Statistik 1

Seminar

Einheit 3

13.06.2025 | Janika Saretzki, MSc.

Termine

~~**Einheit 1**~~	~~**02.05.25**~~	~~**14:45-16:15 Uhr**~~	~~**A + B**~~	~~**HS Audimax / P3**~~
~~**Einheit 2**~~	~~**15.05.25**~~	~~**13:05-15:30 Uhr**~~	~~**A + B**~~	~~**HS Audimax / P3**~~
Einheit 3	12.06.25	13:05-15:30 Uhr	A	HS P5 005
Einheit 3	13.06.25	13:50-16:15 Uhr	B	HS P1 105
Einheit 4	26.06.25	13:20-15:45 Uhr	A	HS P5 005
Einheit 4	27.06.25	13:50-16:15 Uhr	B	HS P1 105
Einheit 5	17.07.25	13:20-15:45 Uhr	A	HS P5 005
Einheit 5	18.07.25	13:50-16:15 Uhr	B	HS P1 105

Taschenrechner-Hacks

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}
59	61	59	63	57	61	46	63	58	56	72	54	45	57	57	72	66

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}	y_{12}	y_{13}	y_{14}	y_{15}	y_{16}	y_{17}
55	39	45	51	47	55	52	51	61	47	53	46	59	51	63	59	45

Arithmetisches Mittel: Mode → 2: STAT → Eine Gruppe: 1-VAR **oder** zwei Gruppen: A+BX → Werte für Gruppe 1 und/oder Gruppe 2 eintragen (jeden Wert jeweils mit "Enter/=" bestätigen) → AC → Shift + 1 → 4: Var → 2: x̄ (Mittelwert für Gruppe x/1), 5: ȳ Mittelwert für Gruppe y/2 → "Enter/="

$$\bar{x} = 59.18, \quad \bar{y} = 51.71$$

Standardabweichung auf Populationsebene: Mode → 2: STAT → Eine Gruppe: 1-VAR **oder** zwei Gruppen: A+BX → Werte für Gruppe 1 und/oder Gruppe 2 eintragen (jeden Wert jeweils mit "Enter/=" bestätigen) → AC → Shift + 1 → 4: Var → 4: sx (Standardabweichung auf Populationsebene für Gruppe x/1), 7: sy (Standardabweichung auf Populationsebene für Gruppe y/2) → "Enter/="

$$\sigma_x = 7.02, \quad \sigma_y = 6.29$$

Taschenrechner-Hacks

Median: Mode → 2: STAT → Eine Gruppe: 1-VAR → Werte für Gruppe 1/Gruppe 2 eintragen (jeden Wert jeweils mit "Enter/=" bestätigen) → AC → Shift + 1 → 5: MinMax → 4: med → "Enter/="

$$\mathrm{Mdn}_x = 59.0, \quad \mathrm{Mdn}_y = 51.0$$

Unteres Quartil: Mode → 2: STAT → Eine Gruppe: 1-VAR → Werte für Gruppe 1/Gruppe 2 eintragen (jeden Wert jeweils mit "Enter/=" bestätigen) → AC → Shift + 1 → 5: MinMax → 3: Q1 → "Enter/="

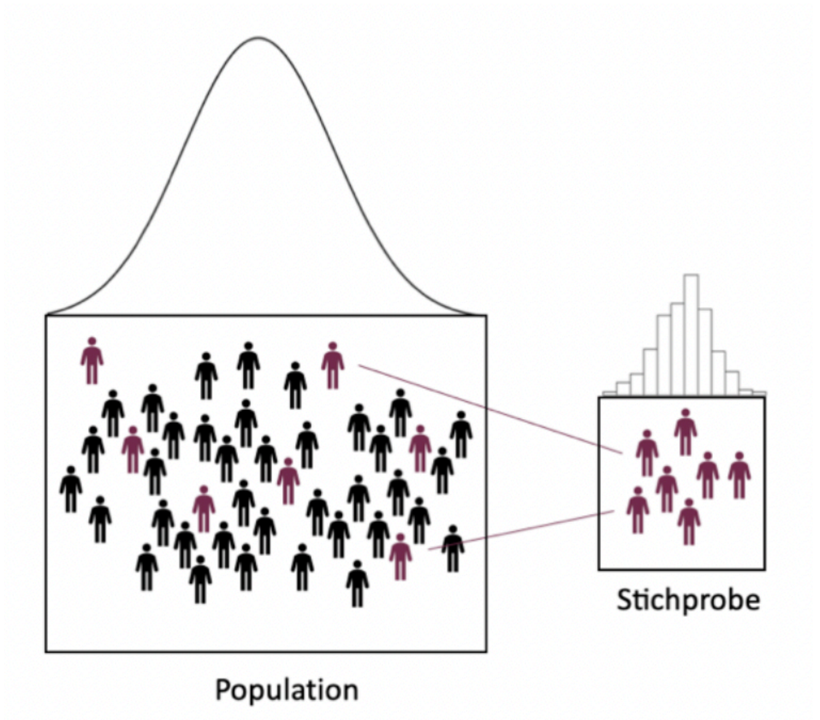
$$\mathrm{Q1}_x = 56.5, \quad \mathrm{Q1}_y = 46.5$$

Oberes Quartil: Mode → 2: STAT → Eine Gruppe: 1-VAR → Werte für Gruppe 1/Gruppe 2 eintragen (jeden Wert jeweils mit "Enter/=" bestätigen) → AC → Shift + 1 → 5: MinMax → 5: Q3 → "Enter/="

$$\mathrm{Q3}_x = 63.0, \quad \mathrm{Q3}_y = 57.0$$

Wiederholung

Logik des Schließens von Stichprobe auf Population



Wiederholung

Psychologische Fragestellung: Praktisch alle psychologischen Theorien erhalten Aussagen über Populationen (nicht nur über isolierte Stichproben). Zu ihrer empirischen Überprüfung sind dann immer **inferenzstatistische Methoden** notwendig.

Logik des Schließens von einer Stichprobe auf die Population: Inferenzstatistik (Grundlage: **Wahrscheinlichkeitsrechnung**)

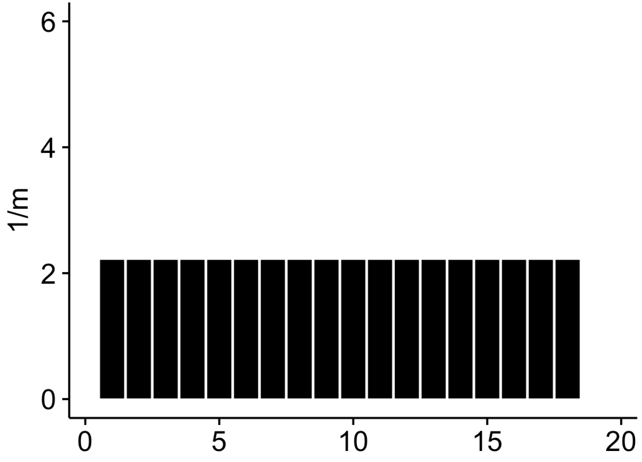
Stochastik = Die Kunst des Vermutens (altgriechisch)

- Mathematik setzt Vorstellung von Zufall voraus (d.h. Modelle von Situationen, deren Ausgang ungewiss ist)
- Keine Einzelergebnisse vorhersagbar, aber:
  → Erkennen von Regelmäßigkeiten bei Vorgängen, deren Ergebnisse vom Zufall abhängen
- Zentraler Begriff **Zufallsexperiment**
  - Die Möglichen Ergebnisse eine Zufallsexperiments heißen **Elementarereignisse**
  - Die Menge aller möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments bezeichnet man als **Ergebnisraum**

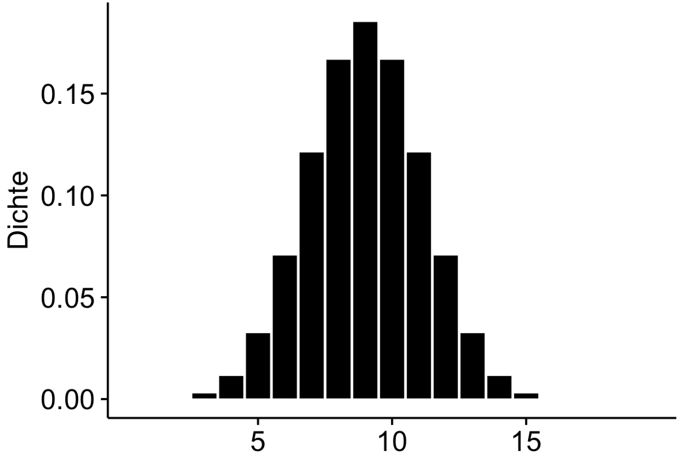
  - Der Ergebnisraum heißt **diskret**, wenn er aus abzählbar vielen Elementarereignissen besteht.
  - Der Ergebnisraum heißt **stetig**, wenn er aus überabzählbar vielen Elementarereignissen besteht.

Übungsaufgabe 1

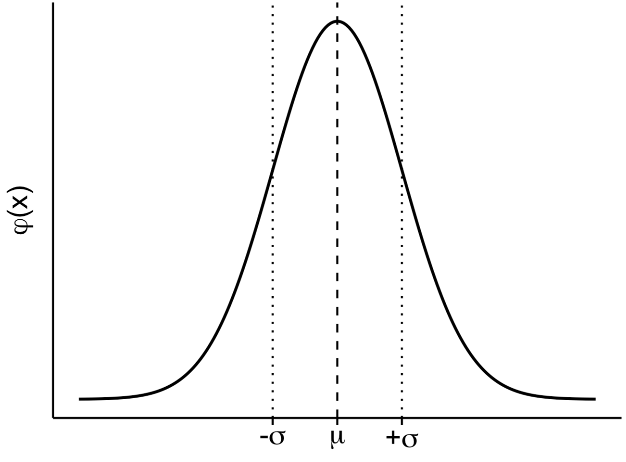
Unten sehen Sie drei Verteilungen. Bitte ordnen Sie folgende Begriffe der passenden Grafik zu:
Binomialverteilung, Gleichverteilung, Normalverteilung.
Bestimmen Sie außerdem, ob es sich um eine spezielle diskrete oder eine spezielle stetige Verteilung handelt.



$$P(X = x) = \frac{1}{m} \quad \text{für alle } x = 1, 2, \ldots, m$$
$$E[X] = \frac{m+1}{2}$$
$$\sigma^2 = \frac{m^2 - 1}{12}$$



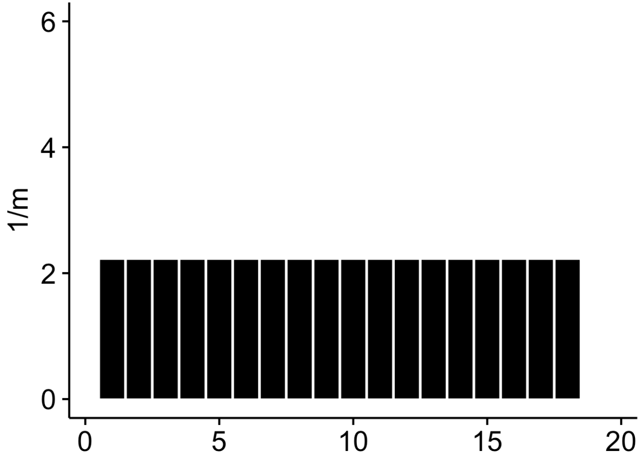
$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{für } k = 0, 1, \ldots, n$$
$$E[X] = np$$
$$\sigma^2 = np(1-p)$$



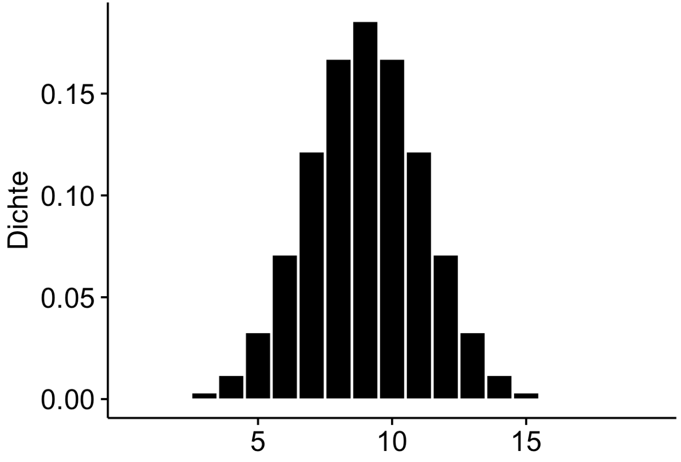
$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

Übungsaufgabe 1 - Lösung

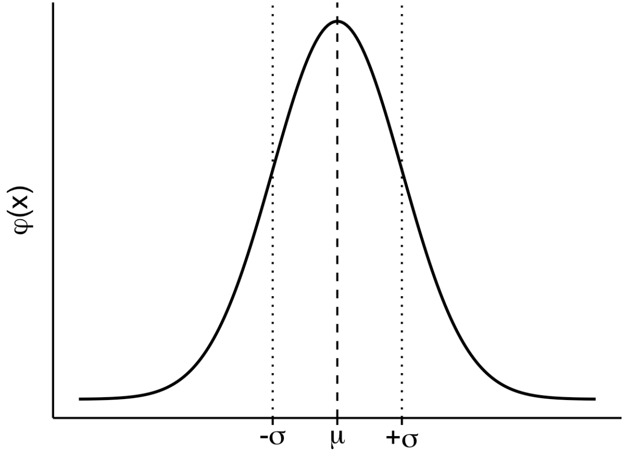
Unten sehen Sie drei Verteilungen. Bitte ordnen Sie folgende Begriffe der passenden Grafik zu:
Binomialverteilung, Gleichverteilung, Normalverteilung.
Bestimmen Sie außerdem, ob es sich um eine spezielle diskrete oder eine spezielle stetige Verteilung handelt.



$$P(X = x) = \frac{1}{m} \quad \text{für alle } x = 1, 2, \ldots, m$$
$$E[X] = \frac{m+1}{2}$$
$$\sigma^2 = \frac{m^2 - 1}{12}$$



$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{für } k = 0, 1, \ldots, n$$
$$E[X] = np$$
$$\sigma^2 = np(1-p)$$

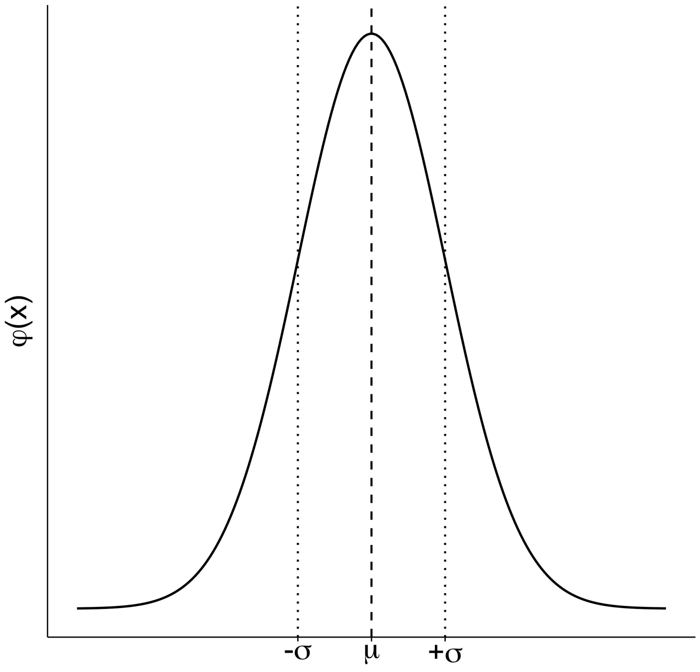


$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

Übungsaufgabe 1 - Lösung

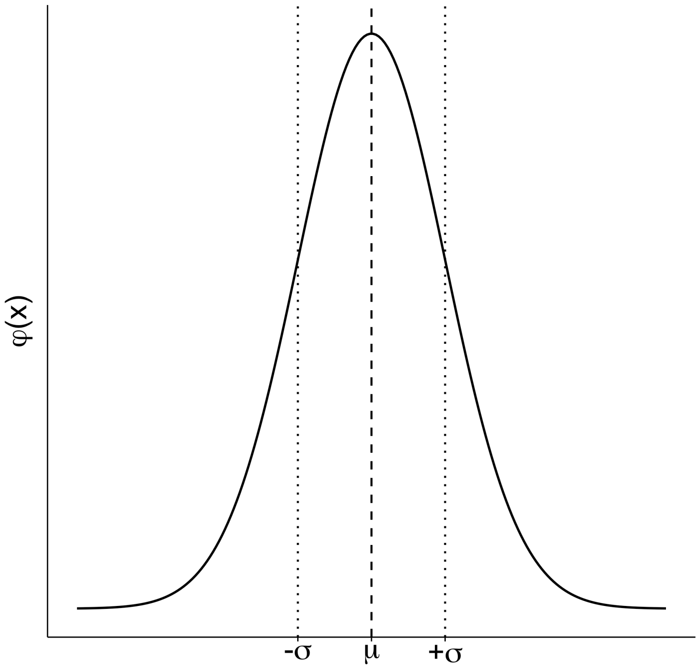
Übungsaufgabe 2

a) Warum handelt es sich bei der Standardnormalverteilung um eine spezielle Normalverteilung?
b) Wie kann eine Normalverteilung in eine Standardnormalverteilung überführt werden?



Übungsaufgabe 2 - Lösung

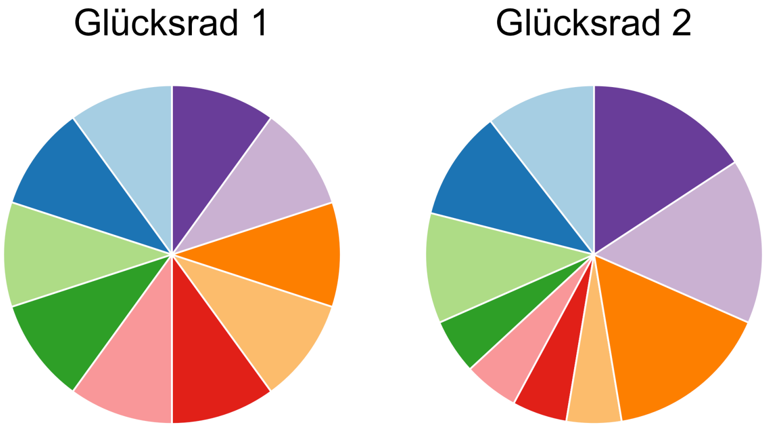
a) Warum handelt es sich bei der Standardnormalverteilung um eine spezielle Normalverteilung?
b) Wie kann eine Normalverteilung in eine Standardnormalverteilung überführt werden?



Übungsaufgabe 3

Unten sehen Sie zwei Glücksräder.

a) In welchem Fall macht die Berechnung einer Laplace-Wahrscheinlichkeit Sinn?
b) Wie ist die Zufallsvariable, eine bestimmte Farbe zu drehen, verteilt?
c) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, ein grünes (hell oder dunkel) Feld zu drehen?



$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der } \omega \text{ in } A}{\text{Anzahl der } \omega \text{ in } \Omega} = \frac{\text{Anzahl der für A 'günstigen' Ereignisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ereignisse}}$$

Übungsaufgabe 3 - Lösung

Unten sehen Sie zwei Glücksräder.

a) In welchem Fall macht die Berechnung einer Laplace-Wahrscheinlichkeit Sinn?
b) Wie ist die Zufallsvariable, eine bestimmte Farbe zu drehen, verteilt?
c) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, ein grünes (hell oder dunkel) Feld zu drehen?

Übungsaufgabe 4

Sie untersuchen, ob das Geben eines Zuckerwürfels dazu führt, dass eine Ratte innerhalb von fünf Minuten hyperaktiv wird. Sie interessieren sich dafür, mit welcher Wahrscheinlichkeit dieses Verhalten nach der Zuckeraufnahme auftritt.

a) Warum handelt es sich hierbei um ein Zufallsexperiment?
b) Welche Zufallsvariable erkennen Sie in diesem Experiment und wie ist diese verteilt?
c) Ist der Ereignisraum diskret oder stetig?
d) Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz der Zufallsvariablen, wenn die Wahrscheinlichkeit, dass die Ratte nach fünf Minuten hyperaktiv wird, 85% beträgt.
e) Welche Verteilung würde man erhalten, würde das Experiment an mehreren Ratten durchgeführt werden?

Übungsaufgabe 4 - Lösung

Sie untersuchen, ob das Geben eines Zuckerwürfels dazu führt, dass eine Ratte innerhalb von fünf Minuten hyperaktiv wird. Sie interessieren sich dafür, mit welcher Wahrscheinlichkeit dieses Verhalten nach der Zuckeraufnahme auftritt.

a) Warum handelt es sich hierbei um ein Zufallsexperiment?
b) Welche Zufallsvariable erkennen Sie in diesem Experiment und wie ist diese verteilt?

Übungsaufgabe 4 - Lösung

Sie untersuchen, ob das Geben eines Zuckerwürfels dazu führt, dass eine Ratte innerhalb von fünf Minuten hyperaktiv wird. Sie interessieren sich dafür, mit welcher Wahrscheinlichkeit dieses Verhalten nach der Zuckeraufnahme auftritt.

c) Ist der Ereignisraum diskret oder stetig?
d) Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz der Zufallsvariablen, wenn die Wahrscheinlichkeit, dass die Ratte nach fünf Minuten hyperaktiv wird, 85% beträgt.

Übungsaufgabe 4 - Lösung

Sie untersuchen, ob das Geben eines Zuckerwürfels dazu führt, dass eine Ratte innerhalb von fünf Minuten hyperaktiv wird. Sie interessieren sich dafür, mit welcher Wahrscheinlichkeit dieses Verhalten nach der Zuckeraufnahme auftritt.

e) Welche Verteilung würde man erhalten, würde das Experiment an mehreren Ratten durchgeführt werden?

Übungsaufgabe 5

In einer Schule befinden Sich 750 Schülerinnen und Schüler. Bei 30% wurde eine depressive Symptomatik festgestellt. Der zuständige Schulpsychologe untersucht die achten Klassen mit insgesamt 123 Schülerinnen und Schülern.

a) Sie interessieren sich für die Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmter Anteil der untersuchten Schülerinnen und Schüler eine depressive Symptomatik aufweise. Was bedeutet in diesem Zusammenhang ein "Erfolg" der Zufallsvariable, und wie ist diese verteilt?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau 35 der 123 untersuchten Schülerinnen und Schüler eine depressive Symptomatik zeigt?

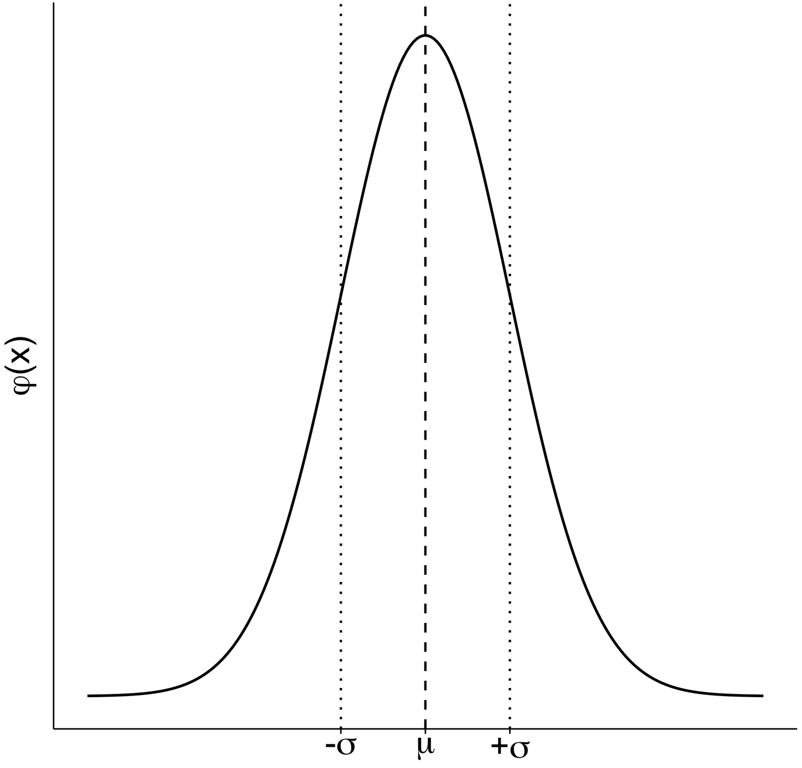
Übungsaufgabe 5 - Lösung

In einer Schule befinden Sich 750 Schülerinnen und Schüler. Bei 30% wurde eine depressive Symptomatik festgestellt. Der zuständige Schulpsychologe untersucht die achten Klassen mit insgesamt 123 Schülerinnen und Schülern.

Übungsaufgabe 5 - Lösung

In einer Schule befinden Sich 750 Schülerinnen und Schüler. Bei 30% wurde eine depressive Symptomatik festgestellt. Der zuständige Schulpsychologe untersucht die achten Klassen mit insgesamt 123 Schülerinnen und Schülern.

Wiederholung

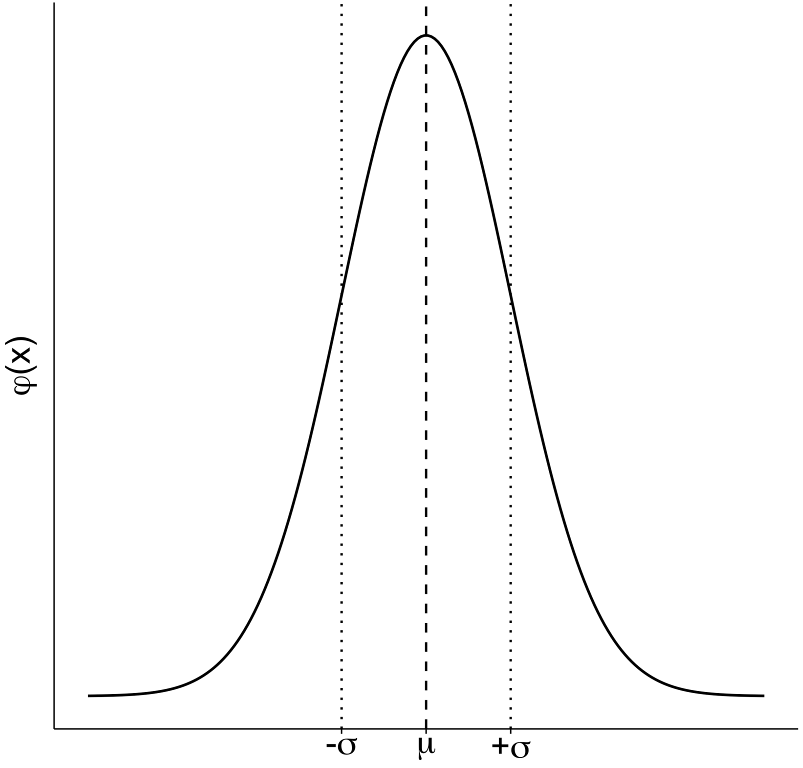


Dichtefunktion:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

Integral über der Dichtefunktion → Bestimmung von Flächen (Wahrscheinlichkeiten) unter der Normalverteilung

Wiederholung



Dichtefunktion:

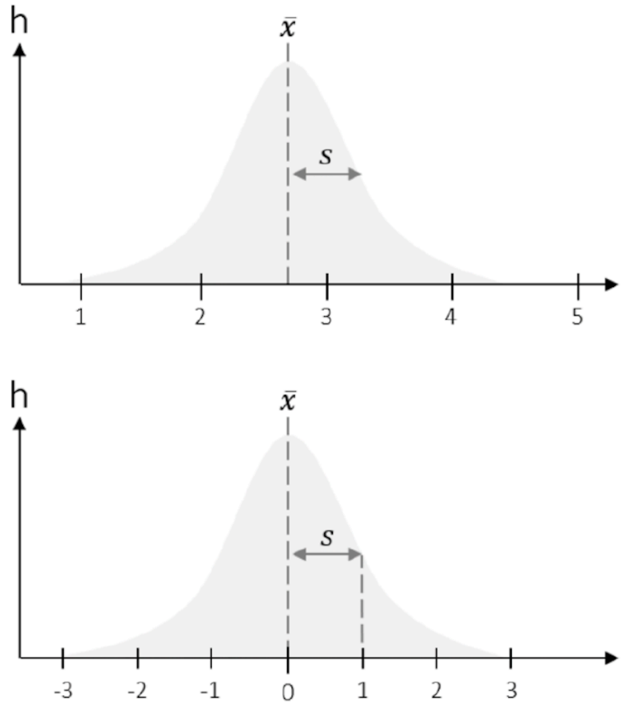
$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

Integral über der Dichtefunktion → Bestimmung von Flächen (Wahrscheinlichkeiten) unter der Normalverteilung

Einfacher: z-Standardisierung und z-Tabelle!

→ Das aufwändige Berechnen von Integralen entfällt
→ Sie können die Wahrscheinlichkeiten direkt ablesen!

Wiederholung



Z-Transformation:

$$Z_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma}$$

Normalverteilung → Standardnormalverteilung

z-Wert*	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,00	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,10	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,20	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,30	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,40	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,50	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,60	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,70	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,80	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,90	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,00	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,10	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,20	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,30	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,40	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,50	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,60	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,70	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,80	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,90	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767

z-Tabelle

- Wahrscheinlichkeit für jeden z-Wer kann abgelesen werden
- Zeile 1 (bis 1 Stelle nach dem Komma) und Spalte (2. Stelle nach dem Komma)
- Anhand der Tabelle kann abgelesen werden, wie wahrscheinlich die Werte einer Verteilung sind
- **Voraussetzung ist, dass die Größe selbst normalverteilt ist**
- Um die Standardnormalverteilungs-Tabelle nutzen zu können, brauchen Sie entweder ...
  - ... einen gegebenen z-Wert **oder**
  - ... eine gegebene Wahrscheinlichkeit
- Die Berechnung eines z-Werts kann für jeden Wert einer normalverteilten Variable erfolgen
- Dieser Prozess nennt sich **z-Transformation** oder kurz **Standardisierung**
- Dafür braucht man nichts weiter als den Mittelwert und die Standardabweichung der Verteilung

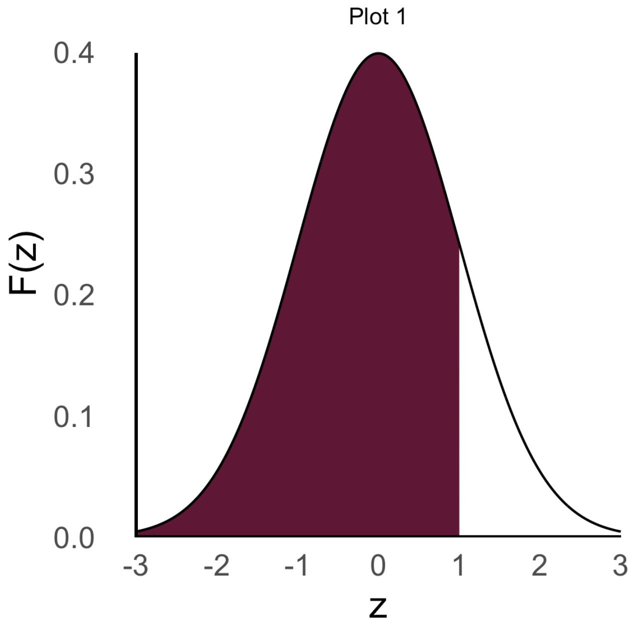
Vorteil der Standardisierung:

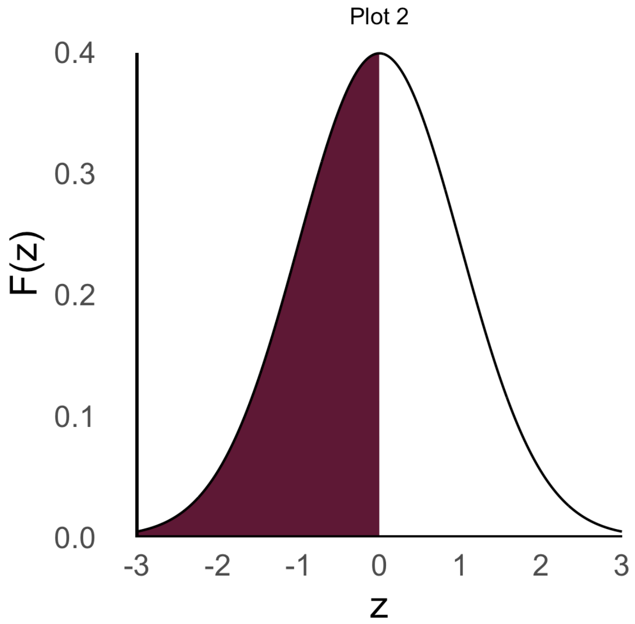
- Messwerte von Personen verschiedener Populationen sind oft nicht direkt vergleichbar
- Dennoch möchte man ausdrücken können, wie gut die beiden Leistungen innerhalb der Bezugsgruppe sind

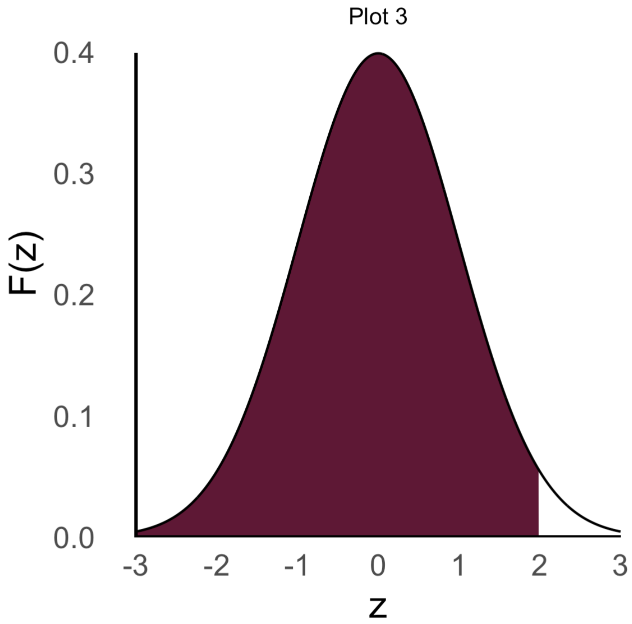
z-Wert*	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,00	$\boxed{0{,}5000}$	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,10	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,20	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,30	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,40	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,50	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,60	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,70	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,80	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,90	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,00	$\boxed{0{,}8413}$	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,10	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,20	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,30	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,40	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,50	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,60	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,70	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,80	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,90	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	$\boxed{0{,}9767}$

z-Tabelle

Ordnen Sie die markierten Werte in der Tabelle der letzten Folie der richtigen Visualisierung zu.

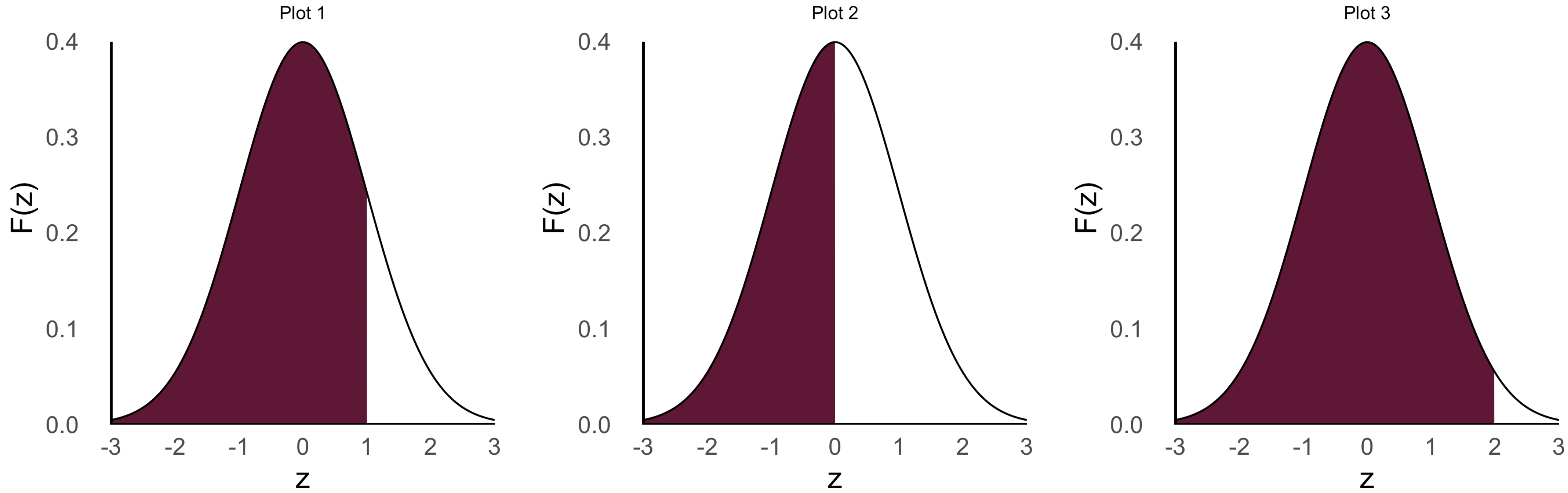






z-Tabelle - Lösung

Ordnen Sie die markierten Werte in der Tabelle der letzten Folie der richtigen Visualisierung zu.



Übungsaufgabe 6

Für die normalverteilte Zufallsvariable „Körpergröße“ sind die Parameter für die männliche und weibliche Bevölkerung eines Landes wie folgt gegeben:

$$\text{Männer: } \mu = 1{,}80\,\text{m},\ \sigma = 0{,}10\,\text{m} \qquad \text{Frauen: } \mu = 1{,}70\,\text{m},\ \sigma = 0{,}10\,\text{m}$$

a) Wie groß ist der Anteil der Männer, deren Körpergröße höchstens 1.95m beträgt?
b) Wie groß ist der Anteil der Männer, deren Körpergröße mehr als 1.95m beträgt?
c) Für welche Körpergröße liegt der Anteil der Männer, die mindestens so groß sind, knapp unter 5%?
d) Wie groß müsste eine Frau sein, um - bezogen auf ihre Verteilung - denselben z-Score (Abstand zum Mittelwert in Standardabweichungen) zu erreichen wie ein Mann mit 1.95m Körpergröße?

Übungsaufgabe 6 - Lösung

Für die normalverteilte Zufallsvariable „Körpergröße" sind die Parameter für die männliche und weibliche Bevölkerung eines Landes wie folgt gegeben:

$$\text{Männer: } \mu = 1{,}80\,\text{m},\ \sigma = 0{,}10\,\text{m} \qquad \text{Frauen: } \mu = 1{,}70\,\text{m},\ \sigma = 0{,}10\,\text{m}$$

a) Wie groß ist der Anteil der Männer, deren Körpergröße höchstens 1.95m beträgt?

Übungsaufgabe 6 - Lösung

Für die normalverteilte Zufallsvariable „Körpergröße“ sind die Parameter für die männliche und weibliche Bevölkerung eines Landes wie folgt gegeben:

$$\text{Männer: } \mu = 1{,}80\,\mathrm{m},\ \sigma = 0{,}10\,\mathrm{m} \qquad \text{Frauen: } \mu = 1{,}70\,\mathrm{m},\ \sigma = 0{,}10\,\mathrm{m}$$

b) Wie groß ist der Anteil der Männer, deren Körpergröße mehr als 1.95m beträgt?

Übungsaufgabe 6 - Lösung

Für die normalverteilte Zufallsvariable „Körpergröße“ sind die Parameter für die männliche und weibliche Bevölkerung eines Landes wie folgt gegeben:

$$\text{Männer: } \mu = 1{,}80\,\mathrm{m},\ \sigma = 0{,}10\,\mathrm{m} \qquad \text{Frauen: } \mu = 1{,}70\,\mathrm{m},\ \sigma = 0{,}10\,\mathrm{m}$$

c) Für welche Körpergröße liegt der Anteil der Männer, die mindestens so groß sind, knapp unter 5%?

Übungsaufgabe 6 - Lösung

Für die normalverteilte Zufallsvariable „Körpergröße“ sind die Parameter für die männliche und weibliche Bevölkerung eines Landes wie folgt gegeben:

$$\text{Männer: } \mu = 1{,}80\,\mathrm{m},\ \sigma = 0{,}10\,\mathrm{m} \qquad \text{Frauen: } \mu = 1{,}70\,\mathrm{m},\ \sigma = 0{,}10\,\mathrm{m}$$

d) Wie groß müsste eine Frau sein, um - bezogen auf ihre Verteilung - denselben z-Score (Abstand zum Mittelwert in Standardabweichungen) zu erreichen wie ein Mann mit 1.95m Körpergröße?

Möglichkeit der Visualisierung