t-Test

Ein-Stichproben t-Test, Zwei-Stichproben t-Test (unabhängige vs. abhängige Stichproben)

Ein-Stichproben t-Test

- Hypothesen über μ einer normalverteilen Variable, wobei σ^2 unbekannt ist
- Statistische Hypothesen:
  - Ungerichtet: H_0: $\mu = \mu_0$; H_1: $\mu \neq \mu_0$
  - Gerichtet: H_0: $\mu \leq \mu_0$; H_1: $\mu < \mu_0$ bzw. H_0: $\mu \geq \mu_0$; H_1: $\mu < \mu_0$
- Prüft anhand des Mittelwerts einer Stichprobe, ob der Erwartungswert in der entsprechenden Population gleich einem vorgegebenen Wert ist (dem unter H_0 erwarteten μ_0)
- Vergleich eines Stichprobenmittelwertes mit einem hypothetischen Populationsparameter μ_0

Zwei-Stichproben t-Test

T-Test für abhängige Stichproben (abhängiger t-Test)

- Elemente der zwei Stichproben können einander paarweise zugeordnet werden
- z.B. Messwiederholungen ($t_0 - t_1$), Paare, Parallelisierung
- Betrachtet nicht die Mittelwerte beider Zeitpunkte, sondern die Differenz der Werte **jeder einzelnen Untersuchungsperson**

  → Es geht nur der Unterschied der Messwerte zwischen 1. Und 2. Messung in die Auswertung mit ein
- Allgemeine Unterschiede, die zwischen den Personen zu beiden Messzeitpunkten wirken, gehen nicht mit ein
- Der relevante Effekt für den abhängigen t-Test ist also $\bar{x}_d = \frac{\sum_{i=1}^{N} d_i}{N}$
- Statistische Hypothesen:
  - Ungerichtet: H_0: $\mu_d = 0$; H_1: $\mu_d \neq 0$
  - Gerichtet: H_0: $\mu_d \leq 0$; H_1 $\mu_d > 0$ bzw. H_0: $\mu_d \geq 0$; H_1: $\mu_d < 0$
- Berechnung der Teststatistik: $t_{abhängig} = \frac{\bar{x}_d}{\hat{\sigma}_{\bar{x}_d}}$
- Berechnung des Standardfehlers der Differenzen $\hat{\sigma}_{\bar{x}_d} = \frac{\hat{\sigma}_d}{\sqrt{N}}$
- Schätzung der Streuung der Differenzen $\hat{\sigma}_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(d_i - \bar{x}_d)^2}{N-1}}$
- Berechnung der Freiheitsgrade: $df = N - 1$ (Anzahl der Messwertpaare – 1)

t-Test

Ein-Stichproben t-Test, Zwei-Stichproben t-Test (unabhängige vs. abhängige Stichproben)

Zwei-Stichproben t-Test

T-Test für unabhängige Stichproben (unabhängiger t-Test)

- Unabhängige Gruppen, d.h. es besteht keine Beziehung zwischen den Elementen der Stichproben
- Werte in der einen Stichprobe erlauben keine Vorhersage über Werte in der anderen Stichprobe (unkorreliert)
- z.B. zufällige Gruppenzuteilung (Kontroll- vs. Untersuchungsbedingung) in Experiment, Zufallsstichproben aus unterschiedlichen Populationen

- Voraussetzungen: Unabhängigkeit der Stichproben, metrische AV, Normalverteilung beider Populationen, **Homogene Varianzen**

- Wichtigster Wert für t-Test (Effekt von Interesse): Mittelwertsdifferenz $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$
- Die dichotome Gruppenvariable ist beim t-Test die UV, die numerische Variable, deren Mittelwerte berechnet werden, die AV

- Statistische Hypothesen
  - Ungerichtet: H_0: $\mu_1 = \mu_2$; H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$
  - Gerichtet: H_0: $\mu_1 \leq \mu_2$; H_1: $\mu_1 > \mu_2$ bzw. H_0: $\mu_1 > \mu_2$; H_1: $\mu_1 \leq \mu_2$

- Prüfgröße t als Wert, welcher auf der t-Verteilung liegt und uns eine Wahrscheinlichkeitseinschätzung für die Mittelwertsdifferenz erlaubt

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{(n_1 - 1) * \hat{\sigma}_1^2 + (n_2 - 1) * \hat{\sigma}_2^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)} \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

- Zweiseitige H_0 wird verworfen, wenn $|t| > t(df; 1-\alpha/2)$ (kritischer Wert)
- Einseitige H_0 wird verworfen, wenn Abweichung in die erwartete Richtung und $|t| > t(df; 1-\alpha)$

- Standardfehler der Mittelwertsdifferenz bei $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$

$$\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\sigma^2 * \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$$

- Varianzschätzung innerhalb der Stichproben $\hat{\sigma}^2 = \frac{(n_1 - 1) * \hat{\sigma}_1^2 + (n_2 - 1) * \hat{\sigma}_2^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)}$
- Schätzung des Standardfehlers der Mittelwertsdifferenz $\hat{\sigma}_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{(n_1 - 1) * \hat{\sigma}_1^2 + (n_2 - 1) * \hat{\sigma}_2^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)} * \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$