

Taller de Álgebra Lineal

Jonathan Niño

5 de abril de 2015

Para esta tarea, utilizamos las siguientes definiciones:

Definición 0.1. Decimos que f es *semi-simple* si para todo $V_1 \leq V$ invariante bajo f existe $V_2 \leq V$ invariante bajo f tal que $V = V_1 \oplus V_2$.

Definición 0.2. El *polinomio minimal* de f , $P_{f,\min}(t) \in K[t]$ es el polinomio de menor grado tal que $P_{f,\min}(f) = 0$

Ejercicio 1. Demuestre que el polinomio minimal divide al polinomio característico. (*Ayuda:* usando el algoritmo de la división, divida el polinomio característico por el polinomio minimal para obtener un residuo y verifique que este es igual a cero.)

Demostración. Suponga que □

Ejercicio 2. Sea $\lambda \in K$ y defina $f \in \text{Hom}_K(K^2, K^2)$ por:

$$f(x, y) = (\lambda x + y, \lambda y)$$

Verifique que f no es semi-simple. Encuentre el polinomio minimal de f

Solución

Ejercicio 3. Sea $\lambda \in K$ y defina $f \in \text{Hom}_K(K^2, K^2)$ por:

$$f(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$$

Encuentre el polinomio minimal de f . Verifique que f es semi-simple.

Solución

Ejercicio 4. Considere los operadores $g, h \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$ definidos por:

$$g(x, y, z, w) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}w, \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1}{2}z, -\frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}z, -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}w \right)$$
$$h(x, y, z, w) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}z, \frac{\sqrt{3}}{2}y + z - \frac{1}{2}w, \frac{1}{2}x - y + \frac{\sqrt{3}}{2}z, -\frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}w \right)$$

y los operadores $g_{\mathbb{C}}$ y $h_{\mathbb{C}} \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^4, \mathbb{C}^4)$ dadas por las mismas fórmulas.

1. Verifique que g y h no tiene valores propios y que los valores propios de $g_{\mathbb{C}}$ y $h_{\mathbb{C}}$ son $\lambda = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)$ y $\bar{\lambda} = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - i)$.
2. Verifique que si $u + iv$, con $u, v \in \mathbb{R}^4$, es un vector propio de $g_{\mathbb{C}}$ asociado a λ , entonces $u - iv$ es un vector propio de $g_{\mathbb{C}}$ asociado a $\bar{\lambda}$.
3. Encuentre una base de Jordan para $g_{\mathbb{C}}$ y para $h_{\mathbb{C}}$ de la forma $T = \{u_1 + iv_1, u_2 + iv_2, u_1 - iv_1, u_2 - iv_2\}$.
4. Usando la notación de los vectores en el numeral anterior, encuentre la representación matricial de g y h relativas a la base $S = \{u_1, -v_1, u_2, -v_2\}$.
5. Encuentre los polinomios minimales de g y h .

Solución

1. La matriz asociada al operador g es

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Y el polinomio característico de g es

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} t - \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & t - \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & t - \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & t - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} = (t - \frac{\sqrt{3}}{2}) \begin{vmatrix} t - \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & t - \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & t - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} \\ & - (-\frac{1}{2}) \begin{vmatrix} 0 & t - \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & t - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = (t - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 \begin{vmatrix} t - \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & t - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} + (\frac{1}{2})^2 \begin{vmatrix} t - \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & t - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} \\ & = (t - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 ((t - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2) + (\frac{1}{2})^2 ((t - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2) \\ & = ((t - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2) ((t - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2) = ((t - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2)^2 \end{aligned}$$

Vemos que este polinomio no tiene raíces en \mathbb{R} porque $(t - \frac{\sqrt{3}}{2})^2$ es mayor o igual a 0. Luego, $(t - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2$ es estrictamente mayor que 0 y también su cuadrado.

En \mathbb{C} este polinomio si tiene raíces. La descomposición esta dada por la fórmula para factorizar resta de cuadrados.

$$((t - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2)^2 = ((t - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 - (i\frac{1}{2})^2)^2 = (t - \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2})^2 (t - \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2})^2$$

Concluimos que $\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$ y $\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$ son las dos raices del polinomio caracteristico.

Para el operador h la matriz asociada es

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

El polinomio característico es

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} t - \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & t - \frac{\sqrt{3}}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & t - \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & t - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} = (t - \frac{\sqrt{3}}{2}) \begin{vmatrix} t - \frac{\sqrt{3}}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & t - \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & t - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} \\ & + (-\frac{1}{2}) \begin{vmatrix} 0 & t - \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & t - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} = (t - \frac{\sqrt{3}}{2}) \left(\frac{1}{2} \begin{vmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ t - \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{vmatrix} + (t - \frac{\sqrt{3}}{2}) \begin{vmatrix} t - \frac{\sqrt{3}}{2} & -1 \\ 1 & t - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} \right) \\ & + (-\frac{1}{2}) \left(\frac{1}{2} \begin{vmatrix} t - \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & t - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} \right) = (t - \frac{\sqrt{3}}{2}) \left(\frac{1}{2} (t - \frac{\sqrt{3}}{2}) (-\frac{1}{2}) + (t - \frac{\sqrt{3}}{2}) ((t - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + 1) \right) \\ & + (-\frac{1}{2}) \left(\frac{1}{2} ((t - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2) \right) = (t - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 ((t - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + \frac{3}{4}) - (\frac{1}{2})^2 ((t - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 - \frac{1}{4}) \\ & = (t - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 ((t - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}) - (\frac{1}{2})^2 ((t - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}) \\ & = (t - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 ((t - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + \frac{1}{4}) - (\frac{1}{2})^2 ((t - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + \frac{1}{4}) + \frac{1}{2} (t - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2 \frac{1}{2} \\ & = ((t - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + \frac{1}{4}) ((t - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}) = ((t - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + \frac{1}{4}) ((t - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + \frac{1}{4}) \\ & = ((t - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + \frac{1}{4})^2 \end{aligned}$$

Así que es el mismo polinomio característico que para el operador g y por lo tanto al igual que este, no tiene valores propios en \mathbb{R} y en \mathbb{C} son los mismos valores propios.

2. Primero demostremos que para cualquier $z \in \mathbb{C}$, $g_{\mathbb{C}}(\bar{z}) = \overline{g_{\mathbb{C}}f(z)}$, esto es así porque todos los términos de la matriz de $g_{\mathbb{C}}$ son reales. Notese que $h_{\mathbb{C}}$ también cumple esta condición por lo que lo anterior también vale para $h_{\mathbb{C}}$.

Sea $z = u + iv$ con $u, v \in \mathbb{R}$. Por linealidad tenemos que $g_{\mathbb{C}}(z) = g_{\mathbb{C}}(u) + ig_{\mathbb{C}}(v)$, pero como u y v son reales $g_{\mathbb{C}}(u) = g(u) \in \mathbb{R}$ y $g_{\mathbb{C}}(v) = g(v) \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, $g(u)$ es la parte real de $g_{\mathbb{C}}(z)$ y $g(v)$ es la parte imaginaria de $g_{\mathbb{C}}(z)$.

Ahora, el conjugado de z es $u - iv$. $g_{\mathbb{C}}(\bar{z}) = g_{\mathbb{C}}(u) - ig_{\mathbb{C}}(v) = g(u) - ig(v)$. Vemos que la parte real es la misma que la anterior y la parte imaginaria es el opuesto aditivo de la anterior. Por lo tanto, es el conjugado de la anterior, es decir, $\overline{g(z)}$.

Ahora sea $z = u + iv$ un vector propio asociado a $\lambda = \alpha + i\beta$. Entonces, $\bar{z} = u - iv$ es un vector propio asociado a $\bar{\lambda}$. La primera oración se traduce en que $f(z) = \lambda z$. Por propiedades de conjugación tenemos que $\overline{\lambda z} = \bar{z}\bar{\lambda}$. Luego $f(\bar{z}) = \overline{f(z)} = \overline{\lambda z} = \bar{z}\bar{\lambda}$. Por lo que vemos que \bar{z} es el vector propio asociado a $\bar{\lambda}$.

3. Para hallar una base canónica de Jordan para $g_{\mathbb{C}}$ primero necesitamos calcular los vectores propios asociados a cada valor propio. Para esto primero necesitamos calcular el kernel de $\lambda Id - g_{\mathbb{C}}$. La matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} \lambda - \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \lambda - \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \lambda - \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \lambda - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & i\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & i\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & i\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Reduciendo por Gauss-Jordan obtenemos

$$\begin{pmatrix} i\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & i\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & i\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & i\frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & -1 \\ 0 & i & -1 & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 0 & i & -1 & 0 \\ i & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 0 & -1 & -i & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces vemos que el kernel es de dimensión 2, es decir que tiene dos vectores asociados. Estos vectores son $(1, 0, 0, i)$ y $(0, 1, i, 0)$. Por el punto anterior los vectores propios asociados a $\bar{\lambda}$ serían $(1, 0, 0, -i)$ y $(0, 1, -i, 0)$. Por lo tanto si tomamos $u_1 = (1, 0, 0, 0)$, $u_2 = (0, 1, 0, 0)$, $v_1 = (0, 0, 0, 1)$ y $v_2 = (0, 0, 1, 0)$ la base canónica de Jordan sería precisamente $T = \{u_1 + iv_1, u_2 + iv_2, u_1 - iv_1, u_2 - iv_2\}$.

Para $h_{\mathbb{C}}$ debemos calcular el kernel de $\lambda Id - h_{\mathbb{C}}$. La matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} \lambda - \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \lambda - \frac{\sqrt{3}}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \lambda - \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \lambda - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & i\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & i\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & i\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

De nuevo reducimos mediante Gauss-Jordan para obtener

$$\begin{pmatrix} i\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & i\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & i\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & i\frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & 2i & -i \\ i & -2i & 1 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & 2i & -i \\ -1 & 2 & i & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -i \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & 2i & -i \\ 0 & 2 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & 2i & -2i \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & 2i & -i \\ 0 & 0 & -2i & 2i \\ 0 & 0 & 2i & -2i \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & 2i & -i \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En este caso el kernel es solo de una dimensión y es el generado por el vector $(-i, -i, 1, 1)$.

Ahora necesitamos calcular el kernel de $(\lambda Id - h_{\mathbb{C}})^2$. La matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} i\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & i\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & i\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & i\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & i\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & i\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & i\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -i\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & -i & i\frac{1}{2} \\ -i\frac{1}{2} & i & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & i\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Y para averiguar su kernel reducimos esta matriz usando Gauss-Jordan.

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -i\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & -i & i\frac{1}{2} \\ -i\frac{1}{2} & i & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & i\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2i & i \\ 0 & 1 & i & 0 \\ -1 & 2 & 2i & -i \\ 0 & -1 & -i & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces vemos que el vector $(-i, 0, 0, 1)$ es un vector del segundo nivel pues no esta incluido en el kernel anterior. Y $(\lambda Id - h_C)(-i, 0, 0, 1) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, i\frac{1}{2}, i\frac{1}{2})$ sería el segundo vector de la base de Jordan.

Por el segundo punto tenemos que $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -i\frac{1}{2}, -i\frac{1}{2})$ esta en el kernel de $(\bar{\lambda}Id - h_C)$. Ahora para calcular un vector del segundo nivel tenemos que calcular el kernel de $(\bar{\lambda}Id - h_C)^2$.

Pero observemos que $(i, 0, 0, 1)$ está en este kernel y no en el kernel anterior.

$$(\bar{\lambda}Id - h_C)(i, 0, 0, 1) = \begin{pmatrix} -i\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -i\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -i\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -i\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -i\frac{1}{2} \\ -i\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Y tenemos que $(\bar{\lambda}Id - h_C)(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -i\frac{1}{2}, -i\frac{1}{2}) = (0, 0, 0, 0)$ por el punto anterior. Luego si tomamos $u_1 = (0, 0, 0, 1)$, $v_1 = (1, 0, 0, 0)$, $u_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)$ y $v_2 = (0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. La base $T = \{u_1 + iv_1, u_2 + iv_2, u_1 - iv_1, u_2 - iv_2\}$ es una base canónica de Jordan.

4. Primero calculemos la matriz de transformación de la nueva base sugerida a la base canónica. Para g esta sería.

$$[id]_S^{can} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz inversa $[id]_{can}^S$ la podemos calcular usando Gauss-Jordan.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Así que

$$[id]_{can}^S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces la representación matricial de g en esta base esta dada por

$$\begin{aligned} [g]_S^S &= [id]_{can}^S [g]_{can}^{can} [id]_S^{can} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vemos que logramos diagonalizarla por bloques simples.

Para h tenemos que la matriz de transformación de S a la inversa es

$$[id]_S^{can} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

La matriz inversa de esta matriz la calculamos de nuevo usando Gauss-Jordan.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} &\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ &\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Entonces concluimos que

$$[id]_{can}^S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces la matriz de h en esta base esta dada por

$$\begin{aligned} [h]_S^S &= [id]_{can}^S [h]_{can}^{can} [id]_S^{can} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vemos que en este caso el resultado no fue una matriz diagonal por bloques.

5. El polinomio minimal divide al polinomio caracteristico. Para g el polinomio minimal es $(t - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + \frac{1}{2} = t^2 - \sqrt{3}t + 1$.

Para demostrar esto observese que

Ejercicio 5. Suponga que f es semi-simple y sea $V_1 \leq V$ un subespacio invariante bajo f . Demuestre que la restricción de f a V_1 , $f_1 \in \text{Hom}_K(V_1, V_1)$ es semi-simple.

Demostración. Suponga □

Ejercicio 6. Suponga que f es semi-simple, demuestre que existe una descomposición:

$$V = V_1 \otimes \dots \otimes V_r$$

tal que, para $i = 1, \dots, r$, V_i es invariante bajo f y la restricción de este a V_i , $f_i \in \text{Hom}_K(V_i, V_i)$ es simple. (*Ayuda:* Use inducción fuerte en $n = \dim_K(V)$), es decir asuma que el resultado es cierto para todo operador en un espacio de dimensión estrictamente menor que n y use el punto anterior).

Demostración. Suponga que: □

Ejercicio 7. Demuestre que el polinomio minimal de un operador semi-simple es un producto de polinomios irreducibles ninguno de ellos repetido (es decir, elevados únicamente a la primera potencia; es decir, sin cuadrados que lo dividan) usando los siguientes pasos:

1. Usando la descomposición del punto anterior, demuestre que el polinomio minimal de f_i divide al polinomio minimal de f
2. Demuestre que el mínimo común múltiplo de los polinomios minimales de f_1, \dots, f_r es el polinomio minimal de f . (*Ayuda:* Sea $P(t)$ este mínimo común múltiplo, dado $v \in V$, tome $v_i \in V_i, i = 1, \dots, r$, tales que $v = v_1 + \dots + v_r$, demuestre que $P(f)(v) = P(f)(v_1) + \dots + P(f)(v_r) = 0 + \dots + 0 = 0$)
3. Concluya. (*Ayuda:* El polinomio minimal de un operador simple es irreducible.)

Solución

Ejercicio 8. Identifique entre los operadores f, g de \mathbb{R}^4 ya definidos, cual es semi-simple y cual no lo es. Justifique su respuesta.

Solución