Algebra Abstracta: Tarea #8

Jonathan Andrés Niño Cortés

26 de marzo de 2015

Sección 13.1 1. Muestre que $p(x) = x^3 + 9x + 6$ es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$. Sea θ una raíz de $p(x)$. Encuentre el inverso de $1 + \theta$ en $\mathbb{Q}(\theta)$.

Demostración. La irreducibilidad de este polinomio esta dada por el criterio de Einsenstein tomando el primo 3.

Ahora podemos escribir cualquier elemento de $\mathbb{Q}(\theta)$ como $a\theta^2+b\theta+c$. Entonces queremos encontrar los coeficientes a, b y c tales que

$$(a\theta^2 + b\theta + c)(1 + \theta) = 1$$

Desarrollando esta expresión obtenemos

$$a\theta^2 + b\theta + c + a\theta^3 + b\theta^2 + c\theta = 1$$

Pero como θ es raíz de nuestro polinomio tenemos que $\theta^3 + 9\theta + 6 = 0$, es decir que $\theta^3 = -9\theta - 6$. Por lo tanto la expresión queda como

$$\begin{aligned} a\theta^2 + b\theta + c + a(-9\theta - 6) + b\theta^2 + c\theta^2 &= 1 \\ (a + b)\theta^2 + (-9a + b + c)\theta + (-6a + c) &= 1 \end{aligned}$$

De aqui obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} a + b &= 0 \\ -9a + b + c &= 0 \\ -6a + c &= 1 \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones obtenemos la solución $a = 1/4$, $b = -1/4$ y $c = 5/2$. Por lo tanto, $1/4\theta^2 - 1/4\theta + 5/2$ es el inverso de $\theta + 1$. $\square$

Sección 13.1 4. Pruebe directamente que el mapa $a+b\sqrt{2} \mapsto a-b\sqrt{2}$ es un isomorfismo de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ consigo mismo.

Demostración. Sea ϕ el mapa anterior que claramente esta bien definido. Probemos primero que preserva la suma

$$\phi(a+b\sqrt{2}+c+d\sqrt{2}) = a+c-(b\sqrt{2}+d\sqrt{2}) = a-b\sqrt{2}+c-d\sqrt{2} = \phi(a+b\sqrt{2})+\phi(c+d\sqrt{2})$$

Ahora probemos que preserva la multiplicación

$$\phi(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})) = ac+2bd-(ad+bc)\sqrt{2} = (a-b\sqrt{2})(c-d\sqrt{(2)}) = \phi(a+b\sqrt{2})\phi(c+d\sqrt{2})$$

Ahora para probar que este homomorfismo solo basta probar que es diferente de 0. Y esto se puede ver porque $\phi(1) = 1 \neq 0$.

Finalmente es sobreyectiva porque para cualquier $a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ tenemos que $\phi(a - b\sqrt{2}) = a + b\sqrt{2}$. $\square$

Sección 13.2 3. Determine el polinomio minimal sobre $\mathbb{Q}$ del elemento $1 + i$.

Demostración. Si extendemos el campo a $\mathbb{C}$ tenemos que $x-1-i$ es un polinomio irreducible cuya raíz es la buscada. Si multiplicamos por el polinomio irreducible correspondiente al conjugado obtenemos

$$(x-1-i)(x-1+i) = x^2 - x + ix - x + 1 - i - ix + i + 1 = x^- 2x + 2$$

obtenemos un polinomio mónico cuyos coeficientes estan en $\mathbb{Q}$ y que además es irreducible por el criterio de Einsenstein tomando $p = 2$. Por lo tanto este polinomio es el polinomio minimal asociado a $1 + i$. $\square$

Sección 13.2 10. Determine el grado de la extensión $\mathbb{Q}(\sqrt{3+2\sqrt{2}})$ sobre $\mathbb{Q}$.

Demostración. El punto anterior da la clave para resolver este ejercicio. Podemos demostrar que $\sqrt{3+2\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$.

En efecto, $(1+\sqrt{2})^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 3 + \sqrt{2}$, de donde se deduce la afirmación anterior al sacar raices a ambos lados.

Por lo tanto el polinomio mínimal asociado a $1 + \sqrt{2}$ es

$$\begin{aligned} x - 1 - \sqrt{2} &= 0 \\ x - 1 &= \sqrt{2} \\ x^2 - 2x + 1 &= 2 \\ x^2 - 2x - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Este ultimo es el polinomio minimal pues es irreducible en $\mathbb{Q}$. Para demostrar esto podemos extendernos al campo $\mathbb{R}$ donde este polinomio se descompone como $(x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2})$. Esta descomposición es única porque $\mathbb{R}[x]$ es un D.F.U. Por lo tanto, vemos que este polinomio no tiene raices en los racionales y como es de grado dos esto es lo único que basta para demostrar su irreducibilidad. Concluimos que la extensión es de grado 2.

$\square$

Sección 13.2 14. Pruebe que si $[F(\alpha):F]$ es impar entonces $F(\alpha)=F(\alpha^2)$.

Para demostrar esto primero hacemos la siguiente observación. Si $\beta\in F(\alpha)$ entonces $F(\beta)\subseteq F(\alpha)$. Esto es por simple definición porque $F(\beta)$ es la mínima extensión de campo que contiene a β y si ya esta contenida en la expansión de campo de α entonces la extensión de β debe ser igual o menor a la de α.

Como claramente $\alpha^2\in F(\alpha)$ porque es la multiplicación de dos elementos en el campo concluimos que $F(\alpha^2)\subseteq F(\alpha)$.

Para el otro lado vamos a demostrar que $\alpha\in F(\alpha^2)$. Para esto necesitamos la suposición que $n=[F(\alpha):F]$ es impar, es decir que existe $k\in\mathbb{Z}_{>0}$ tal que $n=2k-1$. Ahora esto es equivalente a que existe un polinomio en $F[x]$ irreducible de grado n tal que α es raíz.

Entonces tenemos la siguiente expresión $(\alpha^2)^k=\alpha\alpha^n$.

Ahora sea $x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ el polinomio minimal de α. Como es irreducible tenemos que a_0 es diferente de 0 o de lo contrario sería divisible por x. Como α es raiz de aqui deducimos que $\alpha^n=-(a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_1\alpha+a_0)$. Reemplazando esto en la primera expresión obtenemos que $(\alpha^2)^k=-\alpha(a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_0)=-(a_{n-1}\alpha^n+a_{n-2}\alpha^{n-1}\cdots+a_1\alpha^2+a_0\alpha)$. Pero además podemos reescribir los n en términos de k para obtener la expresión $(\alpha^2)^k=-(a_{n-1}\alpha(\alpha^2)^{k-1}+a_{n-2}(\alpha^2)^{k-1}\cdots+a_1\alpha^2+a_0\alpha)$. Entonces podemos factorizar α de los términos impares y obtener la expresión

$\alpha(a_{n-1}(\alpha^2)^{k-1}+\cdots+a_0)=-((\alpha^2)^k+a_{n-2}(\alpha^2)^{k-1}\cdots+a_1\alpha^2)$

Podemos pasar el término que multiplica a α por cero porque es diferente de 0 pues $a_0\neq 0$. Por lo tanto

$$\alpha=-\frac{(\alpha^2)^k+a_{n-2}(\alpha^2)^{k-1}\cdots+a_1\alpha^2}{a_{n-1}(\alpha^2)^{k-1}+\cdots+a_0}$$

Por lo tanto logramos escribir α como suma, multiplicación y división de elementos en $F(\alpha^2)$. Concluimos que $F(\alpha)\subseteq F(\alpha^2)$ y esto era lo que nos faltaba para concluir la igualdad.

Sección 13.2 20. Muestre que si la matriz de la transformación lineal "multiplicación por αçonsiderada en el ejercicio anterior es A entonces α es una raíz del polinomio caracteristico para A. Use este procedimiento para obtener el polinomio mónico de grado 3 satisfecho por $\sqrt[3]{2}$ y por $1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$.

Demostración. Para probar esto vamos a utilizar el teorema de Calley-Hamilton. Este teorema indica que si P_f es el polinomio característico entonces $P_f(f)=0$. En este caso $f=\alpha Id$. Por lo tanto que $P_f(f)=0$ equivale a que $P_f(\alpha)=0$, es decir, que α es una raíz del polinomio.

Para la segunda parte del problema necesitamos calcular las matrices asociadas a multiplicar por $\sqrt[3]{2}$ y por $1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$, respectivamente. Esto se hace calculando las transformaciones de los vectores canónicos $1,\alpha$ y α^2. Para el primer caso la matriz va a ser

$$\begin{pmatrix}0&0&2\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

Y el polinomio característico para esta matriz es t^3-2 que es precisamente el polinomio minimal de $\sqrt[3]{2}$.

Para el segundo caso la matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Y el polinomio caracteristico calculado es $t^3 - 3t^2 - 3t - 1$ que tiene como raíz a $1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$. $\square$