Algebra Abstracta II: Tarea #2

Jonathan Andrés Niño Cortés

13 de febrero de 2015

Sección 7.4 8. Sea R un dominio integral. Pruebe que $(a) = (b)$ para algunos elementos $a, b \in R$ si y solo si $a = ub$ para alguna unidad u de R.

Demostración. Vamos a demostrar primero un lema util para la demostración

Lema 1. *Sea R un dominio integral y sea $a \neq 0$. Entonces $ax = a$ implica que $x = 1$.*

Demostración. $ax = a$ implica que $ax - a = 0$. Por distributividad tenemos que $a(x-1) = 0$. Entonces como R es un dominio integral tenemos que no hay divisores de 0. Es decir, que $a = 0$ o $x - 1 = 0$. Entonces por nuestras suposiciones $x - 1 = 0$, es decir, $x = 1$. □

$\leftarrow$ Sea $x \in (a)$, entonces $x = rb$ para algun $r \in R$. Pero por otra parte tenemos $a = ub$, por lo que $x = rub$. Esto implica que $x \in (b)$. La otra contenencia es análoga tomando $b = u^{-1}a$, que es posible ya que u es una unidad.

$\rightarrow$ Si $a = 0$, entonces $(a) = \{0\}$ y por lo tanto $b = 0$. Aqui claramente tenemos que $0 * 1 = 0$, por lo que en este caso se cumple. El caso $b = 0$ es análogo. Entonces supongase que a y b son distintos de cero. $(a) = (b)$ implica que $a = rb$ y $b = r'a$ para algunos $r, r' \in R$. Sustituyendo una ecuación en la otra obtenemos que $a = rr'a$. Por el Lema 1, entonces tenemos que $rr' = 1$, es decir que r es unidad. □

Sección 7.4 11. Asuma que R es conmutativo. Sean I y J ideales de R y asuma que P es un ideal primo de R que contiene a IJ (por ejemplo, si P contiene a $I \cap J$). Pruebe que P contiene a I o a J.

Demostración. Supongamos que $I \nsubseteq P$. Entonces existe un $i \in I$ tal que $i \notin P$. Pero para todo $j \in J$ tenemos que $ij \in IJ$ y por lo tanto pertenecen a P. Luego como P es primo tenemos que o $i \in P$ o $j \in P$ y por nuestra suposición concluimos que $j \in P$. Concluimos que $J \subseteq P$. $\square$

Sección 7.4 13. Sea $\phi : R \mapsto S$ un homomorfismo de anillos conmutativos.

(a) Pruebe que si P es un ideal primo de S entonces o $\phi^{-1}(P) = R$ o $\phi^{-1}(P)$ es un ideal primo de R. Aplique esto al caso especial cuando R es un subanillo de S y ϕ es el homomorfismo de inclusión para deducir que si P es un ideal primo de S entonces $P \cap R$ es ya sea R o un primo ideal de R.

Demostración. Vamos a demostrar que si $ab \in \phi^{-1}(P)$ entonces o $a \in \phi^{-1}(P)$ o $b \in \phi^{-1}(P)$. Observese que tenemos dos casos que $\phi^{-1}(P) = R$ o que $\phi^{-1}(P) \subsetneq R$. Si se da el segundo caso concluimos que $\phi^{-1}(P)$ es primo.

Tomese $ab \in \phi^{-1}(P)$. Entonces si miramos la imagen en el homomorfismo, vemos que $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b) \in P$. Como p es primo entonces tenemos o que $\phi(a) \in P$ o $\phi(b) \in P$. Pero esto a su vez implica que $\phi^{-1}(\phi(a)) \subset \phi^{-1}(P)$ o $\phi^{-1}(\phi(b)) \subset \phi^{-1}(\phi(b))$. Además tenemos que $a \in \phi^{-1}(\phi(a))$ y respectivamente para b por lo que concluimos que $\phi^{-1}(P)$ es primo o es todo R.

Supongamos que R es un subanillo de S y ϕ es el homomorfismo de inclusin y tomemos P un ideal primo de S. Entonces por definicin, $\phi^{-1}(P)$ es $P \cap R$. Por lo demostrado anteriormente $P \cap R$ es primo en R o es todo R. $\square$

(b) Pruebe que si M es un ideal maximal de S y ϕ es sobreyectivo entonces $\phi^{-1}(M)$ es un ideal maximal de R. De un ejemplo para mostrar que este no es necesariamente el caso si ϕ no es sobreyectivo.

Demostración. Tenemos que S/M es un campo. Entonces tomamos el homomorfismo natural $\pi : S \mapsto S/M$. Este homomorfismo es sobreyectivo. Entonces la composición $\pi \circ \phi$ es un homomorfismo sobreyectivo de R a S/M. Además tenemos que el kernel de esta composición es $\phi^{-1}(M)$. Por el primer teorema del isomorfismo tengo que $R/ker\pi \circ \phi$ es isomorfo a S/M por lo que también seria un campo y por lo tanto $\phi^{-1}(M)$ es maximal.

El siguiente ejemplo fue propuesto por Santiago Cortes y Nicolas Jaramillo

Para demostrar que si ϕ no es sobreyectivo entonces $\phi^{-1}(M)$ no es necesariamente maximal. Tomemos $\phi : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Q}$ el homomorfismo dado por inclusión. Como $\mathbb{Q}$ es un campo, tenemos que los únicos ideales son $\mathbb{Q}$ o $\{0\}$. Y por lo tanto el único ideal maximal es $\{0\}$. Pero tenemos que $\phi^{-1}(\{0\}) = \{0\}$. Y claramente en $\mathbb{Z}$, $\{0\}$ no es maximal, pues cualquier ideal de la forma $n\mathbb{Z}$ lo contiene $\square$

Sección 7.4 30. Sea I un ideal del anillo conmutativo R y defina

$$\text{rad } I = \{r \in R \mid r^n \in I \text{ para algún } n \in \mathbb{Z}^+\}$$

llamado el radical de I. Pruebe que rad I es un ideal que contiene a I y que (rad $I)/I$ es el nilradical del anillo cociente R/I, i.e., (rad $I)/I = \mathfrak{N}(R/I)$.

Demostración. Claramente $I \subseteq$ rad I porque cualquier $i \in I$ se puede expresar como i^1. Ahora que rad I sea un ideal se puede demostrar por medio de la fórmula binomial. Sean $r, s \in$ rad I. Entonces existen $n, m \in \mathbb{Z}^+$ tales que $r^n = s^m = 0$. Ahora tomemos $(r-s)^{n+m}$. Por la formula binomial

$$(r-s)^{n+m} = \sum_{i=0}^{n+m} \binom{n}{i} r^i (-s)^{n+m-i}$$

Ahora obsérvese que para todo i, $0 \leq i \leq n+m$. se tiene que $i \geq n$ o $n+m-i \geq m$. Por lo tanto, todos los términos pertenecen a I. Por otra parte, tomese $r \in$ rad I y $s \in R$, entonces si $r^n \in I$, tenemos que $(rs)^n = r^n s^n \in I$ por lo que concluimos que rad I es un ideal.

Tomemos π el homomorfismo natural de R a R/I y veamos que es $\pi(\text{rad } I)$. Tomemos un $r \in$ rad I, entonces tenemos que $r^n \in I$ para algún $n \in \mathbb{Z}^+$. Entonces tenemos que $\pi(r^n) = 0$. Y como π es un homomorfismo $\pi(r)^n = 0$. Es decir que todo $\pi(r)$ es un elemento nilpotente de R/I por lo que concluimos que $\pi(\text{rad } I)\mathfrak{N}(R/I)$. Para mostrar la otra contenencia tomemos un elemento $s \in \mathfrak{N}(R/I)$. Por definición tenemos que $s^n = 0$ para algun $n \in \mathbb{Z}^+$. Ahora si tomamos $\pi^{-1}(s)$, concluimos que para cualquier $s' \in \pi^{-1}(s)$ se cumple que $s'^n \in I$. Luego $\pi^{-1}(s) \in\subseteq$ rad I. Y por lo tanto $\pi(pi^{-1}(s)) = s \in \pi(\text{rad } I)$. Esto demuestra que $\mathfrak{N}(R/I) = \pi(\text{rad } I)$ A su vez esto demuestra por el teorema de la correspondencia que rad I es un ideal pues $\mathfrak{N}(R/I)$ es un ideal de (R/I) y por lo tanto podemos expresar $\pi(\text{rad } I) =$ (rad $I)/I$. (Otra forma de demostrar que rad I es un ideal). $\square$

Sección 7.4 32. Sea I un ideal de un anillo conmutativo R y defina

Jac I como la intersección de todos los ideales maximales de R que contienen a I

donde la convención es que Jac $R = R$. (Si I es el ideal zero, Jac 0 se llama el *radical de Jacobson*) del anillo R, de tal manera que Jac I es la preimagen en R del radical de Jacobson de R/I.)

(a) Pruebe que Jac I es un ideal de R que contiene a I.

Demostración. Por la definición de Jac I sabemos que es una intersección de ideales que contienen a I. Por un teorema sabemos que la intersección de ideales es un ideal. Y además como todos los ideales contienen a R la intersección contiene a R. □

(b) Pruebe que rad $I \subseteq$ Jac I, donde rad I es el radical de I definido en el Ejercicio 30.

Demostración. Vamos a demostrar que rad $I \subseteq \bigcap_{\alpha \in I} P_\alpha$ donde $\{P_\alpha\}$ son los ideales primos de R que contienen a Jac I. A su vez este conjunto esta contenido en Jac I, pues los ideales maximales que contienen a I también son primos. Ahora tomese $r \in$ rac I. Por definición, existe $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $r^n \in I$. Si $n = 1$ entonces $r \in I \subseteq \bigcap_{\alpha \in I} P_\alpha$ para todo P_α. Ahora si $n > 1$, tenemos que r^n pertenece a P_α para todo P_α. Por la propiedad de ideales primos tenemos que $r \in P_\alpha$ o que $r^{n-1} \in P_\alpha$. Si suponemos que el primero no se cumple entonces podemos repetir el proceso para r^{n-1} y si lo hacemos $n-2$ llegaremos a r^2 donde tendremos que concluir que $r \in P_\alpha$. Finalmente esta en todos los P_α está en la intersección. Esto demuestra que rad I esta contenido en jac I. □

(c) Sea $n > 1$ un entero. Describa Jac $n\mathbb{Z}$ en términos de la factorización en primos de n.

Demostración. Primero demostramos que en el anillo $\mathbb{Z}$ todos los ideales son principales. Primero empezamos observando que un ideal debe ser un subgrupo aditivo y en $\mathbb{Z}$ todos los subgrupos aditivos son de la forma $n\mathbb{Z}$. Además cualquier $n\mathbb{Z}$ es un ideal porque es el generado por un elemento de n.

Ahora para probar que $p\mathbb{Z}$ son los ideales máximales tomemos $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Este es un dominio integral y además es finito, entonces por lo demostrado en clase tenemos que es un campo. Por lo tanto $p\mathbb{Z}$ es máximal y por lo tanto primo también. Si tomamos un n que no sea primo entonces existe un divisor primo que lo divide. Entonces, en $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ la clase de p sería un divisor de 0. Por lo tanto, $n\mathbb{Z}$ no sería ni primo ni máximal.

Para este punto utlizamos las demostraciones de que en $\mathbb{Z}$ todos los ideales primos son de la forma $p\mathbb{Z}$ y que a su vez estos son todos los ideales maximales de $p\mathbb{Z}$. Entonces si p es un primo tal que p divide a n tenemos que $p\mathbb{Z}$ es un ideal maximal que contiene a $n\mathbb{Z}$. Por lo tanto, si $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n}$ entonces Jac $n\mathbb{Z} = \bigcap_{i=1}^n p_i\mathbb{Z}$. Pero a su vez tenemos que la intersección de ideales comaximales es igual a la multiplicación. Luego Jac $n\mathbb{Z} = \prod_{i=1}^n p_i\mathbb{Z}$ □

Sección 7.4 33. Sea R el anillo de todas la funciones continuas del intervalo cerrado $[0,1]$ a $\mathbb{R}$ y para cada $c \in [0,1]$ sea $M_c = \{f \in R | f(c) = 0\}$.

(a) Pruebe que si M es cualquier ideal maximal de R entonces hay un número real $c \in [0,1]$ tal que $M = M_c$.

Demostración. Sea M una función máximal en nuestro anillo. Ahora para cualquier función $f \in M$, definimos el conjunto $A_f := \{x \in [0,1] \mid f(x) = 0\}$. Este conjunto es cerrado porque f es continua y el conjunto sería la preimagen de un conjunto cerrado en $\mathbb{R}$. ($\{0\}$ y en general cualquier singleton es cerrado en $\mathbb{R}$ y por lo tanto en $[0,1]$). Entonces por el teorema de Heine-Borel concluimos que A_f es compacto.

Primero demostramos que A_f no es vacío. Si lo fuera significa que la función f es invertible con respecto a la multiplación. Entonces la función $1/f$ existe en R. Y por lo tanto $1/f * f = 1 \in M$. Esto implica que $M = R$ que contradice el hecho que M es un ideal máximal.

Ahora demostramos que la intersección finita de conjuntos de la forma A_f no es vacía. Supongamos por contradicción que existen funciones $f_1 \cdots f_n$ tales que $A_{f_1} \cap \cdots \cap A_{f_n} = \emptyset$. Entonces yo puedo construir una función $f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)^2$, tal que esta función de nuevo es invertible con respecto a multiplicación y de nuevo llegamos a la contradicción anterior. En efecto, tomese cualquier $x \in [0,1]$. Si $x \notin \bigcup_{i=1}^{n} A_{f_i}$ entonces todos los f_i cumplen que $f_i(x) > 0$. Si $x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_{f_i}$ sabemos que $f_i(x)^2 \geq 0$. Pero además por nuestra suposición que la intersección es vacía, existe algun f_i tal que $f_i(x)^2 > 0$. Por lo que $f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)^2 > 0$.

Entonces por compacidad si las intersecciones finitas son no vacías entonces la intersección $\bigcap_{f \in M} A_f$ no es vacía. Por lo tanto, podemos tomar un c en la intersección y entonces todos las funciones se anulan en c. Por lo tanto, $M \subseteq M_c$ pero como M es máximal se concluye que $M = M_c$. □

(b) Pruebe que si b y c son puntos distintos en $[0,1]$ entonces $M_b \neq M_c$.

Demostración. Tomese la función $f(x) = x - c$. Claramente f es continua y se anula en c por lo que $f \in M_c$ pero f no se anula en d por lo que $f \notin M_d$. Concluimos que $M_c \neq M_d$. □

(c) Pruebe que M_c no es igual al ideal principal generado por $x - c$.

Demostración. Tomese la función $|x-c|$. Si suponemos que $|x-c|$ esta en nuestro ideal entonces la función $|x-c|/(x-c)$ seria continua. Pero este no es el caso. ($|x-c|/(x-c)$ sería la función definida a trozos como 1 si $x \geq c$ y -1 si $x < c$ que no es continua) □

(d) Pruebe que M_c no es un ideal generado finitamente.

Demostración. La idea es demostrar que se puede construir un f a partir de los $f's$ que supuestamente generan el maximal, que no pueda ser generado por multiplicaciones y sumas de mis funciones.

La siguiente demostración fue tomada de la siguiente página de internet:

`https://crazyproject.wordpress.com/2010/10/04/characterization-of-maximal-ideals-in-the-ring-of-all-continuous-real-valued-functions-on-01/`

Supongamos que M_c es finitamente generado entonces existen $f_1 \cdots f_n$ tales que $M_c = \sum_{i=0}^{n} f_i R$. Se puede construir la función $f(x) = \sum_{i=0}^{n} |f_i(x)|$, y se puede demostrar que la función $\sqrt{f(x)}$es tal que pertenece a M_c pero no pertenece al generado por las funciones $f_1 \cdots f_n$.

Si suponemos por contradicción que si pertenece entonces existen $r_1 \cdots r_n$ tales que $f(x) = \sum_{i=1}^{n} r_i(x) f_i(x)$.

Entonces podemos definir la función $r(x) = \sum_{i=1}^{n} |r_i(x)|$. Tenemos que

$$\sqrt{f(x)} = \sum_{i=1}^{n} r_i(x) f_i(x) \leq \sum_{i=1}^{n} |r_i(x)||f_i(x)| \leq r(x)f(x).$$

Obsérvese que para todo $b \neq c$ se tiene que existe un f_i tal que $f_i \neq 0$. De lo contrario, tendriamos que $h(b) = 0$ para todo $h \in M_c$ pero tenemos que $x - c \in M_c$ y claramente no es 0 en b.

Por lo anterior tenemos que $1/\sqrt{f(x)}$ esta definido en todo $x \neq c$ y es tal que $r(x) > \sqrt{f(x)}$. Además vemos que $\sqrt{f(x)} \mapsto 0$ cuando $x \mapsto c$ por lo que $1/\sqrt{f(x)}$ no estaria acotada y por lo tanto tampoco $r(x)$. Esto contradice la existencia de los r_i porque todas las funciones en el anillo estan acotadas, pues como son funciones continuas desde un compacto, tenemos un teorema de análisis que nos dice que estas funciones siempre tienen mínimo y máximo. Concluimos que M_c no puede ser finitamente generado. □