Algebra Lineal II: Taller

Jonathan Andrés Niño Cortés

26 de marzo de 2015

Para esta tarea, utilizamos las siguientes definiciones:

Definición 0.1. Decimos que f es *semi-simple* si para todo $V_1 \leq V$ invariante bajo f existe $V_2 \leq V$ invariante bajo f tal que $V = V_1 \oplus V_2$.

Definición 0.2. El *polinomio minimal* de f, $P_{f,\text{mín}}(t) \in K[t]$ es el polinomio de menor grado tal que $P_{f,\text{mín}}(f) = 0$

Ejercicio 1. Demuestre que el polinomio minimal divide al polinomio característico. (*Ayuda*: usando el algoritmo de la división, divida el polinomio característico por el polinomio minimal para obtener un residuo y verifique que este es igual a cero.)

Demostración. Suponga que □

Ejercicio 2. Sea $\lambda \in K$ y defina $f \in \text{Hom}_K(K^2, K^2)$ por:

$$f(x, y) = (\lambda x + y, \lambda y)$$

Verifique que f no es semi-simple. Encuentre el polinomio minimal de f

Solución

Ejercicio 3. Sea $\lambda \in K$ y defina $f \in \text{Hom}_K(K^2, K^2)$ por:

$$f(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$$

Encuentre el polinomio minimal de f. Verifique que f es semi-simple.

Solución

Ejercicio 4. Considere los operadores $g, h \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$ definidos por:

$$g(x, y, z, w) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}w, \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1}{2}z, -\frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}z, -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}w\right)$$
$$h(x, y, z, w) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}z, \frac{\sqrt{3}}{2}y + z - \frac{1}{2}w, \frac{1}{2}x - y + \frac{\sqrt{3}}{2}z, -\frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}w\right)$$

y los operadores $g_{\mathbb{C}}$ y $H_{\mathbb{C}} \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^4, \mathbb{C}^4)$ dadas por las mismas fórmulas.

1. Verifique que g y h no tiene valores propios y que los valores propios de $g_{\mathbb{C}}$ y $h_{\mathbb{C}}$ son $\lambda = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i-)$ y $\bar{\lambda} = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - i)$.

2. Verifique que si $u + iv$, con $u, v \in \mathbb{R}^4$, es un vector propio de $g_{\mathbb{C}}$ asociado a λ, entonces $u - iv$ es un vector propio de $g_{\mathbb{C}}$ asociado a $\bar{\lambda}$

3. Encuentre una base de Jordan para $g_{\mathbb{C}}$ y para $h_{\mathbb{C}}$ de la forma $T = \{u_1 + iv_1, u_2 + iv_2, u_1 - iv_1, u_2 - iv_2\}$

4. Usando la notación de los vectores en el numeral anterior, encuentre la representación matricial de g y h relativas a la base $S = \{u_1, -v_1, u_2, -v_2\}$

5. Encuentre los polinomios minimales de g y h

Solución

Ejercicio 5. Suponga que f es semi-simple y sea $V_1 \leq V$ un subespacio invariante bajo f. Demuestre que la restricción de f a$V_1, f_1 \in \mathrm{Hom}_K(V_1, V_1)$ es semi-simple

Demostración. Suponga □

Ejercicio 6. Suponga que f es semi-simple, demuestre que existe una descomposición:

$$V = V_1 \otimes \ldots \otimes V_r$$

tal que, para $i = 1, \ldots, r, V_i$ es invariante bajo f y la restricción de este a $V_i, f_i \in \mathrm{Hom}_K(V_i, V_i)$ es simple. (*Ayuda:* Use inducción fuerte en $n = \dim_K(V)$), es decir asuma que el resultado es cierto para todo operador en un espacio de dimensión estrictamente menor que n y use el punto anterior).

Demostración. Suponga que: □

Ejercicio 7. Demuestre que el polinomio minimal de un operador semi-simple es un producto de polinomios irreducibles ninguno de ellos repetido (es decir, elevados únicamente a la primera potencia; es decir, sin cuadrados que lo dividan) usando los siguientes pasos:

1. Usando la descomposición del punto anterior, demuestre que el polinomio minimal de f_i divide al polinomio minimal de f

2. Demuestre que el mínimo común múltiplos de los polinomios minimales de $f_1, \ldots, f_r$ es el polinomio mínimal de f. (*Ayuda*: Sea $P(t)$ este mínimo común múltiplo, dado $v \in V$, tome $v_i \in V_i, i = 1, \ldots, r$, tales que $v = v_1 + \ldots + v_r$, demuestre que $P(f)(v) = P(f)(v_1) + \ldots + P(f)(v_r) = 0 + \ldots + 0 = 0$)

3. Concluya. (*Ayuda: El polinomio minimal de un operador simple es irreducible.*)

Solución

Ejercicio 8. Identifique entre los operadores f, g de $\mathbb{R}^4$ ya definidos, cual es semi-simple y cual no lo es. Justifique su respuesta.

Solución

- Dividiendo $P_f(x)$ por $P_{f,min}(x)$ obtenemos dos polinomios $Q(x)$ y $R(x)$ tales que

  $$P_f(x) = Q(x)P_{f,min}(x) + R(x)$$

  y $deg(R) < deg(P_{f,min})$.

  Ahora si evaluamos estos polinomios tenemos que $P_f(f) = 0$ por el teorema de Calley-Hamilton y $P_{f,min} = 0$ por la definición del polinomio minimal. Concluimos por lo tanto que $R(f) = 0$ pero para que no contradiga la minimalidad del polinomio local concluimos que $R(x) = 0$. Por lo tanto, el polinomio caracteristico es un multiplo del polinomio minimal.

- La matriz asociada a esta transformación es

  $$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

  Y el polinomio característico se calcula como

  $$\begin{vmatrix} t-\lambda & -1 \\ 0 & t-\lambda \end{vmatrix} = (t-\lambda)^2$$

  .

  Por el punto anterior, el polinomio minimal en este caso puede ser $t-\lambda$ o $(t-\lambda)^2$. Pero para descartar el primer caso podemos tomar por ejemplo el vector $(0,1)$. Tenemos que $(f-\lambda Id)(0,1) = (1,\lambda) - (0,\lambda) = (1,0) \neq (0,0)$. Por lo tanto, el polinomio minimal es $(t-\lambda)^2$.

- Esta transformación es precisamente multiplicación por λ, es decir, $f = \lambda Id$. El polinomio caracteristico de esta transformación es el mismo que el anterior $(t-\lambda)^2$ pero en este caso el polinomio minimal si es $t-\lambda$. Esto porque $f-\lambda Id = \lambda Id - \lambda_I d = 0$. Esta transformación es semi-simple porque cualquier subespacio V es invariante $f(V) = \lambda V \subseteq V$.