Álgebra Lineal II: Taller

Jonathan Niño

6 de abril de 2015

Para esta tarea, utilizamos las siguientes definiciones:

Definición 0.1. Decimos que f es *semi-simple* si para todo $V_1 \leq V$ invariante bajo f existe $V_2 \leq V$ invariante bajo f tal que $V = V_1 \oplus V_2$.

Definición 0.2. El *polinomio minimal* de f, $P_{f,\text{mín}}(t) \in K[t]$ es el polinomio de menor grado tal que $P_{f,\text{mín}}(f) = 0$

Ejercicio 1. Demuestre que el polinomio minimal divide al polinomio característico. (*Ayuda*: usando el algoritmo de la división, divida el polinomio característico por el polinomio minimal para obtener un residuo y verifique que este es igual a cero.)

Demostración. Dividiendo $P_f(x)$ por $P_{f,min}(x)$ obtenemos dos polinomios $Q(x)$ y $R(x)$ tales que

$$P_f(x) = Q(x)P_{f,min}(x) + R(x)$$

y $deg(R) < deg(P_{f,min})$.

Ahora si evaluamos estos polinomios tenemos que $P_f(f) = 0$ por el teorema de Calley-Hamilton y $P_{f,min} = 0$ por la definición del polinomio minimal. Concluimos por lo tanto que $R(f) = 0$. Entonces para no contradecir la minimalidad del polinomio minimal concluimos que $R(x) = 0$. Por lo tanto, el polinomio característico es un múltiplo del polinomio minimal. □

Ejercicio 2. Sea $\lambda \in K$ y defina $f \in \mathrm{Hom}_K(K^2, K^2)$ por:

$$f(x, y) = (\lambda x + y, \lambda y)$$

Verifique que f no es semi-simple. Encuentre el polinomio minimal de f

Solución La matriz asociada a esta transformación es

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Y el polinomio característico se calcula como

$$\begin{vmatrix} t-\lambda & -1 \\ 0 & t-\lambda \end{vmatrix} = (t-\lambda)^2$$

.

Por el punto anterior, el polinomio minimal en este caso puede ser $t-\lambda$ o $(t-\lambda)^2$. Pero para descartar el primer caso podemos tomar por ejemplo el vector $(0,1)$. Tenemos que $(f-\lambda Id)(0,1) = (1,\lambda)-(0,\lambda) = (1,0) \neq (0,0)$. Por lo tanto, el polinomio minimal es $(t-\lambda)^2$.

Para demostrar que nos es semi-simple podemos tomar el espacio generado por $(1,0)$ que es invariante pues para cualquier $(a,0)$ tenemos que $f(a,0) = (a\lambda, 0) \in Sp((1,0))$. Ahora cualquier otro espacio tal que su suma directa sea todo K^2 es de la forma $Sp((x,y))$ con $y \neq 0$. Entonces tenemos que $f(ax,ay) = (ax\lambda + ay, ay\lambda)$ que no se encuentra en $Sp(x,y)$ porque $ay \neq 0$. Concluimos que f no es semi-simple.

Ejercicio 3. Sea $\lambda \in K$ y defina $f \in \mathrm{Hom}_K(K^2, K^2)$ por:

$$f(x,y) = (\lambda x, \lambda y)$$

Encuentre el polinomio minimal de f. Verifique que f es semi-simple.

Solución

Esta transformación es precisamente multiplicación por λ, es decir, $f = \lambda Id$. El polinomio característico de esta transformación es el mismo que el anterior $(t-\lambda)^2$ pero en este caso el polinomio minimal si es $t-\lambda$. Esto porque $f - \lambda Id = \lambda Id - \lambda Id = 0$. Esta transformación es semi-simple porque cualquier subespacio V es invariante, pues $f(V) = \lambda V \subseteq V$. Luego si tomamos cualquier espacio invariante V podemos encontrar otro espacio invariante U utilizando extensión de bases por ejemplo tal que $U \oplus V = K^2$ y U también es invariante por lo anterior.

Ejercicio 4. Considere los operadores $g, h \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$ definidos por:

$$g(x,y,z,w) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}w, \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1}{2}z, -\frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}z, -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}w\right)$$

$$h(x,y,z,w) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}z, \frac{\sqrt{3}}{2}y + z - \frac{1}{2}w, \frac{1}{2}x - y + \frac{\sqrt{3}}{2}z, -\frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}w\right)$$

y los operadores $g_{\mathbb{C}}$ y $H_{\mathbb{C}} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^4, \mathbb{C}^4)$ dadas por las mismas fórmulas.

1. Verifique que g y h no tiene valores propios y que los valores propios de $g_{\mathbb{C}}$ y $h_{\mathbb{C}}$ son $\lambda = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i-)$ y $\bar{\lambda} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}-i)$.

2. Verifique que si $u+iv$, con $u, v \in \mathbb{R}^4$, es un vector propio de $g_{\mathbb{C}}$ asociado a λ, entonces $u - iv$ es un vector propio de $g_{\mathbb{C}}$ asociado a $\bar{\lambda}$

3. Encuentre una base de Jordan para $g_{\mathbb{C}}$ y para $h_{\mathbb{C}}$ de la forma $T = \{u_1 + iv_1, u_2 + iv_2, u_1 - iv_1, u_2 - iv_2\}$

4. Usando la notación de los vectores en el numeral anterior, encuentre la representación matricial de g y h relativas a la base $S = \{u_1, -v_1, u_2, -v_2\}$
5. Encuentre los polinomios minimales de g y h

Solución

1. La matriz asociada al operador g es

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Y el polinomio característico de g es

$$\begin{vmatrix} t-\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & t-\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & t-\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & t-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} = (t-\frac{\sqrt{3}}{2}) \begin{vmatrix} t-\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & t-\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & t-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix}$$

$$-(-\frac{1}{2}) \begin{vmatrix} 0 & t-\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & t-\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = (t-\frac{\sqrt{3}}{2})^2 \begin{vmatrix} t-\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & t-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} + (\frac{1}{2})^2 \begin{vmatrix} t-\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & t-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix}$$

$$= (t-\frac{\sqrt{3}}{2})^2((t-\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2) + (\frac{1}{2})^2((t-\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2)$$

$$= ((t-\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2)((t-\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2) = ((t-\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2)^2$$

Vemos que este polinomio no tiene raíces en $\mathbb{R}$ porque $(t-\frac{\sqrt{3}}{2})^2$ es mayor o igual a 0. Luego, $(t-\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2$ es estrictamente mayor que 0 y también su cuadrado.

En $\mathbb{C}$ este polinomio si tiene raíces. La descomposición esta dada por la fórmula para factorizar resta de cuadrados.

$$((t-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{1}{2})^2)^2 = ((t-\frac{\sqrt{3}}{2})^2-(i\frac{1}{2})^2)^2 = (t-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2})^2(t-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2})^2$$

Concluimos que $\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$ y $\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$ son las dos raices del polinomio caracteristico.

Para el operador h la matriz asociada es

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

El polinomio característico es

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} t-\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & t-\frac{\sqrt{3}}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & t-\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & t-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} = (t-\frac{\sqrt{3}}{2}) \begin{vmatrix} t-\frac{\sqrt{3}}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & t-\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & t-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} \\
&+(-\frac{1}{2}) \begin{vmatrix} 0 & t-\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & t-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} = (t-\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{1}{2} \begin{vmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ t-\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{vmatrix} + (t-\frac{\sqrt{3}}{2}) \begin{vmatrix} t-\frac{\sqrt{3}}{2} & -1 \\ 1 & t-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix}) \\
&+(-\frac{1}{2})(\frac{1}{2}) \begin{vmatrix} t-\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & t-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} = (t-\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{1}{2}(t-\frac{\sqrt{3}}{2})(-\frac{1}{2})+(t-\frac{\sqrt{3}}{2})((t-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+1)) \\
&+(-\frac{1}{2})(\frac{1}{2})((t-\frac{\sqrt{3}}{2})^2-(\frac{1}{2})^2) = (t-\frac{\sqrt{3}}{2})^2((t-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+\frac{3}{4})-(\frac{1}{2})^2((t-\frac{\sqrt{3}}{2})^2-\frac{1}{4}) \\
&\quad = (t-\frac{\sqrt{3}}{2})^2((t-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+\frac{1}{4}+\frac{1}{2})-(\frac{1}{2})^2((t-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}) \\
&= (t-\frac{\sqrt{3}}{2})^2((t-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+\frac{1}{4})-(\frac{1}{2})^2((t-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+\frac{1}{4})+\frac{1}{2}(t-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{1}{2})^2\frac{1}{2} \\
&= ((t-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+\frac{1}{4})((t-\frac{\sqrt{3}}{2})^2-(\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}) = ((t-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+\frac{1}{4})((t-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+\frac{1}{4}) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = ((t-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+\frac{1}{2}^2)^2
\end{aligned}
$$

Así que es el mismo polinomio característico que para el operador g y por lo tanto al igual que este, no tiene valores propios en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$ son los mismos valores propios.

2. Primero demostremos que para cualquier $z \in \mathbb{C}$, $g_{\mathbb{C}}(\overline{z}) = g_{\mathbb{C}}\overline{f(z)}$, esto es así porque todos los términos de la matriz de $g_{\mathbb{C}}$ son reales. Notese que $h_{\mathbb{C}}$ también cumple esta condición por lo que lo anterior también vale para $h_{\mathbb{C}}$.

   Sea $z = u + iv$ con $u, v \in \mathbb{R}$. Por linealidad tenemos que $g_{\mathbb{C}}(z) = g_{\mathbb{C}}(u) + ig_{\mathbb{C}}(v)$, pero como u y v son reales $g_{\mathbb{C}}(u) = g(u) \in \mathbb{R}$ y $g_{\mathbb{C}}(v) = g(v) \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, $g(u)$ es la parte real de $g_{\mathbb{C}}(z)$ y $g(v)$ es la parte imaginaria de $g_{\mathbb{C}}(z)$.

   Ahora, el conjugado de z es $u - iv$. $g_{\mathbb{C}}(\overline{z}) = g_{\mathbb{C}}(u) - ig_{\mathbb{C}}(v) = g(u) - ig(v)$. Vemos que la parte real es la misma que la anterior y la parte imaginaria es el opuesto aditivo de la anterior. Por lo tanto, es el conjugado de la anterior, es decir, $\overline{g(z)}$.

   Ahora sea $z = u + iv$ un vector propio asociado a $\lambda = \alpha + i\beta$. Entonces, $\overline{z} = u - iv$ es un vector propio asociado a $\overline{\lambda}$. La primera oración se traduce en que $f(z) = \lambda z$. Por propiedades de conjugación tenemos que $\overline{\lambda z} = \overline{z}\overline{\lambda}$. Luego $f(\overline{z}) = \overline{f(z)} = \overline{\lambda z} = \overline{z}\overline{\lambda}$. Por lo que vemos que $\overline{z}$ es el vector propio asociado a $\overline{\lambda}$.

3. Para hallar una base canónica de Jordan para $g_{\mathbb{C}}$ primero necesitamos calcular los vectores propios asociados a cada valor propio. Para esto primero necesitamos calcular el kernel de $\lambda Id - g_{\mathbb{C}}$. La matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} \lambda-\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \lambda-\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \lambda-\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \lambda-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & i\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & i\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & i\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Reduciendo por Gauss-Jordan obtenemos

$$\begin{pmatrix} i\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & i\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & i\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & i\frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & -1 \\ 0 & i & -1 & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 0 & i & -1 & 0 \\ i & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 0 & -1 & -i & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces vemos que el kernel es de dimensión 2, es decir que tiene dos vectores asociados. Estos vectores son $(1, 0, 0, i)$ y $(0, 1, i, 0)$. Por el punto anterior los vectores propios asociados a $\overline{\lambda}$ serían $(1, 0, 0, -i)$ y $(0, 1, -i, 0)$. Por lo tanto si tomamos $u_1 = (1, 0, 0, 0)$, $u_2 = (0, 1, 0, 0)$, $v_1 = (0, 0, 0, 1)$ y $v_2 = (0, 0, 1, 0)$ la base canónica de Jordan sería precisamente $T = \{u_1 + iv_1, u_2 + iv_2, u_1 - iv_1, u_2 - iv_2\}$.

Para $h_{\mathbb{C}}$ debemos calcular el kernel de $\lambda Id - h_{\mathbb{C}}$. La matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} \lambda-\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \lambda-\frac{\sqrt{3}}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \lambda-\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \lambda-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & i\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & i\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & i\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

De nuevo reducimos mediante Gauss-Jordan para obtener

$$\begin{pmatrix} i\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & i\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & i\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & i\frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & 2i & -i \\ i & -2i & 1 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & 2i & -i \\ -1 & 2 & i & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -i \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & 2i & -i \\ 0 & 2 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & 2i & -2i \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & 2i & -i \\ 0 & 0 & -2i & 2i \\ 0 & 0 & 2i & -2i \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & 2i & -i \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En este caso el kernel es solo de una dimensión y es el generado por el vector $(-i, -i, 1, 1)$.

Ahora necesitamos calcular el kernel de $(\lambda Id - h_{\mathbb{C}})^2$. La matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} i\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & i\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & i\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & i\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & i\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & i\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & i\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -i\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & -i & i\frac{1}{2} \\ -i\frac{1}{2} & i & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & i\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Y para averiguar su kernel reducimos esta matriz usando Gauss-Jordan.

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -i\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & -i & i\frac{1}{2} \\ -i\frac{1}{2} & i & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & i\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2i & i \\ 0 & 1 & i & 0 \\ -1 & 2 & 2i & -i \\ 0 & -1 & -i & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces vemos que el vector $(-i, 0, 0, 1)$ es un vector del segundo nivel pues no esta incluido en el kernel anterior. Y $(\lambda Id - h_{\mathcal{C}})(-i, 0, 0, 1) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, i\frac{1}{2}, i\frac{1}{2})$ sería el segundo vector de la base de Jordan.

Por el segundo punto tenemos que $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -i\frac{1}{2}, -i\frac{1}{2})$ esta en el kernel de $(\overline{\lambda} Id - h_{\mathcal{C}})$. Ahora para calcular un vector del segundo nivel tenemos que calcular el kernel de $(\overline{\lambda} Id - h_{\mathcal{C}})^2$.

Pero observemos que $(i, 0, 0, 1)$ está en este kernel y no en el kernel anterior.

$$(\overline{\lambda} Id - h_{\mathcal{C}})(i,0,0,1) = \begin{pmatrix} -i\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -i\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -i\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -i\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -i\frac{1}{2} \\ -i\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Y tenemos que $(\overline{\lambda} Id - h_{\mathcal{C}})(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -i\frac{1}{2}, -i\frac{1}{2}) = (0,0,0,0)$ por el punto anterior. Luego si tomamos $u_1 = (0,0,0,1)$, $v_1 = (1,0,0,0)$, $u_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)$ y $v_2 = (0,0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. La base $T = \{u_1 + iv_1, u_2 + iv_2, u_1 - iv_1, u_2 - iv_2\}$ es una base canónica de Jordan.

4. Primero calculemos la matriz de transformación de la nueva base sugerida a la base canónica. Para g esta sería.

$$[id]_S^{can} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz inversa $[id]_{can}^S$ la podemos calcular usando Gauss-Jordan.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Así que

$$[id]_{can}^S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces la representación matricial de g en esta base esta dada por

$$\begin{aligned}
[g]_S^S &= [id]_{can}^S [g]_{can}^{can} [id]_S^{can} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Vemos que logramos diagonalizarla por bloques simples.

Para h tenemos que la matriz de transformación de S a la inversa es

$$[id]_S^{can} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

La matriz inversa de esta matriz la calculamos de nuevo usando Gauss-Jordan.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces concluimos que

$$[id]_{can}^S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces la matriz de h en esta base esta dada por

$$
\begin{aligned}
[h]_S^S &= [id]_{can}^S[h]_{can}^{can}[id]_S^{can} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Vemos que en este caso el resultado no fue una matriz diagonal por bloques.

5. Por el punto 1 tenemos que el polinomio minimal divide al polinomio característico.

   Por lo tanto los polinomios candidatos a ser el polinomio minimal deben ser divisores del polinomio carácteristico. Es decir, puede ser $(t-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+\frac{1}{2}^2)$ o $(t-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+\frac{1}{2}^2)^2$

   Para g el polinomio minimal es $(t-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+\frac{1}{2}^2)=t^2-\sqrt{3}t+1$.

   Para verificar esto calculemos la matriz asociada a la transformación $g^2-\sqrt{3}g+Id$.

$$
g^2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}
$$

Entonces $g^2-\sqrt{3}g+Id$ es .

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \sqrt{3}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces efectivamente este es el polinomio minimal.

Para h el polinomio minimal es $(t-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+\frac{1}{2}^2)^2$ para verificar esto solo basta comprobar que $h^2-\sqrt{3}h+Id$ no es cero.

$$h^2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \sqrt{3} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Luego $h^2-\sqrt{3}h+Id$ es

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \sqrt{3} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} - \sqrt{3}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \sqrt{3} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \sqrt{3} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & \sqrt{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 2\sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -2\sqrt{3} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

Asi que la única opción es que $(t-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+\frac{1}{2}^2)^2$ sea el polinomio minimal.

Ejercicio 5. Suponga que f es semi-simple y sea $V_1 \leq V$ un subespacio invariante bajo f. Demuestre que la restricción de f a$V_1, f_1 \in \mathrm{Hom}_K(V_1, V_1)$ es semi-simple

Demostración. Partiendo del hecho que que f es semisimple, para cualquier subespacio invariante U de V_1, y por lo tanto de todo el espacio V, existe un subespacio invariante U' del espacio tal que $U \oplus U' = V$. Ahora vamos a demostrar que $U' \cap V_1$ es tal que es invariante bajo la restricción de f y que $U \oplus U' \cap V_1 = V_1$.

Para la primera parte obsérvese que $f(U' \cap V_1) \subseteq f(U') \cap f(V_1) \subseteq U' \cap V_1$, porque ambos espacios son invariantes bajo f.

Para la seguda parte primer tenemos que $U + (U' \cap V_1) = V_1$. Tome cualquier elemento $v \in V_1$. Tenemos que $v = u + u'$ donde $u \in U$ y $u' \in U'$, por la suposición inicial que $U \oplus U' = V$. Pero como tenemos que $v \in V_1$ y $u \in U \subseteq V_1$ concluimos que $u' = v - u \in V_1$, por lo que $v \in U + (U' \cap V_1)$.

Finalmente también tenemos que $U \cap (U' \cap V_1) = \{0\}$, porque esta expresión es equivalente a $(U \cap U') \cap V_1 = \{0\} \cap V_1 = \{0\}$. $\square$

Ejercicio 6. Suponga que f es semi-simple, demuestre que existe una descomposición:

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$$

tal que, para $i = 1, \cdots, r, V_i$ es invariante bajo f y la restricción de este a $V_i, f_i \in \mathrm{Hom}_K(V_i, V_i)$ es simple. (*Ayuda:* Use inducción fuerte en $n = \dim_K(V)$), es decir asuma que el resultado es cierto para todo operador en un espacio de dimensión estrictamente menor que n y use el punto anterior).

Demostración. Primero consideremos el caso base cuando la dimensión de V es 1. En este caso los únicos subespacios posibles son $\{0\}$ y V por lo que el espacio ya es simple de por si y $V = V$ sería la descomposición buscada.

Ahora suponga por inducción fuerte que la afirmación vale para todas las dimensiones menores a n, la dimensión de V.

Si f es simple entonces, al igual que en el caso base, ya tendriamos una descomposición. Así que si asumimos que f no es simple entonces existe algún subespacio invariante U tal que $0<\dim(U)<\dim(V)$, pero como es semi-simple existe otro espacio invariante U' tal que $U \oplus U' = V$. Además también se cumple que $0<\dim(U')<\dim(V)$ por propiedades de las dimensiones. Luego por nuestra hipótesis de inducción tenemos que $U = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$ y $U' = V_{s+1} \oplus \cdots \oplus V_r$ con $r > s$. Por lo tanto, $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s \oplus V_{s+1} \oplus \cdots \oplus V_r$ es la descomposición buscada. $\square$

Ejercicio 7. Demuestre que el polinomio minimal de un operador semi-simple es un producto de polinomios irreducibles ninguno de ellos repetido (es decir, elevados únicamente a la primera potencia; es decir, sin cuadrados que lo dividan) usando los siguientes pasos:

1. Usando la descomposición del punto anterior, demuestre que el polinomio minimal de f_i divide al polinomio minimal de f

2. Demuestre que el mínimo común múltiplos de los polinomios minimales de $f_1, \ldots, f_r$ es el polinomio mínimal de f. (*Ayuda*: Sea $P(t)$ este mínimo común múltiplo, dado $v \in V$, tome $v_i \in V_i, i = 1, \ldots, r$, tales que $v = v_1 + \ldots + v_r$, demuestre que $P(f)(v) = P(f)(v_1) + \ldots + P(f)(v_r) = 0 + \ldots + 0 = 0$)

3. Concluya. (*Ayuda: El polinomio minimal de un operador simple es irreducible.*)

Solución

1. Sea $f \in \mathrm{Hom}_K(V, V)$, un operador semi-simple. Entonces por el punto anterior V se puede descomponer como $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$ tales que f_i es semi-simple donde f_i es la restricción de f en V_i.

   Ahora tome $P_{f_i,min}$ el polinomio minimal de f_i. Por el algoritmo de la división tenemos que existen $Q(x)$ y $R(x) \in K[x]$ tales que $P_{f,min}(x) = P_{f_i,min}Q(x) + R(x)$ y $deg(R) < deg(P_{f_i,min})$.

   Pero obsérvese que para todo $v \in V_i$, $P_{f,min}(f_i)(v) = P_{f,min}(f)(v) = 0$. Luego evaluando toda la expresión anterior por f_i obtenemos que $R(f_i) = 0$. Por lo tanto $R(x)$ debe ser igual a 0. De lo contrario existiria un polinomio de grado menor al polinomio minimal de f_i que anula a f_i, contradicción.

   Por lo tanto $P_{f_i,min}$ divide a $P_{f,min}$.

2. Sea $P(t)$ el minimo común multiplo de los polinomios minimales de todos los f_i. Vamos a demostrar que $P(t)$ divide $P_{f,min}(t)$ y que $P_{f,min}(t)$ divide a $P(t)$ lo que implica que son iguales pues son polinomios mónicos.

   La primera parte se concluye del numeral anterior porque $P_{f,min}$ es divisible por todos los $P_{f_i,min}$ y por lo tanto es divisible por el mínimo común múltiplo $P(t)$.

   Para la segunda parte vamos a demostrar que $P(f) = 0$. Tome cualquier $v \in V$. Por nuestra descomposición podemos escribir $v = v_1 + \cdots v_r$ donde $v_i \in V_i$. Entonces $P(f)(v) = P(f)(v_1 + \cdots v_r) = P(f)(v_1) + \cdots P(f)(v_r)$.

   Pero para cualquier i tenemos que $P(t)$ es divisible por $P_{f_i,min}(t)$, es decir $P(t) = Q_i(t)P_{f_i,min}(t)$, por lo tanto $P(f)(v_i) = Q_i(f)P_{f_i,min}(f)(v_i)$ pero como se demostro en el numeral anterior esto es igual a 0. Concluimos que $P(f)(v) = 0 + \cdots + 0 = 0$. Es decir que P anula el operador f y por lo tanto es divisible por el polinomio minimal de f. Esto termina la demostración.

3. Primero probamos que el polinomio minimal de un operador simple es irreducible mediante la contrareciproca. Suponga que este no es el caso, entonces $P_{f,min}(t) = A(t)B(t)$ donde $A(t)$ y $B(t)$ son polinomios no constantes.

   Pero en las notas de clase se tiene un teorema que indica que si P es un polinomio tal que anula a f y $P(t) = A(t)B(t)$ entonces V se puede descomponer como la suma directa $V = \ker(A(f)) \oplus \ker(B(f))$ donde cada uno de los componentes es invariante.

   Pero además tenemos que $\ker(A(f)) \neq V$, o de lo contrario tendriamos que $A(t)$ es un polinomio de grado menor al polinomio minimal que anula a f. Y $\ker(A(f)) \neq 0$ porque si no entonces $\ker(B(f)) = V$ y entonces llegariamos a la misma contradicción anterior solo que con $B(t)$. Entonces concluimos que f no es simple.

   Por este resultado concluimos que $P_{f,min}$ es el mínimo común múltiplo de polinomios irreducibles. Entonces vemos que $P_{f,min}(t)$ es la multiplicación de cada uno de los diferentes polinomios irreducibles que aparecen, solo una vez.

Ejercicio 8. Identifique entre los operadores g, h de $\mathbb{R}^4$ ya definidos, cual es semi-simple y cual no lo es. Justifique su respuesta.

Solución

Por lo discutido anteriormente concluimos que h no es semi-simple. Si lo fuera entonces su polinomio minimal deberia ser el producto de polinomios irreducibles no repetidos y ya demostramos que no es así.

Resta por demostrar que g es semi-simple y este es el caso porque es una matriz diagonalizable por bloques simples. Los espacios invariantes no triviales son $Sp(u_1, -v_1)$ y $Sp(u_1, -v_1)$ y su suma directa de todo V.