Taller de Álgebra Lineal

Jonathan Niño

3 de abril de 2015

Para esta tarea, utilizamos las siguientes definiciones:

Definición 0.1. Decimos que f es *semi-simple* si para todo $V_1 \leq V$ invariante bajo f existe $V_2 \leq V$ invariante bajo f tal que $V = V_1 \oplus V_2$.

Definición 0.2. El *polinomio minimal* de f, $P_{f,\text{mín}}(t) \in K[t]$ es el polinomio de menor grado tal que $P_{f,\text{mín}}(f) = 0$

Ejercicio 1. Demuestre que el polinomio minimal divide al polinomio característico. (*Ayuda*: usando el algoritmo de la división, divida el polinomio característico por el polinomio minimal para obtener un residuo y verifique que este es igual a cero.)

Demostración. Suponga que □

Ejercicio 2. Sea $\lambda \in K$ y defina $f \in \mathrm{Hom}_K(K^2, K^2)$ por:

$$f(x, y) = (\lambda x + y, \lambda y)$$

Verifique que f no es semi-simple. Encuentre el polinomio minimal de f

Solución

Ejercicio 3. Sea $\lambda \in K$ y defina $f \in \mathrm{Hom}_K(K^2, K^2)$ por:

$$f(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$$

Encuentre el polinomio minimal de f. Verifique que f es semi-simple.

Solución

Ejercicio 4. Considere los operadores $g, h \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$ definidos por:

$$g(x, y, z, w) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}w, \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1}{2}z, -\frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}z, -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}w\right)$$
$$h(x, y, z, w) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}z, \frac{\sqrt{3}}{2}y + z - \frac{1}{2}w, \frac{1}{2}x - y + \frac{\sqrt{3}}{2}z, -\frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}w\right)$$

y los operadores $g_{\mathbb{C}}$ y $H_{\mathbb{C}} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^4, \mathbb{C}^4)$ dadas por las mismas fórmulas.

1. Verifique que g y h no tiene valores propios y que los valores propios de $g_{\mathbb{C}}$ y $h_{\mathbb{C}}$ son $\lambda = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i-)$ y $\bar{\lambda} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}-i)$.
2. Verifique que si $u+iv$, con $u, v \in \mathbb{R}^4$, es un vector propio de $g_{\mathbb{C}}$ asociado a λ, entonces $u - iv$ es un vector propio de $g_{\mathbb{C}}$ asociado a $\bar{\lambda}$
3. Encuentre una base de Jordan para $g_{\mathbb{C}}$ y para $h_{\mathbb{C}}$ de la forma $T = \{u_1 + iv_1, u_2 + iv_2, u_1 - iv_1, u_2 - iv_2\}$
4. Usando la notación de los vectores en el numeral anterior, encuentre la representación matricial de g y h relativas a la base $S = \{u_1, -v_1, u_2, -v_2\}$
5. Encuentre los polinomios minimales de g y h

Solución

1. La matriz asociada al operador g es

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Y el polinomio característico de g es

$$\begin{vmatrix} t-\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & t-\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & t-\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & t-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} = (t-\frac{\sqrt{3}}{2}) \begin{vmatrix} t-\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & t-\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & t-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix}$$

$$-(-\frac{1}{2}) \begin{vmatrix} 0 & t-\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & t-\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = (t-\frac{\sqrt{3}}{2})^2 \begin{vmatrix} t-\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & t-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} + (\frac{1}{2})^2 \begin{vmatrix} t-\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & t-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix}$$

$$= (t-\frac{\sqrt{3}}{2})^2((t-\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2) + (\frac{1}{2})^2((t-\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2)$$
$$= ((t-\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2)((t-\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2) = ((t-\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2)^2$$

Vemos que este polinomio no tiene raíces en $\mathbb{R}$ porque $(t-\frac{\sqrt{3}}{2})^2$ es mayor o igual a 0. Luego, $(t-\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2$ es estrictamente mayor que 0 y también su cuadrado.

En $\mathbb{C}$ este polinomio si tiene raíces. La descomposición esta dada por la fórmula para factorizar resta de cuadrados.

$$((t-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{1}{2})^2)^2 = ((t-\frac{\sqrt{3}}{2})^2-(i\frac{1}{2})^2)^2 = (t-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2})^2(t-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2})^2$$

Concluimos que $\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$ y $\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}$ son las dos raices del polinomio caracteristico.

Para el operador h la matriz asociada es

$$B=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

El polinomio característico es

$$\begin{vmatrix} t-\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & t-\frac{\sqrt{3}}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & t-\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & t-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} = (t-\frac{\sqrt{3}}{2}) \begin{vmatrix} t-\frac{\sqrt{3}}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & t-\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & t-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix}$$
$$+(-\frac{1}{2}) \begin{vmatrix} 0 & t-\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & t-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} = (t-\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{1}{2} \begin{vmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ t-\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{vmatrix} + (t-\frac{\sqrt{3}}{2}) \begin{vmatrix} t-\frac{\sqrt{3}}{2} & -1 \\ 1 & t-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix})$$
$$+(-\frac{1}{2})(\frac{1}{2}) \begin{vmatrix} t-\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & t-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} = (t-\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{1}{2}(t-\frac{\sqrt{3}}{2})(-\frac{1}{2})+(t-\frac{\sqrt{3}}{2})((t-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+1))$$
$$+(-\frac{1}{2})(\frac{1}{2})((t-\frac{\sqrt{3}}{2})^2-(\frac{1}{2})^2) = (t-\frac{\sqrt{3}}{2})^2((t-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+\frac{3}{4})-(\frac{1}{2})^2((t-\frac{\sqrt{3}}{2})^2-\frac{1}{4})$$
$$=(t-\frac{\sqrt{3}}{2})^2((t-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+\frac{1}{4}+\frac{1}{2})-(\frac{1}{2})^2((t-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+\frac{1}{4}-\frac{1}{2})$$
$$=(t-\frac{\sqrt{3}}{2})^2((t-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+\frac{1}{4})-(\frac{1}{2})^2((t-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+\frac{1}{4})+\frac{1}{2}(t-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{1}{2})^2\frac{1}{2}$$
$$=((t-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+\frac{1}{4})((t-\frac{\sqrt{3}}{2})^2-(\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}) = ((t-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+\frac{1}{4})((t-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+\frac{1}{4})$$
$$=((t-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+\frac{1}{2}^2)^2$$

Así que es el mismo polinomio característico que para el operador g y por lo tanto al igual que este, no tiene valores propios en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$ son los mismos valores propios.

2. Primero demostremos que para cualquier $z\in\mathbb{C}$, $g_{\mathbb{C}}(\overline{z})=g_{\mathbb{C}}\overline{f(z)}$, esto es así porque todos los términos de la matriz de $g_{\mathbb{C}}$ son reales. Notese que $h_{\mathbb{C}}$ también cumple esta condición por lo que lo anterior también vale para $h_{\mathbb{C}}$.

Sea $z = u + iv$ con $u, v \in \mathbb{R}$. Por linealidad tenemos que $g_{\mathbb{C}}(z) = g_{\mathbb{C}}(u) + ig_{\mathbb{C}}(v)$, pero como u y v son reales $g_{\mathbb{C}}(u) = g(u) \in \mathbb{R}$ y $g_{\mathbb{C}}(v) = g(v) \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, $g(u)$ es la parte real de $g_{\mathbb{C}}(z)$ y $g(v)$ es la parte imaginaria de $g_{\mathbb{C}}(z)$.

Ahora, el conjugado de z es $u - iv$. $g_{\mathbb{C}}(\overline{z}) = g_{\mathbb{C}}(u) - ig_{\mathbb{C}}(v) = g(u) - ig(v)$. Vemos que la parte real es la misma que la anterior y la parte imaginaria es el opuesto aditivo de la anterior. Por lo tanto, es el conjugado de la anterior, es decir, $\overline{g(z)}$.

Ahora sea $z = u+iv$ un vector propio asociado a $\lambda = \alpha+i\beta$. Entonces, $\overline{z} = u - iv$ es un vector propio asociado a $\overline{\lambda}$. La primera oración se traduce en que $f(z) = \lambda z$. Por propiedades de conjugación tenemos que $\overline{\lambda z} = \overline{z}\overline{\lambda}$. Luego $f(\overline{z}) = \overline{f(z)} = \overline{\lambda z} = \overline{z}\overline{\lambda}$. Por lo que vemos que $\overline{z}$ es el vector propio asociado a $\overline{\lambda}$.

3. Para hallar una base canónica de Jordan para $g_{\mathbb{C}}$ primero necesitamos calcular los vectores propios asociados a cada valor propio. Para esto primero necesitamos calcular el kernel de $\lambda Id - g_{\mathbb{C}}$. La matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} \lambda - \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \lambda - \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \lambda - \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \lambda - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & i\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & i\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & i\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Reduciendo por Gauss-Jordan obtenemos

$$\begin{pmatrix} i\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & i\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & i\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & i\frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & -1 \\ 0 & i & -1 & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 0 & i & -1 & 0 \\ i & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 0 & -1 & -i & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces vemos que el kernel es de dimensión 2, es decir que tiene dos vectores asociados. Estos vectores son $(1, 0, 0, i)$ y $(0, 1, i, 0)$. Por el punto anterior los vectores propios asociados a $\overline{\lambda}$ serían $(1, 0, 0, -i)$ y $(0, 1, -i, 0)$. Por lo tanto si tomamos $u_1 = (1, 0, 0, 0)$, $u_2 = (0, 1, 0, 0)$, $v_1 = (0, 0, 0, 1)$ y $v_2 = (0, 0, 1, 0)$ la base canónica de Jordan sería precisamente $T = \{u_1 + iv_1, u_2 + iv_2, u_1 - iv_1, u_2 - iv_2\}$.

Para $h_{\mathbb{C}}$ debemos calcular el kernel de $\lambda Id - h_{\mathbb{C}}$. La matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} \lambda - \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \lambda - \frac{\sqrt{3}}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \lambda - \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \lambda - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & i\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & i\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & i\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

De nuevo reducimos mediante Gauss-Jordan para obtener

$$\begin{pmatrix} i\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & i\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & i\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & i\frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & 2i & -i \\ i & -2i & 1 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & 2i & -i \\ -1 & 2 & i & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -i \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & 2i & -i \\ 0 & 2 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & 2i & -2i \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & 2i & -i \\ 0 & 0 & -2i & 2i \\ 0 & 0 & 2i & -2i \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & 2i & -i \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En este caso el kernel es solo de una dimensión y es el generado por el vector $(-i, -i, 1, 1)$.

Ahora necesitamos calcular el kernel de $(\lambda Id - h_{\mathbb{C}})^2$. La matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} i\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & i\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & i\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & i\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & i\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & i\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & i\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -i\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & -i & i\frac{1}{2} \\ -i\frac{1}{2} & i & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & i\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Y para averiguar su kernel reducimos esta matriz usando Gauss-Jordan.

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -i\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & -i & i\frac{1}{2} \\ -i\frac{1}{2} & i & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & i\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2i & i \\ 0 & 1 & i & 0 \\ -1 & 2 & 2i & -i \\ 0 & -1 & -i & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces vemos que el vector $(-i,0,0,1)$ es un vector del segundo nivel pues no esta incluido en el kernel anterior. Y $(\lambda Id - h_{\mathcal{C}})(-i,0,0,1) = (\frac{1}{2},\frac{1}{2},i\frac{1}{2},i\frac{1}{2})$ sería el segundo vector de la base de Jordan.

Por el segundo punto tenemos que $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-i\frac{1}{2},-i\frac{1}{2})$ esta en el kernel de $(\overline{\lambda} Id - h_{\mathcal{C}})$. Ahora para calcular un vector del segundo nivel tenemos que calcular el kernel de $(\overline{\lambda} Id - h_{\mathcal{C}})^2$.

Pero observemos que $(i,0,0,1)$ está en este kernel y no en el kernel anterior.

$$(\overline{\lambda} Id - h_{\mathcal{C}})(i,0,0,1) = \begin{pmatrix} -i\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -i\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -i\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -i\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -i\frac{1}{2} \\ -i\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Y tenemos que $(\overline{\lambda} Id - h_{\mathcal{C}})(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-i\frac{1}{2},-i\frac{1}{2}) = (0,0,0,0)$ por el punto anterior. Luego si tomamos $u_1 = (0,0,0,1)$, $v_1 = (1,0,0,0)$, $u_2 = (\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0)$ y $v_2 = (0,0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. La base $T = \{u_1 + iv_1, u_2 + iv_2, u_1 - iv_1, u_2 - iv_2\}$ es una base canónica de Jordan.

4. Primero calculemos la matriz de transformación de la nueva base sugerida a la base canónica. Para g esta sería.

$$[id]_S^{can} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz inversa $[id]_{can}^S$ la podemos calcular usando Gauss-Jordan.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Así que

$$[id]^S_{can} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces la representación matricial de g en esta base esta dada por

$$\begin{aligned}
[g]^S_S &= [id]^S_{can}[g]^{can}_{can}[id]^{can}_S \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Vemos que logramos diagonalizarla por bloques simples.

Para h tenemos que la matriz de transformación de S a la inversa es

$$[id]^{can}_S = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

La matriz inversa de esta matriz la calculamos de nuevo usando Gauss-Jordan.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces concluimos que

$$[id]^S_{can} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces la matriz de h en esta base esta dada por

$$\begin{aligned}
[h]^S_S &= [id]^S_{can}[h]^{can}_{can}[id]^{can}_S \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Vemos que en este caso el resultado no fue una matriz diagonal por bloques.

5. El polinomio minimal divide al polinomio caracteristico. Para g el polinomio minimal es $(t - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + \frac{1}{2}^2) = t^2 - \sqrt{3}t + 1$.

Ejercicio 5. Suponga que f es semi-simple y sea $V_1 \leq V$ un subespacio invariante bajo f. Demuestre que la restricción de f a $V_1, f_1 \in \mathrm{Hom}_K(V_1, V_1)$ es semi-simple.

Demostración. Suponga $\square$

Ejercicio 6. Suponga que f es semi-simple, demuestre que existe una descomposición:

$$V = V_1 \otimes \ldots \otimes V_r$$

tal que, para $i = 1, \ldots, r, V_i$ es invariante bajo f y la restricción de este a $V_i, f_i \in \mathrm{Hom}_K(V_i, V_i)$ es simple. (*Ayuda:* Use inducción fuerte en $n = \dim_K(V)$), es decir asuma que el resultado es cierto para todo operador en un espacio de dimensión estrictamente menor que n y use el punto anterior).

Demostración. Suponga que: □

Ejercicio 7. Demuestre que el polinomio minimal de un operador semi-simple es un producto de polinomios irreducibles ninguno de ellos repetido (es decir, elevados únicamente a la primera potencia; es decir, sin cuadrados que lo dividan) usando los siguientes pasos:

1. Usando la descomposición del punto anterior, demuestre que el polinomio minimal de f_i divide al polinomio minimal de f

2. Demuestre que el mínimo común múltiplos de los polinomios minimales de $f_1, \ldots, f_r$ es el polinomio mínimal de f. (*Ayuda*: Sea $P(t)$ este mínimo común múltiplo, dado $v \in V$, tome $v_i \in V_i, i = 1, \ldots, r$, tales que $v = v_1 + \ldots + v_r$, demuestre que $P(f)(v) = P(f)(v_1) + \ldots + P(f)(v_r) = 0 + \ldots + 0 = 0$)

3. Concluya. (*Ayuda: El polinomio minimal de un operador simple es irreducible.*)

Solución

Ejercicio 8. Identifique entre los operadores f, g de $\mathbb{R}^4$ ya definidos, cual es semi-simple y cual no lo es. Justifique su respuesta.

Solución