

Taller 2: Álgebra Lineal 2

Jonathan Andrés Niño Cortés

17 de mayo de 2015

Sean K un cuerpo de característica diferente de 2 (e.d. $1 + 1 \neq 0$) y (V, σ) un espacio simpléctico sobre K de dimensión finita. Denote $2n = \dim(V)$, $n > 0$. Sea f un operador en V auto-adjunto (e.d. $f \in \text{Hom}_K(V, V)$, y $\sigma(v, f(w)) = \sigma(f(v), w)$ para todo $v, w \in V$).

- Sea $U \leq V$. Demuestre que U es un subespacio simpléctico de V si y solo si $U \cap U^\sigma = \{0\}$.

Demostración. Suponga primero que σ restringido a $U \times U$ es un espacio simpléctico. Entonces la propiedad no degenerativa implica que si $u \in U$ es tal que para todo $u' \in U$, $\sigma(u, u') = 0$ entonces $u = 0$. Utilizando la propiedad que $\sigma(u, u') = -\sigma(u', u)$ entonces tenemos de manera equivalente que si para todo $u' \in U$ se cumple que $\sigma(u', u) = 0$ entonces $u = 0$. Pero esto implica que cualquier elemento $v \in U^\sigma \cap U$ que por definición es un elemento en U tal que $\sigma(u, v) = 0$ para todo $u \in U$, debe ser igual a 0. Por lo tanto, $U \cap U^\sigma = \{0\}$.

Para el converso asuma que $U \cap U^\sigma = \{0\}$. Vemos que σ restringido a U es bilineal y alternante solo por el hecho que U es un subespacio de V . Para ver que es no-degenerada basta ver si $u \in V$ es tal que $\sigma(u', u) = 0$ para todo $u' \in U$ entonces $u = 0$ y los u son precisamente el conjunto $U \cap U^\sigma = \{0\}$ por lo que efectivamente $u = 0$. \square

- Sea $P(t) \in K$. Demuestre que $P(f)$ es auto-adjunto. (*Sugerencia:* demuestre primero que una combinación lineal de operadores auto-adjuntos es auto-adjunto y que una potencia de un operador auto-adjunto es autoadjunto.)

Demostración. Sean f y g dos operadores auto-adjuntos y sea $a, b \in K$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}\sigma((a \cdot f + b \cdot g)(u), v) &= \sigma(af(u) + bg(u), v) \\ &= a\sigma(f(u), v) + b\sigma(g(u), v) \text{ (Bilinealidad)} \\ &= a\sigma(u, f(v)) + b\sigma(u, g(v)) \text{ (} f \text{ y } g \text{ auto-adjuntos)} \\ &= \sigma(u, af(v) + bg(v)) \text{ (Bilinealidad)} \\ &= \sigma(u, (a \cdot f + b \cdot g)(v))\end{aligned}$$

Por lo que cualquier combinación lineal de operadores auto-adjuntos es auto-adjunto.

Ahora sea f un operador auto-adjunto y $n \in \mathbb{N}$ y considere $f^n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n\text{-veces}}$.

Vamos a demostrar por inducción que f^n es auto-adjunto. Para el caso base observese que si $n = 0$ entonces $f^0 = id$ y $\sigma(id(u), v) = \sigma(u, id(v))$. Ahora para el paso inductivo asuma que f^{n-1} es auto-adjunto. Entonces

$$\begin{aligned}\sigma(f^n(u), v) &= \sigma(f(f^{n-1}(u)), v) \\ &= \sigma(f^{n-1}(u), f(v)) \\ &= \sigma(u, f^{n-1}(f(v))) \\ &= \sigma(u, f^n(v))\end{aligned}$$

Por lo tanto, f^n también es auto-adjunto. □

- Suponga que f es una proyección. Demuestre que $U = f(V)$ es un subespacio simpléctico.

Demostración. Sea $u \in U$ tal que para todo $u' \in U$, $\sigma(u, u') = 0$.

Entonces tenemos que $u = f(v)$ y que $u' = f(v')$ para algunos v y $v' \in V$. Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned}0 &= \sigma(u, u') \\ &= \sigma(f(v), f(v')) \\ &= \sigma(f(f(v)), v') \text{ (Auto-adjunto)} \\ &= \sigma(f(v), v') \text{ (Idempotencia)} \\ &= \sigma(u, v')\end{aligned}$$

Vemos por lo tanto que $\sigma(u, v') = 0$ para todo $v' \in V$ (esto porque $f^{-1}(U) = V$). Luego como V es simplectico esto implica que $u = 0$, lo que implica a su vez que U también es simpléctico. □

- Suponga que

$$P_f(t) = \prod_{i=1}^r (t - \lambda_i)^{m_i} \quad \lambda_1, \dots, \lambda_r \in K;$$

y, para $i = 1, \dots, r$ defina

$$V_i = \ker((f - \lambda_i \text{id}_V)^{m_i}).$$

Demuestre que para $i = 1, \dots, r$, $V_i \leq V$ es subespacio simpléctico.

Demostración. Por la propiedad 2.20 tenemos que para cada i existe un polinomio $\Pi_i(t) \in K[t]$ tal que $\Pi_i(f) = p_i$ donde p_i es la proyección sobre el espacio V_i . Anteriormente demostramos que cualquier polinomio de f es auto-adjunto por lo que p_i es auto-adjunto y además en el literal anterior demostramos que la imagen de una proyección auto-adjunto es un subespacio simpléctico. Luego, cada V_i es un subespacio simpléctico. \square

- Suponga que f es nilpotente y sea $V_0 \leq V$ un subespacio cíclico bajo f . Sea $v \in V_0$ tal que $\{v, f(v), \dots, f^{d-1}(v)\}$ es una base de V_0 .

1. Demuestre que V_0 es isotrópico.

Demostración. Por la Proposición 6.13, debemos demostrar que $\sigma(u, u') = 0$ para todo $u, u' \in V_0$. Por nuestra suposición, $u = \sum_{i=0}^{d-1} a_i f^i(v)$ y $u' = \sum_{i=0}^{d-1} a'_i f^i(v)$, con a_i y $a'_i \in K$.

Entonces por bilinealidad tenemos que

$$\begin{aligned} \sigma(u, u') &= \sigma\left(\sum_{i=0}^{d-1} a_i f^i(v), \sum_{j=0}^{d-1} a'_j f^j(v)\right) \\ &= \sum_{i=0}^{d-1} a_i \sigma(f^i(v), \sum_{j=0}^{d-1} a'_j f^j(v)) \\ &= \sum_{i=0}^{d-1} \sum_{j=0}^{d-1} a_i a'_j \sigma(f^i(v), f^j(v)) \end{aligned}$$

Pero observe que $\sigma(f^i(v), f^j(v)) = 0$ para cualesquiera $0 \leq i, j < d$. Supongamos primero que $i \leq j$. Entonces si tomamos $k = j - i \geq 0$ tenemos que $f^j(v) = f^k(f^i(v))$. Entonces como probamos que f^k es auto-adjunta también tenemos que

$$\begin{aligned} \sigma(f^i(v), f^j(v)) &= \sigma(f^i(v), f^k(f^i(v))) \\ &= \sigma(f^k(f^i(v)), f^i(v)) \text{ (} f \text{ es autoadjunto)} \\ &= -\sigma(f^i(v), f^k(f^i(v))) \text{ (Alternante)} \\ &= -\sigma(f^i(v), f^j(v)) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\sigma(f^i(v), f^j(v)) = 0$. El caso en que $i > j$ es análogo al anterior.

Finalmente concluimos que

$$\sigma(u, u') = \sum_{i=0}^{d-1} \sum_{j=0}^{d-1} a_i a'_j \sigma(f^i(v), f^j(v)) = \sum_{j=0}^{d-1} a'_j 0 = 0.$$

por lo que V_0 es isotrópico. \square

2. Sea $w \in V$ tal que $\sigma(w, f^{d-1}(v)) \neq 0$. Demuestre que para, $i = 1, \dots, d$, $\sigma(f^{i-1}(w), f^{d-i}(v)) \neq 0$.

Demostración. Podemos demostrar esto usando inducción sobre i . El caso base es cuando $i = 1$ y tenemos por suposición que $\sigma(w, f^{d-1}(v)) \neq 0$. Ahora supongamos que $\sigma(f^{i-2}(w), f^{d-i+1}(v)) \neq 0$ entonces como f es autoadjunto tenemos que $(f^{i-2}(w), f^{d-i+1}(v)) = (f(f^{i-2}(w)), f^{d-i}(v)) = (f^{i-1}(w), f^{d-i}(v)) \neq 0$, lo cual concluye la demostración. \square

3. Demuestre que si $w \in V$ es tal que $\sigma(w, f^{d-1}(v)) \neq 0$,

$$U = \text{Sp}(\{v, \dots, f^{d-1}(v), f^{d-1}(w), \dots, w\})$$

es un subespacio simpléctico.

Demostración. Primero, la definición de espacio cíclico implica que $f^d(v) = 0$. Por otra parte, podemos demostrar que si $i + j \geq d$ entonces $\sigma(f^i(v), f^j(w)) = \sigma(f^i(w), f^j(v)) = 0$. Esto porque podemos demostrar de manera análoga al numeral anterior que $\sigma(f^i(v), f^j(w)) = \sigma(f^d(v), f^{i+j-d}(w)) = \sigma(0, f^{i+j-d}(w)) = 0$.

Por lo tanto, tomemos $u \in U$ tal que para todo $u' \in U$, $\sigma(u, u') = 0$ y probemos que debe ser igual a 0. Como tenemos una base para U podemos escribir $u = a_1v + a_2f(v) + \dots + a_if^{i-1}(v) + \dots + a_df^{d-1}(v) + a_{d+1}f^{d-1}(w) + \dots + a_{d+j}f^{d-j}(w) + \dots + a_{2d}w$.

En particular, tenemos que $\sigma(u, v) = 0$ luego por bilinealidad obtenemos la ecuación

$$\begin{aligned} \sigma(u, v) &= a_1\sigma(v, v) + \dots + a_i\sigma(f^{i-1}(v), v) + \dots + a_d\sigma(f^{d-1}(v), v) + \\ & a_{d+1}\sigma(f^{d-1}(w), v) + \dots + a_{d+j}\sigma(f^{d-j}(w), v) + \dots + \sigma(a_{2d}w, v) = 0 \end{aligned}$$

.

Pero por el primer numeral, como V_0 es isotrópico concluimos que todo los términos de la forma $\sigma(f^{i-1}(v), v)$ son iguales a 0.

Ahora si tomamos en general $\sigma(u, f^{i-1}(v)) = 0$ obtenemos la ecuación

$$a_{d+1}\sigma(f^{d-1}(w), f^{i-1}(v)) + \dots + a_{d+j}\sigma(f^{d-j}(w), f^{i-1}(v)) + \dots + \sigma(a_{2d}w, f^{i-1}(v)) = 0$$

. Entonces obtenemos un sistema de d ecuaciones con d variables $\{a_{d+1}, \dots, a_{d+j}, \dots, a_{2d}\}$. Vemos que la matriz asociada va a ser tal que la ij -ésima entrada es igual a $\sigma(f^{d-j}(w), f^i(v))$.

Pero por lo discutido anteriormente todas las entradas tales que $i + j \geq d$ van a ser iguales a 0. Luego la matriz resultante es una matriz triangular superior cuyas entradas en la diagonal son diferentes a cero por el numeral anterior. Luego, el kernel de esta matriz es igual a 0, es decir que todos los coeficientes entre a^{d+1} y a_{2d} son iguales a 0.

De manera similar tomando las expresiones $\sigma(u, f^{d-j}(w)) = 0$ podemos hacer un sistema de d ecuaciones y d incógnitas $\{a_1, \dots, a_i, \dots, a_d\}$ que también tiene asociada una matriz triangular superior con todas sus entradas en la diagonal diferentes de cero y que por lo tanto implica que todos los coeficientes desde a_1 hasta a_d son iguales a 0. Por lo tanto $u = 0$ y el espacio es un espacio simpléctico. \square

4. Demuestre que si $w \in V$ es tal que $\sigma(w, f^{d-1}(v)) \neq 0$ y

$$U = \text{Sp}(\{v, \dots, f^{d-1}(v), f^{d-1}(w), \dots, w\})$$

entonces existe una base de Darboux de U ,

$$T = \{v_1, \dots, v_d, w_1, \dots, w_d\}$$

tal que $v_i = f^{i-1}(v_1)$ y $w_i = f^{d-i}(w_d)$. Demuestre además que $f(w_1) = 0$. (*Sugerencia:* A partir de la base de U obtenida en el punto anterior, recursivamente, empiece con w tal que $\sigma(w, f^{d-1}(v)) = 1$, y defina $w' = w - af(w)$ tal que $\sigma(w', f^{d-2}(v)) = 0$, luego $w'' = w' - bf^2(w')$ tal que $\sigma(w'', f^{d-3}(v)) = 0$ y así sucesivamente hasta completar $d - 1$ pasos y obtener el w_d buscado.)

Demostración. Tome $v_1 = v$ y sea $w_d = w^{(d-1)}$ el elemento encontrado en la recursión descrita en la sugerencia. Podemos encontrar un w tal que $\sigma(w, f^{d-1}(v)) = 1$ mediante normalización. Además tomamos $w' = w - \sigma(w, f^{d-2}(v))f(w)$. Entonces $\sigma(w', f^{d-2}(v)) = \sigma(w - \sigma(w, f^{d-2}(v))f(w), f^{d-2}(v)) = \sigma(w, f^{d-2}(v)) - \sigma(w, f^{d-2}(v))\sigma(f(w), f^{d-2}(v)) = \sigma(w, f^{d-2}(v)) - \sigma(w, f^{d-2}(v)) = 0$. Similarmente tomamos $w'' = w' - \sigma(w', f^{d-3}(v))f^2(w)$ y vemos que $\sigma(w'', f^{d-3}(v)) = \sigma(w' - \sigma(w', f^{d-3}(v))f^2(w), f^{d-3}(v)) = \sigma(w', f^{d-3}(v)) - \sigma(w', f^{d-3}(v))\sigma(f^2(w), f^{d-3}(v)) = \sigma(w', f^{d-3}(v)) - \sigma(w', f^{d-3}(v)) = 0$. Y así sucesivamente hasta llegar al w_d buscado.

Entonces veamos que $\sigma(w_d, f^{d-1}(v)) = 1$ esto lo podemos demostrar mediante inducción, pues ya tenemos el caso base y si asumimos que $\sigma(w^{(n)}, f^{d-1}(v)) = 1$ entonces $\sigma(w^{(n+1)}, f^{d-1}(v)) = \sigma(w^{(n)} - \sigma(w^{(n)}, f^{d-n-i}(v))f^{n+1}(w), f^{d-1}(v)) = \sigma(w^{(n)}, f^{d-1}(v)) - \sigma(w^{(n)}, f^{d-n-i}(v))\sigma(f^{n+1}(w), f^{d-1}(v)) = \sigma(w^{(n)}, f^{d-1}(v)) = 1$ porque $\sigma(f^{n+1}(w), f^{d-1}(v)) = 0$. Pero además $\sigma(w_d, f^{j-1}(v)) = 0$ si $1 \leq j < d$.

Esto porque para cada $j < d$, si tomamos $w^{(d-j)}$ tenemos por construcción que $\sigma(w^{(d-j)}, f^{j-1}(v)) = 0$, entonces de nuevo por inducción tomando lo anterior como caso base tenemos que $\sigma(w_d, f^{j-1}(v)) = 0$, esto porque si $\sigma(w^{(n)}, f^{j-1}(v)) = 0$ entonces por un lado $n \geq d - j$ y por el otro $\sigma(w^{(n+1)}, f^{j-1}(v)) = \sigma(w^{(n)} - \sigma(w^{(n)}, f^{d-n-i}(v))f^{n+1}(w), f^{j-1}(v)) = \sigma(w^{(n)}, f^{j-1}(v)) - \sigma(w^{(n)}, f^{d-n-i}(v))\sigma(f^{n+1}(w), f^{j-1}(v)) = \sigma(w^{(n)}, f^{j-1}(v)) = 0$ porque $\sigma(f^{n+1}(w), f^{j-1}(v)) = 0$ si $n \geq d - j$.

Finalmente vamos a demostrar que T es una base de Darboux para U . Por el numeral 1 tenemos que $\sigma(v_i, v_j) = \sigma(w_i, w_j) = 0$ para $i, j \in \{1, \dots, j\}$. Por otra parte tenemos que si $i + j = i' + j'$ entonces $\sigma(f^i(w), f^j(v)) = \sigma(f^{i'}(w), f^{j'}(v))$.

Por lo tanto, $\sigma(v_i, w_j) = \sigma(f^{i-1}(v_1), f^{d-j}(w_d)) = -\sigma(f^{d-j}(w_d), f^{i-1}(v_1))$ y esto ultimo es igual a -1 si $i - 1 + d - j = d - 1$, es decir, si $i = j$ y 0 de lo contrario, por lo tanto $\sigma(v_i, w_j) = -\delta_{ij}$ y T es por lo tanto una base de Darboux. \square

- Demuestre que existe una base de Darboux T y una matriz $A \in M_{n \times n}(K)$ tal que

$$\begin{bmatrix} f \end{bmatrix}_T^T = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A^\top \end{bmatrix}$$

.

Demostración. Ya se ha demostrado que para cualquier base S si la representación matricial de f es

$$\begin{bmatrix} f \end{bmatrix}_S^S = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

entonces la representación del adjunto de f , g es igual a

$$\begin{bmatrix} g \end{bmatrix}_S^S = \begin{bmatrix} A_{22}^\top & -A_{12}^\top \\ -A_{21}^\top & A_{11}^\top \end{bmatrix}$$

y por lo tanto si el operador es autoadjunto entonces tenemos que $A_{11} = A_{22}^\top$. Solo nos falta demostrar que existe una base de Darboux tal que A_{12} y A_{21} son iguales a 0. Esta base la podemos obtener de la misma manera que se obtiene la forma canónica de Jordan. El resultado es una matriz diagonal con bloques que cumple los requisitos establecidos. \square

- Sea $F \in M_{6 \times 6}(K)$ la matriz

$$F = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ -8 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Encuentre una matriz simpléctica $S \in M_{6 \times 6}(K)$ y una matriz $A \in M_{3 \times 3}(K)$ tales que

$$S^{-1}FS = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A^\top \end{bmatrix}$$

.

Demostración. Sea f la transformación asociada a la matriz F . El polinomio característico de esta matriz es $P(x) = (x - 1)^2(x + 1)^4$. Esto nos da los valores propios -1 y 1. Entonces por lo demostrado anteriormente tenemos que $\ker((f - id_V)^2)$ y

$\ker((f + id_V)^4)$ son espacios simplécticos. Ahora, los vectores propios asociados a 1 son $(0, 0, 1, 0, 0, 0)$ y $(0, 0, 0, 0, 0, 1)$. Por otra parte los vectores asociados al valor propio -1 son $(0, 1, 0, 0, 4, 0)$, y $(1, 0, 0, 2, 0, 0)$. Y los vectores cíclicos de grado 2 de este espacio son $(1, 0, 0, 0, 0, 0)$ y $(0, 0, 0, 1, 0, 0)$ y $(f + id_v)(1, 0, 0, 0, 0, 0) = (0, -2, 0, 0, -8, 0)$ y $(0, 0, 0, 0, 1, 0)$ es un vector tal que el producto simpléctico $\sigma((0, 0, 0, 0, 1, 0), (0, -2, 0, 0, -8, 0)) = -2 \neq 0$. Entonces, aplicamos el método para calcular la base de Darboux mostrada en el numeral cuatro del punto anterior. Primero tomamos $w = -\frac{1}{2}(0, 0, 0, 0, 1, 0)$, ahora tomemos $w' = w - \sigma(w, v)(f + id_v)(w) = (0, 0, 0, 0, -\frac{1}{2}, 0) - 0 * (f + id_v)(w) = 0$. Entonces $\{(1, 0, 0, 0, 0, 0), (0, -2, 0, 0, -8, 0), (1/2, 0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 0, -1/2, 0)\}$ es una base de Darboux para este espacio simpléctico. Por lo tanto, la base de Darboux $T = \{(1, 0, 0, 0, 0, 0), (0, -2, 0, 0, -8, 0), (0, 0, 1, 0, 0, 0), (1/2, 0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 0, -1/2, 0), (0, 0, 0, 0, 0, 1)\}$. Entonces

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

por lo que vemos que la matriz es simpléctica. Y

$$S^{-1}FS = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo que

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es la matriz buscada. □