teststatistik $F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{2.04}{0.18} = 11.33$

- kritischer Wert $F_{0.95,15,11} = 2.72$
  - $\alpha = 0.05$ (einseitig!) mit $df_1 = 15$ und $df_2 = 11$

- Vergleich $F = \frac{2.04}{0.18} = 11.33 > F_{0.95,15,11} = 2.72$
- Die Varianz hat sich signifikant zum Niveau $\alpha = 0.05$ im Vergleich zur alten Abfüllanlage verkleinert.