3,120 Methoden: Statistik

Übungsblatt 3: Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Mathis Mörke
Michael Schürle
und Alois Weigand

Universität St.Gallen (HSG)

Herbstsemester 2024

Diskrete Verteilungen: Ein kleines Beispiel

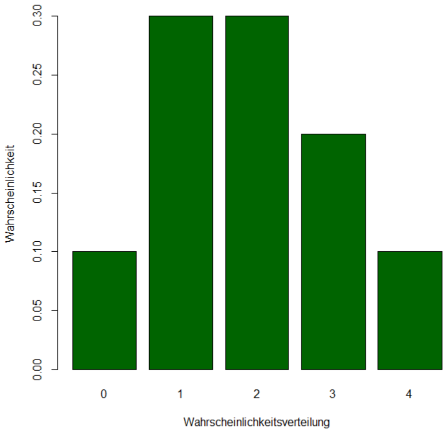
Beispiel: Bestimmen Sie den Mittelwert, die Varianz und die Standardabweichung der folgenden Wahrscheinlichkeitsverteilung:
Was haben wir:

- Zufallsvariable X
- Ausprägungen x_i
- mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten $P(X = x_i)$

x_i	0	1	2	3	4
$P(x_i)$	0.10	0.30	0.30	0.20	0.10

Diskrete Verteilungen: Ein kleines Beispiel

- **Wahrscheinlichkeitsfunktion**
  - diskrete Zufallsvariable X
    mit Werten x_1, x_2, x_3,...
    und Wahrscheinlichkeiten $f(x_i) = P(X = x_i)$



Diskrete Verteilungen: Ein kleines Beispiel

- Mittelwert (**Erwartungswert**)
  - $\mu = E(x) = \sum x_i P(x_i) = 0(0.1) + 1(0.3) + 2(0.3) + 3(0.2) + 4(0.1) = 1.9$
- **Varianz**
  - $\sigma^2 = E[(x - \mu)^2]$
  - $\sigma^2 = \sum (x_i - \mu)^2 P(x_i) = (0 - 1.9)^2(0.1) + (1 - 1.9)^2(0.3) + (2 - 1.9)^2(0.3) + (3 - 1.9)^2(0.2) + (4 - 1.9)^2(0.1) = 1.29$
- **Standardabweichung**
  - $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{1.29} = 1.14$

Refresher: Binomialverteilung

- Wahrscheinlichkeitsfunktion
  $P(x) = \binom{n}{x}\pi^x(1-\pi)^{n-x}$
  - Zahl der Erfolge x bei n Versuchen
  - Wahrscheinlichkeit π eines Erfolgs
  - Wahrscheinlichkeit bleibt konstant
    $\Rightarrow$ n Bernoulli-Experimente mit Zurücklegen

Refresher: Binomialverteilung (Intuition)

- **Was ist ein Bernoulli-Experiment?**
  - Zufallsexperiment mit 2 möglichen Ausprägungen: Ereignis A (Erfolg) und Gegenereignis $\overline{A}$ (Misserfolg)
  - Wahrscheinlichkeit für A: $P(A) = \pi$
  - Wahrscheinlichkeit für $\overline{A}$: $P(\overline{A}) = 1 - \pi$
  - Zufallsvariable X ordnet Ereignis A eine 1 (Treffer) zu und dem Gegenereignis $\overline{A}$ eine 0 (Niete)
  - für Bernoulli-Experimente gilt:
    - Erwartungswert: $E(X) = 0 \times (1 - \pi) + 1 \times \pi = \pi$
    - Varianz: $Var(X) = (0 - \pi)^2 (1 - \pi) + (1 - \pi)^2 \times \pi = \pi(1 - \pi)$

Refresher: Binomialverteilung (Intuition)

1. **n-mal wiederholte Bernoulli-Experimente**
   - Ereignis A (Erfolg) und Gegenereignis $\overline{A}$
   - $P(A) = \pi$ und $P(\overline{A}) = 1 - \pi$
   - π konstant (Experimente unabhängig)
     $\Rightarrow$ intuitiv: Mit Zurücklegen!

2. **x-mal A und $(n - x)$-mal $\overline{A}$**
   - $P(x\text{-mal A}) = \pi^x$
   - $P((n-x)\text{-mal } \overline{A}) = (1-\pi)^{(n-x)}$
   - $P((x\text{-mal A}) \cap ((n-x)\text{-mal } \overline{A})) = \pi^x \times (1-\pi)^{(n-x)}$

3. **Ergebnisfolgen mit genau x-mal A**
   - $\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$ (Reihenfolge egal, ohne Zurücklegen)
     $\Rightarrow$ Kombination
   - Beispiel: zweimal Zahl (Erfolg) bei viermaligen Werfen einer Münze ($x = 2$ aus $n = 4$)

     $\Rightarrow (K,K,Z,Z), (K,Z,K,Z), (Z,K,K,Z), (K,Z,Z,K), (Z,K,Z,K), (Z,Z,K,K)$

Refresher: Binomialverteilung

- Mittelwert und Varianz
  - Mittelwert $E(X) = n \times \pi$

    $\Rightarrow$ für Bernoulli-Experiment i: $E(X_i) = 1 \times \pi + 0 \times (1 - \pi) = \pi$
    $\Rightarrow$ Zufallsvariable X_i ist 1 bei Erfolg und sonst 0

    $\Rightarrow$ X (Anzahl Erfolge) durch Addition: $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$
    $\Rightarrow$ $E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = n \times \pi$

Refresher: Binomialverteilung

- Mittelwert und Varianz
  - Varianz $Var(X) = n \times \pi \times (1 - \pi)$

    $\Rightarrow$ für Bernoulli-Experiment i:
    $Var(X_i) = (0 - \pi)^2(1 - \pi) + (1 - \pi)^2(\pi) = \pi(1 - \pi)$

    $\Rightarrow$ Zufallsvariable X_i stochastisch unabhängig
    $\Rightarrow Var(X) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = n \times \pi \times (1 - \pi)$

Aufgabe 1

Ein Glücksrad ist in 9 gleichgrosse Abschnitte eingeteilt, die mit den Zahlen 1 bis 9 durchnummeriert sind.
1. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei siebenmaligem Drehen das Rad zweimal im Feld 8 stehen bleibt?
2. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass beim siebenmaligem Drehen das Rad viermal in einem Feld mit einer geraden Nummer stehen bleibt?

Aufgabe 1

- Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei siebenmaligem Drehen das Rad zweimal im Feld 8 stehen bleibt?
  - 7-mal Drehen
  - 2-mal auf 8
  - jeder Versuch: Wahrscheinlichkeit konstant
    $\Rightarrow$ mit Zurücklegen

  - $P(\{8\}) = \pi = 1/9$
  - $P(\{\bar{8}\}) = 1 - \pi = 8/9$
  - $n = 7$ Versuche
  - $x = 2$ Erfolge

  - Binomialverteilung $P(x) = \binom{n}{x}\pi^x(1-\pi)^{n-x}$

Aufgabe 1

- Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei siebenmaligem Drehen das Rad zweimal im Feld 8 stehen bleibt?

  - Binomialverteilung
    $P(x) = \binom{n}{x} \pi^x (1-\pi)^{n-x}$

  - Anzahl Erfolge x, Misserfolge $(n-x)$
  - WK/ Gegen-WK (Bernoulli): π, $1-\pi$
  - Sequenz von $x = 2$ Erfolgen bei $n = 7$ Versuchen: $\binom{n}{x}$
    $\Rightarrow$ Kombination (Reihenfolge egal), ohne Zurücklegen

  - **Einsetzen:**
    $P(x=2) = \binom{7}{2}(1/9)^2(8/9)^{7-2} = 0.1439$

    $\binom{7}{2} = \frac{7!}{2! \times 5!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{2! \times 5!} = \frac{7 \times 6}{2} = 7 \times 3 = 21$

Aufgabe 1

- Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass beim siebenmaligem Drehen das Rad viermal in einem Feld mit einer geraden Nummer stehen bleibt?

  - Binomialverteilung
    $P(x) = \binom{n}{x}\pi^x(1-\pi)^{n-x}$

  - 7-mal Drehen, $x = 4$ Erfolge (gerade)
  - $P(\{2,4,6,8\}) = 4/9$
  - $P(\{1,3,5,7,9\}) = 5/9$

  - **Einsetzen:**
    $P(x = 4) = \binom{7}{4}(4/9)^4(5/9)^{7-4} = 0.2341$

    $\binom{7}{4} = \frac{7!}{4! \times 3!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times 3!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2} = 35$

Aufgabe 2

Eine binomialverteilte Zufallsvariable X habe einen Erwartungswert von 2 und eine Varianz von $\frac{4}{3}$. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für $x = 2$?

Aufgabe 2

- **Wahrscheinlichkeit für $x = 2$?**
- **Was wissen wir?**
  - Binomialverteilung $P(x = 2) = \binom{n}{2}\pi^2(1-\pi)^{n-2}$
  - $E(X) = \mu = 2$ und $VAR(X) = \sigma^2 = 4/3$
- **wir brauchen π, $1-\pi$, n!**
  - wir wissen: $E(X) = \mu = 2 = n \times \pi$
  - wir wissen: $VAR(X) = \sigma^2 = 4/3 = n \times \pi \times (1-\pi)$
  - daher: $2(1-\pi) = 4/3 \rightarrow 1 - \pi = 4/3 \times 1/2 = 4/6 = 2/3$

    i) $1 - \pi = 2/3 \rightarrow \pi = 1/3$

    ii) $n\pi = 2 \rightarrow n \times 1/3 = 2 \rightarrow n = 3 \times 2 = 6$

Aufgabe 2

- **Wahrscheinlichkeit für $x = 2$?**
- **Was wissen wir?**
  - Binomialverteilung $P(x = 2) = \binom{n}{2}\pi^2(1-\pi)^{n-2}$
  - $E(X) = \mu = 2$ und $VAR(X) = \sigma^2 = 4/3$
  - wir brauchen π, $1-\pi$, n!
  - wir wissen: $1 - \pi = 2/3$ und $\pi = 1/3$
  - wir wissen: $n = 6$
  - Einsetzen:
    $P(x = 2) = \binom{6}{2}(1/3)^2(2/3)^{6-2} = 0.3292$

Aufgabe 3

Eine Zufallsvariable X hat folgende Wahrscheinlichkeitsfunktion:

x_i	0	1	2	3	4
$f(x_i)$	k	0.1	0.4	$2k$	$2k$

Betimmen Sie den Wert von k.

Aufgabe 3

- Wert von k?

x_i	0	1	2	3	4
$f(x_i)$	k	0.1	0.4	$2k$	$2k$

  - $1 = k + 1/10 + 4/10 + 4k$
  - $1 = 5k + 5/10 \rightarrow 1 - 5/10 = 5k$
  - $1/2 = 5k$
  - $k = 1/2 \times 1/5 = 1/10 = k$

Refresher: Poissonverteilung

- meist verwendet statt Binomialverteilung, wenn...
  n **sehr gross ist und** π **sehr klein ist**
  $\Rightarrow$ Weiers: $n > 20$ und $\pi < 0.05$
  z.B Ausfallwahrscheinlichkeit bei Kreditinstituten

- Wahrscheinlichkeitsfunktion
  $P(X = x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}$

  Eulersche Zahl $e = 2.71828...$
  $\mu = n \times \pi$ ist konstant
  $E(X) = Var(X) = \mu$

Aufgabe 4

Im letzten Jahr war das Computernetz einer Universität im Mittel 0.4 Virusattacken pro Woche ausgesetzt. Der Verantwortliche des Rechenzentrums schätzt, dass beim Auftreten eines neuen Viruses der Universität jeweils ein Schaden von (im Mittel) CHF 1000,- entsteht, um den Virus zu entfernen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit (unter der Annahme einer Poisson-Verteilung), dass in der kommenden Woche kein Virus auftritt? Wie hoch ist der zu erwartete Schaden, der in der kommenden Woche auf die Uni zukommt?

Aufgabe 4

- **Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit (Annahme: Poisson-Verteilung), dass in der kommenden Woche kein Virus auftritt?**

- Poissonverteilung $P(X = x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}$

- Was wissen wir? $E(X) = \mu = 4/10$
  - kein Virus: $P(x = 0) = \frac{0.4^0 e^{-0.4}}{0!} = 0.6703$

    $\Rightarrow 0! = 1$
  - erwarteter Schaden: $E(X) = 0.4 \times 1000 = 400$

Refresher: Hypergeometrische Verteilung

- $P(X = x) = \frac{\binom{s}{x}\binom{N-s}{n-x}}{\binom{N}{n}}$

  aus N Elementen mit s Erfolgen und $(N - s)$ Misserfolgen werden n Elemente gezogen

- Von den $\binom{N}{n}$ möglichen Ergebnisfolgen enthalten $\binom{s}{x}\binom{N-s}{n-x}$ Ergebnisfolgen genau x Erfolge (Fundamentalprinzip)

- statt Binomialverteilung, wenn...

  sich Wahrscheinlichkeit des Erfolgs mit jedem Zug ändert!

  $\Rightarrow$ **ohne Zurücklegen**

Beispiel: Hypergeometrische Verteilung

Beim Zahlenlotto *6 aus 49* werden Zahlen **ohne Zurücklegen** gezogen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für 3, 4, 5, bzw. 6 Richtige?

Beispiel: Hypergeometrische Verteilung

- *6 aus 49* Zahlen ohne Zurücklegen
- Aus $N = 49$ Elementen, mit $s = 6$ Richtige, werden $n = 6$ Elemente gezogen
- Wahrscheinlichkeit von x gezogenen Richtige?
- $P(X = x) = \frac{\binom{s}{x}\binom{N-s}{n-x}}{\binom{N}{n}}$

$$P(X = 3) = \frac{\binom{6}{3}\binom{49-6}{6-3}}{\binom{49}{6}} = 0.0176504038$$

$$P(X = 4) = \frac{\binom{6}{4}\binom{49-6}{6-4}}{\binom{49}{6}} = 0.0009686197$$

$$P(X = 5) = \frac{\binom{6}{5}\binom{49-6}{6-5}}{\binom{49}{6}} = 0.0000184499$$

$$P(X = 6) = \frac{\binom{6}{6}\binom{49-6}{6-6}}{\binom{49}{6}} = 0.0000000715$$

Aufgabe 5

Für die Mitarbeit in einem Komitee haben sich 14 Personen beworben, davon haben 5 bereits in dieser Art von Komitee mitgearbeitet, die übrigen 9 noch nicht.
Es werden nun 5 Mitglieder per Losentscheid ausgewählt. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau 3 erfahrene Mitglieder in dem Komitee arbeiten werden?

Aufgabe 5

- Urnenmodell
- 14 Kugeln (Personen)
- 5 rot (erfahren)
- 9 schwarz (unerfahren)

- Ziehe 5 Kugeln! $P(x = 3) = ?$
- Hypergeometrische Verteilung
  - $P(X = x) = \frac{\binom{s}{x}\binom{N-s}{n-x}}{\binom{N}{n}}$

Aufgabe 5

- Hypergeometrische Verteilung

$$P(X = x) = \frac{\binom{s}{x}\binom{N-s}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$P(X = x) = \frac{\binom{5}{3}\binom{14-5}{5-3}}{\binom{14}{5}}$$

i) $\binom{14}{5}$ von 14 Kugeln werden 5 gezogen

ii) $\binom{5}{3}$ davon: aus 5 Kugeln (Erfolge) werden 3 gezogen

iii) $\binom{14-5}{5-3}$ von $14 - 5$ Misserfolgen werden $5 - 3$ gezogen

iv) Reihenfolge egal, aber ohne Zurücklegen!
$\Rightarrow$ jedes mal ändert sich Wahrscheinlichkeit

Aufgabe 5

- Hypergeometrische Verteilung

$$P(X = x) = \frac{\binom{s}{x}\binom{N-s}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$P(X = x) = \frac{\binom{5}{3}\binom{14-5}{5-3}}{\binom{14}{5}}$$

$$P(X = x) = \frac{\binom{5}{3}\binom{14-5}{5-3}}{\binom{14}{5}} = 0.1798$$

Aufgabe 6

2% der Angestellten eines Unternehmens leiden unter Depressionen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass unter 100 zufällig ausgewählten Mitarbeitern mindestens 3 unter Depression leiden.

1. mit Hilfe der Binomialverteilung
2. mit Hilfe der Poissonverteilung

Aufgabe 6

- Binomialverteilung
  X ist B(100;0.02)-verteilt:
  $\Rightarrow$ 2% von 100
- unter 100 Mitarbeiter mindestens 3 depressiv:

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2) \\ &= 1 - \binom{100}{0} 0.02^0 \cdot 0.98^{100} - \binom{100}{1} 0.02^1 \cdot 0.98^{99} - \binom{100}{2} 0.02^2 \cdot 0.98^{98} \\ &= 0.323314 \end{aligned}$$

Aufgabe 6

- Poissonverteilung

$\mu = n\pi = 2$

$P(X = x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}$

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 3) &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) \\
&= 1 - \frac{2^0 e^{-2}}{0!} - \frac{2^1 e^{-2}}{1!} - \frac{2^2 e^{-2}}{2!} \\
&= 1 - e^{-2}[\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!}] \\
&= 1 - e^{-2}[1 + 2 + 4/2] \\
&= 1 - e^{-2}[5] \\
&= 0.323324
\end{aligned}
$$

Aufgabe 6

Achtung: Beide Ergebnisse liefern nahezu dasselbe Ergebnis.

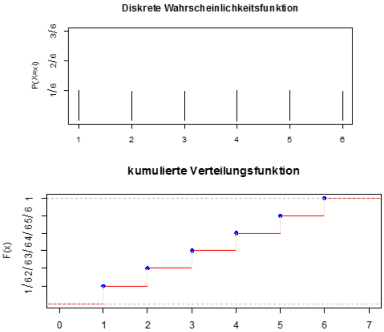
Tatsächlich wird mit der Binomialverteilung angenommen, dass die Mitarbeiter mehrmals ausgewählt werden können (mit Zurücklegen). Diese Annahme scheint für die vorliegende Aufgabenstellung wenig intuitiv, kann aber durch die genügend grosse Anzahl der Beobachtungen approximativ vernachlässigt werden.

Die Fallunterscheidung (mit oder ohne Zurücklegen) spielt für die Poissonverteilung keine Rolle. Die Poissonverteilung kann angewandt werden, da die Eintrittswahrscheinlichkeit bei genügend grosser Anzahl an Beobachtungen sehr gering ist.

Refresher: Diskrete vs. stetige Verteilungsfunktionen

- diskrete Zufallsvariable X
  - Wahrscheinlichkeitsfunktion $P(X = x_i) = f(x_i)$
  - Verteilungsfunktion $F(X \leq x) = \sum_{x_i < x} f(x_i)$
    $\Rightarrow$ Treppenfunktion

- Beispiel: Würfel mit $P(X = x_i) = 1/6,\ i = 1, .., 6$



Refresher: Diskrete vs. stetige Verteilungsfunktionen

- stetige Zufallsvariable X
  - **Dichtefunktion** $f(x)$

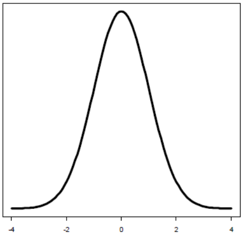
    $$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

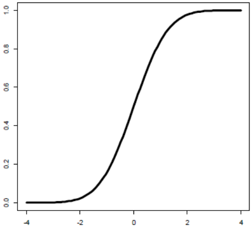
  - **Achtung:** für stetige Zufallsvariable X
    - **Dichtefunktion** $f(x) \Rightarrow P(X = x_i) = 0$
      $\Rightarrow$ Intervall der Länge Null!

  - **Verteilungsfunktion**
  - $F(x) = P(X \leq x)$ und $1 - F(x) = P(X \geq x)$

Refresher: Diskrete vs. stetige Verteilungsfunktionen

- Dichte- und Verteilungsfunktion





Refresher: Normalverteilung

- Normalverteilung (Mittelwert μ, Standardabweichung σ) mit Dichtefunktion $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
  - Transformation in Standardnormalverteilung ($\mu = 0$, $\sigma = 1$)
  - Zufallsvariable $X \rightarrow Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$

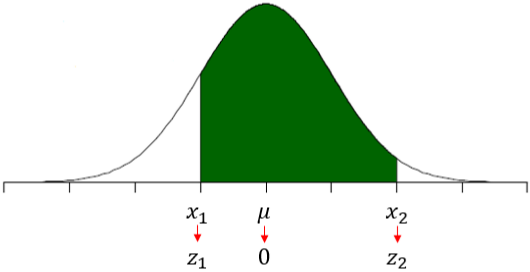
Refresher: Normalverteilung

- Transformation in Standardnormalverteilung ($\mu = 0$, $\sigma = 1$)

Schritt 1: $P(x_1 \leq X \leq x_2)$

Schritt 2: $P(\frac{x_1-\mu}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x_2-\mu}{\sigma})$

Schritt 3: $P(z_1 \leq Z \leq z_2)$



Refresher: Normalverteilung

- Schritt 1: Standardisieren: Berechne z-Werte
- Schritt 2: Finde den entsprechenden Wert in der Tabelle

Refresher: Tabelle Standardnormalverteilung

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817

Aufgabe 7

Im Jahr 2003 betrug das Durchschnittseinkommen der Schweizer Haushalte CHF 7416,- monatlich bei einer Standardabweichung von CHF 910,-. Unterstellen Sie eine Normalverteilung für das Einkommen. Wie gross ist der Anteil der Haushalte mit einem Einkommen

1. von grösser als CHF 10'000,-?
2. zwischen CHF 6500,- und CHF 8500,-?
3. weniger als CHF 5000,-?

Aufgabe 7

- Wie gross ist der Anteil der Haushalte mit einem Einkommen von grösser als CHF 10'000,-?
  - $P(X \geq 10000) = P(Z \geq \frac{10000-7416}{910}) = P(Z \geq 2.84)$
  - $z = 2.84 \Rightarrow 0.9977$
  - $P(Z \geq 2.84) = 1 - 0.9977 = 0.0023$

Aufgabe 7

- Wie gross ist der Anteil der Haushalte mit einem Einkommen zwischen CHF 6500,- und CHF 8500,-?
  - $P(6500 \leq X \leq 8500) = P(\frac{6500-7416}{910} \leq Z \leq \frac{8500-7416}{910}) = P(-1.01 \leq Z \leq 1.19)$
  - $F_{SN}(1.19) - F_{SN}(-1.01) = 0.7268$

Aufgabe 7

- Wie gross ist der Anteil der Haushalte mit einem Einkommen von weniger als CHF 5000,-?
  - $P(X \leq 5000) = P(Z \leq \frac{5000-7416}{910}) = P(Z \leq -2.66) = 0.0039$

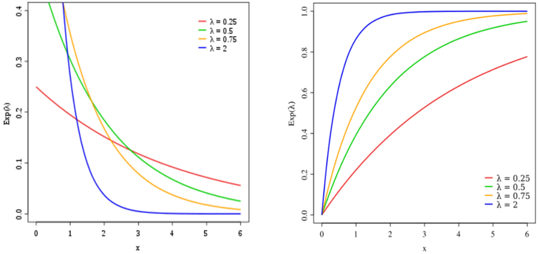
Refresher: Exponentialverteilung

- Dichtefunktion $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$
- z.B. x Zeit zwischen 2 seltenen Ereignissen
  - Anwendung: Lebensdauer, Abfertigungszeiten in Produktion, Verwaltung, verbleibende Zeit in Warteschlange

  - Erwartungswert $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ und Varianz $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

Refresher: Exponentialverteilung

- Dichtefunktion $f(x)$ und Verteilungsfunktion $F(x)$



Refresher: Exponentialverteilung

- Dichtefunktion
  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

- Verteilungsfunktion
  $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$
  $P(X \leq x) = F(x)$
  $P(X \geq x) = 1 - F(x) = 1 - (1 - e^{-\lambda x}) = e^{-\lambda x}$

Aufgabe 8

1. Von einem elektrischen Bauteil ist bekannt, dass es durchschnittlich 10 Jahre hält (und seine Ausfallwahrscheinlichkeit exponentialverteilt ist). Mit welcher Wahrscheinlichkeit hält das Bauteil nur 8 Jahre oder kürzer?
2. Auf Ihrer Zugstrecke ist die Höhe der Verspätungen exponentialverteilt. Heute ist Ihr Zug verspätet. Die mittlere Verspätung der verspäteten Züge beträgt 5 Minuten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit müssen Sie länger als 10 Minuten warten?

Aufgabe 8

- **Mit welcher Wahrscheinlichkeit hält das Bauteil nur 8 Jahre oder kürzer?**
  - Was wissen wir? $E(X) = 1/\lambda = 10$
  - λ als Kehrwert der durchschnittlichen Dauer

  - Gesucht: $P(X \leq 8) =?$
  - aus Verteilungsfunktion
    $F(x) = 1 - e^{-\lambda x} = 1 - e^{-\frac{1}{10} \times 8} = 1 - e^{-\frac{8}{10}} = 0.5507$

Aufgabe 8

- **Mit welcher Wahrscheinlichkeit müssen Sie länger als 10 Minuten warten?**
  - Was wissen wir? $E(X) = 1/\lambda = 5$
  - $\lambda = \frac{1}{5}$

  - Gesucht: $P(X \geq 10) =?$
  - aus Verteilungsfunktion $1 - F(x) = 1 - (1 - e^{-\lambda x}) = e^{-\lambda x} = e^{-\frac{1}{5} \times 10} = e^{-\frac{10}{5}} = e^{-2} = 0.1353$

Aufgabe 9

Angenommen, dass ungefähr 40% der hiesigen Studenten eine Teilzeitbeschäftigung während des Studiums ausüben. Es sei x die Anzahl der Studenten in einer zufälligen Stichprobe vom Umfang $n = 20$.

1. Bestimmen Sie Mittelwert und Standardabweichung der Binomialverteilung.
2. Approximieren Sie mit Hilfe der Normalverteilung die Wahrscheinlichkeit, dass sich genau 8 Studenten mit Teilzeitbeschäftigung in der Stichprobe befinden. (NB: Approximieren Sie $x = 8$ mit $7.5 \leq x \leq 8.5$.)
3. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mind. 6 Studenten in der Stichprobe eine Teilzeitbeschäftigung ausüben (ebenfalls durch Approximation mit der NV).

Aufgabe 9

- **Mittelwert und Standardabweichung**
  - x ist binomialverteilt (diskret) mit $\pi = 0.4$ und $n = 20$

    Erwartungswert $\mu = n\pi = 20 \cdot 0.4 = 8$

    Varianz $\sigma^2 = n\pi(1 - \pi) = 20 \cdot 0.4 \cdot 0.6$

    Standardabweichung $\sigma = \sqrt{20 \cdot 0.4 \cdot 0.6} = 2.19$

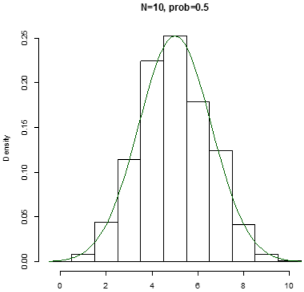
Aufgabe 9

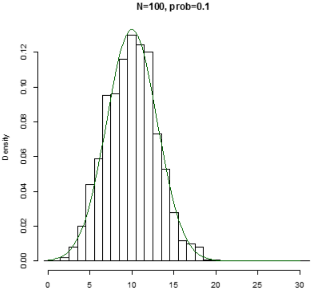
Angenommen, dass ungefähr 40% der hiesigen Studenten eine Teilzeitbeschäftigung während des Studiums ausüben. Es sei x die Anzahl der Studenten in einer zufälligen Stichprobe vom Umfang $n = 20$.

1. Bestimmen Sie Mittelwert und Standardabweichung der Binomialverteilung.
2. **Approximieren Sie mit Hilfe der Normalverteilung die Wahrscheinlichkeit, dass sich genau 8 Studenten mit Teilzeitbeschäftigung in der Stichprobe befinden. (NB: Approximieren Sie $x = 8$ mit $7.5 \leq x \leq 8.5$.)**
3. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mind. 6 Studenten in der Stichprobe eine Teilzeitbeschäftigung ausüben (ebenfalls durch Approximation mit der NV).

Aufgabe 9

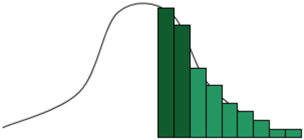
- **Approximation durch Normalverteilung**
  - wenn $n\pi > 5$ und $n(1-\pi) > 5$
    $\Rightarrow$ Approximation verbessert sich mit zunehmendem n
  - Binomialverteilung approximiert durch Normalverteilung mit Mittelwert $\mu = n \cdot \pi$ und Varianz $\sigma^2 = n \cdot \pi \cdot (1-\pi)$





Aufgabe 9

- **Approximation durch Normalverteilung**
  - **Problem:** Binomialverteilung ist diskret, Normalverteilung ist stetig
  - **Achtung:** Wahrscheinlichkeit für Wert x_i ist im diskreten Fall positiv, während die Punktwahrscheinlichkeit bei einer stetigen Verteilung null ist $(P(X = x_i) = 0)$
  - **Stetigkeitskorrektur:** Um die Approximationsverteilung $P(x_i)$ zu bestimmen, berechnet man das Intervall von $x_i - 0.5$ bis $x_i + 0.5$



Aufgabe 9

- **Approximation durch Normalverteilung**
  - WK, dass 8 Studenten mit Teilzeitbeschäftigung in Stichprobe

    $P(X = 8) = P(7.5 \leq X \leq 8.5) = P(-0.23 \leq Z \leq 0.23) =$
    $2 \times 0.0910 = 0.1820$

  - Was wissen wir?
    - z-Werte: $z_1 = \frac{7.5-8}{2.19} = -0.23$ und $z_2 = \frac{8.5-8}{2.19} = 0.23$
    - Tabelle: für $z = 0.23 \Rightarrow 0.591$
    - Fläche unter Dichtefunktion hat Wert 1
    - Dichtefunktion symmetrisch um Wert Null
      $\Rightarrow 0.591 - 0.5 = 0.0910$

Aufgabe 9

- **Approximation durch Normalverteilung**
  - WK, dass mind. 6 Studenten mit Teilzeitbeschäftigung

    $P(X \geq 6) = P(X \geq 5.5) = P(Z \geq -1.14) = 0.8729$

    z-Werte: $z = \frac{5.5-8}{2.19} = -1.14$
    Tabelle: für $z = 1.14 \Rightarrow 0.8729$