3,120 Methoden: Statistik

Übungsblatt 2: Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung

Mathis Mörke
Michael Schürle
und Alois Weigand

Universität St.Gallen (HSG)

Herbstsemester 2024

Wahrscheinlichkeitstheorie: Ein kurzer Überblick

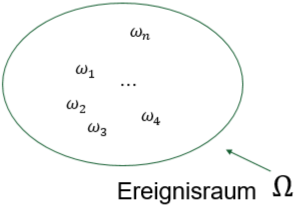
- **Zufallsexperiment**
  - unter gleichen Bedingungen ausgeführt
  - beliebig oft wiederholbar
  - Ereignis ist ungewiss

3 Komponenten:

- **Ereignisraum:** alle möglichen Elementarereignisse
- **Zufallsvariable:** gibt Ereignissen eine reelle Zahl
- **Wahrscheinlichkeitsfunktion:** ordnet Wahrscheinlichkeiten zu

Wahrscheinlichkeitstheorie: Ein kurzer Überblick

- **Schritt 1: Elementarereignisse**
  - alle möglichen Elementarereignisse eines Experiments
  - gesammelt im Ereignisraum Ω



  - Beispiel: Werfen von 2 Münzen: *Kopf* oder *Zahl*
    $\Rightarrow \Omega = \{(K, K), (K, Z), (Z, K), (Z, Z)\}$
    $\Rightarrow$ 4 Möglichkeiten (egal, wie oft geworfen wird)

Wahrscheinlichkeitstheorie: Ein kurzer Überblick

- **Was ist ein Ereignisraum?**
  - Menge Ω aller möglichen Elementarereignisse eines Zufallsexperiments
    $\Rightarrow$ mögliche Ergebnisse
  - **Beispiel 1** Würfel: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  - **Beispiel 2** Münzwurf: $\Omega = \{\mathit{Kopf}, \mathit{Zahl}\}$

Wahrscheinlichkeitstheorie: Ein kurzer Überblick

- **Schritt 2: Zufallsvariable** X
  - wandelt Elementarereignisse in eine reelle Zahl um
  - oft bereits in Aufgabe oder Forschungsfrage gegeben, z.B. Würfel: Elementarereignisse als Augensumme $1, 2, 3, 4, 5, 6$
  - unser Beispiel: Werfen von 2 Münzen $\rightarrow$ X sei Anzahl, wie oft Zahl geworfen wird
    $\Omega = \{(K, K), (K, Z), (Z, K), (Z, Z)\}$
    Zufallsvariable X mit Ausprägungen $x_i : 0, 1, 2$

Wahrscheinlichkeitstheorie: Ein kurzer Überblick

- **Schritt 3: Wahrscheinlichkeitsfunktion** P
  - ordnet den Ereignissen eine Wahrscheinlichkeit zu
  - unser Beispiel: Werfen von 2 Münzen, X sei Anzahl, wie oft Zahl geworfen wird (Zufallsvariable X durch Forschungsfrage festgelegt)
  - $\Omega = \{(K,K),(K,Z),(Z,K),(Z,Z)\}$
    mit folgender Wahrscheinlichkeitsverteilung

x_i	0	1	2
$f(x_i) = P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

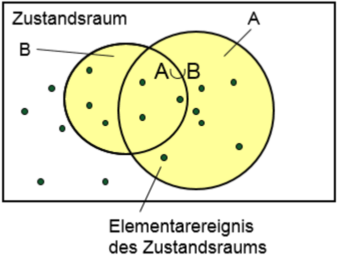
  - Kontrolle: Wahrscheinlichkeiten müssen sich zu 1 addieren

Refresher

- **Elementareignisse können verknüpft sein**
  - Beispiel: Werfen eines Würfels
    $\Rightarrow \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
    Augenzahl gerade (Ereignis A)
    $\Rightarrow A = \{2, 4, 6\}$
  - Beispiel: Werfen von 2 Würfel
    $\Rightarrow \Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), ...(6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$
    $\Rightarrow$ Augensumme grösser als 10 (Ereignis A)
    $\Rightarrow A = \{(5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$

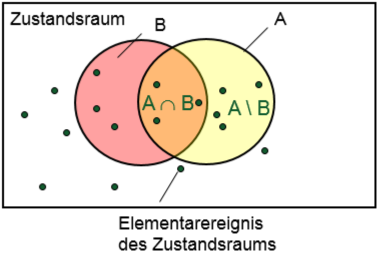
Refresher

- **Rechenregeln für Ereignisse**
  - $A \cup B$: "*A oder B oder beide*"



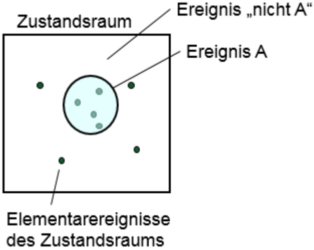
Refresher

- **Rechenregeln für Ereignisse**
  - $A \cap B$: "*A und B gemeinsam*"



Refresher

- **Rechenregeln für Ereignisse**
  - $\overline{A}$ Komplementärereignis zu A (*nicht* A):
    $\Rightarrow \overline{A}$ und A schliessen sich aus



Refresher

- **Rechenregeln für Ereignisse**
  - Ω sicheres Ereignis (tritt immer auf)
  - $\emptyset$ unmögliches Ereignis (tritt nie auf)

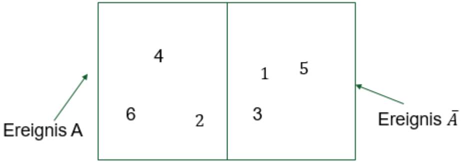
  - gilt $A \cap B = \emptyset$ für A und B
    $\Rightarrow$ Ereignisse schliessen sich aus (disjunkt)

Refresher

- **Beispiel: Rechenregeln für Ereignisse**
  - Würfel: Augenzahl gerade (Ereignis A)
    $\Rightarrow A = \{2, 4, 6\}$
  - Würfel: Augenzahl ungerade (Ereignis $\overline{A}$)
    $\Rightarrow \overline{A} = \{1, 3, 5\}$
  - $A \cup \overline{A}$: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$
  - $A \cap \overline{A} = \emptyset$ (leere Menge)
    $\Rightarrow$ A und $\overline{A}$ schliessen sich aus

Refresher

- **Beispiel: Rechenregeln für Ereignisse**
  - Ereignisse $A = \{2, 4, 6\}$ und $\overline{A} = \{1, 3, 5\}$
  - $A \cup \overline{A}$: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$
  - $A \cap \overline{A} = \emptyset$ (leere Menge)
    $\Rightarrow$ A und $\overline{A}$ schliessen sich aus
  - Venn Diagram



P(A)=P($\bar{A}$)=3/6=1/2

Refresher

- **Regeln für Wahrscheinlichkeiten (Axiome)**
  - Wahrscheinlichkeit ordnet Ereignis A eine reelle Zahl $P(A)$ zu (meistens als relative Häufigkeiten interpretiert)
  - P nicht-negativ: $P(A) \geq 0$
    $\Rightarrow$ Wahrscheinlichkeiten sind positiv
  - P normiert: $P(\Omega) = 1$ und $P(\emptyset) = 0$
    $\Rightarrow$ ein sicheres Ereignis hat WK von 1, ein unmögliches Ereignis hat die WK von 0
  - P additiv: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ für $A \cap B = \emptyset$
    $\Rightarrow$ wenn sich Ereignisse A und B **nicht** überschneiden!!

Refresher

- **Rechenregeln**

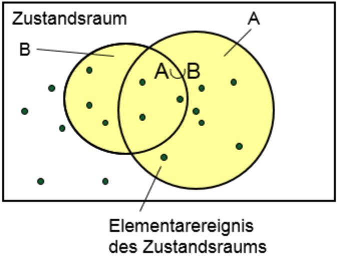
  $\Rightarrow$ Additionsregeln: Wir interessieren uns für $P(A \cup B)$

  $\Rightarrow$ Multiplikationsregeln: Wir interessieren uns für $P(A \cap B)$

Refresher

- **Rechenregeln**

  $\Rightarrow$ Additionsregeln: Wir interessieren uns für $P(A \cup B)$

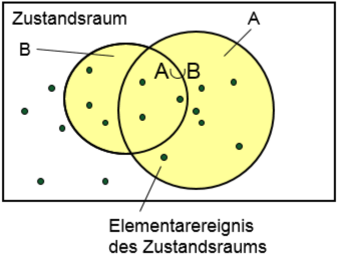


Refresher

- **Additionsregeln bei Wahrscheinlichkeiten**
  - $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (generelle Regel)
  - $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
  - $P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$

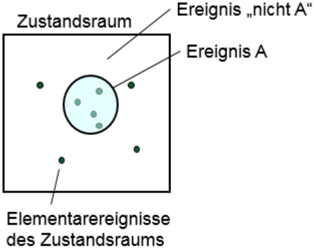
Refresher

- **Additionsregeln bei Wahrscheinlichkeiten**
  - $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (generelle Regel)



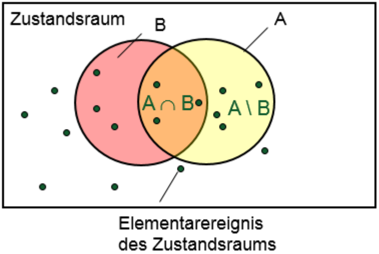
Refresher

- **Additionsregeln bei Wahrscheinlichkeiten**
  - $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$



Refresher

- **Additionsregeln bei Wahrscheinlichkeiten**
  - $P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$



Aufgabe 1

Ein Unternehmen benötigt für seine Produktion regelmässig die Zulieferung von komplexen Systembauteilen, welche mit einer speziellen Solarzelle bestückt sind. Die Bauteile werden in Losen à 3 Stück geliefert. Nach Erhalt erfolgt eine Prüfung der Solarzellen auf ihre Funktionsfähigkeit. Ergebnis der Untersuchung ist die **Anzahl der nichtbrauchbaren Solarzellen** je Los.

1. **Stellen Sie den Ereignisraum Ω zu obigem Zufallsexperiment auf**.
2. Bei der Untersuchung werden folgende Ereignisse betrachtet:
   - A: Nach der Untersuchung ist **höchstens** eine Solarzelle für das Systembauteil unbrauchbar.
   - B: Nach der Untersuchung erweist sich **mindestens** eine Solarzelle als unbrauchbar.

   Die Wahrscheinlichkeiten von A und B seien aus langen Versuchsreihen bekannt: $P(A) = 0.9$; $P(B) = 0.3$. **Stellen Sie A und B als Teilmengen von Ω dar**.
3. Zeichnen Sie ein **Venn-Diagramm**.
4. Berechnen Sie die **Wahrscheinlichkeit** für folgende Ereignisse:
   - keine Solarzelle unbrauchbar
   - genau eine Solarzelle unbrauchbar
   - mind. 2 Solarzellen unbrauchbar
   - $A \cup B$

Aufgabe 1

- **Was ist ein Ereignisraum?**
  - Menge Ω aller möglichen Elementarereignisse eines Zufallsexperiments
    $\Rightarrow$ mögliche Ergebnisse
  - **hier:** Zufallsvariable X ist die Anzahl nicht brauchbarer Solarzellen pro Los (indirekt durch Aufgabe vorgegeben)
  - pro Los werden 3 Stück geliefert
    $\Rightarrow$ Anzahl möglicher unbrauchbarer Solarzellen: $0, 1, 2, 3$
  - $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$

Aufgabe 1

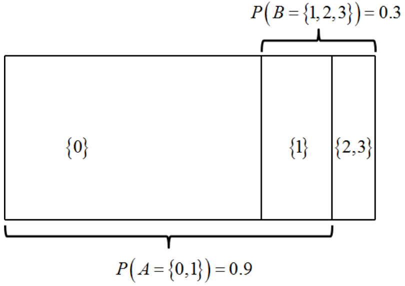
- **Stellen Sie A und B als Teilmengen von Ω dar**
  - Wir wissen: $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$
  - A: Nach der Untersuchung ist höchstens eine Solarzelle für das Systembauteil unbrauchbar.
  - B: Nach der Untersuchung erweist sich mindestens eine Solarzelle als unbrauchbar.

Aufgabe 1

- **Stellen Sie A und B als Teilmengen von Ω dar**
  - A: Nach der Untersuchung ist **höchstens** eine Solarzelle für das Systembauteil unbrauchbar.
    $\Rightarrow A = \{0, 1\}$
  - B: Nach der Untersuchung erweist sich **mindestens** eine Solarzelle als unbrauchbar.
    $\Rightarrow B = \{1, 2, 3\}$

Aufgabe 1

- Zeichnen Sie das Venn-Diagramm



Aufgabe 1

- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse
  - **keine Solarzelle ist unbrauchbar**
  - genau eine Solarzelle ist unbrauchbar
  - mindestens 2 Solarzellen sind unbrauchbar
  - $A \cup B$

Aufgabe 1

- Wahrscheinlichkeit für folgendes Ereignis
  - **keine Solarzelle ist unbrauchbar**
  - Was wissen wir?
    $P(A) = P(\{0, 1\}) = 0.9$
    $P(B) = P(\{1, 2, 3\}) = 0.3$
  - Ereignis "kein Bauteil defekt" ist das Gegenereignis von B
  - $P(\overline{B}) = P(\{0\}) = 1 - P(B) = 1 - 0.3 = 0.7$

Aufgabe 1

- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse
  - keine Solarzelle ist unbrauchbar
  - **genau eine Solarzelle ist unbrauchbar**
  - mindestens 2 Solarzellen sind unbrauchbar
  - $A \cup B$

Aufgabe 1

- Wahrscheinlichkeit für folgendes Ereignis
  - **genau eine Solarzelle ist unbrauchbar**
  - Was wissen wir?
    $P(A) = P(\{0,1\}) = 0.9$
    $P(B) = P(\{1,2,3\}) = 0.3$
    $P(\overline{B}) = P(\{0\}) = 0.7$
  - Ereignis "genau ein Bauteil defekt"
    $\Rightarrow$ Durchschnitt von A und $B \rightarrow P(A \cap B)$
  - **Versuch 1:** $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

    Problem: $P(A \cup B)$ unbekannt

Aufgabe 1

- Wahrscheinlichkeit für folgendes Ereignis
  - **genau eine Solarzelle ist unbrauchbar**
  - Was wissen wir?
    $P(A) = P(\{0, 1\}) = 0.9$
    $P(B) = P(\{1, 2, 3\}) = 0.3$
    $P(\overline{B}) = P(\{0\}) = 0.7$
  - Ereignis "genau ein Bauteil defekt"
    $\Rightarrow$ Durchschnitt von A und $B \rightarrow P(A \cap B)$
  - **Versuch 2:** $P(A \cap B) = P(A) - P(A \backslash B)$

    $P(A \cap B) = 0.9 - 0.7 = 0.2$
    oder P({1})=P({0,1})-P({0})

Aufgabe 1

- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse
  - keine Solarzelle ist unbrauchbar
  - genau eine Solarzelle ist unbrauchbar
  - **mindestens 2 Solarzellen sind unbrauchbar**
  - $A \cup B$

Aufgabe 1

- Wahrscheinlichkeit für folgendes Ereignis
  - **mindestens 2 Solarzellen sind unbrauchbar**
  - Was wissen wir?
    $P(A) = P(\{0,1\}) = 0.9$
    $P(B) = P(\{1,2,3\}) = 0.3$
  - Ereignis "mindestens 2 Bauteile defekt"
    $\Rightarrow$ Komplementärereignis zu A
  - $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0.1$
    oder P({2,3})=P({0,1,2,3})-P({0,1})

Aufgabe 1

- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse
  - keine Solarzelle ist unbrauchbar
  - genau eine Solarzelle ist unbrauchbar
  - mindestens 2 Solarzellen sind unbrauchbar
  - $A \cup B$

Aufgabe 1

- Wahrscheinlichkeit für Ereignis $A \cup B$
  - Was wissen wir?
    $\Rightarrow P(A) = P(\{0,1\}) = 0.9$
    $\Rightarrow P(B) = P(\{1,2,3\}) = 0.3$
    $\Rightarrow P(A \cap B) = P(\{1\}) = 0.2$
  - $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

    $\Rightarrow P(A \cup B) = 0.9 + 0.3 - 0.2 = 1$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Quoten, resp. Eintrittswahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

1. In 80% der Fälle wird die Klausur bestanden.
2. Es ist doppelt so wahrscheinlich, dass Team A aufgelöst wird, als dass es weiterbesteht.
3. In 95% der Fälle wird die Hypothese angenommen.
4. Eine Arbeitsgruppe setzt sich wie folgt zusammen:

	Raucher	Nichtraucher	
Frauen	9	27	36
Männer	16	8	24
	25	35	60

- Bestimmen Sie die Quoten (odds) für Raucher in den Gruppen Frauen und Männer
- Vergleichen Sie die beiden Quoten und interpretieren Sie diese.

Aufgabe 2

- Quoten
  - Wahrscheinlichkeit des Ereignis A: $P(A)$
    $\Rightarrow$ Komplementärwahrscheinlichkeit $P(\overline{A})$
  - **Wahrscheinlichkeiten $\Rightarrow$ Quoten**

    $$\mathrm{odds}(A) = \frac{P(A)}{1-P(A)} = \frac{P(A)}{P(\overline{A})}$$
  - **Quoten $\Rightarrow$ Wahrscheinlichkeiten**

    $$P(A) = \frac{\mathrm{odds}(A)}{1+\mathrm{odds}(A)}$$

Aufgabe 2

- Quoten (z.B. subjektive Wahrscheinlichkeit, Sportwetten,...)
  1. Bestimmen Sie die Quoten, resp. Eintrittswahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
  - **In 80% der Fälle wird die Klausur bestanden.**

  - Klausur wird bestanden (Ereignis A)
  - $P(A) = 0.8 \Rightarrow P(\overline{A}) = 0.2$

  - $\mathrm{odds}(A) = \frac{P(A)}{1-P(A)}$

  - $\mathrm{odds}(A) = \frac{0.8}{0.2} = \frac{\frac{8}{10}}{\frac{2}{10}} = \frac{8}{10} \times \frac{10}{2} = 4 \Rightarrow 4:1$

  - *Wahrscheinlichkeit, die Klausur zu bestehen ist 4-mal höher, als sie nicht zu bestehen*

Aufgabe 2

- Quoten
  2. Bestimmen Sie die Quoten, resp. Eintrittswahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
  - **Es ist doppelt so wahrscheinlich, dass Team A aufgelöst wird**
  - $\mathrm{odds}(A) := 2 : 1 = \frac{2}{1} = 2$
  - $P(A) = \frac{\mathrm{odds}(A)}{1+\mathrm{odds}(A)}$
  - $P(A) = \frac{2}{1+2} = \frac{2}{3} = 0.6667$

Aufgabe 2

- Quoten
  3. Bestimmen Sie die Quoten, resp. Eintrittswahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
  - **In 95% der Fälle wird die Hypothese angenommen**
  - $P(A) = 0.95 \Rightarrow P(\overline{A}) = 0.05$
  - $\mathrm{odds}(A) = \frac{P(A)}{1-P(A)}$
  - $\mathrm{odds}(A) = \frac{0.95}{1-0.95} = \frac{0.95}{0.05} = \frac{\frac{95}{100}}{\frac{5}{100}} = \frac{95}{5} = \frac{19}{1} \Rightarrow 19:1$
  - *Chancen stehen* 19 : 1, *dass die Hypothese angenommen wird*

Aufgabe 2

4. Quoten

	Raucher	Nichtraucher	
Frauen	9	27	36
Männer	16	8	24
	25	35	60

- Bestimmen Sie die Quoten (odds) für Raucher in den Gruppen Frauen und Männer
- Vergleichen Sie die beiden Quoten und interpretieren Sie diese.

Aufgabe 2

- Quoten

	Raucher	Nichtraucher	
Frauen	9	27	36
Männer	16	8	24
	25	35	60

- Quoten (odds) für Raucher in den Gruppen Frauen und Männer
- $\mathrm{odds}_F = 9 : 27 \cong 1 : 3$
- $\mathrm{odds}_M = 16 : 8 \cong 2 : 1$
- Vergleich von Quoten ('odds-ratio' oder Quotenverhältnis):

$$\mathrm{odds}-\mathrm{ratio} = \frac{\mathrm{odds}_F}{\mathrm{odds}_M} \cong \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{1}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cong 0.166 \cong 1 : 6$$

$\Rightarrow$ Männer haben ein 6-mal grösseres Chancenverhältnis Raucher zu sein als Frauen.

Aufgabe 2

- Quoten

	Raucher	Nichtraucher	
Frauen	9	27	36
Männer	16	8	24
	25	35	60

  - Quoten- oder Risikoverhältnis
    $\Rightarrow$ Was wir eigentlich berechnen:

- $\frac{\frac{9/36}{27/36}}{\frac{16/24}{8/24}} = \frac{9/27}{16/8} = \frac{1/3}{2/1} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

Refresher

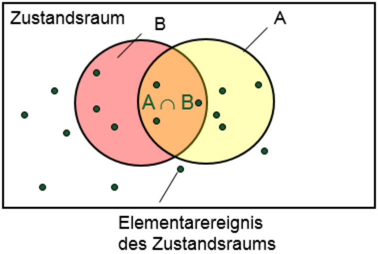
- **Rechenregeln**

  $\Rightarrow$ Additionsregeln: Wir interessieren uns für $P(A \cup B)$

  $\Rightarrow$ Multiplikationsregeln: Wir interessieren uns für $P(A \cap B)$

Refresher

- **Multiplikationsregeln bei Wahrscheinlichkeiten**
  - $P(A \cap B)$



Refresher

- **Multiplikationsregeln bei Wahrscheinlichkeiten**
  - für stochastisch unabhängige Ereignisse
  - $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
  - für stochastisch abhängige Ereignisse
  - $P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A) = P(B) \times P(A|B)$
  - Bedingte Wahrscheinlichkeit (B gegeben A)
  - $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ für $P(A) > 0$

Refresher

- **Wann sind Ereignisse stochastisch unabhängig?**
  - Ereignisse A und B sind **stochastisch unabhängig**, wenn...
  - $P(B|A) = P(B|\overline{A})$ oder $P(A|B) = P(A|\overline{B})$
  - $\Rightarrow P(B|A) = P(B|\overline{A}) = P(B)$

  - Ereignisse A und B sind **stochastisch abhängig**, wenn...
  - $P(B|A) \neq P(B|\overline{A})$ oder $P(A|B) \neq P(A|\overline{B})$

Beispiel aus Aufgabe 2

	Raucher	Nichtraucher	
Frauen	9	27	36
Männer	16	8	24
	25	35	60

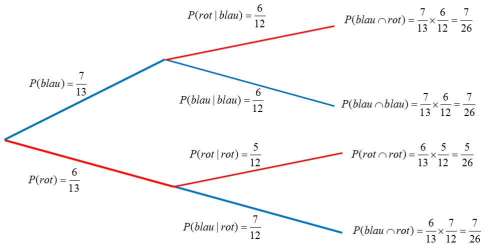
- $P(R|F) = \frac{P(R \cap F)}{P(F)} = \frac{9/60}{36/60} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = 0.25$
- $P(R|M) = \frac{P(R \cap M)}{P(M)} = \frac{16/60}{24/60} = \frac{16}{24} = 0.667$
- Rauchverhalten und Geschlecht sind stochastisch abhängig.
  $\Rightarrow$ aus Quotenverhältnis ersichtlich
  $\Rightarrow$ mehr Raucher unter Männern

Refresher

- **Beispiel 1**
  - 20 Kugeln in einer Urne (12 rot und 8 blau)
  - 4 rote und 2 blaue Kugeln haben eine 1
  - $P(R) = \frac{12}{20} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ und $P(B) = \frac{8}{20} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$
  - $P(1) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$ und $P(0) = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}$
  - WK für Kugel mit 1, **wenn diese Kugel rot ist**
    $P(1|R) = \frac{P(R \cap 1)}{P(R)}$
    $P(1|R) = \frac{4/20}{12/20} = 4/12 = 1/3$
  - stochastisch abhängig? $\Rightarrow$ Ja! $P(1|R) \neq P(1|B)$
  - $P(1|B) = \frac{P(B \cap 1)}{P(B)}$
    $P(1|B) = \frac{2/20}{8/20} = 2/8 = 1/4$

Refresher

- **Beispiel 2**
  - 13 Kugeln in einer Urne (7 blau und 6 rot)
  - 2 Kugeln werden gezogen (**ohne Zurücklegen**)



  - $P(blau \cap rot) = P(blau) \times P(rot|blau) = P(rot) \times P(blau|rot)$
  - $P(blau|rot) \neq P(blau|blau)$ oder $P(rot|blau) \neq P(rot|rot)$
  - $7/26 + 7/26 + 5/26 + 7/26 = 1$

Refresher

- **Beispiel 2**
  - 13 Kugeln in einer Urne (7 blau und 6 rot)
  - 2 Kugeln werden gezogen (**ohne Zurücklegen**)
  - WK, dass beim 2. Zug rote Kugel gezogen wird

  - 1. Zug $\Rightarrow$ blaue Kugel mit $P(B_1) = 7/13$
  - 2. Zug $\Rightarrow$ rote Kugel: $P(R_2|B_1) = 6/12$

  - oder...

  - 1. Zug $\Rightarrow$ rote Kugel mit $P(R_1) = 6/13$
  - 2. Zug $\Rightarrow$ rote Kugel: $P(R_2|R_1) = 5/12$

Refresher

- **Additionsregeln und Multiplikationsregel**
  - Beispiel: 2 Würfel $\Rightarrow$ 2 Ereignisse
    Wahrscheinlichkeiten bleiben gleich (**mit Zurücklegen**)
  - $P(Summe = 12) = P(\{6,6\}) = P(\{6\}) \times P(\{6\}) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

    $\Rightarrow$ "$\times$" interpretiert als "und" interpretiert als "$\cap$"

Refresher

- **Additionsregeln und Multiplikationsregel**
  - Beispiel: 2 Würfel $\Rightarrow$ 2 Ereignisse
    Wahrscheinlichkeiten bleiben gleich (**mit Zurücklegen**)
  - $P(Summe = 10) = P(\{6,4\},\{5,5\},\{4,6\})$
    $P(Summe = 10) = P(\{6,4\}) + P(\{5,5\}) + P(\{4,6\})$
    $P(Summe = 10) =$
    $P(\{6\})P(\{4\}) + P(\{5\})P(\{5\}) + P(\{4\})P(\{6\})$
    $P(Summe = 10) = 1/6 \times 1/6 + 1/6 \times 1/6 + 1/6 \times 1/6 =$
    $3 \times 1/36 = 1/12$

    $\Rightarrow$ "$\times$" interpretiert als "und" interpretiert als "$\cap$"
    $\Rightarrow$ "$+$" interpretiert als "oder" interpretiert als "$\cup$"

Aufgabe 3

Ein Kraftfahrzeughändler weiss aus langjähriger Erfahrung, dass bei den in Zahlung genommenen Wagen 50% Mängel am Motor, 70% an der Karosserie und 30% an Motor und Karosserie aufweisen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein in Zahlung genommener Wagen

a) ohne Mängel an Motor und Karosserie ist,

b) auch einen Mangel am Motor besitzt, wenn bekannt ist, dass die Karosserie schadhaft ist?

Aufgabe 3

- **mit Kreuztabelle (4-Feldertafel) darstellbar**
  - Motormangel m (50 von 100)
  - Karosseriemangel k (70 von 100)
  - Mängel in beidem (30 von 100)
  - Was wissen wir?

	m	$\overline{m}$	
k	30		70
$\overline{k}$			30
	50	50	100

Aufgabe 3

- **mit Kreuztabelle (4-Feldertafel) darstellbar**
  - Motormangel m
  - Karosseriemangel k

	m	$\overline{m}$	
k	30	40	70
$\overline{k}$	20	10	30
	50	50	100

Aufgabe 3

- 4-Feldertafel: Motormangel (m), Karosseriemangel (k)

	m	$\overline{m}$	
k	30	40	70
$\overline{k}$	20	10	30
	50	50	100

  - Was wissen wir?
    - $P(m \cap k) = 30\%$
    - $P(m) = 50\%$
    - $P(k) = 70\%$

a) $P(\overline{m} \cap \overline{k}) = 10\%$

b) $P(m|k) = \frac{P(m \cap k)}{P(k)} = \frac{30}{70} = 42.9\%$

Aufgabe 4

Eine Investmentbank, die sich auf CDOs (Collateralized Debt Obligation/besicherte Schuldverschreibungen) spezialisiert, hat für bestimmte Tranchen folgende Ausfallwahrscheinlichkeiten berechnet.

Übersicht der Tranchen	
Tranchen-Rating	Ausfallwahrscheinlichkeit
Prime	2%
Alt-A	5%
Subprime	10%

Bestimmen Sie die **Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse** unter der Annahme **stochastischer Unabhängigkeit**:

- Zahlungsausfall der beiden Tranchen Subprime und Alt-A.
- Zahlungsausfall aller drei Tranchen.
- Auszahlung aller drei Tranchen.
- Zahlungsausfall von mindestens zwei Tranchen. Nehmen Sie hierfür an, dass der Ausfall zuerst in der untersten Tranche beginnt und kaskadengleich in den jeweils oberen Tranchen erfolgt.

Ein **risikoneutraler Investor** ist in folgenden Tranchen investiert: Mit jeweils 5m USD in der Prime-Tranche, zu 3m USD in Alt-A sowie zu 2m USD in der Subprime Tranche.

- **Welchen Verlust muss der Investor, unter Berücksichtigung stochastischer Unabhängigkeit, in Kauf nehmen?**
- Der Zins beträgt 10% p.a. und die Auszahlung der CDOs findet in genau einem Jahr statt. Bestimmen Sie den **Marktwert der Investition unter der Annahme perfekt rationaler Märkte**. Zur Erinnerung: Der Marktwert lässt sich als Summe aller diskontierten zukünftigen Zahlungsströme berechnen.

Aufgabe 4

- **CDOs (Collateralized Debt Obligation/besicherte Schuldverschreibungen)**
  - Portfolio festverzinslicher Wertpapiere (z.B Hypotheken)
  - Hausfinanzierung durch Hypothek (Kredit) $\Rightarrow$ Rückzahlung in Raten
  - Ausfallrisiko bei Bank $\Rightarrow$ Übertragung an Finanzmarkt
  - dafür: Hypotheken in Portfolio (3 Risikokategorien)
    $\Rightarrow$ Ausfallrisiko $\uparrow$ $\rightarrow$ als Kompensation: Zins $\uparrow$

Aufgabe 4

- **Zahlungsausfall der Tranchen Subprime und Alt-A**
  - Stochastische Unabhängigkeit!
  - $\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
  - $P = P(Subprime) \times P(Alt - A) = 0.1 \times 0.05 = 0.005$

Aufgabe 4

- **Zahlungsausfall aller drei Tranchen**
  - $P = P(Subprime) \times P(Alt - A) \times P(Prime) = 0.1 \times 0.05 \times 0.02 = 0.0001$
- **Auszahlung aller drei Tranchen (Gegen-WK!)**
  - $P = P(Subprime\ Pays) \times P(Alt - A\ Pays) \times P(Prime\ Pays) = 0.9 \times 0.95 \times 0.98 = 0.8379$

Aufgabe 4

- Zahlungsausfall von **mindestens zwei Tranchen**. Nehmen Sie hierfür an, dass der Ausfall zuerst in der untersten Tranche beginnt und kaskadengleich in den jeweils oberen Tranchen erfolgt
  - $P = P(Subprime\ defaults, Alt - A\ defaults, Prime\ Pays) + P(All\ default)$
  - $P = (0.10 \cdot 0.05 \cdot 0.98) + 0.0001 = 0.0049 + 0.0001 = 0.0050$

Aufgabe 4

- Ein risikoneutraler Investor ist in folgenden Tranchen investiert: Mit jeweils 5 Mio USD in der Prime-Tranche, zu 3 Mio USD in Alt-A sowie zu 2 Mio USD in der Subprime Tranche.
- Welchen Velust muss der Investor, unter Berücksichtigung stochastischer Unabhängigkeit, in Kauf nehmen?

Übersicht der Tranchen			
Tranchen-Rating	Ausfallwahrscheinlichkeit	Investierte Summe	Erwarteter Verlust
Prime	2%	5.000.000	100.000
Alt-A	5%	3.000.000	150.000
Subprime	10%	2.000.000	200.000

  - gesucht: Erwartungswert
  - $\Rightarrow$ Erwarteter Verlust von 450.000 USD.

Aufgabe 4

- Der Zins beträgt 10% p.a. und die Auszahlung der CDOs findet in genau einem Jahr statt. Bestimmen Sie den Marktwert der Investition unter der Annahme perfekt rationaler Märkte. Zur Erinnerung: **Der Marktwert lässt sich als Summe aller diskontierten zukünftigen Zahlungsströme berechnen.**

Übersicht der Tranchen			
Tranchen-Rating	Ausfallwahrscheinlichkeit	Investierte Summe	Erwartete Zahlung
Prime	2%	5.000.000	4.900.000
Alt-A	5%	3.000.000	2.850.000
Subprime	10%	2.000.000	1.800.000

  - Marktwert: diskontierter Wert aller zukünftiger Zahlungsströme
  - $\Rightarrow$ Zahlungsstrom 10.000.000 USD, aber erwartete Verluste müssen berücksichtigt werden
  - Summe aller Zahlungsströme: 9.550.000 USD

  - $0.98 \times 5.000.000 + 0.95 \times 3.000.000 + 0.9 \times 2.000.000 = 9.550.000$

Aufgabe 4

- Der Zins beträgt 10% p.a. und die Auszahlung der CDOs findet in genau einem Jahr statt. Bestimmen Sie den Marktwert der Investition unter der Annahme perfekt rationaler Märkte. Zur Erinnerung: Der Marktwert lässt sich als Summe aller diskontierten zukünftigen Zahlungsströme berechnen

Übersicht der Tranchen			
Tranchen-Rating	Ausfallwahrscheinlichkeit	Investierte Summe	Erwartete Zahlung
Prime	2%	5.000.000	4.900.000
Alt-A	5%	3.000.000	2.850.000
Subprime	10%	2.000.000	1.800.000

  - Summe aller Zahlungsströme: 9.550.000 USD
  - Diskontierungssatz von 10%:
  - $MW_t = \frac{CF_{t+1}}{1+r}$

    $\Rightarrow \frac{9.550.000}{1.1} = 8.681.818$

    $\Rightarrow$ fairer Marktwert von 8.681.818 USD

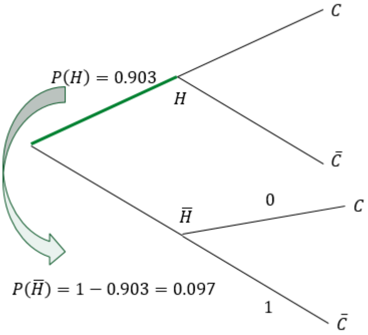
Aufgabe 5

Eine Befragung in den USA ergab, dass 90.3% der über 25-jährigen Arbeitnehmer einen Highschool-Abschluss (H) haben **und 30.8% einen College-Abschluss (C) vorweisen, wobei letzterer einen Highschool-Abschluss bedingt**. Zeichnen Sie einen Ereignisbaum und bestimmen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

1. $P(H)$
2. $P(C|H)$
3. $P(H \cap C)$
4. $P(H \cap \overline{C})$

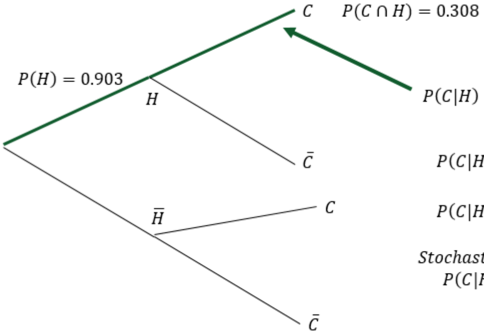
Aufgabe 5

- Zeichnen Sie einen Ereignisbaum und bestimmen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:
  - $P(H)$



Aufgabe 5

- Zeichnen Sie einen Ereignisbaum und bestimmen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:
  - $P(C|H)$



$$P(C|H) = \frac{P(C \cap H)}{P(H)}$$

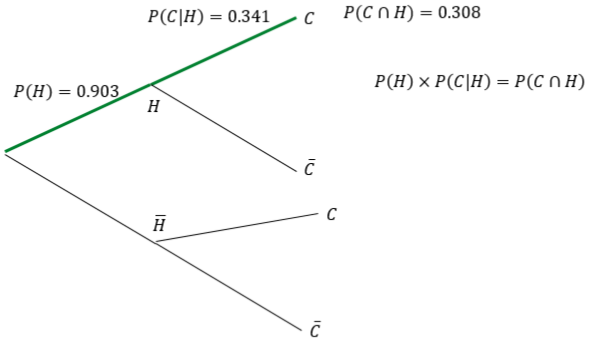
$$P(C|H) = \frac{0.308}{0.903}$$

$$P(C|H) = 0.341$$

Stochastisch abhängig:
$P(C|H) \neq P(C|\overline{H})$

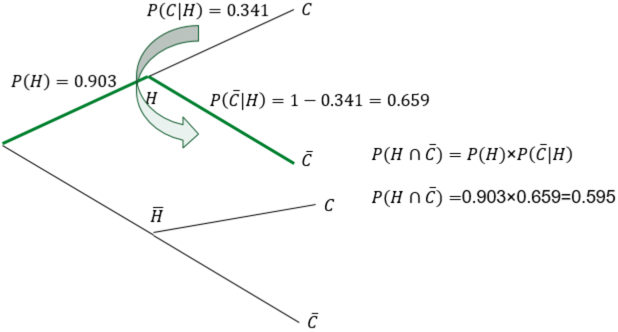
Aufgabe 5

- Zeichnen Sie einen Ereignisbaum und bestimmen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:
    - $P(H \cap C)$



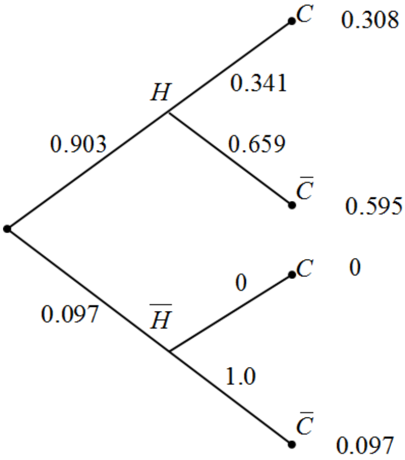
Aufgabe 5

- Zeichnen Sie einen Ereignisbaum und bestimmen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:
  - $P(H \cap \overline{C})$



Aufgabe 5

- Bedingte Erwartungen



Aufgabe 5

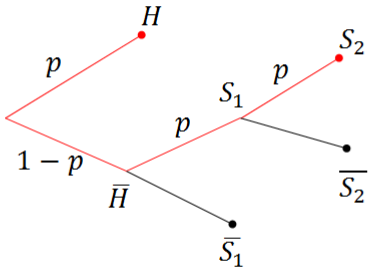
- Bedingte Erwartungen
  - $P(H) = 0.903$
  - $P(C|H) = \frac{P(H \cap C)}{P(H)} = \frac{0.308}{0.903} = 0.341$
  - $P(H \cap C) = 0.308 = 0.903 \times 0.341 = P(H) \times P(C|H)$
  - $P(H \cap \overline{C}) = P(H) \times P(\overline{C}|H) = 0.903 \times 0.659 = 0.595$

Aufgabe 6

Ein dreimotorisches Flugzeug stürzt ab, wenn der Hauptmotor in der Mitte ausfällt oder beide Seitenmotoren ausfallen. Es wird angenommen, dass jeder der Flugzeugmotoren mit der Wahrscheinlichkeit p auf einem bestimmten Flug ausfällt. Ferner wird angenommen, dass der Ausfall eines Motors unabhängig vom Verhalten der anderen Motoren erfolgt. A bezeichne das Ereignis, dass ein Flugzeug dieses Typs infolge von Motorversagen abstürzt. Ist die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ grösser oder kleiner als p?

Aufgabe 6

- **Ereignis A (Absturz)**
  - wenn Hauptmotor ausfällt: (H)
  - oder wenn beide Seitenmotoren ausfallen: S_1 und S_2



- Eintrittswahrscheinlichkeit eines Absturzes:

  $P(A) = p + (1-p)p^2 > p$

Aufgabe 6

- **Ereignis A (Absturz)**
  - wenn Hauptmotor ausfällt: (H)
  - oder wenn beide Seitenmotoren ausfallen: S_1 und S_2
    $\Rightarrow$ Ausfall (1), kein Ausfall (0)

- allgemein: Reihenfolge spielt keine Rolle

S_1	S_2	H	Wahrscheinlichkeit
0	0	0	$(1-p)^3$
0	0	1	$(1-p)^2 p$
0	1	0	$(1-p)^2 p$
1	0	0	$(1-p)^2 p$
1	1	0	$p^2(1-p)$
1	0	1	$p^2(1-p)$
0	1	1	$p^2(1-p)$
1	1	1	p^3

Aufgabe 6

- allgemein: Reihenfolge spielt keine Rolle

S_1	S_2	H	Wahrscheinlichkeit
0	0	0	$(1-p)^3$
0	0	1	$(1-p)^2 p$
0	1	0	$(1-p)^2 p$
1	0	0	$(1-p)^2 p$
1	1	0	$p^2(1-p)$
1	0	1	$p^2(1-p)$
0	1	1	$p^2(1-p)$
1	1	1	p^3

- $P(A) = (1-p)^2 p + 3p^2(1-p) + p^3$
  $\Rightarrow (1-2p+p^2)p + 3p^2 - 3p^3 + p^3$
  $\Rightarrow p - 2p^2 + p^3 - 3p^3 + 3p^2 + p^3$
  $\Rightarrow p - p^3 + p^2$
  $\Rightarrow p + p^2(1-p) > p$