# Algebra Abstracta: Tarea #7

Jonathan Andrés Niño Cortés

26 de marzo de 2015

**Sección 10.2 4.** Sea $A$ cualquier $\mathbb{Z}$-módulo, sea $a$ cualquier elemento de $A$ y sea $n$ un entero positivo. Pruebe que el mapa $\varphi_a : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to A$ dado por $\varphi(\overline{k}) = ka$ es un homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos si y solo $na = 0$. Pruebe que $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, A) \cong A_n$, donde $A_n = \{a \in A \,|\, na = 0\}$ (de tal manera que $A_n$ es el aniquilador en $A$ del ideal $(n)$ de $\mathbb{Z}$).

*Demostración.* Una dirección es sencilla. Si suponemos que $an \neq 0$, entonces $\varphi_a$ no estaría bien definida. Por ejemplo, tenemos que $\overline{0} = \overline{n}$, pero $\varphi_a(\overline{n}) = an \neq 0 = \varphi_a(\overline{0})$, por lo que la función no esta bien definida.

Para la otra dirección supongase que $an = 0$. En primer lugar $\varphi_a$ esta bien definida. Si $\overline{x} = \overline{y}$ entonces $x = y + nk$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Luego $\varphi_a \overline{x} = xa = (y + nk)a = ya + nka = ya + k0 = ya = \varphi_a(\overline{y})$.

Finalmente, para probar que es un homomorfismo nótese que para todo $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ y para cualquier $r \in \mathbb{Z}$ tenemos que $\varphi_a(r\overline{x} + \overline{y}) = (\varphi_a(\overline{rx + y})) = (rx + y)a = rxa + ya = r\varphi_a(\overline{x}) + \varphi_a(\overline{y})$.

Ahora para probar que $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, A) \cong A_n$ vamos a demostrar que $\psi : \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, A) \to A_n$ tal que $\psi(\phi) = \phi(\overline{1})$ es un homomorfismo biyectivo.

Primero obsérvese que para cualquier homomorfismo $\phi$ entre $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ y $A$ tenemos que $\phi(\overline{1}) \in A_n$. Esto se debe a que $n\phi(\overline{1}) = \phi(n\overline{1}) = \phi(\overline{n}) = 0$. Por lo tanto se puede ver que la función esta bien definida.

Ahora para probar que es un homomorfismo nótese que $\psi(r\phi_1 + \phi_2) = (r\phi_1 + \phi_2)(\overline{1}) = r\phi_1(\overline{1}) + \phi_2(\overline{1}) = r\psi(\phi_1) + \psi(\phi_2)$.

Para probar que es inyectivo, observese que si $\phi_1(\overline{1}) = \phi_2(\overline{1})$, entonces $\phi_1(\overline{x}) = \phi_1(x\overline{1}) = x\phi_1(\overline{1}) = x\phi_2(\overline{1}) = \phi_2(\overline{x})$, por lo que los dos homomorfismos serían iguales.

Por último, $\psi$ es sobreyectiva por la primera parte de la demostración pues para cualquier $a \in A_n$ $\phi_a$ es un homomorfismo tal que $\phi_a(\overline{1}) = 1a = a$.

□

**Sección 10.2 8.** Sea $\varphi : M \to N$ un homomorfismo de $R$-módulos. Pruebe que $\varphi(\operatorname{Tor}(M)) \subseteq \operatorname{Tor}(N)$.

*Demostración.* Tome un elemento $a = \varphi(b) \in \varphi(\operatorname{Tor}(M))$. Entonces por definición tenemos que existe $r \in R$ distinto de 0 tal que $rb = 0$. Entonces si tomamos $ra = r\varphi(b) = \varphi(rb) = \varphi(0) = 0$, por lo que $a \in \operatorname{Tor}(N)$. □

**Sección 10.3 10.** Asuma que $R$ es conmutativo. Muestre que un $R$-módulo es irreducible si y sólo si $M$ es isomórfico (como un $R$-módulo) a $R/I$ donde $I$ es un ideal máximal de $R$. [Por el ejercicio previo, si $M$ es irreducible entonces hay un mapa natural $R \to M$ definido por $r \to rm$, ,donde $m$ es cualquier elemento no cero fijo de $M$].

*Demostración.* Para una dirección supongase que $M$ es isomorfo a $R/I$ (como submódulo) donde $I$ es un ideal máximal. Vamos a demostrar que si $N \leq R/I$ entonces $N$ debe ser un ideal de $R/I$. Que es un subgrupo aditivo ya esta dado por la definición de sub-módulo. Además, si tomamos cualquier $r+I \in R/I$ y cualquier $n+I \in N$ vemos que $(r+I)(n+I) = rn + I$, pero como $r \in R$ y $N$ es submódulo concluimos que $r(n+I) = rn + I \in N$. Por lo tanto, $N$ es un ideal. Pero si $I$ es máximal entonces $R/I$ sería un campo y en un campo el único ideal propio es $\{0\}$. Por lo tanto, $M$ es irreducible.

Ahora para probar la otra dirección suponga que $R$ es irreducible. Por el punto anterior si fijamos un elemento no cero $m \in M$, tenemos que existe un homomorfismo natural $\phi : R \to M$ tal que $r \mapsto rm$. Este homomorfismo se puede ver como un homomorfismo de submódulos. Es sobreyectivo porque $M = Rm$. Entonces por el primer teorema del isomorfismo $M \cong R/\ker(\phi)$. Pero además tenemos que $\ker(\phi)$ debe ser máximal. Si no lo fuera entonces existiria algún ideal propio de $R$, $K$ tal que $\ker(\phi) \subsetneq K$. Pero $K$ es un submódulo de $R$ visto como $R$-módulo. Entonces por el teorema de la correspondencia existiría un submódulo propio $K'$ de $M$ tal que $\{0\} \subsetneq K'$. Lo que contradice el hecho que $M$ sea irreducible. $\square$

**Sección 10.3 18.** Sea $R$ un dominio de ideales principales y sea $M$ un $R$-módulo que es aniquilado por el ideal propio no cero $(n)$. Sea $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ la factorización única de $a$ en potencias de primos distintas en $R$. Sea $M_i$ el aniquilador de $p_i^{\alpha_i}$ en $M$, i.e., $M_i$ es el conjunto $\{m \in M \mid p_i^{\alpha_i} m = 0\}$ — llamado el *componente $p_i$-primario de $M$*. Pruebe que

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_k.$$

*Demostración.* Primero probemos que la suma directa da todo el módulo.

Tome cualquier $m \in M$. Sabemos que $(p_1^{\alpha_1})$ y $(p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k})$ son comáximales. Entonces existe $a, b$ tales que $a \in (p_1^{\alpha_1})$ y $b \in (p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k})$ y $a + b = 1$. Luego $m = (a+b)m = am + bm$. Y tenemos que $bm = sp_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} m$ por lo que al multiplicar por $p_1^{\alpha_1}$, $bm = snm = s0 = 0$, es decir que $bm \in M_1$. Además podemos encontrar $c$ y $d$ tales que $c \in (p_2^{\alpha_2})$ y $d \in (p_3^{\alpha_3} \cdots p_{j-1}^{\alpha_{j-1}} \cdots p_k^{\alpha_k})$ y $c + d = 1$. Luego $am = (c+d)(am) = cam + dam$ y tenemos que $dam \in M_2$ pues $p_2^{\alpha_2} dam = rr'nm = rr'0 = 0$. Repitiendo este proceso $n$ veces obtendremos $n+1$ términos donde los primeros $n$ términos perteneces a cada $M_i$. Sin enmbargo el ultimo término es de la forma $ace \cdots xm$ y como ya se se recorrieron todos las potencias de primos concluimos que $ace \cdots x \in (a)$ luego este último término es igual a 0.

Ahora probemos que cumple las condiciones para que sea una suma directa.

Ahora es facíl ver que $M_1 \oplus \cdots \oplus M_{j-1} \oplus M_{j+1} \oplus \cdots \oplus M_k$ es aniquilado por $(p_1^{\alpha_1} \cdots p_{j-1}^{\alpha_{j-1}} \cdots p_k^{\alpha_k})$. Como $(p_i^{\alpha_i})$ y $(p_1^{\alpha_1} \cdots p_{j-1}^{\alpha_{j-1}} \cdots p_k^{\alpha_k})$ son comáximales tenemos que existe $a \in (p_i^{\alpha_i})$ y $b \in (p_1^{\alpha_1} \cdots p_{j-1}^{\alpha_{j-1}} \cdots p_k^{\alpha_k})$ elementos tales que $a + b = 1$. Luego $m = (a+b)m = am + bm = rp_j^{\alpha_j} m + sp_1^{\alpha_1} \cdots p_{j-1}^{\alpha_{j-1}} \cdots p_k^{\alpha_k} m$ que es igual por nuestra suposición a $r(0) + s(0) = 0$.

$\square$

**Sección 12.1 13.** Si $M$ es un módulo finitamente generado sobre el Dominio de Ideales Principales $R$, describa la estructura de $M/\mathrm{Tor}(M)$.

*Demostración.* Este es precisamente el componente libre de $M$. Por la primera parte del teorema fundamental probada en esta sección tenemos que $M \cong R^n \oplus \mathrm{Tor}(M)$. Entonces por el segundo teorema del isomorfismo tenemos que $M \cong R^n \oplus \mathrm{Tor}(M)/\mathrm{Tor}(M) \cong R^n/(R^n \cap \mathrm{Tor}(M))$. Pero $R^n \cap \mathrm{Tor}(M) = \{0\}$ porque la suma es directa. Luego $R^n/(R^n \cap \mathrm{Tor}(M) \cong R^n/\{0\} \cong R^n$. □

**Sección 12.1 14.** Sea $R$ un D.I.P. y sea $M$ un $R$-módulo de torsión. Pruebe que $M$ es irreducible si y sólo si $M = Rm$ para cualquier elemento no cero $m \in M$ donde el aniquilador de $m$ es un ideal primo no cero $(p)$.

*Demostración.* Una dirección esta dada por el Punto 3 de esta tarea. Si $M$ es irreducible entonces es isomorfo a $R/I$ para algún ideal $I$ máximal de $R$. Además como $I$ máximal es primo y como estamos en un D.I.P. tenemos que $I = (p)$, donde $p$ es un elemento primo de $R$. Además vemos que $(p)$ es el anulador de $M$. Entonces si tomamos cualquier $m \in M$ distinto de 0 vemos que $Rm = M$. Si ese no fuera el caso entonces tendriamos que $Rm \subsetneq M$ y $Rm$ es diferente al submódulo trivial porque $m = 1m \in Rm$, por lo que $M$ no sería irreducible.

Para la otra dirección si tomamos cualquier $m$ diferente a 0 tenemos un homomorfismo sobreyectivo natural entre $R$ y $Rm = M$. Además claramente el kernel de este homomorfismo es por definición el anulador de $m$, que es igual a $(p)$. Pero como $(p)$ es primo es máximal y entonces por el primer teorema del isomorfismo $M \cong R/(p)$. Luego por el tercer punto $M$ es irreducible. Luego $M \cong R/(p)$ y como $p$ es primo y estamos en un D.I.P concluimos que $(p)$ es máximal. Entonces por el punto 3 $M$ es irreducible. □