Markov-Ketten

Martin Slowik

15. März 2021

.

Inhaltsverzeichnis

Skriptschreiber: Finn Jerg

Besonderen Dank an Tilman Aach, Pius Carbon und Ryan Weber für das Finden von Tippfehlern.

Markovprozesse mit diskretem Zustandsraum

1.1 Stochastische Prozesse und ihre Verteilung

Sei $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, (E, ε) ein meßbarer Raum und I eine nichtleere Indexmenge z.B

- E ist endlich oder abzählbar unendlich
- E = $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^d$
- E ist ein Funktionsraum
- I = endlich, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$ (diskret)
- I = $[0, \infty)$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^d$ (kontinuierlich)

Interpretation: E ist der Zustandsraum(„Ort“) und I ist die „Zeit“.

Definition 1.1 (Stochastischer Prozess)**.** Ein stochastischer Prozess auf $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ mit Werten im Zustandsraum (E, ε) ist eine Familie $(X_t)_{t\in I}$ von E-wertigen Zufallsvariablen. Für festes $\omega \in \Omega$ heißt die Abbildung

$$I \ni t \mapsto X_t(\omega)$$

eine Trajektorie(Pfad, Realisierung) von $(X_t)_{t\in I}$. Falls I $= \mathbb{N}_0$ oder I $= [0, \infty)$, so heißt die Verteilung von X_0 die Startverteilung des stochastischen Prozesses.

Bemerkung 1.1. Falls E diskret ist, so bezeichnet man eine Verteilung auch als Wahrscheinlichkeitsvektor.

Unser Ziel ist es die Verteilung des stochastischen Prozesses $(X_t)_{t\in I}$ zu charakterisieren. Zunächst einmal lässt sich der Produktraum E^I auch als Menge $\{x : I \to E\}$ aller Abbildungen von I nach E interpretieren.

Frage? Wie lässt sich die zugehörige Produkt-σ-Algebra $\varepsilon^{\otimes I}$ charakterisieren?

Definition 1.2 (Produkt-σ-Algebra)**.** Die Produkt-σ-Algebra $\varepsilon^{\otimes I}$ ist die kleinste σ-Algebra über E^I, die die Menge $\mathcal{Z}$ aller endlich-dimensionalen Rechtecke(Zylindermenge) der Form

$$\{x \in E^I : x_{t_1} \in B_1, x_{t_2} \in B_2, ..., x_{t_n} \in B_n\}$$

mit n $\in \mathbb{N}$, $t_1, ..., t_n \in I$ *und* $B_1, ..., B_n \in \varepsilon$ enthält.

Lemma 1.1. Sei $(X_t)_{t\in I}$ ein stochastischer Prozess mit Zustandsraum (E, ε), und definiere die Abbildung $X : (\Omega, \mathfrak{F}) \to (E^I, \varepsilon^{\otimes I})$ durch $X(\omega) := (X_t(\omega))_{t\in I}$. Dann ist X meßbar.

Beweis. Übungsaufgabe. □

Definition 1.3 (Verteilung eines stochastischen Prozesses)**.** Die Verteilung eines stochastischen Prozesses $(X_t)_{t\in I}$ auf $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ mit Zustandsraum (E, ε) ist das Bildmaß $\mathbb{P}$ unter der in Lemma 1.1 definierten Abbildung X, d.h.

$$\mathbb{P}_X[B] := (\mathbb{P} \circ X^{-1})[B] = \mathbb{P}[\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}],\ B \in \varepsilon^{\otimes I}$$

Frage? Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Verteilung eines stochastischen Prozesses und der Verteilung des Prozesses an endlich vielen Zeitpunkten?

Betrachte zwei nicht-leere, endliche Teilmengen $J, k \subseteq I$ mit $k \subseteq J$. Definiere

$$\pi_J : E^I \to E^J, \qquad (X_t)_{t\in I} \mapsto \pi_J(X_t)_{t\in I} := (X_t)_{t\in J}$$

$$\pi_k{}^J : E^J \to E^k, \qquad (X_t)_{t\in J} \mapsto \pi_k{}^J(X_t)_{t\in J} := (X_t)_{t\in k}$$

die endlich-dimensionale Projektionen.

Da $\varepsilon^{\otimes I}$ von den Mengen $(\pi_{\{t\}}{}^J)^{-1}(A)$, $t \in J,\ A \in \varepsilon$ erzeugt wird und

$$\pi_J{}^{-1}((\pi_{\{t\}}{}^J)^{-1}(A)) = (\pi_{\{t\}}{}^J \circ \pi_J)^{-1}(A) = \pi_{\{t\}}{}^{-1}(A) \in \varepsilon^{\otimes I}$$

ist folglich π_J $(\varepsilon^{\otimes I}, \varepsilon^{\otimes J})$-meßbar.

Definition 1.4 (endlich-dimensionale Verteilung eines stochastischen Prozesses)**.** Sei $X = (X_t)_{t\in I}$ ein stochastischer Prozess mit Verteilung $\mathbb{P}_X$ auf $(E^I, \varepsilon^{\otimes I})$ und $J \subseteq I$ eine nichtleere, endliche Teilmenge von I. Setze $X_J := (X_t)_{t\in J} = \pi_J(X)$. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mathbb{P}_{X\,J}$ heißt endlich-dimensionale Verteilung von X.

Notation 1.1. Für $B \in \varepsilon^{\otimes J}$ ist $\mathbb{P}_{X_J}[B] = \mathbb{P} \circ (X_t)^{-1}_{t\in J}[B] = \mathbb{P}[(X_t)_{t\in J} \in B]$.

Lemma 1.2. Sei $X = (X_t)_{t\in I}$ ein stochastischer Prozess mit Zustandsraum (E, ε).

(i) Für jede endliche Teilmenge $J \neq \emptyset$ von I gilt

$$\mathbb{P}_{X_J} = \mathbb{P}_X \circ {\pi_J}^{-1}$$

(ii) Für je zwei nicht-leere, endliche Teilmengen $J_1, J_2 \subseteq I$ mit $J_1 \subseteq J_2$ gilt

$$\mathbb{P}_{X_{J_1}} = \mathbb{P}_{X_{J_2}} \circ ({\pi_{J_1}}^{J_2})^{-1}$$

Beweis.

(i) Wegen $X_J = \pi_J((X_t)_{t\in I}) = \pi_J \circ X$ gilt

$$\mathbb{P}_{X_J} = \mathbb{P} \circ {X_J}^{-1} = \mathbb{P} \circ (\pi_J \circ X)^{-1} = (\mathbb{P} \circ X^{-1}) \circ {\pi_J}^{-1} = \mathbb{P}_X \circ {\pi_J}^{-1}$$

(ii) Wegen $X_{J_1} = {\pi_{J_1}}^{J_2} \circ X_{J_2}$ folgt die Behauptung aus (i).

□

Frage? Ist es auch möglich die unendlich-dimensionale Verteilung eindeutig durch die endlich-dimensionale Verteilung festzulegen?

Lemma 1.3. Für jedes $J \subseteq I$ sei ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}_J$ auf $(E^J, \varepsilon^{\otimes J})$ gegeben. Dann existiert höchstens ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ auf $(E^I, \varepsilon^{\otimes I})$ mit

$$\mathbb{Q}_J = \mathbb{Q} \circ {\pi_J}^{-1}$$

für alle endlichen $\emptyset \neq J \subseteq J$.

Beweis. Da nach Aufgabe 2 die Menge $\mathcal{Z}$ der endlich-dimensionalen Rechtecke einen $\cap$-stabilen Erzeuger von $\varepsilon^{\otimes I}$ bilden und

$$\mathbb{Q}[\{x \in E^I : x_j \in A_j, \forall j \in J\}] = \mathbb{Q}[{\pi_J}^{-1}(\times_{j\in J} A_j)] = (\mathbb{Q}\circ{\pi_J}^{-1})[\times_{j\in J} A_j] = \mathbb{Q}_J[\times_{j\in J} A_j]$$

für alle $\emptyset \neq J \subseteq I$ endlich und $A_j \in \varepsilon$ für alle $j \in J$, folgt die Aussage aus dem Eindeutigkeitssatz für Maße. □

Warnung! Die eindimensionalen Verteilungen legen $\mathbb{Q}$ im Allgemeinen nicht fest.

Beispiel 1.1. Betrachte eine Folge $(X_n)_{n\in N_0}$ von unabhängig, identisch verteilten Zufallsvariablen und $(Y_n)_{n\in N_0}$ sei definiert durch $Y_n = X_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Definition 1.5 (konsistente Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen)**.** Für jedes $\emptyset \neq J \subseteq I$ endlich sei $\mathbb{Q}_J$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(E^J, \varepsilon^{\otimes J})$. Die Familie $\{\mathbb{Q}_J : J \subseteq I \text{ endlich}\}$ heißt konsistent, wenn

$$\mathbb{Q}_{J_1} = \mathbb{Q}_{J_2} \circ ({\pi_{J_1}}^{J_2})^{-1} \qquad \forall\, J_1 \subseteq J_2 \subseteq I, \emptyset \neq J_1, J_2 \text{ endlich}$$

Bemerkung 1.2.

(i) Die endlich-dimensionalen Verteilungen eines stochastischen Prozesses bilden eine konsistente Familie

(ii) Falls $I = \mathbb{N}_0$ ist, so genügt es $J \subseteq I$ endlich der Form $J = \{0, 1, .., n\}$, $n \in \mathbb{N}_0$ zu wählen.

Beispiel 1.2. Sei $I = \mathbb{N}_0$, $E = \mathbb{Z}^2$ und $\mathbb{Q}_{\{0,..,n\}}$ die Gleichverteilung auf der Menge

$$A_n = \{(x_0, ..., x_1) \in E^{n+1} : x_0 = 0,\ ||x_i - x_{i-1}|| = 1\ \forall i = 1, .., n,\ x_i \neq x_j\ \forall i, j \in \{0, ..., n\}\}$$

für $n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist die zugehörige Familie $\{\mathbb{Q}_{\{0,..,n\}} : n \in \mathbb{N}_0\}$ <u>NICHT</u> konsistent.

Abbildung 1: Systemzustände n=1,...,4

Denn es gilt

$$\mathbb{Q}_{\{0,..,3\}}[\{x_0, x_1, x_2, x_3\}] = \frac{1}{36} \neq \frac{2}{100} = \mathbb{Q}_{\{0,..,4\}}[({\pi_{\{0,..3\}}}^{\{0,...4\}})^{-1}(\{x_0, x_1, x_2, x_3\})]$$

Definition 1.6 (Polnischer Raum)**.** Ein topologischer Raum (E, τ) heißt polnischer Raum, falls er vollständig metrisierbar und seperabel ist

Bemerkung 1.3.

- (E, τ) heißt vollständig metrisierbar, falls eine vollständige Metrik d auf E existiert, die τ erzeugt.
- (E, τ) heißt separabel, falls es eine abzählbare dichte Teilmenge $A \subseteq E$ gibt, d.h $\bar{A} = E$

Bemerkung 1.4. Praktisch alle Räume, die in der Wahrscheinlichkeitstheorie bedeutsam sind, sind polnisch, z.B

- abzählbar, diskrete Räume, euklidische Räume $\mathbb{R}^d$
- $C([0, 1]) = \{f : [0, 1] \to \mathbb{R}\ \ stetig\}$ bzgl. Supremumsnorm

Satz 1.1 (Existenzsatz von Daniel und Kolmogorov)**.** Sei (E, ε) ein polnischer Raum und $\{\mathbb{Q}_J : J \subseteq I\, \text{endlich}\}$ eine konsistente Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen. Dann existiert genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ auf $(E^I, \varepsilon^{\otimes I})$ mit der Eigenschaft

$$\mathbb{Q}_J = \mathbb{Q} \circ {\pi_J}^{-1} \qquad \forall J \subseteq I \text{ endlich} \tag{1}$$

Beweis. siehe Klenke, Satz 14.36 □

Bemerkung 1.5. Die Konstruktion von $\mathbb{Q}$ beruht auf dem Satz von Carathéodory

- $\mathcal{Z}$ ist eine Algebra und damit insbesondere ein Semiring.
- Der Nachweis, dass die Mengenfunktion $\mathbb{Q}$ definiert durch (1) additiv ist, ist nicht allzu schwierig.

- Zum Nachweis der σ-Subadditivität von $\mathbb{Q}$ verwendet man ein Kompaktheitsargument, wobei hierzu benutzt wird, dass E polnisch ist.

Korollar 1.1. Sei (E, ε) ein polnischer Raum. Weiterhin sei $(X_t)_{t \in I}$ ein stochastischer Prozess auf $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ mit Zustandsraum (E, ε). Dann existiert genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}_X = \mathbb{P} \circ X^{-1}$, dessen endlich-dimensionale Verteilung mit der gegebenen Familie

$$\{\mathbb{P}_{X_J} : J \subseteq I \text{ endlich}\}$$

übereinstimmen.

Beweis. Nach Bemerkung 1.3 bilden die endlich-dimensionalen Verteilungen des stochastischen Prozesses $(X_t)_{t \in I}$ eine konsistente Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen. Folglich ergibt sich die Aussage direkt aus Satz 1.1. □

1.2 Markovketten auf abzählbaren Zustandsräumen

Im folgenden sei E endlich oder abzählbar unendlich, $\varepsilon = 2^E$ die Potenzmenge und $I = \mathbb{N}_0$

Definition 1.7 (Markoveigenschaft)**.** Ein stochastischer Prozess $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ auf $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ mit Werten in E besitzt die (elementare) Markoveigenschaft, wenn für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $x_0, ..., x_{n+1} \in E$ mit $\mathbb{P}[X_0 = x_0, ..., X_n = x_n] > 0$ gilt

$$\mathbb{P}[X_{n+1} = x_n \mid X_0 = x_0, ..., X_n = x_n] = \mathbb{P}[X_{n+1} = x_n \mid X_n = x_n]$$

Falls zudem für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $x, y \in E$ gilt, dass

$$\mathbb{P}[X_{n+1} = y \mid X_n = x] = \mathbb{P}[X_1 = y \mid X_0 = x]$$

so besitzt $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ die zeithomogene Markoveigenschaft.

Erklärung 1.1. Die Markov-Eigenschaft liefert uns, dass die Zukunft allein von der Gegenwart abhängt. Vorangegangene Ereignisse sind für den nächsten Übergang nicht von Bedeutung. Genügt die Markov-Kette zusätzlich der Zeithomogenität entspricht die Chance für einen bestimmten Zustandswechsel im ersten Schritt jener zum fünften, letzten oder jedem beliebigen anderen Zeitpunkt.

Beispiel 1.3. Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit Werten in E. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und $x_0, ..., x_{n+1} \in E$ mit $\mathbb{P}[X_0 = x_0, ..., X_n = x_n] > 0$

$$\mathbb{P}[X_{n+1} = x_n \mid X_0 = x_0, ..., X_n = x_n] = \mathbb{P}[X_{n+1} = x_{n+1}] = \mathbb{P}[X_{n+1} = x_n \mid X_n = x_n]$$

Folglich besitzt die Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ die Markoveigenschaft. Falls die Zufallsvariablen zudem identisch verteilt sind, d.h. $\mathbb{P}[X_{n+1} = x] = \mathbb{P}[X_1 = x]$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, so hat $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ die zeithomogene Markoveigenschaft.

Beispiel 1.4. Sei $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit Werten in E. Setze $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0} := \max\{Y_0, ..., Y_n\}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Dabei besitzt $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$

die Markoveigenschaft, denn für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und $x_0, ..., x_{n+1} \in E$ mit $\mathbb{P}[X_0 = x_0, ..., X_n = x_n] > 0$ gilt

$$\mathbb{P}[X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_0 = x_0, ..., X_n = x_n]$$
$$= \mathbb{P}[\max\{x_n, Y_{n+1}\} = x_{n+1} \mid X_0 = x_0, ..., X_n = x_n]$$
$$= \mathbb{P}[\max\{x_n, Y_{n+1}\} = x_{n+1}]$$
$$= \mathbb{P}[\max\{x_n, Y_{n+1}\} = x_{n+1} \mid X_n = x_n]$$
$$= \mathbb{P}[X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n]$$

Definition 1.8 (stochastiche Matrix)**.** Eine Matrix $P = (p(x,y))_{x,y \in E}$ heißt stochastisch oder Übergangsmatrix, falls

(i) $p(x,y) \geq 0$ für alle $x, y \in E$

(ii) $\sum_{y \in E} p(x,y) = 1$ für alle $x \in E$

Dabei beschreibt p(x,y) die Wahrscheinlichkeit eines Wechsels von x nach y. Folglich ist es sinnvoll in (ii) zu fordern, dass die Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Übergänge, sich zu Eins summieren.

Satz 1.2 (Chapman-Kolmogorov Gleichung)**.** Für jede stochastische Matrix $P = (p(x,y))_{x,y \in E}$ sei $P^n = (p_n(x,y))_{x,y \in E}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$

$$p_{m+n}(x,y) = \sum_{z \in E} p_m(x,z) p_n(z,y) \qquad \forall\, x, y \in E$$

Beweis. Dies folgt direkt aus der Beziehung $P^{m+n} = P^m \cdot P^n$ durch ausschreiben der Koeffizienten. □

Beispiel 1.5 (Chapman-Kolmogorov Gleichung)**.** Um die Motivation hinter der Chapman-Kolmogrov Gleichung zu verstehen, soll dieses einfache Beispiel dienen. Sei $E = \{A, B, C, \}$ ein Zustandsraum und darauf folgende stochastische Matrix, die wir im folgenden mit P bezeichnen:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Man kann leicht nachprüfen, dass P den Anforderungen in Definition 1.8 genügt. Im weiteren seien wir an $p_2(A,A)$ interessiert. Also der Wahrscheinlichkeit, nach zwei Durchläufen wieder im Startpunkt A zu sein. Chapman-Kolmogorov liefert uns:

$$p_2(A,A) = \sum_{z \in E} p_1(A,z) p_1(z,A)$$
$$= p(A,A) \,\cdot\, p(A,A) \,+\, p(A,B) \,\cdot\, p(B,A) \,+\, p(A,C) \,\cdot\, p(C,A) = 0.75$$

Wobei hier alle Möglichkeiten von A nach A in zwei Durchläufen zu gelangen betrachtet wurden. Ist man ferner an der Matrix P^2 interessiert, so ist es demnach hinreichend $P = P \cdot P$ zu berechnen

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{bmatrix} \\
\hline
\begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \cdot 0 + 0.5 \cdot 1 + 0.5 \cdot 0.5 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.25 & 0.25 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Beispiel 1.6. Sei $E = \{1, 2\}$ und $\alpha, \beta \in [0, 1]$

Abbildung 2: Veranschaulichung einer stochastischen Matrix mittels Übergangsgraphen

Definition 1.9 (zeithomogene Markovkette)**.** Sei $P = (p(x, y))_{x,y \in E}$ eine stochastische Matrix und $\nu : E \to [0, 1]$ ein Wahrscheinlichkeitsvektor. Ein stochastischer Prozess $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ auf $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ mit Zustandsraum E heißt (zeithomogene) Markovkette mit Übergangsmatrix P und Startverteilung ν (kurz: (ν, P)-Markovketten), falls

(i) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $x_0, ..., x_{n+1} \in E$ mit $\mathbb{P}[X_0 = x_0, ..., X_n = x_n] > 0$ gilt

$$\mathbb{P}[X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_0 = x_0, ..., X_n = x_n] = p(x_n, x_{n+1})$$

(ii) Für alle $x_0 \in E$ gilt

$$\mathbb{P}[X_0 = x_0] = \nu(x_0)$$

Notation 1.2. Um die Startverteilung zu betonen, schreiben wir auch $\mathbb{P}_\nu$ bzw. $\mathbb{P}_x$ falls $\nu = \mathbb{1}_{\{x\}}$. Dabei steht $\mathbb{P}_\nu = [X_n = y]$ bzw. $\mathbb{P}_x = [X_n = y]$ für die Wahrscheinlichkeit bei Anfangsverteilung ν bzw. Start im Zustand x_0 im n-ten Schritt y zu realisieren

Bemerkung 1.6. Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein E-wertiger stochastischer Prozess, der die zeithomogene Markoveigenschaft besitzt. Dann ist $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Markovkette mit Zustandsraum E, Startverteilung $\nu = \mathbb{P} \circ {X_0}^{-1}$ und Übergangsmatrix $P = (p(x, y))_{x,y \in E}$ mit

$$p(x, y) := \mathbb{P}[X_1 = y \mid X_0 = x]$$

Beispiel 1.7. Sei $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge u.i.v. Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}[Y_1 = 1] = \mathbb{P}[Y_1 = -1] = \dfrac{1}{2}$. Setze $X_0 = 1$ und $X_n = Y_n, n \in \mathbb{N}$. Dann besitzt $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ wegen Beispiel 1.3 die zeithomogene Markoveigenschaft und ist somit wegen Bemerkung 1.6 eine Markovkette auf dem Zustandsraum $E = \{-1, +1\}$ mit Startverteilung $\nu = \mathbb{1}_{\{1\}}$ und Übergangsmatrix

$$P = (p(x, y))_{x,y \in E} \quad \textit{und} \quad p(x, y) = \frac{1}{2}$$

Beispiel 1.8 (Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$)**.** Sei $E = \mathbb{Z}$ mit

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & |x-y| = 1 \\ 0 & sonst \end{cases}$$

Diese Markovkette beschreibt ein Teilchen, das pro Zeiteinheit auf $\mathbb{Z}$ um eins nach rechts oder links springt, und zwar immer mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$. Die Übergangsmatrix $P = (p(x,y))_{x,y\in\mathbb{Z}}$ ist dann eine unendlich große Triagonalmatrix, die auf der Hauptdiagonalen ausschließlich Nullen hat und auf den beiden Nebendiagonalen immer den Wert $\frac{1}{2}$. Das Anfangsstück eines Pfades der symmetrischen Irrfahrt (mit Start in Null) kann zum Beispiel so aussehen (linear interpoliert):

.

Abbildung 3: Realisierung einer symmetrischen Irrfahrt

Beispiel 1.9 (Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$)**.** Sei μ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\mathbb{Z}^d$. Setze

$$p(x,y) = \mu(x-y) \qquad \forall\, x,y \in \mathbb{Z}^d$$

Offensichtlich ist $P = (p(x,y))_{x,y\in\mathbb{Z}^d}$ eine stochastische Matrix. Dann nennt man $(\mathbb{1}_x, \mathbb{P})$-Markovkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Irrfahrt(random walk) auf $\mathbb{Z}^d$ mit Start in $x \in \mathbb{Z}^d$. Im Spezialfall, dass

$$\mu(x) = \begin{cases} \frac{1}{2d} & , |x| = 1 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

nennt man $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine einfache, symmetrische Irrfahrt.

.

Abbildung 4: Symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^2$

Beispiel 1.10 (Irrfahrt auf $\{0,...,N\}$)**.** Eine (ν, P)-Markovkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist eine einfache Irrfahrt auf $E = \{0,...,N\}$ mit Startverteilung ν, wenn P durch folgenden Übergangsgraphen gegeben ist

.

Abbildung 5: Irrfahrt auf $\{0,...,N\}$

Der Rand x = 0 heißt absorbierend, wenn p(0,0) = 1 (d.h. a=0) bzw. refklektierend, wenn p(0,1) = 1 (d.h. a=1).

Beispiel 1.11 (Irrfahrt auf dem Torus $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^d$)**.** Sei $E = (\mathbb{Z} mod N) = (\mathbb{Z}/N)$ für $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, μ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf E und $P = (p(x,y))_{x,y\in E}$ mit $p(x,y) = \mu(y-x)$. Dann ist die (ν, P)-Markovkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Irrfahrt auf dem Torus mit Startverteilung ν, wenn P durch folgende Übergangsmatrix gegeben ist

.

Abbildung 6: Irrfahrt auf dem Torus

Beispiel 1.12 (einfache Irrfahrt auf dem Graphen)**.** Sei G = (V,E(V)) ein Graph mit Knotenmenge V und Kantenmenge E(V).

Schreibweise: $x \sim y :\Leftrightarrow x, y \in V$ sind durch eine Kante aus E(V) verbunden. Betrachte

$$p(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{deg(x)} & , x \sim y \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

wobei deg(x) die Anzahl der von x ausgehenden Kanten ist. Dann ist $P = (p(x,y))_{x,y \in V}$ eine stochastische Matrix, und die (ν,P)-Markovkette $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ bezeichnet man als Irrfahrt auf dem Graphen G mit Startverteilung ν.

.

Abbildung 7: Irrfahrt auf einem Graphen

Dabei ist $V = \{1,2,3,4\}$ die Knotenmenge und $E(V) = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{3,4\}\}$ die Kantenmenge.

Beispiel 1.13 (Verzweigungsprozesse)**.** Sei X_n die Anzahl der Individuen in der n-ten Generation. Jedes Individuum der n-ten Generation wird unabhängig von allen anderen in der folgenden Generation mit Wahrscheinlichkeit $\mu(y)$ mit $y \in \mathbb{N}_0$ Nachkommen ersetzt. Dann lässt sich $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ durch eine Markovkette auf $E = \mathbb{N}_0$ mit Übergangsmatrix $P = (p(x,y))_{x,y \in E}$

$$p(x,y) = \mu^{*x}(y) = \sum_{y_1 + \ldots + y_x = y} \mu(y_1)\ldots\mu(y_2) \qquad \text{mit } \mu^{*0}(y) = \mathbb{1}_{\{0\}}(y)$$

Frage? Woher kommt die Faltung?

Sei $(X_n{}^{(i)})_{n,i \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge u.i.v. Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}[X_n{}^{(i)} = k] = \mu(k)$. Setze

$$X_0 = x \qquad \text{und} \qquad X_n = \sum_{i=1}^{x_{n-1}} X_{n-1}^{(i)}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n] &= \mathbb{P}[X_n^1 + \ldots + X_n^{(x_n)} = x_{n+1}] \\ &= \mu^{*x_n}[x_{n+1}] = p(x_n, x_{n+1}). \end{aligned}$$

Frage? Besitzen Markovketten die Markoveigenschaft?

Satz 1.3. Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge von E-wertigen Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$, ν eine Verteilung auf E und $P = (p(x,y))_{x,y \in E}$ eine stochastische Matrix.

(i) $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist genau dann eine (ν, P)-Markovkette, wenn für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $x_0, \ldots, x_n \in E$ gilt

$$\mathbb{P}[X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n] = \nu(x_0) p(x_0, x_1) \cdot \ldots \cdot p(x_{n-1}, x_n).$$

(ii) Ist $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine (ν, P)-Markovkette, so gilt

$$\mathbb{P}[X_{n+1} = y \mid X_n = x] = p(x,y)$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $x, y \in E$ mit $P[X_n = x] > 0$.

Beweis. (i) " $\Leftarrow$ " Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $x_0, ..., x_{n+1} \in E$ mit $\mathbb{P}[X_0 = x_0, ..., X_n = x_n] > 0$. Dann gilt

- $\mathbb{P}[X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_0 = x_0, ..., X_n = x_n]$

$$= \frac{\mathbb{P}[X_0 = x_0, ..., X_{n+1} = x_{n+1}]}{\mathbb{P}[X_0 = x_0, ..., X_n = x_n]} = \frac{\nu(x_0)p(x_0, x_1) \cdot ... \cdot p(x_{n-1}, x_n)p(x_n, x_{n+1})}{\nu(x_0)p(x_0, x_1) \cdot ... \cdot p(x_{n-1}, x_n)} = p(x_n, x_{n+1})$$

- $\mathbb{P}[X_0 = x_0] = \nu(x_0)$

Folglich ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine (ν, P)-Markovkette.

" $\Rightarrow n$" Beweis durch vollständige Induktion über n

IA
n=0 : $\mathbb{P}[X_0 = x_0] \overset{\text{Def.\textbf{??} (ii)}}{=} \nu(x_0)$
n=1 : $\mathbb{P}[X_0 = x_0, X_1 = x_1] = \mathbb{P}[X_0 = x_0]\mathbb{P}[X_1 = x_1 \mid X_0 = x_0] \overset{\text{Def.\textbf{??} (i),(ii)}}{=} \nu(x_0)p(x_0, x_1)$

IS n $\rightarrow$ n+1
Sei $\mathbb{P}[X_0 = x_0, ..., X_n = x_n] > 0$ (andernfalls sind beide Seiten identisch gleich 0).

$$\mathbb{P}[X_0 = x_0, ..., X_n = x_n, X_{n+1} = x_{n+1}]$$

$$= \mathbb{P}[X_0 = x_0, ..., X_n = x_n]\mathbb{P}[X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_0 = x_0, ..., X_n = x_n]$$

$$\overset{\text{IV}}{=} \nu(x_0)p(x_0, x_1) \cdot ... \cdot p(x_{n-1}, x_n)\mathbb{P}[X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_0 = x_0, ..., X_n = x_n]$$

$$\overset{\text{Def.\textbf{??} (i)}}{=} \nu(x_0)p(x_0, x_1) \cdot ... \cdot p(x_{n-1}, x_n)p(x_n, x_{n+1})$$

(ii) Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $x, y \in E$ mit $\mathbb{P}[X_n = x] > 0$

$$\mathbb{P}[X_{n+1} = y \mid X_n = x] = \frac{\mathbb{P}[X_0 \in E, .., X_{n-1} \in E, X_n = x, X_{n+1} = y]}{\mathbb{P}[X_0 \in E, .., X_{n-1} \in E, X_n = x]}$$

$$= \frac{\sum_{x_0,..,x_{n-1}} \nu(x_0)p(x_0, x_1) \cdot ... \cdot p(x_{n-1}, x)p(x, y)}{\sum_{x_0,..,x_{n-1}} \nu(x_0)p(x_0, x_1) \cdot ... \cdot p(x_{n-1}, x)} = p(x, y)$$

□

Satz 1.4. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine (ν, P)-Markovkette mit Zustandsraum E. Dann gilt

$$\mathbb{P}[X_n = x] = \sum_{x_0,..,x_{n-1}\in E} \nu(x_0)p(x_0, x_1) \cdot ... \cdot p(x_{n-1}, x) = (\nu P^n)(x) \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0, x \in E$$

Insbesondere gilt für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ und alle $x, y \in E$ mit $\mathbb{P}[X_m = x] > 0$

$$\mathbb{P}[X_{m+n} = y \mid X_m = x] = (P^n)(x, y) = p_n(x, y).$$

Beweis. Übungsaufgabe. □

Beispiel 1.14. Sei $E = \{1, 2\}$ und $P = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix}$ mit $\alpha, \beta \in [0, 1]$.

Im folgenden soll $\mathbb{P}[X_n = 1 \mid X_0 = 1] = (P^n)(1, 1)$ berechnet werden. Es gilt

$$\begin{aligned} p_n(1,1) = (P^{n-1} \cdot P)(1,1) &= p_{n-1}(1,1)(1-\alpha) + p_{n-1}(1,2)\beta \\ &= p_{n-1}(1,1)(1-\alpha) + (1 - p_{n-1}(1,1))\beta \\ &= (1-\alpha-\beta)p_{n-1}(1,1) + \beta \end{aligned}$$

Mit $P^0(1, 1) = 1$ besitzt die obige Rekursionsgleichung folgende eindeutige Lösung

$$p_n(1,1) = \begin{cases} \dfrac{\beta}{\alpha+\beta} + \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}(1-\alpha-\beta)^n & falls\ \ \alpha+\beta > 0 \\ 1 & falls\ \ \alpha+\beta = 0 \end{cases}$$

Korollar 1.2. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine (ν, P)-Markovkette mit Zustandsraum E. Dann gilt für alle $m.n \in \mathbb{N}_0$, $x \in E$ und $f \in \mathcal{L}^\infty(E)$ gilt

$$\mathbb{E}[f(X_{m+n}) \mid X_m = x] = (P^n f)(x) \qquad \text{und} \qquad \mathbb{E}[f(X_n)] = \nu P^n f$$

Beweis. Aus Satz 1.4 folgt

$$\mathbb{E}[f(X_{m+n}) \mid X_m = x] = \sum_{y\in E} f(y)\mathbb{P}[X_{m+n} = y \mid X_m = x] = (P^n f)(x)$$

$$\mathbb{E}[f(X_n)] = \sum_{x\in E} f(x)\mathbb{P}[X_n = x] = \sum_{x\in E} (\nu P^n)(x)f(x) = \nu P^n f$$

Wobei die absolute Konvergenz der beiden Reihen durch die Voraussetzung $f \in \mathcal{L}^\infty(E)$ garantiert ist, da $\mathbb{E}[|f(X_n)|] \le \sup_{x\in E} |f(x)| < \infty$ □

Satz 1.5. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine (ν, P)-Markovkette. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$, $A \in \varepsilon^{\otimes\mathbb{N}_0}$, $B \subseteq E^n$ und $x \in E$ mit $\mathbb{P}_\nu[(x_0, ..., x_{n-1}) \in B,\ X_n = x] > 0$

$$\mathbb{P}_\nu[(X_n, X_{n+1}, ...) \in A \mid (X_0, ..., X_{n-1}) \in B,\ X_n = x] = \mathbb{P}_x[(X_0, X_1, ...) \in A]$$

Beweis. <u>Schritt 1</u> Für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}_0$ und $x_0, ..., x_k \in E$ betrachte zunächst

$$\mathbb{P}_\nu[(X_0, ..., X_{n-1}) \in B, X_n = x, X_{n+i} = x_i\ , \forall\, i \in \{0, 1, ..., k\}]$$

$$\overset{\text{Satz 1.3 (i)}}{=} \sum_{(y_0,...,y_{n-1})\in B} \nu(y_0)p(y_0, y_1) \cdot ... \cdot p(y_{n-1}, x) \cdot \mathbb{1}_{x=x_0} \cdot p(x_0, x_1) \cdot ... \cdot p(x_{k-1}, x_k)$$

$$= \mathbb{P}_\nu[(X_0, ..., X_{n-1}) \in B, X_n = x] \cdot \mathbb{P}_x[X_i = x_i\ , \forall\, i \in \{0, 1, ..., k\}]$$

Da E diskret ist, folgt somit die Behauptung für alle endlich-dimensionalen Rechteckmengen.

<u>Schritt 2</u> Betrachte das Mengensystem

$$\mathcal{D} = \{A \in \varepsilon^{\otimes\mathbb{N}_0} | \mathbb{P}_\nu[(X_n, X_{n+1}, ...) \in A | (X_0, ..., X_{n-1}) \in B, X_n = x] = \mathbb{P}_x[(X_0, X_1, ...) \in A]\}$$

Wir wollen zeigen, dass $\mathcal{D}$ ein Dynkinssystem ist.

1. Wir müssen zeigen dass $\mathcal{D}$ Omega(hier $E^{\mathbb{N}_0}$) enthält.

Da $\mathbb{P}_\nu[(X_n, X_{n+1}, ...) \in E^{\mathbb{N}_0} \mid (X_0, ..., X_{n-1}) \in B, X_n = x] = 1 = \mathbb{P}_x[(X_0, X_1, ...) \in E^{\mathbb{N}_0}]$ ist somit $E^{\mathbb{N}_0} \in \mathcal{D}$

2. Wir müssen Stabiltät unter Komplementbildung zeigen.

Sei $D \in \mathcal{D}$. Dann ist auch $D^C \in \mathcal{D}$, denn

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_\nu[(X_n, X_{n+1}, ...) \in D^C \mid (X_0, ..., X_{n-1}) \in B, X_n = x] \\
&= 1 - \mathbb{P}_\nu[(X_n, X_{n+1}, ...) \in D \mid (X_0, ..., X_{n-1}) \in B, X_n = x] \\
&\overset{D\in\mathcal{D}}{=} 1 - \mathbb{P}_x[(X_0, X_1, ...) \in D] \\
&= \mathbb{P}_x[(X_0, X_1, ...) \in D^C]
\end{aligned}$$

3. Wir müssen Abgeschlossenheit unter disjunkter Vereinigung zeigen.

Seien nun $D_1, D_2... \in \mathcal{D}$ disjunkt und $D = \bigcup_{i=1}^\infty D_i$ Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_\nu[(X_n, X_{n+1}, ...) \in D \mid (X_0, ..., X_{n-1}) \in B, X_n = x] \\
&\overset{\sigma-\text{Additivität}}{=} \sum_{i=1}^\infty \mathbb{P}_\nu[(X_n, X_{n+1}, ...) \in D_i \mid (X_0, ..., X_{n-1}) \in B, X_n = x] \\
&\overset{D_i\in\mathcal{D}}{=} \sum_{i=1}^\infty \mathbb{P}_x[(X_0, X_1, ...) \in D_i] \\
&\overset{\sigma-\text{Additivität}}{=} \mathbb{P}_x[(X_0, X_1, ...) \in D]
\end{aligned}$$

Also ist auch $D \in \mathcal{D}$.

Da $\mathcal{D}$ nach Schritt 1 auch das $\cap$-stabile Mengensystem $\mathcal{Z}$ der endlich-dimensionalen Rechtecke enthält, folgt aus dem Hauptsatz über Dynkinsysteme

$$\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{D} \qquad \Rightarrow \qquad \varepsilon^{\otimes\mathbb{N}_0} = \sigma(\mathcal{Z}) = d(\mathcal{Z}) \subseteq \mathcal{D} \subseteq \varepsilon^{\otimes\mathbb{N}_0}$$

□

Korollar 1.3 (Unabhängigkeit von Zukunft und Vergangenheit bei geg. Gegenwart)**.** Ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine (ν, P)-Markovkette, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$, $A \in \varepsilon^{\otimes\mathbb{N}_0}$, $B \subseteq E^n$ und $x \in E$ mit $\mathbb{P}_\nu[X_n = x] > 0$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[(X_0, X_1, ..., X_{n-1}) \in B, (X_{n+1}, X_{n+2}, ...) \in A \mid X_n = x] \\
&= \mathbb{P}[(X_0, X_1, ..., X_{n-1}) \in B \mid X_n = x] \cdot \mathbb{P}[(X_{n+1}, X_{n+2}, ...) \in A \mid X_n = x]
\end{aligned}$$

Beweis. Sei $\mathbb{P}[(X_0, X_1, ..., X_{n-1}) \in B, X_n = x] > 0$. Dann folgt aus Satz **??**

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[(X_0, X_1, ..., X_{n-1}) \in B, (X_{n+1}, X_{n+2}, ...) \in A \mid X_n = x] \\
&= \mathbb{P}[(X_0, X_1, ..., X_{n-1}) \in B|X_n = x]\cdot\mathbb{P}_\nu[(X_{n+1}, X_{n+2}, ...) \in A|(X_0, ..., X_{n-1}) \in B, X_n = x] \\
&= \mathbb{P}[(X_0, X_1, ..., X_{n-1}) \in B \mid X_n = x] \cdot \mathbb{P}_x[(X_1, X_2, ...) \in A] \\
&= \mathbb{P}[(X_0, X_1, ..., X_{n-1}) \in B \mid X_n = x] \cdot \mathbb{P}[(X_{n+1}, X_{n+2}, ...) \in A \mid X_n = x]
\end{aligned}$$

□

Satz 1.6 (Existenzsatz von Markovketten)**.** Zu jeder stochastischen Matrix $P = (p(x,y))_{x,y\in E}$ und jedem Wahrscheinlichkeitsvektor $\nu : E \to [0,1]$ existiert eine bezüglich Verteilung eindeutige (ν, P)-Markovkette.

Beweis. Das Ziel ist es den Satz von Daniell-Kolmogorov anzuwenden.

Schritt 1 Definiere die Mengenfunktion $\mathbb{Q}_{\{0,1,\dots,n\}} : \varepsilon^{\otimes(n+1)} \to [0,\infty]$ durch

$$\mathbb{Q}_{\{0,1,\dots,n\}}[\{x_0, x_1, .., x_n\}] := \nu(x_0)p(x_0,x_1)\cdot \dots \cdot p(x_{n-1},x_n),\ x_0,\dots,x_n \in E$$

zu zeigen: $\mathbb{Q}_{\{0,1,\dots,n\}}$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß

Offensichtlich ist $\mathbb{Q}_{\{0,1,\dots,n\}}[\emptyset] = 0$ und für alle $A_1, A_2, \dots \in \varepsilon^{\otimes(n+1)}$ disjunkt gilt

$$\mathbb{Q}_{\{0,1,\dots,n\}}[\cup_{i=1}^{\infty} A_i] = \sum_{x_0,\dots,x_n\in E} \mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i}(x_0,\dots,x_n)\cdot \nu(x_0)p(x_0,x_1)\cdot\dots\cdot p(x_{n-1},x_n)$$

$$\overset{A_i \text{ disjunkt}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{x_0,\dots,x_n\in E} \mathbb{1}_{A_i}(x_0,\dots,x_n)\cdot \nu(x_0)p(x_0,x_1)\cdot\dots\cdot p(x_{n-1},x_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{Q}_{\{0,1,\dots,n\}}[A_i]$$

Zudem gilt, da P eine stochastische Matrix und ν ein Wahrscheinlichkeitsvektor ist

$$\sum_{x_0,\dots,x_n\in E} \mathbb{Q}_{\{0,1,\dots,n\}}[\{x_0,\dots,x_n\}] = \sum_{x_0\in E} \nu(x_0) \sum_{x_1\in E} p(x_0,x_1) \dots \sum_{x_n\in E} p(x_{n-1},x_n) = 1$$

zu zeigen: $\mathbb{Q}_{\{0,1,\dots,n\}} = \mathbb{Q}_{\{0,1,\dots,n+1\}} \circ ({\pi_{\{0,\dots,n\}}}^{\{0,\dots,n+1\}})^{-1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0$

Für $A \in \varepsilon^{\otimes(n+1)}$ gilt

$$\mathbb{Q}_{\{0,1,\dots,n+1\}}[({\pi_{\{0,\dots,n\}}}^{\{0,\dots,n+1\}})^{-1}(A)]$$
$$= \sum_{x_0,\dots,x_n\in A} \nu(x_0)p(x_0,x_1)\cdot\dots\cdot p(x_{n-1},x_n) \sum_{x_{n+1}\in E} p(x_n,x_{n+1}) = \mathbb{Q}_{\{0,1,\dots,n\}}[A]$$

Folglich ist die Familie $\{\mathbb{Q}_{\{0,1,\dots,n\}} : n \in \mathbb{N}_0\}$ konsistent. Aus Satz **??** folgt somit die Existenz genau eines Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{Q}$ auf $(E^{\mathbb{N}_0}, \varepsilon^{\otimes \mathbb{N}0})$ mit

$$\mathbb{Q}_{\{0,1,\dots,n\}} = \mathbb{Q} \circ {\pi_{\{0,1,\dots,n\}}}^{-1}$$

Schritt 2 Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein stochastischer Prozess auf $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ mit Zustandsraum E. Definiere $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}\circ X^{-1} := \mathbb{Q}$

zu zeigen: $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist eine (ν, P)-Markovkette

Aus Lemma **??** (i) folgt zunächst einmal, dass

$$\mathbb{P}[X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n] = \mathbb{P}_{X_{\{0,\dots,n\}}}[\{x_0,\dots,x_n\}] = (\mathbb{P}_X \circ {\pi_{\{0,1,\dots,n\}}}^{-1})[\{x_0,\dots,x_n\}]$$
$$= (\mathbb{Q} \circ {\pi_{\{0,1,\dots,n\}}}^{-1})[\{x_0,\dots,x_n\}]$$
$$= \mathbb{Q}_{\{0,1,\dots,n\}}$$
$$= \nu(x_0)p(x_0,x_1)\cdot\dots\cdot p(x_{n-1},x_n)$$

Damit folgt die Behauptung aus dem Satz **??** (i). □

Satz 1.7. Sei $P = (p(x,y))_{x,y\in E}$ eine stochastische Matrix, ν eine beliebige Verteilung auf E und $(U_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge u.i.v. Zufallsvariablen mit $U_0 \sim \mathcal{U}([0,1])$. Dann existieren Funktionen $f : [0,1] \to E$ und $F : E\times[0,1] \to E$ so, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit

$$X_n = \begin{cases} f(U_0) & , n = 0 \\ F(X_{n-1}, U_n) & , n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

eine (ν, P)-Markovkette ist.

Beweis. Schritt 1 Sei $E = \mathbb{N}$. Setze

$$\alpha(0) := 0, \alpha(i) := \sum_{k=1}^{i} \nu[\{k\}] \qquad und \qquad \beta(i,0) := 0, \beta(i,j) := \sum_{k=1}^{j} p(i,k), i \in \mathbb{N} \tag{2}$$

Weiterhin definiere die Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{N}$ und $F : \mathbb{N} \times [0,1] \to \mathbb{N}$ durch

$$f(u) := \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \mathbb{1}_{\alpha(i-1)\le u\le\alpha(i)}$$

$$F(i,u) := \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot \mathbb{1}_{\beta(i,j-1)\le u\le\beta(i,j)}$$

Dann gilt für die durch (**??**) definierte Folge und alle $i_0, ..., i_n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}[X_0 = i_0, ..., X_n = i_n] \\ &= \mathbb{P}[U_0 \in [\alpha(i_0 - 1), \alpha(i_0)], U_k \in [\beta(i_{k-1}, i_k - 1), \beta(i_{k-1}, i_k)] \ \forall k \in \{1, ..., n\}] \\ &= \mathbb{P}[U_0 \in [\alpha(i_0 - 1), \alpha(i_0)] \cdot \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}[U_k \in [\beta(i_{k-1}, i_k - 1), \beta(i_{k-1}, i_k)]] \\ &= \nu(i_0)p(i_0, i_1) \cdot .... \cdot p(i_{n-1}, i_n) \end{aligned}$$

Also ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ nach Satz **??** (i) eine (ν, P)-Markovkette.

Schritt 2 Da E abzählbar ist, gibt es eine bijektive Funktion $\varphi : \mathbb{N} \to E$. Die Aussage des Satzes folgt somit aus Schritt 1. □

Bemerkung 1.7. Im Schritt 2 haben wir implizit benutzt, dass für eine Markovkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ auf E und einer bijektiven Funktion $f : E \to E'$ gilt, dass $(f(X_n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ wiederum eine Markovkette ist.

Warnung! Funktionen von Markovketten sind im Allgemeinen nicht Markovsch.

Beispiel 1.15. Sei $E = 1,2,3, P = (p(x,y))_{x,y\in E}$ mit $p(1,2) = p(2,3) = p(3,1)$ und $\nu(x) = \frac{1}{3}$.

.

Abbildung 8: Markovkette auf $\{1,2,3\}$

$$f : E \to E', \qquad f(1) = f(2) = a \text{ und } f(3) = b$$

Setze $Y_n = f(X_n)$. Dann gilt

$$\mathbb{P}[Y_2 = a \mid Y_1 = a, Y_0 = a] = 0 \neq \frac{1}{2} = \mathbb{P}[Y_2 = a \mid Y_1 = a]$$

1.3 Stoppzeiten und starke Markoveigenschaften

Frage? Wie lassen sich zufällige Zeitpunkte beschreiben?

Definition 1.10 (erzeugte σ-Algebra)**.** Sei $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein stochastischer Prozess auf $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ mit Werten in (E, ϵ). Setze

$$\mathfrak{F}_n^X := \sigma(X_k \ : \ k \in \{0, ..., n\}) := \{(X_0, ..., X_n)^{-1}(B) \ : \ B \in \varepsilon^{\otimes(n+1)}\}, \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

Dann heißt $(\mathfrak{F}_n^X)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die von X erzeugte σ-Algebra.

Erinnerung: *Sei $\Omega \neq \emptyset$, $(\Omega', \mathfrak{F}')$ und $X : \Omega \to \Omega'$ ein messbarer Raum. Dann ist*

$$X^{-1}(\mathfrak{F}') := \{X^{-1}(B) \ : B \in \mathfrak{F}'\}$$

eine σ-Algebra. Zudem gilt für jedes System $\mathcal{A}' \subseteq \mathfrak{F}'$

$$\sigma(X^{-1}(\mathcal{A}')) = X^{-1}(\sigma(\mathcal{A}'))$$

Bemerkung 1.8.

(a) Es gilt $\mathfrak{F}_m^X \subseteq \mathfrak{F}_n^X \subseteq \mathfrak{F}$ für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $m < n$.

(b) $\mathfrak{F}_n^X$ umfasst alle Informationen, die ein Beobachter von $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ bis zum Zeitpunkt n hat.

Definition 1.11 (Stoppzeit)**.** Sei $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein stochastischer Prozess auf $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ mit Werten in E. Eine Abbildung $T : \Omega \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ heißt Stoppzeit bzgl. X, wenn gilt

$$\{T = n\} \in \sigma(X_0, ..., X_n) = \mathfrak{F}_n^X, \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

Bemerkung 1.9. Das Ereignis $\{T = \infty\}$ kann interpretiert werden, dass die Stoppzeit nie eintritt.

Beispiel 1.16. Sei $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein stochastischer Prozess mit Zustandsraum E und $A \subseteq E$.

(a) Die Erste Rückkehr-bzw. Treffzeit S_A und die Eintrittszeit T_A ist gegeben durch

$$S_A(\omega) := \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n(\omega) \in A\}$$
$$T_A(\omega) := \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : X_n(\omega) \in A\}$$

sind Stoppzeiten, denn

$$\{S_A = n\} = \{X_1 \notin A, ..., X_{n-1} \notin A, X_n \in A\} \in \mathfrak{F}_n^X$$

$$\{T_A = n\} = \{X_0 \notin A, ..., X_{n-1} \notin A, X_n \in A\} \in \mathfrak{F}_n^X$$

Insbesondere gilt $\mathbb{P}[S_A = T_A \,|\, X_0 = x] = 1$ für alle $x \notin A$

(b) Die k-te Treffzeit ist gegeben durch

$$S_A^0(\omega) := 0 \ , \ S_A^k(\omega) := \inf\{n > S_A^{k-1}(\omega) \ : \ X_n \in A\} \ , \ k \in \mathbb{N}$$

(c) Jede deterministische Zeit $T(\omega) = t$, $t \in \mathbb{N}_0$ ist eine Stoppzeit, da

$$\{T = n\} \in \{\emptyset, \Omega\} \in \mathfrak{F}_n^X \ , \ n \in \mathbb{N}_0$$

(d) Die letzte Austrittszeit auf der Menge A

$$L_A(\omega) := \sup\{n \in \mathbb{N}_0 \ : \ X_n \in A\}$$

ist i.A. keine Stoppzeit, da $\{L_A = n\}$ davon abhängt, ob $(X_{n+m})_{m \in \mathbb{N}_0}$ die Menge A trifft oder nicht.

Frage? Wie kann man die Eintrittswahrscheinlichkeit einer Markovkette in eine Menge A berechnen?

Definition 1.12 (Generator)**.** Sei P eine stochastische Matrix. Dann nennt man $L := P - I$ den zugehörigen (diskreten) Generator, wobei mit I die Einheitsmatrix gemeint ist.

Definition 1.13 (Dirichletproblem)**.** Sei $\emptyset \neq A \subsetneq E$ und $g : A \to \mathbb{R}$. Dann heißt das lineare Gleichungssystem

$$(Lf)(x) = 0, \ x \in A^C$$

$$f(x) = g(x), \ x \in A$$

das zu L gehörige Dirichletproblem auf A^C mit Randwerten g auf A.

Satz 1.8. Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine (ν, P)-Markovkette mit Zustandsraum E. Für $A \subsetneq E$ setze $h_A(x) := \mathbb{P}_x[T_A < \infty]$. Dann ist h_A die kleinste Lösung des Dirichletproblems

$$(Lh_A)(x) = 0, \ x \in A^C$$

$$h_A(x) = 1, \ x \in A$$

Beweis. zu zeigen: h_A ist eine Lösung des obigen Dirichletproblems.

Da $\{X_0 \in A\} = \{T_A = 0\}$, ist folglich $h_A(x) = 1$ für alle $x \in A$.
Sei also nun $x \in A^C$. Dann folgt mit Satz **??**

$$\mathbb{P}_x[T_A < \infty] = \mathbb{P}_x[T_A \in \mathbb{N}] = \sum_{y \in E} \mathbb{P}_x[T_A \in \mathbb{N}, X_1 = y]$$

$$= \sum_{y \in E} \mathbb{P}[X_1 = y \mid X_0 = x] \cdot \mathbb{P}_\nu[T_A \in \mathbb{N} \mid X_0 = x, X_1 = y]$$

$$\overset{\text{Satz ??}}{=} \sum_{y \in E} p(x,y) \cdot \mathbb{P}_y[T_A \in \mathbb{N}_0]$$

Also,

$$h_A(x) = \mathbb{P}_x[T_A < \infty] = \sum_{y \in E} p(x,y) \cdot \mathbb{P}_y[T_A \in \mathbb{N}_0] = \sum_{y \in E} p(x,y) \cdot h_A(y) \Leftrightarrow (Lh_A)(x) = 0$$

zu zeigen: h_A ist die kleinste, nichtnegative Lösung des folgenden Dirichletproblems

$$(Lh)(x) = 0,\ x \notin A$$

$$h(x) = 1,\ x \in A$$

zu zeigen: Für alle $N \in \mathbb{N}_0$ gilt $\mathbb{P}_x[T_A \leq N] \leq h(x),\ x \in E$

Für jedes $N \in \mathbb{N}_0$ und $x \in A$ folgt $P_x[T_A \leq N] = 1 = h(x)$. Für jedes $x \in A^C$ ergibt sich mittels vollständiger Induktion über N

IA $N = 0$: $\mathbb{P}_x[T_A = 0] \overset{x \notin A}{=} 0 \leq h(x)$

IS $N \to N+1$: Sei also $x \notin A$. Dann gilt mittels Satz **??**

$$\begin{aligned} P_x[T_A \leq N+1] &= P_x[1 \leq T_A \leq N+1] \\ &= \sum_{y \in E} \mathbb{P}[X_1 = y \mid X_0 = x] \cdot \mathbb{P}_\nu[1 \leq T_A \leq N+1 \mid X_0 = x, X_1 = y] \\ &\overset{\text{Satz ??}}{=} \sum_{y \in E} p(x,y) \cdot \mathbb{P}_y[T_A \leq N] \\ &\overset{\text{IV}}{\leq} \sum_{y \in E} p(x,y) \cdot h(y) \\ &\overset{(Lh)(x)=0}{=} h(x) \end{aligned}$$

Da $\{T_A \leq N\} \uparrow \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{T_A \leq k\} = \{T_A < \infty\}$ für $N \to \infty$, so folgt aus der Stetigkeit des Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{P}_x$

$$h_A(x) = \mathbb{P}_x[T_A < \infty] = \lim_{N \to \infty} \mathbb{P}_x[T_A \leq N] \leq h(x),\ x \in E$$

□

Beispiel 1.17. Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine (ν, P)-Markovkette auf $E = \{1, 2, 3, 4\}$, deren stochastische Matrix durch folgenden Übergangsgraphen beschrieben wird

.

Abbildung 9: Übergangsgraph des stochastischen Prozesses

Im folgenden soll die Eintrittswahrscheinlichkeit in den Zustand $\{4\}$, d.h.

$$h_{\{4\}}(x) := \mathbb{P}_x[T_{\{4\}} < \infty],\ x \in E$$

bestimmt werden. Nach Satz **??** genügt es dazu, die minimale Lösung des Dirichletproblems mit $A = \{4\}$ zu berechnen. Betrachte somit folgendes Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} I.\quad & h_{\{4\}}(1) = c & II.\quad & h_{\{4\}}(2) = \frac{1}{2}(h_{\{4\}}(1) + h_{\{4\}}(3)) \\ III.\quad & h_{\{4\}}(3) = \frac{1}{2}(h_{\{4\}}(2) + h_{\{4\}}(4)) & IV.\quad & h_{\{4\}}(1) = 1. \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow h_{\{4\}} = (c, \frac{2}{3}c + \frac{2}{3}, \frac{1}{3}c + \frac{5}{6}, 1)^T$$

Folglich besitzt obiges Gleichungssystem erst durch die Minimalitätsbedingung eine eindeutige Lösung. Wähle hierzu $c = 0$. Dann folgt

$$h_{\{4\}}(2) = \mathbb{P}_2[T_{\{4\}} < \infty] = \frac{2}{3} \text{ und } h_{\{4\}}(3) = \mathbb{P}_3[T_{\{4\}} < \infty] = \frac{5}{6}$$

Beispiel 1.18 (Ruinwahrscheinlichkeit)**.** Betrachte eine einfache asymmetrische Irrfahrt auf $E = \mathbb{N}_0$ mit Absorbtion im Zustand 0.

.

Abbildung 10: asymmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{N}_0$

wiederum soll die Eintrittswahrscheinlichkeit in $\{0\}$ (= Absorbtionswahrscheinlichkeit) bestimmt werden. Aus Satz **??** folgt, dass $h_{\{0\}}(x) := \mathbb{P}_x[T_{\{0\}} < \infty]$, $x \in E$ die minimale, nichtnegative Lösung des folgenden Dirichletproblems ist:

$$(Lh_{\{0\}})(x) = p(h_{\{0\}}(x+1) - h_{\{0\}}(x)) + q(h_{\{0\}}(x-1) - h_{\{0\}}(x)) = 0,\ x \neq 0$$

$$h_{\{0\}}(0) = 1$$

Beh.: Für $p \neq q$ ist die Lösung von $(Lh)(x) = 0$ für alle $x \in E$ gegeben durch

$$h(x) = a + b \cdot (\frac{q}{p})^x$$

Es gilt nämlich für $x \in \mathbb{N}$

$$(Lh)(x) = pb(\frac{q}{p})^x(\frac{q}{p} - 1) + qb(\frac{q}{p})^x(\frac{p}{q} - 1) = b(\frac{q}{p})^x(q - p + p - q) = 0$$

Fall 1: p<q

Da $h_{\{0\}}(x) \in [0,1]$ für alle $x \in \mathbb{N}_0$, folgt $b = 0$ und, wegen $h_{\{0\}}(0) = 1$, $a = 1$. Also

$$h_{\{0\}}(x) = \mathbb{P}_x[T_{\{0\}} < \infty] = 1 \qquad \forall x \in \mathbb{N}_0$$

Fall 2: q<p

Aus $h_{\{0\}}(0) = 1$ folgt zunächst einmal, dass $b = 1 - a$. Also

$$[0,1] \ni h_{\{0\}}(x) = (\frac{q}{p})^x + a(1 - (\frac{q}{p})^x) \qquad \forall x \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow a \geq 0$$

Somit impliziert erst die Minimalitätsbedingung, dass $a = 0$ ist, d.h.

$$h_{\{0\}}(x) = \mathbb{P}_x[T_{\{0\}} < \infty] = (\frac{q}{p})^x$$

Beh.: Für $p = q$ ist die Lösung von $(Lh)(x) = 0$ für alle $x \in E$ gegeben durch

$$h(x) = a + bx$$

Denn für alle $x \in \mathbb{N}$ gilt $(Lh)(x) = \frac{1}{2}b(x + 1 - x) + \frac{1}{2}b(x - 1 - x) = 0$
Da $h_{\{0\}}(x) \in [0,1]$ für alle $x \in \mathbb{N}_0$, so folgt $b = 0$. Wegen $h_{\{0\}}(0) = 1$ ist zudem $a = 1$:

$$h_{\{0\}}(x) = \mathbb{P}_x[T_{\{0\}} \leq \infty] = 1$$

Beispiel 1.19 (Aussterbewahrscheinlichkeit von Verzweigungsprozessen)**.** Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Verzweigungsprozess, d.h. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist eine Markovkette mit Zustandsraum $E=\mathbb{N}_0$ und Übergangsmatrix $P=(p(x,y))_{x,y\in E}$

$$p(x,y)=\mu^{*x}(y) \qquad \text{mit } \mu^{*0}(y):=\mathbb{1}_{\{0\}}(y)$$

wobei μ eine gegebene Wahrscheinlichkeitsverteilung auf E ist.

Ziel: Berechne $\mathbb{P}_x[T_{\{0\}}<\infty]$, $x\in E$ (= Aussterbewahrscheinlichkeit)
Beh.: Für alle $n\in\mathbb{N}_0$ gilt $\mathbb{P}_x[X_n=0]=\mathbb{P}_1[X_n=0]^x$, $x\in E$

Beweis durch vollständige Induktion über n.

IA $n=0:\mathbb{P}_x[X_0=0]=\mathbb{1}_{\{x\}}(0)=\mathbb{P}_1[X_0=0]^x$, $(0^0=1)$
IS $n\to n+1$: Es gilt nun aber

$$\mathbb{P}_x[X_{n+1}=0]=\sum_{y\in E}\mathbb{P}[X_{n+1}=0,X_1=y\mid X_0=x]$$

$$=\sum_{y\in E}\mathbb{P}[X_1=y\mid X_0=x]\cdot\mathbb{P}[X_{n+1}=0\mid X_0=x,X_1=y]$$

$$\overset{\text{Satz }\mathbf{??}}{=}\sum_{y\in E}p(x,y)\cdot\mathbb{P}_y[X_n=0]$$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt weiterhin

$$\sum_{y\in E}p(x,y)\cdot\mathbb{P}_y[X_n=0]\overset{\text{IV}}{=}\sum_{y\in E}\mu^{*x}(y)\cdot\mathbb{P}_1[X_n=0]^y$$

$$\sum_{y\in E}\sum_{y_1+\ldots+y_x=y}\mu(y_1)\cdot\ldots\cdot\mu(y_x)\mathbb{P}_1[X_n=0]^{y_1+\ldots+y_x}$$

$$=\sum_{y_1,\ldots,y_x\geq 0}\mu(y_1)\mathbb{P}_1[X_n=0]^{y_1}\cdot\ldots\cdot\mu(y_x)\mathbb{P}_1[X_n=0]^{y_x}$$

$$=(\sum_{z\geq 0}\mu(z)\mathbb{P}_1[X_n=0]^z)^x$$

$$\overset{\text{IV}}{=}(\sum_{z\in E}p(1,z)\mathbb{P}_z[X_n=0])^x$$

$$\overset{\text{Satz }\mathbf{??}}{=}\mathbb{P}_1[X_{n+1}=0]^x$$

Da $\{T_{\{0\}}\leq n\}=\{X_n=0\}$ für alle $n\in\mathbb{N}_0$ und $\{T_{\{0\}}\leq n\}\uparrow\bigcup_{k=0}^{\infty}\{T_{\{0\}}\leq k\}=\{T_{\{0\}}<\infty\}$ für $n\to\infty$ folgt aus der Stetigkeit von $\mathbb{P}_x$

$$\mathbb{P}_x[T_{\{0\}}<\infty]=\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}_x[X_n=0]=\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}_1[X_n=0]^x=\mathbb{P}_1[T_{\{0\}}<\infty]^x$$

Folglich gilt $h_{\{0\}}(x)=h_{\{0\}}(1)^x=:q^x$ für alle $x\in E$. Im folgenden soll $q\in[0,1]$ bestimmt werden. Da nach Satz **??** $h_{\{0\}}$ die kleinste, nichtnegative Lösung des Dirichletproblems ist, gilt

$$(Lh_{\{0\}})(1)=0\;\Leftrightarrow\;q=h_{\{0\}}(1)=\sum_{y\in E}\mu(y)\cdot h_{\{0\}}(1)^y=G_\mu(q),$$

wobei

$$G_\mu(s) := \sum_{y \in E} \mu(y) s^y, \; s \in [0,1]$$

Die erzeugende Funktion von μ ist. Also ist q ein Fixpunkt der Gleichung

$$s = G_\mu(s)$$

Ist nun $\overline{q}$ ein weiterer Fixpunkt, so genügt die Funktion $h(x) := \overline{q}^x$ ebenfalls dem Dirichletproblem. Dann folgt aus Satz **??**

$$\overline{q} = h(1) \geq h_{\{0\}}(1) = q,$$

d.h. q ist der kleinste, nichtnegative Fixpunkt der Gleichung $s = G_\mu(s)$.

Nachfolgend soll der kleinste nichtnegative Fixpunkt der Gleichung $s = G_\mu(s)$ genauer analysiert werden. Da μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf E ist, gilt

$$G_\mu(1) = \sum_{y \in E} \mu(y) = 1$$

Falls μ entweder linear ($\mu(0) + \mu(1) = 1$) oder strikt konvex mit

$$G'_\mu(1) = \lim_{s \uparrow 1} G'_\mu(s) = \lim_{s \uparrow 1} \sum_{k \geq 1} k \cdot \mu(k) \cdot s^{k-1} = \sum_{k \geq 0} k \cdot \mu(k) < \infty$$

so gilt

.

Abbildung 11: Fixpunktanalyse

Definition 1.14 (harmonische Funktion)**.** Sei $A \subsetneq E$. Eine Funktion $f : \; E \to R$ heißt harmonisch auf A^C, wenn für alle $x \in A^C$

$$(Lf)(x) \text{ existiert} \qquad \text{und} \qquad (Lf)(x) = 0.$$

Frage? Gilt die Markoveigenschaft auch an Stoppzeiten?

Definition 1.15 (T-Vergangenheit)**.** Ist $T : \Omega \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ eine Stoppzeit bzgl. eines stochastischen Prozesses $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ auf $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$, so bezeichnet

$$\mathfrak{F}_T^X := \{A \in \mathfrak{F} \; : \; A \cap \{T = n\} \in \mathfrak{F}_n^X \; \forall \, n \in \mathbb{N}_0\}$$

die Menge der Ereignisse der T-Vergangenheit

Bemerkung 1.10. $\mathfrak{F}_T^X$ ist eine σ-Algebra. Da T eine Stopppzeit bzgl. X ist, ist $\Omega \in \mathfrak{F}_T^X$. Weiterhin gilt für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und $A \in \mathfrak{F}_T^X$

$$A^C \cap \{T = n\} = \underbrace{(A \cap \{T = n\})^C}_{\in \mathfrak{F}_T^X} \cap \underbrace{\{T = n\}}_{\in \mathfrak{F}_T^X} \in \mathfrak{F}_T^X$$

Somit ist auch $A^C \in \mathfrak{F}_T^X$. Seien nun $A_1, A_2, ... \in \mathfrak{F}_T^X$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \cap \{T = n\} = (\bigcup_{i=1}^{\infty} \underbrace{A_i \cap \{T = n\}}_{\in \mathfrak{F}_T^X}) \in \mathfrak{F}_T^X$$

Also ist auch $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{F}_T^X$.

Satz 1.9 (starke Markoveigenschaft)**.** Ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine (ν, P)-Markovkette mit Zustandsraum E und T eine Stoppzeit, so gilt für alle $A \in \varepsilon^{\otimes\mathbb{N}_0}$, $F \in \mathfrak{F}_T^X$ und $x \in E$ mit $\mathbb{P}_\nu[F, X_T = x, T < \infty] > 0$

$$\mathbb{P}_\nu[(X_T, X_{T+1}, ...) \in A \mid F, X_T = x, T < \infty] = \mathbb{P}_x[(X_0, X_1, ...) \in A],$$

wobei X_T auf $\{T < \infty\}$ definiert ist durch $X_T(\omega) := X_{T(\omega)}(\omega)$

Beweis. Sei also $A \in \varepsilon^{\otimes\mathbb{N}_0}$, $F \in \mathfrak{F}_T^X$ und $x \in E$ mit $\mathbb{P}_\nu[F, X_T = x, T < \infty] > 0$. Dann gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}_0$ ein $B \subseteq E^n$ mit

$$F \cap \{T = n\} \cap \{X_T = x\} = \{(X_0, ..., X_{n-1}) \in B, X_n = x\}$$

Falls zudem $\mathbb{P}_\nu[(X_0, ..., X_{n-1}) \in B, X_n = x] > 0$ ist, so folgt aus Satz **??**

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_\nu[(X_T, X_{T+1}, ...) \in A \mid F, X_T = x, T = n] \\
&= \mathbb{P}_\nu[(X_T, X_{T+1}, ...) \in A \mid (X_0, ..., X_{n-1}) \in B, X_n = x] \\
&\overset{\text{Satz ??}}{=} \mathbb{P}_x[(X_0, X_1, ...) \in A]
\end{aligned}$$

Also,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_\nu[(X_T, X_{T+1}, ...) \in A \mid F, X_T = x, T < \infty] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbb{P}_\nu[(X_T, X_{T+1}, ...) \in A \mid F, X_T = x, T = n] \cdot \mathbb{P}_\nu[F, X_T = x, T = n]}{\mathbb{P}_\nu[F, X_T = x, T < \infty]} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbb{P}_x[(X_0, X_1, ...) \in A] \cdot \mathbb{P}_\nu[F, X_T = x, T = n]}{\mathbb{P}_\nu[F, X_T = x, T < \infty]} \\
&= \mathbb{P}_x[(X_0, X_1, ...) \in A]
\end{aligned}$$

□

Korollar 1.4. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine (ν, P)-Markovkette mit Zustandsraum E und

$$V_x := \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{X_n = x}\,, \quad x \in E$$

Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}_x[V_x > k] = (1 - \mathbb{P}_x[S_{\{x\}} = \infty])^k.$$

Falls $\mathbb{P}_x[S_{\{x\}} = \infty] > 0$, so gilt

$$\mathbb{E}[V_x] = \frac{1}{\mathbb{P}_x[S_{\{x\}} = \infty]}$$

Beweis. Für $x \in E$ definiere

$$S_{\{x\}}^0 := 0 \quad \textit{und} \quad S_{\{x\}}^k := \inf\{n > S_{\{x\}}^{k-1} \;:\; X_n = x\}\,, \quad k \in \mathbb{N}$$

Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\{V_{\{x\}} > k\} \cap \{X_0 = x\} = \{S_{\{x\}}^k < \infty\} \cap \{X_0 = x\}.$$

Aus der starken Markoveigenschaft folgt somit

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x[V_{\{x\}} > k+1 \mid V_{\{x\}} > k] &= \mathbb{P}_{\{x\}}[S^{k+1}_{\{x\}} < \infty \mid S^k_{\{x\}} < \infty] \\ &= \mathbb{P}_x[S^{k+1}_{\{x\}} < \infty \mid X_{S^k_{\{x\}}} = x, S^k_{\{x\}} < \infty] \\ = \mathbb{P}_\nu[\inf\{n > 0 \;:\; X_{S^k_{\{x\}}+n} = x\} &+ S^k_{\{x\}} < \infty \mid X_0 = x, X_{S^k_{\{x\}}} = x, S^k_{\{x\}} < \infty] \\ &\overset{\text{Satz ??}}{=} \mathbb{P}_x[S^1_{\{x\}} < \infty]\end{aligned}$$

Daraus folgt dann

$$\mathbb{P}_x[V_x > k] = \prod_{l=1}^{k-1} \mathbb{P}_x[V_x > l+1 \mid V_x > l] \cdot \mathbb{P}_x[V_x > 1] \overset{\text{Satz ??}}{=} \mathbb{P}_x[S^1_{\{x\}} < \infty]^k.$$

Weiterhin gilt im Falle $\mathbb{P}_x[S^1_{\{x\}} < \infty] < 1$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x[V_x] &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}_x[V_x > k] = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_x[V_x > k] = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_x[S^1_{\{x\}} < \infty]^k \\ &= \frac{1}{1 - \mathbb{P}_x[S^1_{\{x\}} < \infty]} = \frac{1}{\mathbb{P}_x[S^1_{\{x\}} = \infty]}\end{aligned}$$

□

Struktureigenschaften der Übergangsmatrix

Im folgenden sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine (ν, P)-Markovkette auf $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ mit höchstens abzählbaren Zustandsraum E. Bezeichne wieder mit $P^n = (p_n(x,y))_{x,y\in E}$ das n-fache Matrixprodukt (P^0 = Einheitsmatrix auf E), $n \in \mathbb{N}_0$

2.1 Klassifikation von Zuständen

Definition 2.1 (absorbierender, rekurrenter, transienter Zustand)**.** Ein Zustand $x \in E$ heißt

(i) absorbierend, falls $p(x,x) = 1$

(ii) rekurrent, falls $\mathbb{P}_x[S_{\{x\}} < \infty] = 1$

(iii) transient, falls $\mathbb{P}_x[S_{\{x\}} < \infty] < 1$

wobei $S_{\{x\}} := \inf\{n \in \mathbb{N} \,:\, X_n = x\}$ die Treffzeit ist.

Bemerkung 2.1. x ist absorbierend $\Rightarrow$ x ist rekkurent.

Frage? Wie kann man einen rekurrenten/transienten Zustand alternativ charakterisieren?

Satz 2.1. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine (ν, P)-Markovkette mit Zustandsraum E. Dann gilt

a) x ist rekurrent $\Leftrightarrow \mathbb{P}_x[X_n = x \;\; u.o.] = 1 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} p_n(x,x) = \infty$

b) x ist transient $\Leftrightarrow \mathbb{P}_x[X_n = x \;\; u.o.] = 0 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} p_n(x,x) < \infty$

Insbesondere ist jeder Zustand $x \in E$ entweder rekurrent oder transient.

Beweis. Für $x \in E$ sei $V_x := \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{X_n = x}$ die Gesamtzahl der Besuche von $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in x. Insbesondere ist $\mathbb{E}_x[V_x] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n(x,x)$.

a) *zu zeigen* : x rekurrent $\Rightarrow \mathbb{P}_x[X_n = x \;\; u.o.] = 1$

Sei also x rekurrent, d.h. $\mathbb{P}_x[S_{\{x\}} < \infty] = 1$. Dann folgt aus Korollar **??**:

$$\mathbb{P}_x[X_n = x \;\; u.o.] = \mathbb{P}_x[V_x = \infty] = \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}_x[V_x > k] = \lim_{k\to\infty} \underbrace{\mathbb{P}_x[S_{\{x\}} < \infty]}_{=1}^{k} = 1$$

zu zeigen : $\mathbb{P}_x[X_n = x \;\; u.o.] = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} p_n(x,x) = \infty$

Es gilt nun aber

$$\mathbb{P}_x[V_x = \infty] = \mathbb{P}_x[X_n = x \;\; u.o.] = 1 \Rightarrow \mathbb{E}_x[V_x] = \infty$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} p_n(x,x) = \mathbb{E}_x[V_x] - 1 = \infty$$

zu zeigen : $\sum_{n=1}^{\infty} p_n(x,x) = \infty \Rightarrow \mathbb{P}_x[S_{\{x\}} < \infty] = 1$

Angenommen $\mathbb{P}_x[S_{\{x\}} < \infty] < 1$. Dann folgt aus Korollar **??**

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n(x,x) = \mathbb{E}_x[V_x] - 1 \leq \mathbb{P}_x[S_{\{x\}} = \infty]^{-1} < \infty \; \lightning$$

Also ist $\mathbb{P}_x[S_{\{x\}} < \infty] = 1$.

b) zu zeigen : x transient $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} p_n(x,x) < \infty \Rightarrow \mathbb{P}_x[X_n = x \;\; u.o.] = 0$

Sei also x transient, d.h. $\mathbb{P}_x[S_{\{x\}} < \infty] < 1$. Dann folgt aus Korollar **??**

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n(x,x) = \mathbb{E}_x[V_x] - 1 \leq \mathbb{P}_x[S_{\{x\}} = \infty]^{-1} < \infty$$

Insbesondere impliziert $\mathbb{E}_x[V_x] < \infty$, dass $\mathbb{P}_x[X_n = x \;\; u.o.] = 0$

zu zeigen : $\mathbb{P}_x[X_n = x \;\; u.o.] = 0 \Rightarrow \mathbb{P}_x[S_{\{x\}} < \infty] < 1$

Angenommen $\mathbb{P}_x[S_{\{x\}} < \infty] = 1$. Dann folgt aus Korollar **??**

$$\mathbb{P}_x[X_n = x \;\; u.o.] = \mathbb{P}_x[V_x = \infty] = \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}_x[S_{\{x\}} < \infty]^k = 1 \; \lightning$$

Also gilt $\mathbb{P}_x[S_{\{x\}} < \infty] < 1$.

□

Definition 2.2 (Greenfunktion von X)**.** Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine (ν, P)-Markovkette auf E und $V_x := \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{X_n = x}$, $x \in E$. Dann heißt

$$G(x,y) = \mathbb{E}_x[V_y] = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x,y) \qquad \in [0,\infty]$$

die Greenfunktion von $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Korollar 2.1. Ist $y \in E$ ein transienter Zustand, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} p_n(x,y) = 0 \quad \forall x \in E.$$

Beweis. Sei $y \in E$ ein transienter Zustand. Dann folgt aus Satz **??**

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n(y,y) < \infty \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} p_n(y,y) = 0$$

Sei also nun $x \in E$, $x \neq y$. Dann gilt

$$p_n(x,y) = \mathbb{P}_x[X_n = y] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_x[X_n = y, S_{\{y\}} = k]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_x[S_{\{y\}} = k] \cdot \mathbb{P}_x[X_n = y \mid X_k = y, S_{\{y\}} = k]$$

Somit folgt aus Satz **??**

$$p_n(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_x[S_{\{y\}} = k] \cdot \mathbb{P}_y[X_{n-k} = y] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_x[S_{\{y\}} = k] \cdot p_{n-k}(y,y)$$

Also,

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_x[S_{\{y\}} = k] \sum_{n=k}^{\infty} p_{n-k}(y,y) = \mathbb{P}_x[S_{\{y\}} < \infty](1 + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} p_n(y,y))}_{<\infty} < \infty$$

Damit erhält man $\lim_{n\to\infty} p_n(x,y) = 0$ für alle $x \neq y$. □

Beispiel 2.1 (Kartenhausprozess)**.** Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markovkette mit Zustandsraum $E = \mathbb{N}_0$, dessen Übergangsmatrix $P = (p(x,y))_{x,y\in E}$ durch folgenden Übergangsgraphen beschrieben wird

.

Abbildung 12: Übergangsgraph des Kartenhausprozesses

Frage? Unter welchen Bedingungen an $(p_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ ist der Zustand $x = 0$ rekurrent?

Da es für jedes $n \in \mathbb{N}$ genau einen Pfad gibt, der bei Start in $x = 0$ nach genau n-Schritten wieder in 0 trifft (nämlich $(X_0, X_1, ..., X_n) = (0, 1, 2, ..., n-1, 0)$) folgt

$$\mathbb{P}_0[S_{\{0\}} = n] = (1-p_0) \cdot ... \cdot (1-p_{n-2}) \cdot p_{n-1}\,, \quad n \in \mathbb{N}$$

Setze nun $u_0 := 1$ und $u_n = (1-p_0) \cdot ... \cdot (1-p_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\mathbb{P}_0[S_{\{0\}} = n] = u_{n-1} - u_n$$

Daraus folgt

$$\mathbb{P}_0[S_{\{0\}} < \infty] = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}_0[S_{\{0\}} = n] = \lim_{N\to\infty} (1-u_N) = 1 - \lim_{N\to\infty} \prod_{n=0}^{N-1} (1-p_n)$$

<u>Beh.</u>: Falls $p_i \in (0,1)$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$ so gilt

$$\lim_{N\to\infty} \prod_{n=0}^{N} (1-p_n) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} p_n = \infty$$

" $\Leftarrow$ " Da $e^{-x} \geq 1-x$ für alle $x \geq 0$, folgt

$$0 \leq \lim_{N\to\infty} \prod_{n=0}^{N} (1-p_n) \leq \lim_{N\to\infty} exp(-\sum_{n=0}^{N} p_n) \overset{\sum_{n=0}^{\infty} p_n = \infty}{=} 0$$

" $\Rightarrow$ " <u>zu zeigen</u> : Für jedes $m \in \mathbb{N}_0$ gilt $\prod_{n=m}^{m+N} (1-p_n) \geq 1 - \sum_{n=m}^{m+N} p_n$, $\forall N \in \mathbb{N}_0$

IA $N = 0$: ✓

IS $N \to N+1$: Es gilt nun aber

$$\prod_{n=m}^{m+N+1} (1-p_n) \overset{\text{IV}}{\geq} (1 - \sum_{n=m}^{m+N} p_n)(1-p_{m+N+1}) = 1 - p_{m+N+1} - \underbrace{(1-p_{m+N+1})}_{\leq 1} \cdot \sum_{n=m}^{m+N} p_n \geq 1 - \sum_{n=m}^{m+N+1} p_n$$

Angenommen $\sum_{n=0}^{\infty} p_n < \infty$. Dann existiert ein $m \in \mathbb{N}$ so, dass $0 < \sum_{n=m}^{\infty} p_n < 1$. Daraus folgt

$$0 = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=0}^{N} (1-p_n) = \prod_{n=0}^{m-1} (1-p_n) \lim_{N\to\infty} \prod_{n=m}^{N} (1-p_n) \geq \prod_{n=0}^{m-1} (1-p_n) \cdot (1 - \underbrace{\sum_{n=m}^{\infty} p_n}_{<1}) > 0 \lightning$$

Folglich ist $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = \infty$.

Beispiel 2.2 (Einfache Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$)**.** Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markovkette auf $E = \mathbb{Z}$ mit folgendem Übergangsgraphen:

.

Abbildung 13: Einfache Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$

Dann gilt $p_{2n+1}(0,0) = 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und $p_{2n}(0,0) = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Aus der Stirlingformel

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot n^n e^{-n} \qquad (a_n \sim b_n :\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1)$$

folgt dann

$$p_{2n}(0,0) = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot p^n (1-p)^n \sim \frac{\sqrt{4\pi n}}{2\pi n} \frac{(2n)^{2n}}{n^{2n}} \cdot p^n (1-p)^n = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} (4p(1-p))^n$$

<u>1.Fall</u>: $p = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad p_{2n}(0,0) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \quad \Rightarrow \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \,:\, p_{2n}(0,0) \geq \frac{1}{2\sqrt{n}} \quad \forall n \geq n_0$

Also

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n(0,0) \geq \sum_{n=n_0}^{\infty} p_{2n}(0,0) \geq \frac{1}{2} \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty$$

Aus Satz **??** folgt somit, dass $x = 0$ rekurrent ist.

<u>2.Fall</u>: $p \neq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 4p(1-p) =: r < 1 \quad \Rightarrow \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \,:\, p_{2n}(0,0) \leq r^n$ $\forall n \geq n_0$

Also,

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n(0,0) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{2n}(0,0) \leq n_0 + \sum_{n=n_0}^{\infty} r^n < \infty$$

Aus Satz **??** folgt somit, dass $x = 0$ transient ist.

Beispiel 2.3 (einefache, symmterische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^2$)**.** Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markovkette auf $E = \mathbb{Z}^2$ mit $p(x,y) = \frac{1}{4} \mathbb{1}_{||x-y||=1}$. Zunächst einmal ist $p_{2n+1}(0,0) = 0$ für alle $n\mathbb{N}_0$. Um in 2n Schritten nach $x = 0$ zurückzukehren muss $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gleich oft (k-Mal) nach rechts bzw. links und gleich oft ((n-k)-Mal) nach oben bzw. unten gelaufen sein. Daraus folgt

$$p_{2n}(0,0) = 4^{-2n} \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{(k!)^2((n-k)!)^2} = 4^{-2n} \binom{2n}{n} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}}_{=\binom{2n}{n}} = (\underbrace{\binom{2n}{n} 2^{-n}}_{\sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}})^2 \sim \frac{1}{\pi n}$$

Also existiert wiederum ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $p_{2n}(0,0) \geq \frac{1}{4n}$ für alle $n \geq n_0$. Daraus folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n(0,0) \geq \sum_{n=n_0}^{\infty} p_{2n}(0,0) \geq \frac{1}{4} \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

$\Rightarrow$ x=0 ist rekurrent.

Definition 2.3 (positiv und nullrekurrent)**.** Ein rekurrenter Zustand $x \in E$ heißt

(i) positiv rekurrent, falls $\mathbb{E}_x[S_{\{x\}}] < \infty$,

(ii) nullrekurrent, falls $\mathbb{E}_x[S_{\{x\}}] = \infty$.

Erklärung 2.1 (Unterschied positiv und nullrekurrent)**.** Bei einem nullrekurrenten Zustand wissen wir zwar mit Sicherheit, dass die Rückkehrzeit endlich ist, aber die Wahrscheinlichkeiten für hohe Rückkehrzeiten sind zu groß, als dass es eine endliche Erwartung gäbe.

Satz 2.2. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine (ν, P)-Markovkette mit Zustandsraum E. Ein rekurrenter Zustand $x \in E$ ist genau dann nullrekurrent, wenn $\lim_{n\to\infty} p_n(x,x) = 0$.

Korollar 2.2. Ist $y \in E$ ein nullrekurrenter Zustand, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} p_n(x,y) = 0 \quad \forall x \in E.$$

Beweis. Sei $y \in E$ nullrekurrent. Dann folgt aus Satz **??**, dass $\lim_{n\to\infty} p_n(y,y) = 0$. Zudem ist

$$p_n(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_x[S_{\{y\}} = k] p_{n-k}(y,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_x[S_{\{y\}} = k] \mathbb{1}_{k\geq n} p_{n-k}(y,y).$$

Setze $f_n(k) := \mathbb{1}_{k\geq n} p_{n-k}(y,y)$, $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt $f_n(k) \overset{n\to\infty}{\to} 0$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$ und $||f_n||_\infty \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. □

Also folgt die Behauptung aus dem Satz von Lebesgue.

Definition 2.4 (Periode)**.** Für jedes $x \in E$ heißt $d(x) := ggT\{n \in \mathbb{N}_0 : p_n(x,x) > 0\}$ die Periode des Zustandes x. Ist $d(x) = 1$, so heißt der Zustand x aperiodisch.

Bemerkung 2.2. Sei $D \subseteq \mathbb{Z}$. Dann ist $d \in \mathbb{N}$ ein gemeinsamer Teiler von D (Schreibweise: $d \mid D$), falls $\frac{x}{d} \in \mathbb{Z}$ für alle $x \in D$. Ist $D = \{0\}$, so gilt $d \mid D$ für alle $d \in \mathbb{N}$, also $ggT(D) = \infty$. Falls $D \neq \{0\}$, so gilt

$$d \mid D \quad \Rightarrow \quad d \leq \min\{|x| \,:\, x \in D \setminus \{0\}\}$$

Insbesondere ist

$$ggT(D) = \min\{|x| \,:\, x \in D \setminus \{0\}\} \quad \Leftrightarrow \quad \{ggT(D), -ggT(D)\} \cap D \neq \emptyset$$

Beispiel 2.4. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine einfache Irrfahrt auf dem Torus $E = (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$, $N \geq 2$.
Dann ist für alle $x \in E$

$$d(x) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } N \text{ ungerade} \\ 2 & \text{, falls } N \text{ gerade} \end{cases}$$

Satz 2.3. Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{Z}$ mit $D \neq \{0\}$.

a) Dann existieren ein $k \in \mathbb{N}$, $a_1, ..., a_k \in \mathbb{Z}$ und $d_1, ..., d_k \in D$ mit

$$ggT(D) = \sum_{i=1}^{k} a_i d_i$$

b) Falls zusätzlich $D \subseteq \mathbb{N}_0$ mit $d_1, d_2 \in D \Rightarrow d_1 + d_2 \in D$, so existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\{n \cdot ggT(D) \ : \ n \geq N\} \ = \ \{d \in D \ : \ d \geq N \cdot ggT(D)\}$$

Beweis. a) Sei D̂ die kleinste Teilmenge von $\mathbb{Z}$ mit der Eigenschaft, dass

$$D \subseteq \hat{D} \quad \text{und} \quad \forall d_1, d_2 \in \hat{D} \quad \Rightarrow \quad d_1 \pm d_2 \in \hat{D}$$

Betrachte nun die Menge

$$\mathcal{D} := \{\hat{d} \in \hat{D} \ : \ \exists k \in \mathbb{N},\ a_1, ..., a_k \in \mathbb{Z},\ d_1, ..., d_k \in D \ s.d. \ \hat{d} = \sum_{i=1}^{k} a_i d_i\}$$

zu zeigen: $\hat{D} = \mathcal{D}$

Zunächst einmal gilt $D \subseteq \mathcal{D}$. Betrachte nun $x, y \in \mathcal{D}$. Dann gilt $x \pm y \in \mathcal{D}$. Da aber $\hat{D}$ die kleinste Teilmenge ist, die D enthält und abgeschlossen bzgl. Addition/Subtraktion ist, folgt $\hat{D} \subseteq \mathcal{D}$. Also $\hat{D} = \mathcal{D}$

zu zeigen: $ggT(D) = ggT(\hat{D})$

Da $ggT(D) \,|\, \sum_{i=1}^{k} a_i d_i$ für alle $k \in \mathbb{N}$, $a_1, ..., a_k \in \mathbb{Z}$, $d_1, ..., d_k \in D$ folgt $ggT(D) \,|\, \hat{D}$. Also

$$ggT(D) \leq ggT(\hat{D})$$

Adererseits ist $D \subseteq \hat{D}$, weshalb $ggT(\hat{D}) \mid D$. Also,

$$ggT(\hat{D}) \leq ggT(D)$$

und somit gilt $ggT(D) = ggT(\hat{D})$.

zu zeigen: $ggT(\hat{D}) \in \hat{D}$

Setze $m := \min\{x \in \mathbb{N} \ : \ x \in \hat{D}\}$. Aufgrund von Bemerkung **??** gilt $ggT(\hat{D}) \leq m$. Durch die Anwendung des euklidischen Algorithmus ergibt sich für jedes $\hat{d} \in \hat{D}$, dass

$$\hat{d} = a \cdot m + r \qquad \text{für } a \in \mathbb{Z} \text{ und } r \in \{0, ..., m-1\}$$

Also,

$$r = \underbrace{\hat{d}}_{\in \hat{D}} - \underbrace{a \cdot m}_{\in \hat{D}} \in \hat{D}$$

Angenommen $r \neq 0$, so ist $r < m$ ↯. Also ist $m \mid \hat{D}$ und folglich $m \leq ggT(\hat{D})$. Somit gilt $m = ggT(\hat{D})$ und $ggT(\hat{D}) \in \hat{D}$

b) Sei zusätzlich angenommen, dass $D \subseteq \mathbb{N}_0$ und $d_1, d_2 \in D \Rightarrow d_1 + d_2 \in D$.

zu zeigen: $\exists\, N \in \mathbb{N} : \{n \cdot ggT(D) \ : \ n \geq N\} \subseteq$ D

Da D abgeschlossen unter Addition ist, folgt $\hat{D} = \{d_2 - d_1 \ : \ d_1, d_2 \in D \cup \{0\}\}$. Da

$$ggT(D) = ggT(\hat{D}) = \min\{x \in \mathbb{N} \ : \ x \in \hat{D}\} \quad \text{(nach Beweisteil a))}$$

gibt es somit $d_1 \in D \cup \{0\}$ und $d_2 \in D$, $d_2 > d_1$ so, dass

$$ggT(D) = d_2 - d_1$$

Falls $d_1 = 0$, so gilt

$$n \cdot ggT(D) = n \cdot d_2 \in D \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad N = 1$$

Falls $d_1 \neq 0$, so wähle ein $a \in \mathbb{N}$ mit $d_1 = a \cdot ggT(D)$. Dann gilt für alle $m, r \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq r < m$

$$(a^2 + m \cdot a + r) \cdot ggT(D) = (a + m) \cdot a \cdot ggT(D) + r \cdot ggT(D) = (a + m) \cdot d_1 + r \cdot d_2 \in D$$

Wähle somit $N = a^2$. Dann gilt $\{n \cdot ggT(D) \ : \ n \geq N\} \subseteq D$. □

Korollar 2.3. Sei$(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine (ν, P)-Markovkette mit Zustandsraum E. Dann gilt für jedes $x \in E$

a) $d(x) < \infty \quad \Rightarrow \quad \exists\, N(x) \in \mathbb{N} \quad : \quad p_{n \cdot d(x)}(x, x) > 0 \quad \forall n \geq N(x)$

b) x ist aperiodisch $\quad \Leftrightarrow \quad \exists\, N(x) \in \mathbb{N} \quad : \quad p_n(x, x) > 0 \quad \forall n \geq N(x)$

Beweis. Für $x \in E$ sei $D(x) := \{n \in \mathbb{N}_0 \ : \ p_n(x, x) > 0\}$. Falls $D(x) \neq \{0\}$, so ergibt sich für alle $n_1, n_2 \in D(x)$ aus der Chapman-Kolmogorov-Gleichung (Satz **??**)

$$p_{n_1 + n_2}(x, x) = \sum_{z \in E} p_{n_1}(x, z) p_{n_2}(z, x) \geq p_{n_1}(x, x) p_{n_2}(x, x) > 0$$

Also, $n_1 + n_2 \in D(x)$. Folglich ist $D(x)$ abgeschlossen unter der Addition.

a) $d(x) < \infty \Rightarrow D(x) \neq \{0\} \overset{\text{Satz ?? b)}}{\Rightarrow} \exists\, N(x) \in \mathbb{N} \ : \ p_{n \cdot d(x)}(x, x) > 0,\ \forall n \geq N(x)$

b) " $\Rightarrow$ " Folgt direkt aus a)
" $\Leftarrow$ " Sei also nun $p_n(x, x) > 0$ für alle $n \geq N(x) \in \mathbb{N}$. Dann enthält $D(x)$ unendlich viele Primzahlen. Folglich ist $d(x) = ggT(D(x)) = 1$

□

Beispiel 2.5 (Träge Markovkette)**.** Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine (ν, P)-Markovkette mit Zustandsraum E. Angenommen der Zustand $x \in E$ ist periodisch ($d(x) \geq 2$). Betrachte man die Markovkette $(X'_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit Startverteilung ν und Übergangsmatrix $P' = \epsilon I + (1 - \epsilon) P, \epsilon \in (0, 1)$, wobei I die Einheitsmatrix auf E ist. Dann gilt $d(x) = 1$ für alle $x \in E$, da

$$\{1\} \in \{n \in \mathbb{N}_0 \ : \ p'_n(x, x) > 0\}$$

Die Markovkette $(X'_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ nennt man auch träge Markovkette.

2.2 Klassifikation von Markovketten

Definition 2.5 (erreichbar, kommunizieren, wesentlich)**.**

a) Ein Zustand $y \in E$ heißt erreichbar von $x \in E$ $(x \to y)$, falls ein $n \in \mathbb{N}_0$ existiert mit $p_n(x, y) > 0$

b) Die Zustände $x, y \in E$ kommunizieren $(x \leftrightarrow y)$, falls $x \to y$ und $y \to x$.

c) Eine nichtleere Teilmenge $\emptyset \neq K \subseteq E$ heißt kommunizierende Klasse, falls

   (i) $x \leftrightarrow y$ für alle $x, y \in K$

   (ii) aus $x \in K$ und $y \in E$ mit $x \leftarrow y$ folgt $y \in K$ (*Abgeschlossenheit*)

d) Ist $x \in E$ Element einer kommunizierenden Klasse, so heißt x wesentlich(sonst unwesentlich).

Bemerkung 2.3. Jedes $x \in E$ liegt höchstens in einer kommunizierenden Klasse.

Beispiel 2.6.

- kommunizierende Klassen: $\{1, 2, 3\}$, $\{5\}$
- unwesentliche Zustände: $\{4, 6, 7\}$

.

Abbildung 14: Markovkette mit zwei kommunizierenden Klassen

Satz 2.4. Die Relation $\leftrightarrow$ ist eine Äquivalenzrelation. Auf der Menge der wesentlichen Zustände sind die zugehörigen Äquivalenzklassen die kommunizierenden Klassen.

Beweis. Offensichtlich ist die Relation $\leftrightarrow$ symmetrisch und reflexiv. Seien nun $x, y, z \in E$ mit $x \leftrightarrow y$ und $y \leftrightarrow z$. Dann gibt es $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit $p_{n_1}(x, y) > 0$ und $p_{n_2}(y, z) > 0$.
Aus der Chapman-Kolmogorov-Gleichung folgt

$$p_{n_1+n_2}(x, z) \geq p_{n_1}(x, y) \cdot p_{n_2}(y, z) > 0 \Rightarrow x \to z$$

Analog ergibt sich $z \to x$. Somit ist $\leftrightarrow$ auch transitiv. Die zweite Aussage folgt direkt aus der Definition der kommunizierenden Klasse. □

Satz 2.5. Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine (ν, P)-Markovkette mit Zustandsraum E. Wenn $x \in E$ rekurrent ist und $x \to y$, so gilt $y \to x$ und y ist rekurrent.

Beweis. zu zeigen: $y \to x$

Angenommen $y \not\to x$, d.h. $p_n(y, x) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}_0$ so, dass

$$p_{n_0}(x, y) > 0.$$

Da x rekurrent ist, gilt

$$0 \overset{\text{Satz ??}}{=} \mathbb{P}_x[X_n = x \, f\ddot{u}r \; endlich \; viele \; n \in \mathbb{N}_0]$$

$$\geq \mathbb{P}_x[X_{n_0} = y, X_{n_0+1} \neq x, X_{n_0+2} \neq x, ...]$$
$$= \mathbb{P}_x[X_{n_0} = y] \cdot \mathbb{P}_x[X_{n_0} = y, X_{n_0+1} \neq x, X_{n_0+2} \neq x, ... \mid X_{n_0} = y]$$
$$\overset{\text{Satz ??}}{=} p_{n_0}(x,y) \cdot \mathbb{P}_y[X_1 \neq x, X_2 \neq x, ...]$$

Setze $A_n = \{X_1 \neq x, ..., X_n \neq x\}$. Dann gilt

$$A_n \downarrow \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \{X_1 \neq x, X_2 \neq x, ...\}$$

und

$$\mathbb{P}_y[X_1 \neq x, ..., X_n = x] = 1 - \mathbb{P}_y[\{X_1 \neq x, ..., X_n = x\}^C] \geq 1 - \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\mathbb{P}_y[X_k = x]}_{p_n(y,x)=0} = 1$$

Damit erhält man aus der Stetigkeit des Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{P}_y$

$$\mathbb{P}_y[X_1 \neq x, X_2 \neq x, ...] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_y[X_1 \neq x, ..., X_n \neq x] = 1.$$

Also

$$0 \geq p_{n_0}(x,y) \cdot \mathbb{P}_y[X_1 \neq x, X_2 \neq x, ...] = p_{n_0}(x,y) > 0 \ ↯$$

Folglich gilt $y \to x$. □

zu zeigen: y ist rekurrent

Seien nun $k, l \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $p_k(x,y) > 0$ und $p_l(y,x) > 0$. Dann ergibt sich aus der Chapman-Kolmogorov-Gleichung

$$p_{k+l+n}(y,y) \geq p_l(y,x) \cdot p_n(x,x) \cdot p_k(x,y) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Also

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{k+l+n}(y,y) \geq \underbrace{p_l(y,x)}_{>0} \cdot \underbrace{p_k(x,y)}_{>0} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} p_n(x,x) \overset{\text{Satz ??}}{=} \infty.$$

da x rekurrent ist.

Korollar 2.4. Rekurrente Zustände sind wesentlich.

Beweis. Sei $x \in E$ rekurrent, und setze $K(x) := \{y \in E \,:\, x \to y\}$. Nach Satz **??** gilt aber $y \to x$ für alle $y \in K(x)$. Folglich ist $K(x)$ eine kommunizierende Klasse, d.h. x ist wesentlich. □

Bemerkung 2.4. Unwesentliche Zustände sind transient.

Satz 2.6. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine (ν, P)-Markovkette mit Zustandsraum E und $x, y \in E$. Wenn $x \leftrightarrow y$, so gilt

a) x und y haben die selbe Periode, d.h. $d(x) = d(y)$

b) x ist transient ⇔ y ist transient

c) x ist nullrekurrent ⇔ y ist nullrekurrent

Bemerkung 2.5. Ist $x \in E$ positiv rekurrent und gilt $x \to y$, so ist auch y positiv rekurrent.

Beweis. a) zu zeigen: $x \leftrightarrow y \quad \Rightarrow \quad d(x) = d(y)$

Bezeichne mit $D(x) := \{n \in \mathbb{N}_0 \ : \ p_n(x,x) > 0\}$, $x \in E$. Seien nun $x, y \in E$ mit x $\leftrightarrow$ y. Wähle $m, n \in \mathbb{N}_0$ so, dass $p_m(x,y) > 0$ und $p_n(y,x) > 0$. Dann gilt für jedes $k \in D(y)$ aufgrund der Chapman-Kolmogorov-Gleichung

$$p_{m+k+n}(x,x) \geq p_m(x,y) \cdot p_k(y,y) \cdot p_n(y,x) > 0$$

Folglich ist $m+k+n \in D(x)$. Ist nun d ein Teiler von D(x), so gilt

$$d \mid \{m+k+n \ : \ k \in D(y)\}$$

Da aber $m+n \in D(x)$ und somit $d \mid (m+n)$, folgt $d \mid D(y)$. Also,

$$d(x) = ggT(D(x)) \leq ggT(D(y)) = d(y)$$

Durch Vertauschen der Rollen von x und y folgt analog $d(y) \leq d(x)$. Also $d(x) = d(y)$.

b) " $\Rightarrow$ " Sei x transient. Da x $\leftrightarrow$ y, existieren $k, l \in \mathbb{N}$ so, dass $p_k(x,y) > 0$ und $p_l(y,x) > 0$. Dann folgt aus der Chapman-Kolmogorov-Gleichung

$$p_{k+l+n}(x,x) \geq p_k(x,y) \cdot p_n(y,y) \cdot p_l(y,x) > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Daraus folgt aus Satz **??**

$$\infty > \sum_{n=1}^{\infty} p_{k+l+n}(x,x) \geq \underbrace{p_k(x,y)}_{>0} \cdot \underbrace{p_l(y,x)}_{>0} \sum_{n=1}^{\infty} p_n(y,y) \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} p_n(y,y) < \infty$$

Also ist y transient.
" $\Leftarrow$ " Analog.

c) " $\Rightarrow$ " Sei x nullrekurrent. Da $x \leftrightarrow y$ existieren somit $k, l \in \mathbb{N}$ mit $p_k(x,y) > 0$ und $p_l(y,x) > 0$. Wiederum folgt aus der Chapman-Kolmogorov-Gleichung

$$p_{k+l+n}(x,x) \geq p_k(x,y) \cdot p_n(y,y) \cdot p_l(y,x) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dann folgt aus Satz **??**

$$0 = \lim_{n\to\infty} p_{k+l+n}(x,x) \geq \limsup_{n\to\infty} \underbrace{p_k(x,y)}_{>0} \cdot \underbrace{p_l(y,x)}_{>0} \cdot p_n(y,y) \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} p_n(y,y) = 0$$

Folglich ist y nach Satz **??** nullrekurrent.
" $\Leftarrow$ " Analog. $\square$

Definition 2.6 (irreduzibel)**.** Eine stochastische Matrix P auf E heißt irreduzibel, falls E nur aus einer kommunizierenden Klasse besteht. Eine (ν, P)-Markovkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ heißt irreduzibel, falls P irreduzibel ist.

Satz 2.7. Ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine irreduzible (ν, P)-Markovkette auf einem endlichen Zustandsraum E, so ist $x \in E$ positiv rekurrent.

Beweis. Zunächst einmal gilt für jedes $x \in E$

$$\sum_{y\in E} G(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{y\in E} p_n(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} 1 = \infty$$

Da E endlich ist, gibt es folglich ein $y \in E$ mit $G(x,y) = \infty$. Da E aufgrund der Irreduzibilität nur aus einer kommunizierenden Klasse besteht, ist insbesondere $y \to x$. Folglich existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $p_m(x,y) > 0$. Aus der Chapman-Kolmogorov-Gleichung folgt zudem $p_{m+n}(x,x) \geq p_n(x,y) \cdot p_m(y,x)$. Also,

$$G(x,x) \geq \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x,y)p_m(y,x) = \underbrace{p_m(y,x)}_{>0} \cdot G(x,y) = \infty$$

Somit ist x nach Satz **??** rekurrent. Aus Satz **??** folgt dann aber, dass jeder Zustand in E rekurrent ist. Angenommen $x \in E$ wäre nullrekurrent. Dann folgt aus Satz **??**, dass jeder Zustand nullrekurrent ist. Aber dann folgt aus Korollar **??**

$$1 = \lim_{n\to\infty} \sum_{y\in E} p_n(x,y) \overset{|E|<\infty}{=} 0 \ \lightning$$

$\Rightarrow$ alle Zustände in E sind positiv rekurrent. □

Satz 2.8. Ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine irreduzible (ν, P)-Markovkette mit Zustandsraum E. Dann gilt

a) $y \in E$ ist rekurrent $\quad\Rightarrow\quad \mathbb{P}_x[S_{\{y\}} < \infty] = 1 \quad \forall x, y \in E$

b) $y \in E$ ist transient $\quad\Rightarrow\quad \mathbb{P}_x[S_{\{y\}} < \infty] < 1 \quad \forall x, y \in E$

Beweis. Da $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ irreduzibel ist, folgt $x \leftrightarrow y$ für alle $x, y \in E$. Insbesondere sind nach Satz **??** und **??** alle Zustände entweder rekurrent oder transient, d.h.

a) $\mathbb{P}_y[S_{\{y\}} < \infty] = 1 \, \forall y \in E$

b) $\mathbb{P}_y[S_{\{y\}} < \infty] < 1 \, \forall y \in E$

Sei nun $x, y \in E$ mit $x \neq y$. Dann existieren wegen $x \leftrightarrow y$ ein $n \in \mathbb{N}$ so, dass

$$n = \min\{k \in \mathbb{N} \, : \, p_k(y,x) > 0\}.$$

Dann gilt für jedes N>n

$$\mathbb{P}_y[S_{\{y\}} \leq N, X_n = x]$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}_y[S_{\{y\}} = k, X_n = x]$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}_y[S_{\{y\}} = k]\mathbb{P}_y[X_n = x | X_{S_{\{y\}}} = y, S_{\{y\}} = k] + \sum_{k=n+1}^{N} \mathbb{P}_y[X_n = x]\mathbb{P}_y[S_{\{y\}} = k | X_n = x]$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}_y[S_{\{y\}} = k]\mathbb{P}_y[X_{n-k} = x] + \sum_{k=n+1}^{N} \mathbb{P}_y[X_n = x]\mathbb{P}_y[S_{\{y\}} = k - n]$$

wobei im letzten Schritt sowohl die Markoveigenschaft als auch die starke Markoveigenschaft benutzt wurde. Zudem gilt nach Wahl von n, dass

$$\mathbb{P}_y[X_{n-k} = x] = 0 \quad \forall\, k \in \{1, 2, ..., n-1\}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}_y[S_{\{y\}} < \infty, X_n = x] \\ &= \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}_y[S_{\{y\}} \leq N, X_n = x] \\ &= p_n(y,x) \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{P}_x[S_{\{y\}} = k - n] \\ &= p_n(y,x) \cdot \mathbb{P}_x[S_{\{y\}} < \infty] \end{aligned}$$

a) Ist nun $\mathbb{P}_y[S_{\{y\}} < \infty] = 1$, so folgt

$$p_n(y,x) = \mathbb{P}_y[S_{\{y\}} < \infty, X_n = x] = p_n(y,x) \cdot \mathbb{P}_x[S_{\{y\}} < \infty] \Leftrightarrow \mathbb{P}_x[S_{\{y\}} < \infty] = 1$$

b) Ist nun $\mathbb{P}_y[S_{\{y\}} < \infty] < 1$, so gilt

$$p_n(y,x) > \mathbb{P}_y[S_{\{y\}} < \infty, X_n = x] = p_n(y,x) \cdot \mathbb{P}_x[S_{\{y\}} < \infty] \Leftrightarrow \mathbb{P}_x[S_{\{y\}} < \infty] < 1$$

□

Definition 2.7 (Rekurrenz/Transienz einer Markovkette)**.** Eine irreduzible (ν, P)-Markovkette heißt rekurrent/transient, wenn ein Zustand rekurrent/transient ist.

2.3 Kriterium für Rekurrenz und Transienz

Satz 2.9. Sei $h : E \to [0, \infty)$ eine Funktion mit der Eigenschaft, dass $(Lh)(x) \leq 0$ für alle $x \in E$. Falls es ein $y \in E$ gibt mit $(Lh)(y) < 0$, so ist y transient.

Beweis. Zunächst einmal gilt für jede beschränkte Funktion $f : E \to \mathbb{R}$ und jedes $n \in \mathbb{N}$

$$(P^n f)(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (P^{k+1} f)(x) - (P^k f)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (P^k Lf)(x) \quad \forall x \in E.$$

Setze $g := -Lh \geq 0$. Dann gilt nach Voraussetzungen, dass $g(y) > 0$. Daraus folgt

$$h(y) \geq h(y) - (P^n h)(y) = \sum_{k=0}^{n-1} (P^k g)(y) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{z\in E} p_k(y,z) g(z) \geq g(y) \sum_{k=0}^{n-1} p_k(y,y)$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Also,

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k(y,y) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} p_k(y,y) \leq \frac{h(y)}{g(y)} < \infty$$

Folglich ist der Zustand y nach Satz **??** transient. □

Bemerkung 2.6. Eine derartige Funktion h bezeichnet man auch als eine Lyapunovfunktion.

Satz 2.10 (Dynkin-Formel)**.** Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine (ν, P)-Markovkette mit Zustandsraum E und T eine Stoppzeit mit $\mathbb{E}_x[T] < \infty$ für alle $x \in E$. Dann gilt für jede beschränkte Funktion $f : E \to \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}_x[f(X_T)] - f(x) = \mathbb{E}_x[\sum_{k=0}^{T-1}(Lf)(X_k)] \quad \forall x \in E.$$

Beweis. Zunächst einmal ist $\{T \le n-1\} \in \mathfrak{F}^X_{n-1}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Weiterhin gilt

$$\mathbb{P}_x[X_{T\wedge n} = y] = \mathbb{P}_x[X_{T\wedge n} = y, T \le n-1] + \mathbb{P}_x[X_{T\wedge n} = y, T > n-1]$$

$$= \mathbb{P}_x[X_T = y, T \le n-1] + \sum_{z\in E}\mathbb{P}_x[X_{n-1} = z, T > n-1]\mathbb{P}_x[X_n = y | \underbrace{T > n-1}_{\in\mathfrak{F}^X_{n-1}}, X_{n-1} = z]$$

$$= \mathbb{P}_x[X_T = y, T \le n-1] + \sum_{z\in E}\mathbb{P}_x[X_{n-1} = z, T > n-1]p(z,y)$$

Daraus folgt

$$\mathbb{E}_x[f(X_{T\wedge n})] = \sum_{y\in E} f(y)\mathbb{P}_x[X_{T\wedge n} = y]$$

$$= \sum_{y\in E} f(y)\mathbb{P}_x[X_T = y, T \le n-1] + \sum_{z\in E}(Pf)(z)\mathbb{P}_x[X_{n-1} = z, T > n-1]$$

$$= \mathbb{E}_x[f(X_{T\wedge(n-1)})\mathbb{1}_{T\le n-1}] + \mathbb{E}_x[(Pf)(X_{n-1})\mathbb{1}_{T>n-1}]$$

Daraus ergibt sich dann aber

$$\mathbb{E}_x[f(X_{T\wedge n})] = \mathbb{E}_x[f(X_{T\wedge(n-1)})] + \mathbb{E}_x[(Lf)(X_{n-1})\mathbb{1}_{T>n-1}]$$

Induktiv folgt somit

$$\mathbb{E}_x[f(X_{T\wedge n})] - f(x) = \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}_x[(Lf)(X_{k-1})\mathbb{1}_{T>k-1}]$$

$$= \mathbb{E}_x[\sum_{k=0}^{n-1}(Lf)(X_k)\mathbb{1}_{T>k}] = \mathbb{E}_x[\sum_{k=0}^{T\wedge n-1}(Lf)(X_k)]$$

Da nach Vorraussetzung f beschränkt ist und $\mathbb{E}_x[T] < \infty$ ist, so folgt aus dem Satz von Lebesgue

$$\mathbb{E}_x[f(X_T)] - f(x) = \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}_x[f(X_{T\wedge n})] - f(x)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}_x[\sum_{k=0}^{(T\wedge n)-1}(Lf)(X_k)] = \mathbb{E}_x[\sum_{k=0}^{T-1}(Lf)(X_k)].$$

□

Lemma 2.1. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine irreduzible (ν, P)-Markovkette mit Zustandsraum E und $\emptyset \ne A \subsetneq E$.

a) Falls $\mathbb{P}_x[S_A < \infty] < 1$ für ein $x \in A$, so ist jeder Zustand $y \in E$ transient.

b) Falls A endlich und $\mathbb{P}_x[S_A < \infty] = 1$ für alle $x \in A$, so ist jeder Zustand $y \in E$ rekurrent.

Beweis. Da nach Vorraussetzungen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ irreduzibel ist, gibt es nach Definition nur eine kommunizierende Klasse.

a) Für $x \in A$ gilt $S_{\{x\}}(\omega) \geq S_A(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$. Daraus folgt

$$0 < \mathbb{P}_x[S_A = \infty] = \mathbb{P}_x[S_{\{x\}} \geq S_A, S_A = \infty] \leq \mathbb{P}_x[S_{\{x\}} = \infty] \Leftrightarrow \mathbb{P}_x[S_{\{x\}} < \infty] < 1$$

Also ist jeder Zustand x transient. Der Satz **??** impliziert nun, dass jeder Zustand $y \in E$ transient ist.

b) Bezeichne wieder mit S_A^k die k-te Treffzeit der Menge A, d.h.

$$S_A^0 := 0 \quad und \quad S_A^k := \inf\{n > S_A^{k-1} \,:\, X_n \in A\}, \quad k \in \mathbb{N}$$

Da $\mathbb{P}_x[S_A < \infty] = 1$ für alle $x \in A$, so folgt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}_x[S_A^n < \infty] \\ &= \sum_{y\in A} \mathbb{P}_x[S_A^n < \infty \mid S_A^{n-1} < \infty, X_{S_A^n} = y]\mathbb{P}_x[S_A^{n-1} < \infty, X_{S_A^{n-1}} = y] \\ &\overset{\text{Satz ??}}{=} \sum_{y\in A} \underbrace{\mathbb{P}_y[S_A < \infty]}_{=1} \mathbb{P}_x[S_A^{n-1} < \infty, X_{S_A^{n-1}} = y] \\ &= \mathbb{P}_x[S_A^{n-1} < \infty] \end{aligned}$$

Induktiv ergibt sich daraus, dass $\mathbb{P}_x[S_A^k < \infty] = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in A$. Da $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ irreduzibel ist, gilt für alle $x \in A$ und $y \in E \setminus A$, dass $x \leftrightarrow y$, d.h.

$$\mathbb{P}_x[S_{\{y\}} = \infty] < 1$$

Folglich existiert zu jedem $x \in A$ ein $N_x \in \mathbb{N}$ und $\epsilon_x > 0$ mit

$$\mathbb{P}_x[n < S_{\{y\}}] \leq 1 - \epsilon_x \qquad \forall\, n \geq N_x$$

Setze $N := \max\{N_x \,:\, x \in A\}$ und $\epsilon := \min\{\epsilon_x \,:\, x \in A\}$. Da A endlich ist, gilt $N < \infty$, $\epsilon > 0$ und

$$\mathbb{P}_x[n < S_{\{y\}}] \leq 1 - \epsilon \qquad \forall n \geq N,\ x \in A$$

Da $S_A^n \geq n$, folgt somit

$$\mathbb{P}_x[S_A^n < S_{\{y\}}] \leq 1 - \epsilon \qquad \forall n \geq N,\ x \in A$$

Zudem gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}_x[S_A^{kN} < S_{\{y\}}] = \\ &\sum_{z\in A} \mathbb{P}_x[S_A^{kN} < S_{\{y\}} | S_A^{(k-1)N} < S_{\{y\}}, X_{S_A^{(k-1)N}} = z]\mathbb{P}_x[S_A^{(k-1)N} < S_{\{y\}}, X_{S_A^{(k-1)N}} = z] \\ &\overset{\text{Satz ??}}{=} \sum_{z\in A} \underbrace{\mathbb{P}_z[S_A^N < S_{\{y\}}]}_{\leq 1-\epsilon} \mathbb{P}_x[S_A^{(k-1)N} < S_{\{y\}}, X_{S_A^{(k-1)N}} = z] \end{aligned}$$

$$\leq (1-\epsilon)\mathbb{P}_x[S_A^{(k-1)N} < S_{\{y\}}].$$

Daraus ergibt sich induktiv, dass

$$\mathbb{P}_x[S_A^{kN} < S_{\{y\}}] \leq (1-\epsilon)^k \qquad \forall\, k \in \mathbb{N},\ x \in A$$

Somit erhält man

$$\mathbb{P}_x[S_{\{y\}} = \infty] = \limsup_{k\to\infty} \mathbb{P}_x[S_A^{kN} < \infty, S_{\{y\}} = \infty]$$

$$\leq \limsup_{k\to\infty} \mathbb{P}_x[S_A^{kN} < S_{\{y\}}] = \limsup_{k\to\infty} (1-\epsilon)^k = 0$$

Also,

$$\mathbb{P}_x[S_{\{y\}} < \infty] = 1$$

Angenommen y wäre transient. Dann folgt aus Satz **??**, dass

$$\mathbb{P}_x[S_{\{y\}} < \infty] < 1 \quad \lightning$$

Folglich ist y rekurrent. Aus Satz **??** folgt dann aber, dass jeder Zustand $y \in E$ rekurrent ist.

□

Satz 2.11. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine irreduzible (ν, P)-Markovkette mit Zustandsraum E.

a) Falls $\emptyset \neq A \subsetneq E$ und $h : E \to [0,\infty)$ existieren mit

$$(Lh)(x) \leq 0 \quad \forall x \in A^C \quad und \quad h(y) < \inf_{z\in A} h(z) \; f\ddot{u}r\; ein\; y \in E \qquad (LT)$$

so gilt

$$\mathbb{P}_y[S_A < \infty] \leq \frac{h(y)}{\inf_{z\in A} h(z)} < 1$$

Insbesondere ist jeder Zustand $y \in E$ transient.

b) Falls eine endliche Menge $\emptyset \neq A \subsetneq E$ und $h : E \to [0,\infty)$ existieren mit

$$(Lh)(x) \leq 0 \quad \forall x \in A^C \quad und \quad |\{x \,:\, h(x) \leq c\}| < \infty \quad c \geq 0 \qquad (LR)$$

so gilt $\mathbb{P}_x[S_A < \infty] = 1$ für alle $x \in E$. Insbesondere ist jeder Zustand $y \in E$ rekurrent.

Beweis.

a) Offensichtlich gilt für die Stoppzeit $S_A \wedge n$, dass $\mathbb{E}_x[S_A \wedge n] \leq n$ für alle $x \in E$ und $n \in \mathbb{N}$. Aus der Dynkin-Formel(Satz **??**) angewendet auf $T = S_A \wedge n$ und $f = h \wedge n$ folgt zusammen mit dem Lemma von Fatou

$$h(y) = \liminf_{m\to\infty} h(y) \wedge m \geq \liminf_{m\to\infty} \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}_y[h(X_{S_A \wedge n}) \wedge m]$$

$$\geq \mathbb{E}_y[h(X_{S_A})\mathbb{1}_{S_A<\infty}] \geq \inf_{z\in A} h(z)\mathbb{P}_y[S_A < \infty]$$

Also,

$$\mathbb{P}_y[S_A < \infty] \leq \frac{h(y)}{\inf_{z\in A} h(z)} < 1$$

Zusammen mit Lemma **??** a) folgt somit, dass jeder Zustand in E transient ist.

b) zu zeigen: Für jedes $c \geq 0$ gilt $\mathbb{P}_x[S_{\{h>c\}} < \infty] = 1 \quad \forall x \in \{h \leq c\}$

Aus der Irreduziblität folgt zunächst einmal, dass für jedes $c \geq 0$

$$\mathbb{P}_x[S_{\{h>c\}} = \infty] < 1 \qquad \forall x \in \{h \leq c\}$$

Folglich existiert zu jedem $x \in \{h \leq c\}$ ein $N_x \in \mathbb{N}$ und $\epsilon_x > 0$ so, dass

$$\mathbb{P}_x[S_{\{h>c\}} > n] \leq 1 - \epsilon_x \qquad n \geq N_x$$

Setze $N := \max\{N_x \ : \ x \in \{h \leq c\}\}$ und $\epsilon := \min\{\epsilon_x \ : \ x \in \{h \leq c\}\}$. Da nach Voraussetzungen die Menge $\{h \leq c\}$ endlich ist für jedes $c \geq 0$, folgt $N < \infty$, $\epsilon > 0$ und

$$\mathbb{P}_x[S_{\{h>c\}} > n] \leq 1 - \epsilon \quad \forall n \geq N \quad \text{und} \quad x \in \{h \leq x\}$$

Weiterhin gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}_x[S_{\{h>c\}} > kN]$$

$$= \sum_{y \in \{h \leq c\}} \mathbb{P}_x[S_{\{h>c\}} > kN | S_{\{h>c\}} > (k-1)N, X_{(k-1)N} = y] \mathbb{P}_x[S_{\{h>c\}} > (k-1)N, X_{(k-1)N} = y]$$

$$\overset{\text{Satz ??}}{=} \sum_{y \in \{h \leq c\}} \underbrace{\mathbb{P}_y[S_{\{h>c\}} > N]}_{\leq 1-\epsilon} \mathbb{P}_x[S_{\{h>c\}} > (k-1)N, X_{(k-1)N} = y]$$

$$\leq (1-\epsilon)\mathbb{P}_x[S_{\{h>c\}} > (k-1)N]$$

Folglich ergibt sich induktiv, dass $\mathbb{P}_x[S_{\{h>c\}} > (k-1)N] \leq (1-\epsilon)^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $x \in \{h \leq c\}$.
Somit erhält man

$$\mathbb{P}_x[S_{\{h>c\}} = \infty] = \limsup_{k\to\infty} \mathbb{P}_x[S_{\{h>c\}} = kN] \leq \limsup_{k\to\infty} (1-\epsilon)^k = 0 \quad \forall x \in \{h > c\}$$

zu zeigen: $\mathbb{P}_x[S_{\{h>c\}} < \infty] = 1 \quad \forall x \in A$

Für jedes $c \geq 0$ gilt für die Stoppzeit $S_A \wedge n \wedge S_{\{h>c\}}$, dass $\mathbb{E}_x[S_A \wedge n \wedge S_{\{h>c\}}] \leq n < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in E$. Mit der Dynkin-Formel (Satz **??**) angewendet auf $T = S_A \wedge n \wedge S_{\{h>c\}}$ und $f = h \wedge m$ folgt zusammen mit dem Lemma von Fatou

$$h(x) = \liminf_{m\to\infty} h(x) \wedge m$$

$$\geq \liminf_{m\to\infty} \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}_x[h(X_{S_A \wedge n \wedge S_{\{h>c\}}}) \wedge m] \geq \mathbb{E}_x[h(X_{S_A \wedge n \wedge S_{\{h>c\}}})]$$

Daraus folgt

$$h(x) \geq \mathbb{E}_x[h(X_{S_{\{h>c\}}}) \mathbb{1}_{S_{\{h>c\}} < \infty} \mathbb{1}_{S_{\{A\}} = \infty}] \geq c \cdot \mathbb{P}_x[S_{\{h>c\}} < \infty, S_{\{h>c\}} = \infty]$$

$$= c \cdot \mathbb{P}_x[S_A = \infty]$$

Da dies für jedes $c \geq 0$ gilt, folgt schließlich

$$\mathbb{P}_x[S_A = \infty] \leq \limsup_{c\to\infty} \frac{h(x)}{c} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}_x[S_A < \infty] = 1 \qquad \forall x \in E$$

Folglich ist nach Lemma **??** b) jeder Zustand $y \in E$ rekurrent.

□

Beispiel 2.7 (Einfache Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$)**.** Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markovkette auf $E = \mathbb{Z}$ mit folgendem Übergangsgraphen

.

Abbildung 15: Einfache Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$

Betrachte zunächst den Fall $p \neq \frac{1}{2}$. Dann gilt für $h(x) = \left(\frac{1-p}{p}\right)^x$, $x \in E$

$$(Lh)(x) = p(h((x+1)-h(x))+(1-p)(h(x-1)-h(x)) = h(x)(1-2p+(2p-1)) = 0$$

für alle $x \in E$. Wähle nun $A = \{0\}$ und

$$y = \begin{cases} 1 & , p > \frac{1}{2} \\ \\ -1 & , p < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Dann gilt

$$(Lh)(x) = 0 \quad \forall\, x \in A^C \quad und \quad h(y) < h(0) = 1$$

Somit ist die Bedingung (LT) erfüllt. Da zudem $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ irreduzibel ist, folgt aus Satz **??** a), dass jeder Zustand transient ist.
Im Falle $p = \frac{1}{2}$ betrachte die Funktion $h(x) = |x|$. Dann gilt

$$(Lh)(x) = \frac{1}{2}(|x+1| - |x|) + \frac{1}{2}(|x-1| - |x|) = \begin{cases} 0 & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$$

Wähle nun $A = \{0\}$. Dann gilt

$$(Lh)(x) = 0 \quad \forall\, x \in A^C \quad und \quad |\{h \leq c\}| < \infty \quad \forall\, c \geq 0.$$

Somit ist die Bedingung (LR) erfüllt. Da $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ zudem irreduzibel ist, ist folglich nach Satz **??** b) jeder Zustand rekurrent.

Beispiel 2.8 (Einfache, symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 3$)**.** Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markovkette auf $E = \mathbb{Z}^d$, $d \geq 3$ mit folgender Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2d} & , ||x-y|| = 1 \\ 0 & , sonst \end{cases}$$

Betrachte nun die Funktion $h(0) = 1$ und $h(x) = ||x||_2^{-\alpha}$, $x \neq 0$. Dann gilt für jedes $x \in \mathbb{Z}^d$ mit $||x||_2 > 1$ und $e \in \mathbb{Z}^d$ mit $||e||_2 = 1$

$$h(x+e) - h(x) = h(x)\left(\left(\frac{||x+e||_2^2}{||x||_2^2}\right)^{-\alpha} - 1\right) = h(x)\left(\left(1 + \frac{2\langle x,e\rangle + 1}{||x||_2^2}\right)^{-\alpha} - 1\right)$$

$$= h(x)\left(1 - \alpha\frac{2\langle x,e\rangle + 1}{||x||_2^2} + 2\alpha(\alpha+1)\frac{\langle x,e\rangle^2}{||x||_2^4} + \mathcal{O}(||x||_2^{-3}) - 1\right)$$

wobei die Taylorentwicklung der Funktion $f(z) = (1+z)^{-\alpha} = 1 - \alpha z + \frac{1}{2}\alpha(\alpha + 1)z^2 + \mathcal{O}(|z|^3)$ benutzt wurde. Da zudem gilt

$$\sum_{||e||_2=1} 1 = 2d, \qquad \sum_{||e||_2=1} \langle x,e\rangle = 0 \quad und \qquad \sum_{||e||_2=1} \langle x,e\rangle^2 = 2||x||_2^2$$

folgt

$$\sum_{||e||_2=1} \frac{1}{2d}\left(h(x+e) - h(x)\right) = \frac{1}{2d}h(x)(-2\alpha d||x||_2^{-2} + 4\alpha(\alpha+1)||x||_2^{-2} + \mathcal{O}(||x||_2^{-3}))$$

$$= \frac{\alpha}{d}||x||_2^{-2\alpha-2}(2(\alpha+1) - d + \mathcal{O}(||x||_2^{-1}))$$

Daraus folgt für $d \geq 3$ $\alpha \in \left(0, \frac{d-2}{2}\right)$ und $A := \{x : ||x||_2 \leq r\}$ für ein hinreichend großes $r > 0$, dass

$$(Lh)(x) \leq 0 \quad \forall\, x \in A^C \quad und \quad h(y) < \inf_{z\in A} h(z) \quad für\; ein\; y\; mit\; ||y||_2 > 2r.$$

Da $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ zudem irreduzibel ist, folgt aus Satz **??** a), dass die einfache, symmetrische Irrfahrt auf $E = \mathbb{Z}^d$ für jedes $d \geq 3$ transient ist.

Satz 2.12 (Chung-Fuchs)**.** Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine irreduzible Irrfahrt auf $E = \mathbb{Z}^d$ mit $p(x,y) = \mu(y-x),\; x,y \in E$, wobei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf E ist. Bezeichne mit φ die charakteristische Funktion von μ, d.h.

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle t,x\rangle}\mu(\mathrm{d}x) = \sum_{x\in E} e^{i\langle t,x\rangle}p(0,x) \quad , \qquad t \in [-\pi,\pi)^d$$

Die Markovkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist genau dann rekurrent, wenn

$$\lim_{\lambda\uparrow 1}\int_{[-\pi,\pi)^d} \Re\left(\frac{1}{1-\lambda\varphi(t)}\right)\mathrm{d}t = \infty$$

Bemerkung 2.7. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$ mit Start in $x \in \mathbb{Z}^d$ und $p(x,y) = \mu(y-x)$, d.h.

$$X_n = x + \sum_{k=1}^n Z_k \quad mit\; (Z_n)_{k\in\mathbb{N}}\; u.i.v \quad mit \quad \mathbb{P}[Z_1 = y] = \mu(y).$$

a) $\varphi(0) = 1$ und $|\varphi(t)| \leq \mathbb{E}[|e^{i\langle t,Z_1\rangle}|] = 1$

b) Es gilt

$$\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} e^{i\langle t,x\rangle}p_n(0,x) = \mathbb{E}_0[e^{i\langle t,X_n\rangle}] = \mathbb{E}[\prod_{k=1}^n e^{i\langle t,Z_k\rangle}] = \mathbb{E}[e^{i\langle t,Z_1\rangle}]^n = \varphi(t)^n$$

Insbesondere folgt aus dem Satz von Lebesgue

$$(2\pi)^{-d}\int_{[-\pi,\pi)^d} e^{i\langle t,x\rangle}\varphi(t)^n\,\mathrm{d}t = \lim_{r\to\infty}\sum_{\substack{z\in\mathbb{Z}^d\\ ||z||<r}} \underbrace{p_n(0,z)(2\pi)^{-d}\int_{[-\pi,\pi)^d} e^{i\langle t,z-x\rangle}\,\mathrm{d}t}_{=(2\pi)^d\mathbb{1}_{x=z}} = p_n(0,x)$$

Beweis. Für $\lambda \in (0,1)$ folgt aus dem Satz von Lebesgue

$$R(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n p_n(0,0) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n (2\pi)^{-d} \int_{[-\pi,\pi)^d} \varphi(t)^n \, \mathrm{d}t$$

$$= (2\pi)^{-d} \int_{[-\pi,\pi)^d} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda \varphi(t)^n \, \mathrm{d}t = (2\pi)^{-d} \int_{[-\pi,\pi)^d} \frac{1}{1-\lambda\varphi(t)} \, \mathrm{d}t$$

Da die linke Seite rein reel ist, folgt somit

$$R(\lambda) = (2\pi)^{-d} \int_{[-\pi,\pi)^d} \Re\left(\frac{1}{1-\lambda\varphi(t)}\right) \mathrm{d}t$$

Da nun aber $G(0,0) = \lim_{\lambda \uparrow 1} R(\lambda)$ und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ irreduzibel ist, so folgt die Behauptung aus Satz **??** und Satz **??**. □

Beispiel 2.9 (Einfache, symmtetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$)**.** Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markovkette mit Zustandsraum $E = \mathbb{Z}^d$ und Übergangsmatrix $P = (p(x,y))_{x,y\in E}$ mit

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2d} & , \|x-y\| = 1 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt

$$\varphi(t) = \sum_{x\in E} e^{i\langle t,x\rangle} p(0,x) = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{d} \cos(t_i)$$

Da aber

$$\frac{s^2}{6} \leq 1 - \cos(s) \leq \frac{s^2}{2} \qquad \forall\, s \in [-\pi,\pi)$$

so ist nach **??** der Zustand $x = 0$ und wegen der Irreduzibilität damit nach Satz **??** jeder Zustand genau dann rekurrent, wenn für jedes $\epsilon > 0$

$$\int_{\|t\|_2 < \epsilon} \frac{1}{\|t\|_2} \, \mathrm{d}t = c_d \int_0^{\epsilon} r^{d-1} r^{-2} \, \mathrm{d}r = \infty \quad \Leftrightarrow \quad d \leq 2$$

D.h. die einfache, symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}^d$ ist für $d \leq 2$ rekurrent und für $d > 2$ transient.

Beispiel 2.10 (Symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ mit 2. Moment)**.** Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine irreduzible Markovkette auf $E = \mathbb{Z}$ mit Übergangswahrscheinlichkeit $p(x,y) = \mu(y-x)$, wobei das Wahrscheinlichkeitsmaß μ folgende Eigenschaft besitzt

$$\mu(x) = \mu(-x) \qquad \textit{und} \qquad \sum_{x\in\mathbb{Z}} x^2 \mu(x) =: c_1 < \infty$$

Dann gilt

$$\varphi(t) = \sum_{x\in\mathbb{Z}} e^{itx} \mu(x) = \frac{1}{2} \sum_{x\in\mathbb{Z}} \left(e^{itx}\mu(x) + e^{-itx}\mu(-x)\right) \overset{\mu(x)=\mu(-x)}{=} \sum_{x\in\mathbb{Z}} \cos(tx)\mu(x)$$

Aus der Taylorentwicklung der Kosinusfunktion folgt $\cos(s) \geq 1 - \frac{1}{2}s^2$. Also

$$\varphi(t) \geq \sum_{x\in\mathbb{Z}} \left(1 - \frac{t^2}{2}x^2\right) \mu(x) = 1 - \frac{c_1}{2}t^2$$

Damit erhält man

$$\lim_{\lambda\uparrow 1} \int_{-\pi}^{\pi} \Re(1-\lambda\varphi(t))^{-1}\,\mathrm{d}t \overset{\text{Fatou}}{\geq} \int_{-\pi}^{\pi} (1-\varphi(t))^{-1}\,\mathrm{d}t \geq 2\int_0^{\pi} \frac{2}{c_1 t^2}\,\mathrm{d}t = \infty$$

Somit folgt aus dem Satz von Chung-Fuchs (Satz **??**), dass die Irrfahrt $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ rekurrent ist.

Gleichgewichtsverteilung und invariante Maße

3.1 Eigenschaften von invarianten und reversiblen Maßen

Definition 3.1 (invariantes Maß, Gleichgewichtsverteilung)**.** Sei $P = (p(x,y))_{x,y\in E}$ eine stochastische Matrix. Ein Maß π auf E heißt invariantes Maß bezüglich P, falls

$$\pi(x) = (\pi P)(x) = \sum_{y\in E} \pi(y)p(y,x)$$

Falls π invariant und eine Verteilung ist, d.h. $\pi[E] = 1$, so nennt man π eine Gleichgewichtsverteilung (oder invariante Verteilung). Bezeichne mit

$$Inv(P) := \{\pi \,:\, E \to [0,1] \,:\, \pi P = \pi \; und \; \pi[E] = 1\}$$

die Menge der Gleichgewichtsverteilungen.

Bemerkung 3.1.

a) Ein invariantes Maß $\pi : E \to [0,1]$ ist als Zeilenvektor ($\pi \in [0,\infty]^E$) aufgefasst ein (nichtnegativer) Linkseigenvektor von P zum Eigenwert 1.

b) Ist $|E| < \infty$, so kann jedes invariantes Maß zu einer Gleichgewichtsverteilung normiert werden.

c) Ist π ein invariantes Maß bzgl. P, so gilt $\pi = \pi P^n$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$. Falls P zudem irreduzibel und $\pi \neq 0$ ist, so folgt

$$\pi(x) > 0 \qquad \forall\, x \in E.$$

Da nämlich $\pi \neq 0$, gibt es ein $z \in E$ mit $\pi(z) > 0$. Aus der Irreduzibilität von P folgt weiterhin, dass zu jedem $x \in E \setminus \{z\}$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $p_n(z,x) > 0$. Also,

$$\pi(x) = (\pi P^n)(x) = \sum_{y\in E} \pi(y)p_n(y,x) \geq \underbrace{\pi(z)}_{>0}\underbrace{p_n(z,x)}_{>0} > 0.$$

d) Ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markovkette mit Zustandsraum E und Übergangsmatrix P. Wenn π eine Gleichgewichtsverteilung ist, so gilt für jedes $n \in \mathbb{N}_0$

$$\mathbb{P}_\pi[X_n = x] = \sum_{y\in E} \pi(y)\mathbb{P}_y[X_n = x] = \sum_{y\in E} \pi(y)p_n(y,x) = \pi(x).$$

Insbesondere ist

$$\mathbb{P}_\pi[X_{k+1} = x_1, ..., X_{k+n} = x_n] = \sum_{y\in E} \mathbb{P}_\pi[X_k = y]\mathbb{P}_\pi[X_{k+1} = x_1, ..., X_{k+n} = x_n | X_k = y]$$

$$\overset{\text{Satz ??}}{=} \sum_{y\in E} \pi(y)\mathbb{P}_y[X_1 = x_1, ..., X_n = x_n]$$

$$\mathbb{P}_\pi[X_1 = x_1, ..., X_n = x_n]$$

e) Für $\pi_1, \pi_2 \in Inv(P)$ und $\lambda \in [0,1]$ gilt $(\lambda\pi_1 + (1-\lambda)\pi_2)[E] = \lambda + (1-\lambda) = 1$ und

$$(\lambda\pi_1 + (1-\lambda)\pi_2)P = \lambda\pi_1 P + (1-\lambda)\pi_2 P = \lambda\pi_1 + (1-\lambda)\pi_2.$$

Folglich ist die Menge $Inv(P)$ der Gleichgewichtsverteilungen konvex.

Beispiel 3.1. Sei $E = \{1,2\}$ und

$$P = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix} \qquad mit \quad \alpha, \beta \in [0,1].$$

Dann ist für $\alpha + \beta \neq 0$ die Gleichgewichtsverteilung π gegeben durch

$$\pi(1) = \frac{\beta}{\alpha+\beta} \quad und \quad \pi(2) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

Für $\alpha = \beta = 0$ gilt

$$Inv(P) = \{\lambda \cdot \mathbb{1}_{\{1\}} + (1-\lambda)\cdot \mathbb{1}_{\{2\}} \;:\; \lambda \in [0,1]\}.$$

Beispiel 3.2 (Irrfahrt auf dem Torus)**.** Sei $E = (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^d$ für $N \geq 2$ und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markovkette auf E mit Übergangswahrscheinlichkeit $p(x,y) = \mu(y-x)$ für ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf E. Dann ist $\pi(x) = N^{-d}$, $x \in E$ eine Gleichgewichtsverteilung, denn

$$\sum_{y\in E} \pi(y)p(x,y) = N^{-d}\sum_{y\in E}\mu(y-x) = N^{-d}\sum_{y\in E}\mu(y) = N^{-d} = \pi(x) \qquad \forall\, x \in E.$$

Beispiel 3.3. Sei $E = (\mathbb{Z}/(2N)\mathbb{N})$ und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Irrfahrt auf E mit

$$p(x,y) = \begin{cases} p & , y = (x+2) \, mod \, 2N \\ 1-p & , y = (x-2) \, mod \, 2N \end{cases} \qquad p \in (0,1)$$

Bezeichne mit

$$G := \{2k \;:\; k \in \mathbb{N}_0\} \cap E \quad und \quad U := \{2k+1 \;:\; k \in \mathbb{N}_0\} \cap E$$

und setze für $\lambda \in [0,1]$

$$\pi_\lambda(x) := \frac{\lambda}{N}\mathbb{1}_G(x) + \frac{1-\lambda}{N}\mathbb{1}_U(x) \qquad , x \in E$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\sum_{y\in E}\pi_\lambda(y)p(y,x) &= \frac{\lambda}{N}\sum_{y\in G}p(y,x) + \frac{1-\lambda}{N}\sum_{y\in U}p(y,x)\\ &= \frac{\lambda}{N}\mathbb{1}_G(x)(1-p+p) + \frac{1-\lambda}{N}\mathbb{1}_U(x)(1-p+p) = \pi_\lambda(x)\end{aligned}$$

für alle $x \in E$. Folglich ist $\pi_\lambda \in Inv(P)$ für alle $\lambda \in [0,1]$, d.h. $|Inv(P)| = \infty$. Beachte, dass die stochastische Matrix P nicht irreduzibel ist und zwei kommunizierenden Klassen besitzt, nämlich die Menge G und U.

Satz 3.1. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine (ν, P)-Markovkette mit Zustandsraum E.

a) Falls $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ irreduzibel ist, so gilt $|Inv(P)| \in \{0,1\}$. D.h. es gibt höchstens eine Gleichgewichtsverteilung.

b) Falls $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ irreduzibel und transient ist, so gilt $Inv(P) = \emptyset$. D.h. es gibt keine Gleichgewichtsverteilung.

Beweis.

a) Definiere $\bar{P} = (\bar{p}(x,y))_{x,y\in E}$ durch $\bar{p}(x,y) := \sum_{n=1}^\infty 2^{-n}p_n(x,y)$, $\quad x,y \in E$. Dann ist $\bar{P}$ eine stochastische Matrix, denn für alle $x \in E$ gilt

$$\sum_{y\in E}\bar{p}(x,y) \overset{\text{Fubini}}{=} \sum_{n=1}^\infty 2^{-n}\sum_{y\in E}p_n(x,y) = \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} = 1$$

Da P nach Voraussetzungen irreduzibel ist, folgt $\bar{p}(x,y) > 0$ für alle $x,y \in E$. Angenommen es gäbe zwei Gleichgewichtsverteilungen $\pi_1, \pi_2 \in Inv(P)$ mit $\pi_1 \neq \pi_2$. Da

$$(\pi_i\bar{P})(x) = \sum_{y\in E}\pi_i(y)\bar{p}(y,x) \overset{\text{Fubini}}{=} \sum_{n=1}^\infty 2^{-n}\sum_{y\in E}\pi_i p(y,x) = \pi_i(x)\sum_{n=1}^\infty 2^{-n} = \pi_i(x)$$

für alle $x \in E$ und $i \in \{1,2\}$, ist $\pi_1, \pi_2 \in Inv(\bar{P})$. Betrachte nun das signierte Maß

$$\bar{\pi} := \pi_1 - \pi_2.$$

Dann gilt $\bar{\pi}\bar{P} = \pi_1\bar{P} - \pi_2\bar{P} = \pi_1 - \pi_2 = \bar{\pi}$. Da $\bar{\pi} \neq 0$ und $\bar{\pi}[E] = 0$ existieren $x,y \in E$ mit $\bar{\pi}(x) > 0$ und $\bar{\pi}(y) < 0$. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}\sum_{z\in E}|\bar{\pi}(z)| &= \sum_{z\in E}|(\bar{\pi}\bar{P})(z)|\\ &= \sum_{z\in E}|\underbrace{\bar{\pi}(x)\bar{p}(x,z)}_{>0} + \underbrace{\bar{\pi}(y)\bar{p}(y,z)}_{<0} + \sum_{\substack{z'\in E\\ z'\neq x,y}}\bar{\pi}(z')\bar{p}(z',z)|\\ &< \sum_{z\in E}\sum_{z'\in E}|\bar{\pi}(z')|\bar{p}(z',z)\\ &= \sum_{z'\in E}|\bar{\pi}(z')| \quad \lightning\end{aligned}$$

Folglich ist $\bar{\pi} = 0$, d.h. $\pi_1 = \pi_2$.

b) Angenommen $Inv(P) \neq \emptyset$, d.h. es gibt eine Gleichgewichtsverteilung π. Nach Voraussetzung ist jeder Zustand $y \in E$ transient. Also folgt aus dem Korollar **??** und dem Satz von Lebesgue

$$0 = \sum_{x \in E} \pi(x) \lim_{n \to \infty} p_n(x,y) = \lim_{n \to \infty} \sum_{x \in E} \pi(x) p_n(x,y) = \pi(y) \qquad \forall\, y \in E$$

Also,

$$\sum_{y \in E} \pi(y) = 0 \neq 1 \quad \lightning$$

Folglich gibt es keine Gleichgewichtsverteilung.

□

Beispiel 3.4 (doppelt stochastische Übergangsmatrizen)**.** Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine (ν, P)-Markovkette mit Zustandsraum E, wobei die Übergangsmatrix P folgende Eigenschaft besitzt

$$\sum_{y \in E} p(y,x) = 1 \qquad \forall\, x \in E,$$

d.h. P ist doppelt stochastisch. Ein Spezialfall von doppelt stochastischen Matrizen ist

$$p(x,y) = \mu(y-x) \qquad , \quad x, y \in E$$

für ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf E. Dann ist $\pi(x) = 1$ für alle $x \in E$ ein invariantes Maß, denn

$$\sum_{y \in E} \pi(y) p(y,x) \sum_{y \in E} p(y,x) = 1 = \pi(x) \qquad , \quad x \in E.$$

Beispiel 3.5 (Einfache, asymmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$)**.** Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Markovkette auf $E = \mathbb{Z}$ mit $p(x, x+1) = p$ und $p(x, x-1) = 1-p$ für alle $x \in E$ und $p \in (0,1)$. Nach Beispiel **??** ist $\pi(x) = 1$ für alle $x \in E$ ein invariantes Maß. Für $p \neq \frac{1}{2}$ ist zudem $\pi(x) = \left(\frac{p}{1-p}\right)^x$, $x \in E$ ein invariantes Maß, denn

$$\sum_{y \in E} \pi(y) p(y,x) = \pi(x-1) p(x-1,x) + \pi(x+1) p(x+1,x) = \left(\frac{p}{1-p}\right)^x (1-p+p) = \pi(x)$$

Satz 3.2. Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine irreduzible (π, P)-Markovkette mit Zustandsraum E, wobei angenommen sei, dass die Startverteilung π invariant ist. Dann ist für jedes $N \in \mathbb{N}_0$ der stochastische Prozess $(Y_n)_{0 \leq n \leq N}$ mit $Y_n := X_{N-n}$ eine (π, P^*)-Markovkette mit

$$p^*(x,y) := \frac{\pi(y) p(y,x)}{\pi(x)} \qquad \forall\, x, y \in E.$$

Die stochastische Matrix P^* heißt auch duale Übergangsmatrix.

Beweis. Da P irreduzibel ist, ist nach Bemerkung **??** c) $\pi(x) > 0$ für alle $x \in E$. Somit sind die Matrixeinträge von P^* wohldefiniert. Zudem gilt

$$\sum_{y \in E} p^*(x,y) = \frac{1}{\pi(x)} \sum_{y \in E} \pi(y) p(y,x) = 1 \qquad \forall\, x \in E$$

d.h. P^* ist eine stochastische Matrix. Aufgrund von Satz **??** (i) genügt es nun

zu zeigen: $\forall\, n \in \{0,1,...,N\}$ und $y_0,...,y_n \in E$ gilt

$$\mathbb{P}_\pi[Y_0 = y_0, ..., Y_n = y_n] = \pi(y_0)p^*(y_0,y_1)\cdot ... \cdot p^*(y_{n-1},y_n)$$

Für $n \in \{0,1,...,N\}$ und $y_0,...,y_n \in E$ betrachte nun

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_\pi[Y_0 = y_0, ..., Y_n = y_n] &= \mathbb{P}_\pi[X_N = y_0, ..., X_{N-n} = y_n] \\
&= \mathbb{P}_\pi[X_{N-n} = y_n]\mathbb{P}_\pi[X_N = y_0, ..., X_{N-n+1} = y_{n-1} \mid X_{N-n} = y_n] \\
&\overset{\text{Satz ??}}{=} \mathbb{P}_\pi[X_{N-n} = y_n]\mathbb{P}_{Y_n}[X_n = y_0, ..., X_1 = y_{n-1}] \\
&\overset{\text{Satz ??}}{=} \underbrace{(\pi P^{N-n})}_{\pi}(y_n)\mathbb{P}_{Y_n}[X_1 = y_{n-1}, ..., X_n = y_0] \\
&\overset{\text{Satz ??}}{=} \pi(y_n)p(y_n,y_{n-1})\cdot ... \cdot p(y_1,y_0) \\
&= \pi(y_0)p^*(y_0,y_1)\cdot ... \cdot p^*(y_{n-1},y_n)
\end{aligned}$$

Somit ist nach Satz **??** (i) $(Y_n)_{0\le n\le N}$ eine (π, P^*)-Markovkette. □

Definition 3.2 (reversibel)**.** Ein Maß π auf E heißt reversibel bezüglich einer stochastisch Matrix $P = (p(x,y))_{x,y\in E}$ falls die sog. "detailed balance"Bedingung erfüllt ist:

$$\pi(x)p(x,y) = \pi(y)p(y,x) \qquad \forall\, x,y \in E$$

Eine stochastische Matrix nennt man reversibel, falls ein bzg. P reversibles Maß existiert.

Erklärung 3.1. Anschaulich ist ein Prozess im detaillierten Gleichgewicht, wenn nicht erkennbar ist, ob er sich zeitlich vorwärts oder rückwärts bewegt.

Bemerkung 3.2.

a) π reversibel bzgl. P $\Rightarrow$ π invariant bzgl. P

b) Falls P reversibel und irreduzibel ist, so ist $P = P*$

Beispiel 3.6 (Ehrenfest's Urnenmodell)**.** In zwei Urnen liegen N Kugeln. Zu jedem Zeitpunkt $n \in \mathbb{N}$ wird eine Kugel zufällig mit gleicher Wahrscheinlichkeit ausgewählt, die die Urne dann wechselt. Die Anzahl der Kugeln in der ersten Urne wird durch die Markovkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit Zustandsraum $E = \{0,...,N\}$ und Übergangswahrscheinlichkeiten beschrieben:

$$p(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{N} & , y = x-1 \ \wedge\ x \ge 1 \\[2ex] 1 - \dfrac{x}{N} & , y = x+1 \ \wedge\ x \le N-1 \end{cases}$$

beschrieben.

.

Abbildung 16: Die Ehrenfest'sche Urne mit n = 10 Kugeln. Im nächsten Schritt wird mit Wahrscheinlichkeit 4/10 eine Kugel von der linken Kammer in die rechte und mit Wahrscheinlichkeit 6/10 von der rechten in die linke Kammer gelegt.

Sei $\pi(x) := 2^{-N}\binom{N}{x}$. Dann gilt für alle $x \in \{0, ..., N-1\}$

$$\pi(x)p(x,x+1) = 2^{-N}\binom{N}{x}\left(1-\frac{x}{N}\right) = 2^{-N}\frac{N!}{x!(N-x)!}\cdot\frac{N-x}{N}$$

$$= 2^{-N}\frac{(N-1)!}{x!(N-x-1)!} = 2^{-N}\frac{N!}{(x+1)!(N-(x+1))!}\cdot\frac{x+1}{N} = \pi(x+1)p(x+1,x)$$

Folglich ist π ein bzgl. P reversibles Wahrscheinlichkeitsmaß.

Satz 3.3 (Kolmogorov's Zykelbedingung)**.** Sei $P = (p(x,y))_{x,y\in E}$ eine irreduzible, stochastische Matrix. Ein Maß π auf E ist genau dann reversibel bzgl. P, wenn

(i) $p(x,y) > 0 \quad \Rightarrow \quad p(y,x) > 0 \qquad \forall\, x,y \in E$

(ii) für jeden Zykel $x_0, x_1, ..., x_n$ mit $x_n = x_0$ und $\prod_{i=1}^n p(x_i, x_{i-1}) > 0$ gilt

$$\prod_{i=1}^n \frac{p(x_{i-1},x_i)}{p(x_i,x_{i-1})} = 1$$

Beweis. " $\Rightarrow$ " Da π reversibel bzgl. P ist, ist folglich π ein invariantes Maß. Da P zudem irreduzibel ist, so folgt aus Bemerkung **??** c), dass $\pi(x) > 0$ für alle $x \in E$

zu zeigen: $p(x,y) > 0 \quad \Rightarrow \quad p(y,x) > 0$

Sei also $p(x,y) > 0$. Dann ergibt sich aus der "detailed balance" Bedingung

$$p(y,x) = \frac{\pi(y)}{\pi(y)}p(y,x) = \underbrace{\frac{\pi(x)}{\pi(y)}}_{>0}\underbrace{p(x,y)}_{>0} > 0.$$

Betrachte nun $x_0, ..., x_n \in E$ mit $x_n = x_0$ und $\prod_{i=1}^n p(x_i, x_{i-1}) > 0$.

zu zeigen: $\prod_{i=1}^n \dfrac{p(x_{i-1},x_i)}{p(x_i,x_{i-1})} = 1$

Wiederum ergibt sich aus der "detailed balance"Bedingung

$$\prod_{i=1}^n \frac{p(x_{i-1},x_i)}{p(x_i,x_{i-1})} = \prod_{i=1}^n \frac{\pi(x_{i-1})\,p(x_{i-1},x_i)}{\pi(x_{i-1})\,p(x_i,x_{i-1})} = \prod_{i=1}^n \frac{\pi(x_i)}{\pi(x_{i-1})} = \frac{\pi(x_n)}{\pi(x_0)} \overset{x_0=x_n}{=} 1$$

" $\Leftarrow$ " Für ein festes $z \in E$ setze $\pi(z) = 1$. Aus der Irreduzibilität von P folgt, dass zu jedem $x \in E$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $p_n(z,x) > 0$. Fo0lglich existieren $x_0, ..., x_n \in E$ mit

$$x_0 = z \quad , \; x_n = x \quad und \quad \prod_{i=1}^n p(x_i, x_{i-1}) > 0.$$

Definiere

$$\pi(x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{p(x_{i-1}, x_i)}{p(x_i, x_{i-1})}$$

zu zeigen: $\pi(x)$ ist unabhängig vom gewählten Pfad

Sei $(x'_0, ..., x'_m)$ ein weiterer Pfad in E mit $x'_0 = z$, $x'_m = x$ und $\prod_{j=1}^{m} p(x'_j, x'_{j-1}) > 0$. Dann folgt aus (i), dass auch $\prod_{j=1}^{m} p(x'_{j-1}, x'_j) > 0$. Setze

$$(y_0, ..., y_{n+m}) = (x_0, ..., x_n, x'_{m-1}, ..., x'_0)$$

Dann gilt

$$y_0 = y_{n+m} = z \quad und \quad \prod_{i=1}^{n+m} p(y_i, y_{i-1}) \overset{x'_n = x_n}{=} \prod_{i=1}^{n} p(x_i, x_{i-1}) \prod_{j=1}^{m} p(x'_{j-1}, x'_j) > 0$$

Also folgt aus (ii)

$$\pi(x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{p(x_{i-1}, x_i)}{p(x_i, x_{i-1})} = \prod_{j=1}^{m} \frac{p(x'_{j-1}, x'_j)}{p(x'_j, x'_{j-1})} \cdot \underbrace{\prod_{i=1}^{n+m} \frac{p(y_{i-1}, y_i)}{p(y_i, y_{i-1})}}_{=1} = \prod_{j=1}^{m} \frac{p(x'_{j-1}, x'_j)}{p(x'_j, x'_{j-1})}$$

Folglich ist $\pi(x)$ unabhängig vom gewählten Pfad.

zu zeigen: $\pi(x)p(x, y) = \pi(y)p(y, x)$

Falls $p(x, y) = 0$, so ist aufgrund von (i) auch $p(y, x) = 0$ und die Aussage ist trivial. sei nun also $p(x, y) > 0$. Dann ist wegen (i) auch $p(y, x) > 0$. Zudem gilt

$$\pi(x)p(x, y) = \prod_{i=1}^{n} \frac{p(x_{i-1}, x_i)}{p(x_i, x_{i-1})} \cdot p(x, y)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{p(x_{i-1}, x_i)}{p(x_i, x_{i-1})} \cdot \frac{p(x, y)}{p(y, x)} \cdot p(y, x) = \pi(y)p(y, x),$$

da mit $x_{n+1} := y$ der Pfad $(x_0, ..., x_n, x_{n+1})$ die Eigenschaft hat, dass $x_0 = z$, $x_{n+1} = y$ und $\prod_{i=1}^{n+1} p(x_i, x_{i-1}) > 0$. □

Beispiel 3.7 (Geburts- und Todesprozess)**.** Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Markovkette auf $E = \mathbb{N}_0$, dessen Übergangsmatrix P durch folgenden Übergangsgraphen beschrieben wird

.

Abbildung 17: Übergangsgraph eines Geburts- und Todesprozess

wobei angenommen sei, dass $q_x > 0$ für alle $x \in \mathbb{N}$. Setze

$$\pi(0) := 1 \quad und \quad \pi(x) = \prod_{y=1}^{x} \frac{p_{y-1}}{q_y}, \quad x \in \mathbb{N}$$

Dann gilt

$$\pi(x-1)p(x-1,x) = \pi(x-1)p_{x-1} = \pi(x-1)\frac{p_{x-1}}{q_x}p(x,x-1) = \pi(x)p(x,x-1)$$

Folglich ist π reversible bzgl. P und insbesondere ein invariantes Maß. Falls zudem gilt, dass

$$\sum_{x\in E}\pi(x) = \sum_{x\in E}\prod_{y=1}^{x}\frac{p_{y-1}}{q_y} < \infty$$

so lässt sich π zu einer Gleichverteilung normieren.

3.2 Existenz von invarianten Maßen und Verteilungen

Frage? Existenz von invarianten Maßen und Gleichgewichtsverteilungen.

Satz 3.4. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine (ν, P)-Markovkette mit Zustandsraum E und $\emptyset \neq K \subseteq E$ eine rekurrente, kommunizierende Klasse. Für $x \in K$ definiere

$$\mu_x(y) := \mu_x[\{y\}] := \mathbb{E}_x\Big[\sum_{n=0}^{S_{\{x\}}-1} \mathbb{1}_{X_n=y}\Big] \quad , \quad y \in E$$

wobei $S_{\{x\}} := \inf\{n \in \mathbb{N} \,:\, X_n = x\}$ die erste Treffzeit des Zustandes $x \in E$ sei.

a) Dann gilt für alle $x, y \in K$ mit $x \neq y$

$$\mathbb{P}_x[S_{\{y\}} < S_{\{x\}}] > 0 \quad \textit{und} \quad \mathbb{E}_x\Big[\sum_{n=0}^{S_{\{x\}}-1} \mathbb{1}_{X_n=y}\Big] = \frac{\mathbb{P}_x[S_{\{y\}} < S_{\{x\}}]}{\mathbb{P}_y[S_{\{x\}} < S_{\{y\}}]}$$

Insbesondere ist $\mu_x(x) = 1$, $\mu_x(y) = 0$ für alle $y \in K^C$ und $\mu_x(y) \in (0,\infty)$ für alle $y \in K$.

b) Für jedes $x \in K$ ist μ_x ein invariantes Maß bzgl. P.

c) Ist λ ein invariantes Maß bzgl. P mit $\lambda(x) = 1$ für ein $x \in K$ und $\lambda(y) = 0$ für alle $y \in K^C$, so gilt $\lambda = \mu_x$

Beweis.

a) Da K eine rekurrente, kommunizierende Klasse ist, so folgt aus Satz **??**, dass

$$\mathbb{P}_x[S_{\{y\}} < \infty] = 1 \qquad \forall\, x, y \in K$$

Bezeichne wieder mit $S^k_{\{x\}}$ die k-te Treffzeit des Zustandes $x \in E$, d.h.

$$S^0_{\{x\}} := 0 \qquad \textit{und} \qquad S^k_{\{x\}} := \inf\{n > S^{k-1}_{\{x\}} \,:\, X_n = x\} \qquad , \quad k \in \mathbb{N}.$$

Dann folgt aus der starken Markoveigenschaft (Satz **??**) für $x, y \in K$ mit $x \neq y$ und $k \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}_x[S^k_{\{x\}} < S_{\{y\}}] = \mathbb{P}_x[S^k_{\{x\}} < S_{\{y\}}, S^{k-1}_{\{x\}} < S_{\{y\}}]$$

$$= \mathbb{P}_x[S^{k-1}_{\{x\}} < S_{\{y\}}] \cdot \mathbb{P}_x[S^k_{\{x\}} < S_{\{y\}} \mid \underbrace{S^{k-1}_{\{x\}} < S_{\{y\}}}_{\in \mathfrak{F}^X_{S^{k-1}_{\{x\}}}}, X_{S^{k-1}_{\{x\}}} = x, S^{k-1}_{\{x\}} < \infty]$$

$$\overset{\text{Satz ??}}{=} \mathbb{P}_x[S^{k-1}_{\{x\}} < S_{\{y\}}] \cdot \mathbb{P}_x[S_{\{x\}} < S_{\{y\}}]$$

$$= \quad ...$$

$$= \mathbb{P}_x[S_{\{x\}} < S_{\{y\}}]^k$$

Angenommen $\mathbb{P}_x[S_{\{y\}} < S_{\{x\}}] = 0$. Dann gilt, da $S^k_{\{x\}}(\omega) \geq k$ für alle $\omega \in \Omega$,

$$\mathbb{P}_x[k < S_{\{y\}}] \geq \mathbb{P}_x[S^k_{\{x\}} < S_{\{y\}}] = \left(1 - \underbrace{\mathbb{P}_x[S_{\{y\}} < S_{\{x\}}]}_{=0}\right)^k = 1$$

Also,

$$0 = \mathbb{P}_x[S_{\{y\}} = \infty] = \lim_{k \to \infty} \mathbb{P}_x[k < S_{\{y\}}] \geq 1 \quad \lightning$$

Folglich ist $\mathbb{P}_x[S_{\{y\}} < S_{\{x\}}] > 0$.

zu zeigen: Für $x, y \in K$ mit $x \neq y$ gilt

$$\mathbb{E}_x[\sum_{n=0}^{S_{\{x\}}-1} \mathbb{1}_{X_n = y}] = \frac{\mathbb{P}_x[S_{\{y\}} < S_{\{x\}}]}{\mathbb{P}_y[S_{\{x\}} < S_{\{y\}}]}$$

zunächst einmal folgt aus der starken Markoveigenschaft für $N \in \mathbb{N}$ und $z \in E$

$$\mathbb{P}_z[X_{S_{\{y\}}+n} = y, n < S_{\{x\}} \wedge N - S_{\{y\}}, S_{\{y\}} < S_{\{x\}} \wedge N]$$

$$= \mathbb{P}_z[S_{\{y\}} < S_{\{x\}} \wedge N] \mathbb{P}_z[X_{S_{\{y\}}+n} = y, n < S_{\{x\}} \wedge N - S_{\{y\}} | X_{\{y\}} = y, S_{\{y\}} < S_{\{x\}} \wedge N]$$

$$\overset{\text{Satz ??}}{=} \mathbb{P}_z[S_{\{y\}} < S_{\{x\}} \wedge N] \mathbb{P}_y[X_n = y, n < S_{\{x\}} \wedge N] \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}_0$$

Daraus folgt

$$\mathbb{E}_x[\sum_{n=0}^{S_{\{x\}} \wedge N - 1} \mathbb{1}_{X_n = y}] = \mathbb{E}_x[\sum_{n=S_{\{y\}}}^{S_{\{x\}} \wedge N - 1} \mathbb{1}_{X_n = y} \mathbb{1}_{S_{\{y\}} < S_{\{x\}} \wedge N}]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_x[X_{S_{\{y\}}+n} = y, n < S_{\{x\}} \wedge N - S_{\{y\}}, S_{\{y\}} < S_{\{x\}} \wedge N]$$

$$= \mathbb{P}_x[S_{\{y\}} < S_{\{x\}} \wedge N] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_x[X_n = y, n < S_{\{x\}} \wedge N]$$

$$= \mathbb{P}_x[S_{\{y\}} < S_{\{x\}} \wedge N] \mathbb{E}_y[\sum_{n=0}^{S_{\{x\}} \wedge N - 1} \mathbb{1}_{X_n = y}]$$

sowie

$$\mathbb{E}_y[\sum_{n=0}^{S_{\{x\}}\wedge N-1} \mathbb{1}_{X_n=y}] = 1 + \mathbb{E}_y[\sum_{n=S_{\{y\}}}^{S_{\{x\}}\wedge N-1} \mathbb{1}_{X_n=y}\mathbb{1}_{S_{\{y\}}<S_{\{x\}}\wedge N}]$$

$$= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_y[X_{S_{\{y\}}+n} = y, n < S_{\{x\}} \wedge N - S_{\{y\}}, S_{\{y\}} < S_{\{x\}} \wedge N]$$

$$= 1 + \mathbb{P}_y[S_{\{y\}} < S_{\{x\}} \wedge N] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_x[X_n = y, n < S_{\{x\}} \wedge N]$$

$$= 1 + \mathbb{P}_y[S_{\{y\}} < S_{\{x\}} \wedge N]\mathbb{E}_y[\sum_{n=0}^{S_{\{x\}}\wedge N-1} \mathbb{1}_{X_n=y}]$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{E}_y[\sum_{n=0}^{S_{\{x\}}\wedge N-1} \mathbb{1}_{X_n=y}] = \frac{1}{\mathbb{P}_y[S_{\{x\}} \wedge N < S_{\{y\}}]}$$

Aus der monotonen Konvergenz und der Stetigkeit der Maße $\mathbb{P}_x$ und $\mathbb{P}_y$ ergibt sich

$$\mathbb{E}_x[\sum_{n=0}^{S_{\{x\}}-1} \mathbb{1}_{X_n=y}] \overset{\mathbb{P}_x[S_{\{x\}}<\infty]=1}{=} \lim_{N\to\infty} \mathbb{E}_x[\sum_{n=0}^{S_{\{x\}}\wedge N-1} \mathbb{1}_{X_n=y}]$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{\mathbb{P}_x[S_{\{y\}} < S_{\{x\}} \wedge N]}{\mathbb{P}_y[S_{\{x\}} \wedge N < S_{\{y\}}]} \overset{\mathbb{P}_x[S_{\{x\}}<\infty]=1}{=} \frac{\mathbb{P}_x[S_{\{y\}} < S_{\{x\}}]}{\mathbb{P}_y[S_{\{x\}} < S_{\{y\}}]}$$

Insbesondere ist $\mu_x(x) = 1$ nach Definition. $\mu_x(y) \in (0, \infty)$ für alle $y \in K$ und $\mu_x(y) = 0$ für alle $y \in K^C$, da in diesem Fall $p_n(x, y) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Für $y \in K^C$ folgt wegen $z \not\to y$ für alle $z \in K$

$$\sum_{z\in E} \mu_x(z)p(z, y) = \sum_{z\in K} \mu_x(z)p(z, y) = 0 = \mu_x(y)$$

Sei also nun $y \in K$. Da $x \in K$ nach Voraussetzung rekurrent ist, gilt

$$\mu_x(y) = \mathbb{E}_x[\sum_{n=0}^{S_{\{x\}}} \mathbb{1}_{X_n=y}] + \mathbb{P}_x[X_0 = y] - \mathbb{P}_x[X_{S_{\{x\}}} = y, S_{\{x\}} < \infty] \qquad (\star)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_x[X_n = y, S_{\{x\}} \geq n] + \mathbb{1}_{x=y}\left(1 - \underbrace{\mathbb{P}_x[S_{\{x\}} < \infty]}_{=1}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{z\in E} \mathbb{P}_x[X_n = y, X_{n-1} = z, S_{\{x\}} \geq n]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{z\in K} \mathbb{P}_x[X_{n-1} = z, S_{\{x\}} \geq n]\mathbb{P}_x[X_n = y \mid X_{n-1} = z, S_{\{x\}} \geq n]$$

Da $\{S_{\{x\}} \geq n\} = \{S_{\{x\}} \leq n-1\}^C \in \mathfrak{F}^X_{n-1}$, folgt aus Satz **??**

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{z\in K} \mathbb{P}_x[X_{n-1} = z, S_{\{x\}} - 1 \geq n-1]\mathbb{P}_z[X_1 = y]$$

$$= \sum_{z\in K} p(z, y)\mathbb{E}_x[\sum_{n=0}^{S_{\{x\}}-1} \mathbb{1}_{X_n=z}]$$

$$= \sum_{z\in K} p(z,y)\mu_x(z)$$

Also ist μ_x invariant bzgl. P.

c) Sei λ ein invariantes Maß bzgl. P auf E mit $\lambda(x) = 1$ für ein $x \in K$ und $\lambda(y) = 0$ für alle $y \in K^C$.

zu zeigen: $\lambda(y) \geq \sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}_x[S_{\{x\}} \geq n, X_n = y] \qquad \forall y \in K \quad \forall N \in \mathbb{N}$

IA $N = 1$: Da λ invariant ist, gilt für alle $y \in K$

$$\lambda(y) = \sum_{z\in E} \lambda(z)p(z,y) \geq \underbrace{\lambda(x)}_{=1} p(x,y) = \mathbb{P}_x[X_1 = y] = \mathbb{P}_x[S_{\{x\}} \geq 1, X_1 = y]$$

IS $N \to N+1$: Für $y \in K$ gilt

$$\lambda(y) = \sum_{z\in E} \lambda(z)p(z,y) = \sum_{z\in K\setminus\{x\}} \lambda(z)p(z,y) + \lambda(x)p(x,y)$$

$$\overset{\text{IV}}{\geq} \sum_{z\in K\setminus\{x\}} \sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}_x[S_{\{x\}} \geq n, X_n = z]p(z,y) + \mathbb{P}_x[S_{\{x\}} \geq 1, X_1 = y]$$

Da $\{S_{\{x\}} \geq n+1\} = \{S_{\{x\}} \leq n\}^C \in \mathfrak{F}_n^X$ gilt für alle $z \in K \setminus \{x\}$

$$\mathbb{P}_x[S_{\{x\}} \geq n+1, X_n = z, X_{n+1} = y]$$

$$= \mathbb{P}_x[S_{\{x\}} \geq n+1, X_n = z]\mathbb{P}_x[X_{n+1} = y \mid X_n = z, S_{\{x\}} \geq n+1]$$

$$\overset{\text{Satz ??}}{=} \mathbb{P}_x[S_{\{x\}} \geq n+1, X_n = z]\mathbb{P}_z[X_1 = y]$$

$$\overset{z\neq x}{=} \mathbb{P}_x[S_{\{x\}} \geq n, X_n = z]p(z,y)$$

Daraus folgt

$$\lambda(y) \geq \sum_{z\in K\setminus\{x\}} \sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}_x[S_{\{x\}} \geq n+1, X_n = z, X_{n+1} = y] + \mathbb{P}_x[S_{\{x\}} \geq 1, X_1 = y]$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}_x[S_{\{x\}} \geq n+1, X_{n+1} = y] + \mathbb{P}_x[S_{\{x\}} \geq 1, X_1 = y]$$

$$= \sum_{n=1}^{N+1} \mathbb{P}_x[S_{\{x\}} \geq n, X_n = y]$$

zu zeigen: $\lambda = \mu_x$

Zunächst einmal folgt aus der monotonen Konvergenz, dass

$$\lambda(y) \geq \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}_x[S_{\{x\}} \geq n, X_n = y] = \mathbb{E}_x[\sum_{n=1}^{S_{\{x\}}} \mathbb{1}_{X_n=y}] = \mu_x(y)$$

Insbesondere ist $\lambda - \mu_x$ ein invariantes Maß mit $(\lambda - \mu_x)(y) = 0$ für alle $y \in K^C \cup \{x\}$. Für $y \in K \setminus \{x\}$ gibt es, da $x \leftrightarrow y$, ein $n \in \mathbb{N}$ mit $p_n(y,x) > 0$. Daraus folgt

$$0 = (\lambda - \mu_x)(x) = \sum_{z \in E} \underbrace{(\lambda - \mu_x)(z)}_{\geq 0} p_n(z,x) \geq (\lambda - \mu_x)(y) \underbrace{p_n(y,x)}_{>0}$$

Folglich ist $(\lambda - \mu_x)(y) = 0$ für jedes $y \in K \setminus \{x\}$. Also $\lambda = \mu_x$

□

Bemerkung 3.3. Im Falle, dass die Menge $\emptyset \neq K \subseteq E$ eine transiente, kommunizierende Klasse ist, so folgt aus der Gleichung $(\star)$ im Beweis von Satz **??**, dass

$$\mu_x(y) \geq \sum_{z \in E} \mu_x(z) p(z,y) \qquad y \in E$$

wobei für $y \in E \setminus \{x\}$ die Gleichheit gilt.

Satz 3.5. Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine (ν, P)-Markovkette mit Zustandsraum E und $\emptyset \neq K \subseteq E$ eine rekurrente, kommunizierende Klasse. Dann existiert ein bzgl. P invariantes Maß $\pi : E \to [0, \infty)$ mit $\pi(y) = 0$ für alle $y \in K^C$, dass bis auf konstantes Vielfaches in $[0, \infty)$ eindeutig bestimmt ist.

Beweis. (Existenz) Dies folgt direkt aus Satz **??** a) und b).
(Eindeutigkeit bis auf konstantes Vielfaches) Sei also π ein invariantes Maß bzgl. P mit $\pi(y) = 0$ für alle $y \in K^C$. Falls $\pi(y) = \infty$ bzw. $\pi(y) = 0$ für alle $y \in K$, so gilt für ein festes $x \in K$, dass

$$\pi = c \cdot \mu_x$$

für ein festes $x \in K$ und $c \in \{0, \infty\}$
Sei nun also $\pi(y)$ weder konstant Null bzw. unendlich. Dann existiert ein $x \in K$ mit $\pi(x) \in (0, \infty)$ Betrachte das Maß $\lambda(y) := \pi(y)/\pi(x)$. Dann genügt λ den Voraussetzungen von Satz **??** a). Folglich ist

$$\lambda = \mu_x \qquad \Leftrightarrow \qquad \pi = \pi(x)\mu_x.$$

□

Bemerkung 3.4. Wenn $\emptyset \neq K \subseteq E$ eine transiente, kommunizierende Klasse ist, so können invariante Maße existieren, die keine konstanten Vielfache voneinander sind (siehe Beispiel **??**).

Satz 3.6. Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine (ν, P)-Markovkette mit Zustandsraum E und $\emptyset \neq K \subseteq E$ eine kommunizierende Klasse. Dann gelten folgende Aussagen:

a) Es gibt ein $\pi \in Inv(P)$ mit $\sum_{x \in K} \pi(x) = 1$ genau dann, wenn K positiv rekurrent ist. Insbesondere ist

$$\pi(x) = \frac{1}{\mathbb{E}_x[S_{\{x\}}]} \qquad \forall\, x \in K$$

b) Wenn $K \neq E$ transient ist und $\pi \in Inv(p)$, so ist $\pi(x) = 0$ für alle $x \in K$

Beweis. " $\Rightarrow$ " Sei $\pi \in Inv(p)$ mit $\sum_{x\in K} \pi(x) = 1$. Dann gibt es ein $x \in K$ mit $\pi(x) > 0$. Für jedes $y \in K$ gilt $x \leftrightarrow y$. Also folgt aus Bemerkung **??** c, dass $\lambda = \mu_x$. Insbesondere ist

$$\mathbb{E}_x[S_{\{x\}}] = \sum_{y\in K} \mathbb{E}_x[\sum_{n=0}^{S_{\{x\}}-1} \mathbb{1}_{X_n=y}] = \sum_{y\in K} \mu_x(y) = \frac{1}{\pi(x)} \sum_{y\in K} \pi(y) = \frac{1}{\pi(x)} < \infty.$$

Folglich ist x positiv rekurrent und es gilt nach Bemerkung **??**, dass jedes $y \in K$ positiv rekurrent ist. Zudem gilt

$$\pi(x) = \frac{1}{\mathbb{E}_x[S_{\{x\}}]} \qquad \forall\, x \in K$$

d.h. π ist eindeutig bestimmt.
" $\Leftarrow$ " Sei K eine positiv rekurrente Klasse. Dann gilt für ein $x \in K$

$$\sum_{y\in K} \mu_x(y) = \mathbb{E}_x[S_{\{x\}}] < \infty$$

Folglich ist nach Satz **??** $\pi(y) := \mu_x(y)/\mathbb{E}_x[S_{\{x\}}]$ eine Gleichgewichtsverteilung mit $\pi(y) = 0$ für alle $y \in K^C$. Also $\sum_{y\in K} \pi(y) = 1$.
b) Folgt aus Satz **??** b). □

Korollar 3.1. Ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine irreduzible (ν, P)-Markovkette auf einem endlichen Zustandsraum E. Dann existiert eine eindeutig bestimmte Gleichgewichtsverteilung.

Beweis. Dies folgt aus Satz **??** und Satz **??**. □

Beispiel 3.8. Betrachte eine Markovkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit Zustandsraum $E = \{0, 1, 2, 3\}$, dessen Übergangsmatrix P durch den folgenden Übergangsgraphen beschrieben wird

.

Abbildung 18: Übergangsgraph auf $\{0, 1, 2, 3\}$

Dann bilden die Zustände $\{0\}$ und $\{2, 3\}$ jeweils eine kommunizierende, positiv rekurrente Klasse, während der Zustand $\{1\}$ transient ist. Folglich sind

$$\pi_1 = \mathbb{1}_{\{0\}} \quad \textit{und} \quad \pi_2 = \frac{2}{3}\mathbb{1}_{\{2\}} + \frac{1}{3}\mathbb{1}_{\{3\}}$$

die beiden Gleichgewichtsverteilungen in $Inv(p)$. Zudem ist $\mathbb{E}_2[S_{\{2\}}] = \frac{3}{2}$.

Kovergenz gegen die Gleichgewichtsverteilung

4.1 Kovergenzssätze für rekurrente Markovketten

Frage? Unter welchen Bedingungen konvergieren die Übergangswahrscheinlichkeiten?

Beispiel 4.1. Betrachte die stochastische Matrix

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{auf } E = \{1, 2\}.$$

Dann gilt

$$P^k = P \quad \forall\, k \in \{2l + 1 \,:\, l \in \mathbb{N}_0\} \quad \text{und} \quad P^k = I \quad \forall\, k \in \{2l \,:\, l \in \mathbb{N}_0\}$$

Definition 4.1 (Kopplung von Markovketten)**.** Eine bivariate Markovkette $((X_n, Y_n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit Werten im Zustandsraum $E \times E$ heißt eine (markov) Kopplung der (μ, P)-Markovkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und der (ν, P)-Markovkette $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ auf E, falls für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $(x, y), (x', y') \in E \times E$ gilt

$$\mathbb{P}[X_{n+1} = x' \mid (X_n, Y_n) = (x, y)] = p(x, x')$$

$$\mathbb{P}[Y_{n+1} = y' \mid (X_n, Y_n) = (x, y)] = p(y, y')$$

Beispiel 4.2 (unabhängige Kopplung)**.** Sei $P = (p(x, y))_{x,y\in E}$ eine stochastische Matrix und μ, ν zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf E. Dann ist die Markovkette $((X_n, Y_n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit Werten im Zustandsraum $E \times E$, Startverteilung $\mu \otimes \nu$ und Übergangsmatrix $\bar{P}$ mit

$$\bar{p}\,((x, y), (x', y')) := p(x, x')p(y, y')$$

eine Kopplung einer (μ, P)-Markovkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und einer (ν, P)-Markovkette $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit Zustandsraum E, denn

$$\mathbb{P}_{\mu\otimes\nu}[X_0 = x] = \mathbb{P}_{\mu\otimes\nu}[(X_0, Y_0) \in \{x\} \times E] = \sum_{y\in E} \mu(x)\nu(y) = \mu(x)$$

und

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}_{\mu\otimes\nu}[X_{n+1} = x' \mid (X_n, Y_n) = (x, y)] \\ &= \mathbb{P}_{\mu\otimes\nu}[(X_{n+1}, Y_{n+1}) \in \{x'\} \times E \mid (X_n, Y_n) = (x, y)] \\ &= \sum_{y'\in E} \bar{p}\,((x, y).(x', y')) = \sum_{y'\in E} p(x, x')p(y, y') = p(x, x') \end{aligned}$$

(Analog prüft man die Bedingung für $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ nach.)

Beispiel 4.3 (unabhängiges Verschmelzen)**.** Sei $P = (p(x, y))_{x,y\in E}$ eine stochastische Matrix und μ, ν zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf E. Definiere die Übergangsmatrix $\bar{P}$ durch

$$\bar{p}((x, y), (x', y')) = \begin{cases} p(x, x')p(y, y') & , x \neq y \\ p(x, x') & , x = y \text{ und } x' = y' \\ 0 & , x = y \text{ und } x' \neq y' \end{cases}$$

für alle $(x, y), (x', y') \in E \times E$. Dann ist die $(\mu \otimes \nu, \bar{P})$-Markovkette $((X_n, Y_n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit Zustandsraum $E \times E$ eine Kopplung einer (μ, P)-Markovkette und einer (ν, P)-Markovkette auf E.

.

Abbildung 19: unabhängiges Verschmelzen zweier Markovketten

Bemerkung 4.1. Selbst wenn die stochastische Matrix $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ irreduzibel ist, garantiert dies i.A. nicht die Irreduzibilität der stochastischen Matrrix $\bar{P}$ mit

$$\bar{p}\left((x,y),(x',y')\right) := p(x,x')p(y,y') \quad , \quad (x,y),(x',y') \in E \times E.$$

Beispiel 4.4. Sei $E = \{1,2\}$ und $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Dann ist P irreduzibel. Betrachte nun die stochastische Matrix $\bar{P}$ mit

$$\bar{p}\left((1,1),(1,2)\right) = \underbrace{p_n(1,1)}_{=0\,\forall\, n \text{ ungerade}} \overbrace{p_n(1,2)}^{=0\,\forall\, n \text{ gerade}} = 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0$$

Folglich ist die stochastische Matrix $\bar{P}$ nicht irreduzibel.

Satz 4.1. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine irreduzible, aperiodische, rekurrente Markovkette mit Zustandsraum E und Übergangsgraph $P = (p(x,y))_{x,y\in E}$. Dann gilt für alle $x, y \in E$

$$\lim_{n\to\infty} p_n(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mathbb{E}_y[S_{\{y\}}]} & , \mathbb{E}_y[S_{\{y\}}] < \infty \\ 0 & , \mathbb{E}_y[S_{\{y\}}] = \infty \end{cases}$$

Bemerkung 4.2. Im positiven rekurrenten Fall konvergiert somit $p_n(x,y)$ gegen die (eindeutig bestimmte) Gleichgewichtsverteilung

$$\pi(y) = \frac{1}{\mathbb{E}_y[S_{\{y\}}]}$$

Beweis. Schritt 1: Sei $((X_n,Y_n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Markovkette der unabhängigen Kopplung (vgl. Beispiel **??**). Da P irreduzibel und aperiodisch ist, gibt es nach Satz **??** udn Korollar **??** für alle $x,x',y,y' \in E$ ein $\mathbb{N}_0 \equiv \mathbb{N}_0(x,x',y,y') \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\bar{p}\left((x,y),(x',y')\right) = p_n(x,x')p_n(y,y') > 0 \qquad n \geq N_0.$$

Folglich ist die Markovkette $((X_n,Y_n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ irreduzibel. Für ein beliebig gewähltes $x_0 \in E$ definiere

$$S \equiv S_{\{(x_0,x_0)\}} := \inf\{n \in \mathbb{N} \mid (X_n,Y_n) = (x_0,x_0)\}.$$

zu zeigen: $|p_n(x,y) - p_n(z,y)| \leq \mathbb{P}_{\{(x,z)\}}[S > n] \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$
Es gilt nun aber

$$\mathbb{P}_{(x,z)}[X_n = y, S \leq n] = \sum_{m=1}^{n} \mathbb{P}_{(x,z)}[X_n = y, S = m]$$

$$= \sum_{m=1}^{n} \mathbb{P}_{(x,z)}[S = m]\mathbb{P}_{(x,z)}[X_n = y \mid (X_S,Y_S) = (x_0,x_0), S = m]$$

$$\overset{\text{Satz ??}}{=} \sum_{m=1}^{n} \mathbb{P}_{(x,z)}[S = m]\mathbb{P}_{(x_0,x_0)}[X_{n-m} = y]$$

Weiterhin gilt

$$\mathbb{P}_{(x_0,x_0)}[X_{n-m} = y] = \sum_{y'\in E} \underbrace{\bar{p}_{n-m}\left((x_0,x_0),(y,y')\right)}_{= p_{n-m}(x_0,y)p_{n-m}(x_0,y')}$$

$$= \sum_{y' \in E} \overbrace{\bar{p}_{n-m}\left((x_0, x_0), (y', y)\right)}$$

$$= \mathbb{P}_{(x_0,x_0)}[Y_{n-m} = y]$$

Daraus folgt

$$\mathbb{P}_{(x,z)}[X_n = y, S \leq n] = \sum_{m=1}^{n} \mathbb{P}_{(x,z)}[S = m]\mathbb{P}_{(x_0,x_0)}[X_{n-m} = y]$$

$$= \sum_{m=1}^{n} \mathbb{P}_{(x,z)}[S = m]\mathbb{P}_{(x_0,x_0)}[Y_{n-m} = y] = \mathbb{P}_{(x,z)}[Y_n = y, S \leq n]$$

Somit ergibt sich

$$|p_n(x,y) - p_n(z,y)| = |\mathbb{P}_{(x,z)}[X_n = y] - \mathbb{P}_{(x,z)}[Y_n = y]|$$

$$= |\mathbb{P}_{(x,z)}[X_n = y, S > n] - \mathbb{P}_{(x,z)}[Y_n = y, S > n]|$$

$$= |\mathbb{P}_{(x,z)}[X_n = y \mid S > n] - \mathbb{P}_{(x,z)}[Y_n = y \mid S > n]|\mathbb{P}_{(x,z)}[S > n]$$

$$\leq \mathbb{P}_{(x,z)}[S > n]$$

<u>Schritt 2</u>: Betrachte zunächst den Fall, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ positiv rekurrent ist. Dann existiert nach Satz **??** a) eine eindeutig bestimmte Gleichgewichtsverteilung π. Da aber

$$\sum_{(x,y)\in E\times E} (\pi\otimes\pi)(x,y)\bar{p}\left((x,y),(x',y')\right) = (\pi P)(x')(\pi P)(y') \overset{\pi=\pi P}{=} \pi(x')\pi(y') = (\pi\otimes\pi)(x',y')$$

ist folglich $\pi \otimes \pi$ eine Gleichverteilung von $((X_n, Y_n))_{n\in\mathbb{N}_0}$. Insbesondere ist nach Satz **??** a) die Markovkette $((X_n, Y_n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ positiv rekurrent und damit auch rekurrent.
Aus Satz **??** folgt daher

$$\mathbb{P}_{(x,z)}[S_{\{(x_0,x_0)\}} < \infty] = 1$$

Daraus folgt

$$\limsup_{n\to\infty} |p_n(x,y) - p_n(z,y)| \leq \mathbb{P}_{(x,z)}[S_{\{(x_0,x_0)\}} = \infty] = 0$$

Also,

$$\lim_{n\to\infty} |p_n(x,y) - p_n(z,y)| = 0$$

Weiterhin gilt

$$|p_n(x,y) - \pi(y)| = |\sum_{z\in E} \pi(z)\left(p_n(x,y) - p_n(z,y)\right)| \leq \sum_{z\in E} \pi(z)|p_n(x,y) - p_n(z,y)|$$

Also folgt aus dem Satz von Lebesgue

$$\limsup_{n\to\infty} |p_n(x,y) - \pi(y)| \leq 0$$

Da $\pi(y) = \dfrac{1}{\mathbb{E}_y[S_{\{y\}}]}$ nach Satz **??** a) ist, folgt die Behauptung.

Schritt 3: Sei nun $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ nullrekurrent. Dann gibt es zwei Fälle zu untersuchen

1. Fall: $((X_n, Y_n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist transient
Nach Korollar **??** gilt dann aber

$$\lim_{n\to\infty} p_n(x,y)^2 = \lim_{n\to\infty} \bar{p}_n((x,x),(y,y)) = 0.$$

woraus die Behauptung folgt.

2. Fall: $((X_n, Y_n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist rekurrent
Dann ist nach Satz **??** $\mathbb{P}_{(x,z)}[S_{\{(x_0,x_0)\}} < \infty] = 1$ und aus Schritt 1 folgt

$$\limsup_{n\to\infty} |p_n(x,y) - p_n(z,y)| \le \mathbb{P}_{(x,z)}[S_{\{(x_0,x_0)\}} = \infty] = 0$$

Also,

$$\lim_{n\to\infty} |p_n(x,y) - p_n(z,y)| = 0$$

Angenommen es existiert ein $(x,y) \in E \times E$ mit

$$\limsup_{n\to\infty} p_n(x,y) =: \alpha > 0$$

Dann existiert eine Teilfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ derart, dass

$$\lim_{k\to\infty} p_{n_k}(x,y) = \alpha$$

Da $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ nullrekurrent ist, folgt aus Satz **??**, dass

$$\mu(z)_x := \mathbb{E}_x[\sum_{n=0}^{S_{\{x\}}-1} \mathbb{1}_{X_n=z}] \qquad , z \in E$$

ein invariantes Maß ist mit $\mu_x(z) \in (0,\infty)$ für alle $z \in E$ und

$$\sum_{z\in E} \mu_x(z) = \mathbb{E}_x[S_{\{x\}}] = \infty$$

Also existiert eine endliche Teilmenge $M \subseteq E$ mit

$$\sum_{z\in M} \mu_x(z) > \frac{2}{\alpha}\mu_x(y).$$

Weiterhin existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $k \ge k_0$

$$|p_{n_k}(x,y) - \alpha| < \frac{\alpha}{4} \qquad \text{und} \qquad \max_{z\in M} |p_{n_k}(x,y) - p_{n_k}(z,y)| < \frac{\alpha}{4}.$$

Daraus folgt dann aber für alle $z \in M$ und $k \ge k_0$

$$p_{n_k}(z,y) = \alpha + p_{n_k}(z,y) - \alpha \ge \alpha - \underbrace{|p_{n_k}(z,y) - p_{n_k}(x,y)|}_{<\frac{\alpha}{4}} - \underbrace{|p_{n_k}(x,y) - \alpha|}_{<\frac{\alpha}{4}} > \alpha$$

Also

$$\mu_x(y) \overset{\mu_x=\mu_x P}{=} \sum_{z\in E} \mu_x(z) p_{n_k}(z,y) \ge \sum_{z\in M} \mu_x(z) p_{n_k}(z,y) > \frac{\alpha}{2} \sum_{z\in M} \mu_x(z) > \mu_x(y) \qquad ↯$$

Folglich war die Annahme falsch und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} p_n(x,y) = 0.$$

□