Proyecto de grado

Jonathan Andrés Niño Cortés

27 de enero de 2016

1. (*) Sean K y Y espacios métricos, con K compacto. Muestre que toda función continua $f : K \to Y$ es uniformemente continua utilizando la caracterización de los espacios compactos como los espacios que son completos y totalmente acotados. (N.B. Por favor utilizen directamente la caracterización, el ejercicio es para que ustedes escriban una demostración corta y diferente de la demostración del libro de Rudin de este hecho.)

   Demostración. Idea principal de la demostración propuesta por Santiago Cortés.

   Supongase por contradicción que f no es uniformemente compacta, es decir,

   $$\exists \epsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \exists x, y : d(x, y) < \delta \wedge d(f(x), f(y)) \geq \epsilon$$

   De hecho se puede demostrar que deben existir infinitas parejas (x, y) que cumplen la condición. De lo contrario se podria tomar como δ un valor menor a la minima distancia entre los finitos puntos encontrados, satisfaciendo así la condición que queremos negar.

   Ahora utilizando el hecho de que K es totalmente acotada tenemos que para cualquier $\delta < 0$ existe un conjunto finito de bolas de radio δ tales que cubren todo K. Luego, por el principio del palomar, existe al menos una de estas bolas $B_\delta(x)$ que debe contener infinitos de estos puntos. Esta bola a su vez es totalmente acotada y luego, usando el mismo argumento anterior, es posible encontrar una bola de tamaño $\delta' < \delta$ tal que su intersección con la bola anterior no es vacía y tambien incluye infinitos de los puntos descritos anteriormente. De esta manera es posible construir una sucesión de bolas U_n cada una con una cantidad infinita de puntos x y puntos y, como se describieron anteriormente y que además cumplen las siguientes propiedades.

   - U_n es una bola de radio $1/2^n$
   - $U_n \cap U_{n+1} \neq \emptyset$

   Luego, podemos construir una sucesión tal que el elemento par x_{2n} sea uno de los infinitos puntos en la bola U_n descritos anteriormente y x_{2n+1} sea el elemento correspondiente tal que $d(x_{2n}, x_{2n+1}) < 1/2^n$ y $d(f(x_{2n}), f(x_{2n+1})) > \epsilon$.

Ahora, por convergencia de la serie $\Sigma 1/2^n$, la sucesión anterior es una sucesión de Cauchy que converge usando nuestro supuesto que X es completo. Si tomamos la sucesión $f(x_n)$ formada por las imagenes de la secuencia, sabemos por continuidad de f que esta sucesión también debe converger en Y y por lo tanto debe ser de Cauchy. Sin embargo, por construcción $f(x_n)$ no es de Cauchy, puesto que para cualquier N tenemos que $d(f(x_{2N}), f(x_{2N+1})) > \epsilon$. Por lo tanto, llegamos a una contradicción. $\square$

2. Determine si la siguiente función $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ es integrable según Riemann o no lo es:

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbf{Q} \\ q & \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ con } p,\, q \text{ coprimos.} \end{cases}$$

Demostración. Vamos a demostrar que la función anterior es integrablo segun Rieman utilizando el criterio de que para cualquier ϵ existe una partición P tal que $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$. Puesto que los irracionales son densos en cualquier intervalo, se puede ver que para cualquier partición P, $L(f, P) = 0$. Por lo tanto, el problema se resume a probar que $U(f, P)$ se puede hacer arbitrariamente pequeño.

Para cualquier $n \in \mathbf{N}$ tenemos que existen finitos $x \in [0, 1]$ tales que $f(x) = 1/n$, pues para tener dicha imagen, el x debe ser de la forma p/n con $p \in \mathbf{N}$ y $0 < p \leq n$ y por lo tanto solo pueden haber a lo sumo n elementos.

Ahora, si tomamos un $\epsilon > 0$, existen finitos $n \in \mathbf{N}$ tales que $1/n > \epsilon$ y, por lo tanto, existen finitos $x \in [0, 1]$ tales que $f(x) > \epsilon/2$ (Unión finita de finitos es finita). Sea m el número de estos puntos y sea $\{p_n\}$ la lista ordenada de estos puntos. Para cada punto p_n es posible encontrar dos puntos x_{2n-1} y x_{2n} tales que $x_{2n-1} \leq p_n \leq x_{2n}$ y $x_{2n} - x_{2n-1} < \frac{\epsilon}{2m}$. Adicionalmente puedo elegir los puntos de tal manera que si $i > j$ entonces $x_i > x_j$. Luego, a partir de los x_i escogidos y tomando $x_0 = 0$ y $x_{2m} = 1$ se puede construir una partición P.

Para esta partición, si calculamos los valores de M_i nos podemos dar cuenta de dos casos. Sí i es impar entonces $p_n \in [x_i, x_{i+1}]$ y por lo tanto $M_i(x_i - x_{i-1}) \leq M_i \frac{\epsilon}{2m} \leq \frac{\epsilon}{2m}$ (la ultima desigualdad se obtiene partiendo de que $0 \leq M_i \leq 1$). Por lo cual, si solamente hacemos la suma de los intervalos cuyo extremo izquierdo tiene indice impar tenemos que

$$\sum_{j=1}^{m} M_{2j}(x_{2j} - x_{2j-1}) < \sum_{j=0}^{m} \frac{\epsilon}{2m} < \epsilon/2.$$

Si por otro lado i es par entonces podemos inferir que $M_i < \epsilon/2$ puesto que no hay ningun p_n en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$. Por lo cual si solamente hacemos la suma de los intervalos cuyo extremo izquierdo tiene indice par tenemos que

$$\sum_{j=0}^{m} M_{2j+1}(x_{2j+1} - x_{2j}) < \epsilon/2 \sum_{j=0}^{m} (x_{2j+1} - x_{2j}) < \epsilon/2$$

.

Observese que la ultima desigualdad se tiene porque la suma de las distancias entre los intervalos de la partición debe ser igual a 1 por lo que la sumatoria debe ser menor o igual.

Luego utilizando estas dos desigualdades obtenemos que

$$U(f,P) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

.

$\square$