Tarea 4

Jonathan Andrés Niño Cortés

7 de marzo de 2016

(1.) (i.) Sea $\mathfrak{m}$ una medida exterior de Carathéodory sobre X. Si para todo $A \subseteq X$ existe $B \in M_{\mathfrak{m}}$ con $A \subseteq B$ y $\mathfrak{m}(A) = \mathfrak{m}(B)$ la medida exterior se llama regular. Muestre que si $\mathfrak{m}$ es una medida de Carathéodory regular y $\mathfrak{m}(A) < \infty$, entonces $A \in M_{\mathfrak{m}}$ si y sólo si

$$\mathfrak{m}(A) + \mathfrak{m}(X \backslash A) = \mathfrak{m}(X) \tag{1.1}$$

Demostración. Si suponemos que A es $\mathfrak{m}-$medible entonces por la definición de medibilidad de Carathéodory tenemos que $\mathfrak{m}(X) = \mathfrak{m}(A) + \mathfrak{m}(X \backslash A)$. Para la otra implicación tómese A tal que cumple la expresión (1.1). Por regularidad, tenemos que existe $B \subseteq X$ tal que

$$B \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{m}},\ A \subseteq B \text{ y } \mathfrak{m}(A) = \mathfrak{m}(B) \tag{1.2}$$

.

Puesto que B es $\mathfrak{m}$-medible tenemos en particular que

$$\mathfrak{m}(X) = \mathfrak{m}(B) + \mathfrak{m}(X \backslash B). \tag{1.3}$$

Utilizando (1.1), (1.2), (1.3) concluimos que

$$\mathfrak{m}(X \backslash A) = \mathfrak{m}(X) - \mathfrak{m}(A) = \mathfrak{m}(X) - \mathfrak{m}(B) = \mathfrak{m}(X \backslash B). \tag{1.4}$$

Ahora tenemos de nuevo por medibilidad de B que

$$\mathfrak{m}(X \backslash A) = \mathfrak{m}([X \backslash A] \cap B) + \mathfrak{m}([X \backslash A] \cap [X \backslash B]). \tag{1.5}$$

Puesto que $A \subseteq B$ tenemos que $X \backslash B \subseteq X \backslash A$ y por lo tanto $[X \backslash A] \cap [X \backslash B] = [X \backslash B]$, es decir que

$$\mathfrak{m}([X \backslash A] \cap [X \backslash B]) = \mathfrak{m}(X \backslash B) \tag{1.6}$$

.

Utilizando (1.4) (1.5) y (1.6) deducimos que

$$\mathfrak{m}([X \backslash A] \cap B) = \mathfrak{m}(X \backslash A) - \mathfrak{m}([X \backslash A] \cap [X \backslash B]) = \mathfrak{m}(X \backslash A) - \mathfrak{m}(X \backslash B) = 0. \tag{1.7}$$

Así, concluimos que el conjunto $[X\backslash A] \cap B$ tiene medida 0 y por lo tanto es $\mathfrak{m}$-medible. Ver [HS75, Teorema 10.7]. Por ultimo, puesto que podemos escribir A como intersección de $\mathfrak{m}-$medibles, valiendonos de la siguiente expresión,

$$A = B \cap ([X\backslash A] \cap B)^C \tag{1.8}$$

concluimos que A es medible. $\square$

(ii.) Muestre que aunque se tenga $\mathfrak{m}(X) < \infty$ en general pueden existir conjuntos $A \subseteq X$ **no medibles** según Carathéodory tales que

$$\mathfrak{m}(A) + \mathfrak{m}(X\backslash A) = \mathfrak{m}(X)$$

(Sugerencia: Existe un ejemplo con $|X| = 3$.)

Demostración. Sea $X = \{a, b, c\}$, y definamos una medida externa de Carathéodory $\mathfrak{m} : \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}(\emptyset) &= 0 \\ \mathfrak{m}(\{a\}) = \mathfrak{m}(\{b\}) = \mathfrak{m}(\{c\}) &= 2 \\ \mathfrak{m}(\{a, b\}) = \mathfrak{m}(\{a, c\}) = \mathfrak{m}(\{b, c\}) &= 3 \\ \mathfrak{m}(X) &= 5. \end{aligned}$$

Vemos que se cumple las condiciones de que el vacío es igual a 0 y que la función es positiva. También es facil ver que si $A \subseteq B$ entonces $\mathfrak{m}(A) \leq \mathfrak{m}(B)$.
También tenemos subadtividad, observemos que esto es así para algunos casos especificos.

$$\begin{aligned} 5 = \mathfrak{m}(\{a\}) + \mathfrak{m}(\{b, c\}) &\geq \mathfrak{m}(X) = 5 \\ 4 = \mathfrak{m}(\{a\}) + \mathfrak{m}(\{b\}) &\geq \mathfrak{m}(\{a, b\}) = 3 \\ 6 = \mathfrak{m}(\{a\}) + \mathfrak{m}(\{b\}) + \mathfrak{m}(\{c\}) &\geq \mathfrak{m}(X) = 5 \\ 6 = \mathfrak{m}(\{a, b\}) + \mathfrak{m}(\{b, c\}) &\geq \mathfrak{m}(X) = 5 \end{aligned}$$

Los demás casos son triviales o analogos a los mostrados anteriormente, por lo que podemos concluir que se tiene subaditividad.
Ahora nótese que $A = \{a\}$ cumple la propiedad (1.1), pues

$$2 + 3 = \mathfrak{m}(\{a\}) + \mathfrak{m}(\{b, c\}) = \mathfrak{m}(X) = 5$$

Pero A no es medible pues si tomamos $B = \{a, b\}$ tenemos que

$$3 = \mathfrak{m}(B) \lneq \mathfrak{m}(B \cap A) + \mathfrak{m}(B \cap [X\backslash A]) = \mathfrak{m}(\{a\}) + \mathfrak{m}(\{b\}) = 2 + 2 = 4.$$

$\square$

(**2.**) (**i.**) Denote por $\mathbb{R}_d$ la recta real con la topología discreta. Muestre que el espacio $\mathbb{R}_d \times \mathbb{R}$ con la topología producto es localmente compacto.

Demostración. Para demostrar esto primero probamos tres lemas sencillos de topología general.

Lema 2.1. *Cualquier espacio X con la topología discreta es compacto.*

Demostración. Tómese cualquier $x \in X$. Si tomamos el singleton $\{x\}$ tenemos que es abierto porque en la topología discreta todo subconjunto de X es abierto y adicionalmente es compacto porque es finito. Por lo tanto $\{x\}$ es una vecindad compacta de X. Puesto que x es arbitrario concluimos que X es localmente compacto. $\square$

Lema 2.2. *El espacio $\mathbb{R}$ es localmente compacto.*

Demostración. Tómese cualquier $x \in \mathbb{R}$. Sabemos que existe algún intervalo abierto (a, b) tal que $x \in (a, b)$ y puesto que tenemos que $[a, b]$ es compacto concluimos que $[a, b]$ es una vecindad compacta de x. Ver [Mun00, § 29, Ejemplo 1]. $\square$

Lema 2.3. *Sean X y Y dos espacio topológicos localmente compactos. Entonces tenemos que el espacio $X \times Y$ con la topología producto es localmente compacto.*

Demostración. Tómese un punto cualquiera (x, y) en el producto. Puesto que X y Y son localmente compactos tenemos que existen conjuntos abiertos U, V y conjuntos compactos J, K tales que $x \in U \subseteq J \subseteq X$ y $y \in V \subseteq K \subseteq Y$. Puesto que el producto de compactos es compacto (ver [Mun00, Teorema 26.7]) y el producto de abiertos es abierto (ver [Mun00, § 15, La topología producto de $X \times Y$]), concluimos que

$$(x, y) \in U \times V \subseteq J \times K$$

por lo que concluimos que el espacio es localmente compacto. $\square$

Por el lema 2.1 y el lema 2.2 tenemos que $\mathbb{R}_d$ y $\mathbb{R}$ son localmente compactos. Finalmente por el lema 2.3 concluimos que el producto entre ellos $\mathbb{R}_d \times \mathbb{R}$ es localmente compacto. $\square$

(**ii.**) Para f definida sobre $\mathbb{R}_d \times \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}$ fijo, sea $f_{[x]}$ la función definida sobre $\mathbb{R}$ por:

$$f_{[x]}(y) := f(x, y).$$

Muestre que si $f \in C_{00}(\mathbb{R}_d \times \mathbb{R})$ se tiene que $f_{[x]}$ es idénticamente cero excepto que para un número finito de elementos $x \in \mathbb{R}$.

Demostración. Vamos a demostrar otro lema sencillo de topología

Lema 2.4. *Sea X un espacio con la topología discreta. Tenemos que K es compacto si y sólo si K tiene cardinalidad finita.*

Demostración. Si K es finito entonces para cualquier cobertura abierta de K puedo seleccionar por cada elemento un conjunto de la cobertura que lo contenga. La colección de estos conjuntos sería una subcobertura finita que contiene a K y por lo tanto K es compacto.

Para la otra implicación tómese un conjunto $A \subseteq X$ de cardinalidad infinita. La colección de singletons de los elementos de A es una cobertura abierta de A que no tiene subcobertura finita pues si retiramos un solo singleton de la colección dejaríamos de cubrir el elemento correspondiente. Por lo tanto la condición que K sea finito es necesaria para que K sea compacto. □

Tómese cualquier función f con soporte compacto y sea K el conjunto compacto correspondiente. Por un teorema de topología (ver [Mun00, Teorema 26.5]) tenemos que la imagen de K bajo una función continua es compacta. Por lo tanto, si π_1 y π_2 son las proyecciones de $\mathbb{R}_d \times \mathbb{R}$ a $\mathbb{R}_d$ y $\mathbb{R}$ respectivamente tenemos que $\pi_1(K)$ y $\pi_2(K)$ son compactos y por lo tanto $\pi_1(K) \times \pi_2(K)$ (ver nuevamente [Mun00, Teorema 26.7]). Adicionalmente por el **lema 2.4** sabemos que $\pi_1(K)$ es finito. Tenemos que $K \subseteq \pi_1(K) \times \pi_2(K)$. Luego como f es de soporte compacto tenemos que para cualquier $x \notin \pi_1(K)$, $f_{[x]}(y) = f(x, y) = 0$ para cualquier $y \in \mathbb{R}$. Así que probamos que $f_{[x]}$ es idénticamente 0 para cofinitos $x \in \mathbb{R}$. □

(iii.) Sea S la integral de Riemann y defina I sobre $C_{00}(\mathbb{R}_d \times \mathbb{R})$ por:

$$I(f) := \sum_{x \in \mathbb{R}} S(f_{[x]}).$$

0 Muestre que I es un funcional lineal positivo sobre $C_{00}(\mathbb{R}_d \times \mathbb{R})$.

Demostración. Tenemos que S es un funcional lineal, por lo que tenemos que sí f es idénticamente 0 entonces $S(f) = 0$ y además $S(f + g) = S(f) + S(g)$. Además por el punto anterior tenemos que $f_{[x]}$ es 0 en todos excepto finitos $x \in \mathbb{R}$. Sean $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ los elementos donde $f_{[x]} \neq 0$. Tenemos entonces que

$$I(f) = \sum_{x \in \mathbb{R}} S(f_{[x]}) = \sum_{i=1}^{n} S(f_{[x_i]}) = S(\sum_{i=1}^{n} f_{[x_i]}).$$

Es fácil ver que para $f, g \in C_{00}(\mathbb{R}_d \times \mathbb{R})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$(\alpha f + \beta g)_{[x]} = \alpha f_{[x]} + \beta g_{[x]}.$$

Luego

$$\begin{aligned} I(\alpha f + \beta g) &= S(\sum_{i=1}^{n} \alpha f_{[x]} + \beta g_{[x]}) = S(\alpha \sum_{i=1}^{n} f_{[x]} + \beta \sum_{i=1}^{n} g_{[x]}) \\ &= \alpha S(\sum_{i=1}^{n} f_{[x]}) + \beta S(\sum_{i=1}^{n} g_{[x]}) = \alpha I(f) + \beta I(g) \end{aligned}$$

□

por lo cual concluimos que I es un funcional lineal.

(iv.) Sea $\iota(A) := \overline{\overline{I}}(\chi_A)$, muestre que el conjunto $A = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ es localmente ι–nulo, sin embargo no es ι–nulo.

Demostración. Considere los subespacios de la forma $(\{a\}\times\mathbb{R})$ con $a \in \mathbb{R}_d$. Por un lado tenemos que este subespacio es abierto (de hecho también es un subespacio cerrado) por lo que todo conjunto abierto en el subespacio también es abierto en $\mathbb{R}_d \times \mathbb{R}$. Por otra parte este espacio es isomorfo a $\mathbb{R}$ tomando como isomorfismo la proyección sobre $\mathbb{R}$.

Por ultimo, notese que las funciones f con soporte compacto definidas en este conjunto también son de soporte compacto en todo el espacio si extendemos la función a una función f' que valga 0 en el complemento del subespacio. Esto se da puesto que un compacto en un subespacio también es compacto en el espacio originalm por lo tanto el mismo K se puede usar satisfactoriamente para subespacio y espacio. También se preserva la continuidad por el lema del pegamiento [Mun00, Teorema 18.3].

Entonces es fácil ver que para dicho f'

$$I(f') = I(f) = S(f)$$

Así que en este subespacio el funcional I coincide con el funcional S que origina la medida de Lebesgue. Puesto que tenemos la misma medida sobre un espacio que es isomorfo a $\mathbb{R}$ concluimos que para cualquier función $f \in \mathfrak{F}^+$

$$\overline{\overline{I}}(f') = \overline{\overline{S}}(f)$$

En particular tenemos que para cualquier conjunto $B \subseteq \mathbb{R}_d\times\mathbb{R}$ y cualquier $a \in \mathbb{R}_d$,

$$\iota(B \cap (\{a\}) \times \mathbb{R})) = \lambda(\pi_2(B \cap (\{a\}) \times \mathbb{R}))).$$

También tenemos por $\sigma-$aditividad que si un conjunto B es tal que $\pi_1(B)$ es a lo sumo enumerable entonces

$$\iota(B) = \sum_{i=0}^{\infty} \iota(B \cap (\{a_n\}) \times \mathbb{R})) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda(\pi_2(B \cap (\{a_n\}) \times \mathbb{R}))), \tag{2.1}$$

donde $\{a_n\}$ es una enumeración de $\pi_1(B)$.

Con esto podemos demostrar que A es localmete ι-nulo, pues para cualquier F compacto se tiene que

$$\iota(A \cap F) = \sum_{x:(x,0)\in F} \overline{\overline{I}}((\chi_A)_{[x]}) = \sum_{x:(x,0)\in F} \overline{\overline{S}}(\chi_{\{0\}}) = \sum_{x:(x,0)\in F} \lambda(\{0\}) = 0$$

Observese que las sumatorias anteriores son finitas, pues solo finitos x cumplen que $(x, 0) \in F$. Esto se debe a que estos puntos están contenidos en $\pi_1(F) \subseteq \mathbb{R}_d$

que es compacto y por lo tanto finito por el lema 2.4. Por lo tanto las sumatorias estan bien definidas.
Ahora vamos a demostrar que $\iota(A) = \infty$.
Recuérdese que

$$\iota(A) = \text{ínf}\{\iota(U) : U \text{ es abierto y } A \subseteq U\}. \tag{2.2}$$

Ver [HS75, Teorema 9.24]. Por lo tanto, sea U un abierto cualquiera tal que $A \subseteq U$. Ahora definamos U_x como $(U \cap (\{x\} \times \mathbb{R}))$. Es fácil ver que cada U_x es un abierto y adicionalmente tenemos que

$$\iota(U_x) = \lambda(\pi_2(U_x)) > 0,$$

pues la proyección envía abiertos en abiertos y para la medida de Lebesgue tenemos que la medida de cualquier abierto siempre es mayor a cero (esto es fácil de ver pues cualquier abierto contiene algún intervalo (a, b) y por lo tanto su medida es mayor a $b - a$).
Pero esto no basta para demostrar que la medida de U es infinito. Para esto vamos a probar que existe un $\alpha > 0$ para el cual existen infinitos U_x tales que $\iota(U) \geq \alpha$ Supongase por contradicción que este no es el caso. Es decir, que para cualquier α existen a lo sumo finitos $x \in \mathbb{R}_d$ tales que $\iota(U_x) \geq \alpha$. Entonces considere la sucesión de conjuntos $B_n = \{x \in \mathbb{R}_d : \iota(U_x) \geq 1/n\}$. Tenemos que

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_n = \mathbb{R}_d$$

pues para todo $x \in \mathbb{R}$, existe un n tal que $\iota(U_x)) \geq 1/n$. Llegamos a una contradicción pues la unión de los B_n es a lo sumo enumerable mientras que $\mathbb{R}_d$ es no enumerable. (De hecho si suponemos que hay a lo sumo enumerables x tales que $U_x \geq \alpha$ también llegamos a la misma contradicción, por lo cual hay no enumerables x's mayores a un α).
Finalmente para el α mencionado anteriormente tomamos una subcolección infinita enumerable $\{U_{x_n}\}$ tal que $\iota(U_{x_n}) \geq \alpha$. Es claro que esta subcolección es disyunta dos a dos. Definimos la sucesión creciente de conjuntos $\{V_n\}$, como $V_n = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_n}$; y tenemos por σ-aditivdad que $\iota(V_n) = \iota(\bigcup_{i=1}^{n} U_{x_n}) = \sum_{i=0}^{n} \iota(U_{x_n}) \geq n\alpha$.
Finalmente es claro que $V_1 \subseteq V_2 \subseteq \cdots \subseteq V_n \subseteq \cdots \subseteq U$. Luego tenemos por el teorema 10.13 [HS75] que

$$\iota(U) \geq \iota(\bigcup_{i=1}^{\infty} V_n) = \lim_{n\to\infty} \iota(V_n) \geq \lim_{n\to\infty} \alpha n = \infty.$$

Concluimos finalmente que $\iota(U) = \infty$, y puesto que esto se hizo para U arbitrario que contuviera a A concluimos por (2.2) que $\iota(A) = \infty$ y que por lo tanto no es ι-nulo.

$\square$

(**3.**) Sea $T \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto λ–medible tal que $\lambda(T) > 0$. Muestre que $T - T$ contiene un intervalo. (Ejercicio 10.43 del libro de texto, viene con sugerencia.)

Demostración. Siguiendo los hints propuestos en [HS75, Ejercicio 10.43] vamos a demostrar tres lemas intermedios para demostrar el ejercicio.

Lema 3.1. *Si $U = (a, b)$ con $a, b \in \mathbb{R}$ y V un abierto cualquiera se tiene que la función*

$$x \mapsto \lambda((x + U) \cap V)$$

es continua.

Demostración. Para un $\epsilon > 0$ tómese $\delta = \text{mín}(\epsilon, b - a)/2$. Ahora tómese x, x' tales que $|x - x'| < \delta$ y asumamos sin perdida de generalidad que $x' \leq x$ (El caso en que $x \leq x'$ es análogo). Entonces tenemos que

$$x + a < \delta + x' + a < b - a + x' + a = b + x'$$

Y por lo tanto tengo la siguiente cadena de desigualdades.

$$x' + a \leq x + a < x' + b \leq x + b.$$

Esto me permite partir los conjuntos $x + U$ y $x' + U$ como unión disyunta de dos conjuntos λ-medibles de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x + U &= (x + a, x + b) = (x + a, x' + b) \cup [x' + b, x + b) \\ x' + U &= (x' + a, x' + b) = (x' + a, x + a] \cup (x + a, x' + b) \end{aligned}$$

Entonces por propiedades de la medida tenemos que

$$\begin{aligned} & |\lambda((x + U) \cap V) - \lambda((x' + U) \cap V)| \\ = \;& |\lambda((x + a, x' + b) \cup [x' + b, x + b) \cap V) - \lambda((x' + a, x + a] \cup (x + a, x' + b) \cap V)| \\ = \;& |\lambda([x + a, x' + b) \cap V) + \lambda([x' + b, x + b) \cap V) - \lambda((x' + a, x + a] \cap V) \\ & -\lambda((x + a, x' + b) \cap V)| \\ = \;& |\lambda([x' + b, x + b) \cap V) - \lambda((x' + a, x + a] \cap V)| \end{aligned}$$

Pero por desigualdad triangular

$$\begin{aligned} & |\lambda([x' + b, x + b) \cap V) - \lambda((x' + a, x + a] \cap V)| \\ \leq \;& \lambda([x' + b, x + b) \cap V) + \lambda((x' + a, x + a] \cap V) \end{aligned}$$

Puesto que $[x' + b, x + b) \cap V \subseteq [x' + b, x + b)$ y $(x' + a, x + a] \cap V \subseteq (x' + a, x + a]$ tenemos que

$$\begin{aligned} & \lambda([x' + b, x + b) \cap V) + \lambda((x' + a, x + a] \cap V) \\ \leq \;& \lambda([x' + b, x + b)) + \lambda((x' + a, x + a]) \\ = \;& (x + b - (x' + b)) + (x + a - (x' + a)) \\ = \;& 2(x - x') \\ < \;& 2\delta \\ \leq \;& \epsilon \end{aligned}$$

Concluimos que para este caso la función es continua. □

Ahora generalizamos este enunciado un poco más en el siguiente lema.

Lema 3.2. *Para $U, V \subseteq \mathbb{R}$ dos abiertos cualquiera con $\lambda(U) < \infty$ se tiene que la función*

$$x \mapsto \lambda((x+U) \cap V)$$

es continua.

Demostración. Tenemos por [HS75, Teorema 6.59] que $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ con $\{A_n\}$ una colección enumerable de intervalos abiertos disyuntos y por σ-aditividad tenemos que

$$\lambda((x+U) \cap V) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda((x+A_n) \cap V) \tag{3.1}$$

Si tomamos $M_n = \lambda(A_n)$ vemos por propiedades de la medida de Lebesgue que

$$\lambda((x+A_n) \cap V) \leq M_n$$

Por otro lado tenemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n = \lambda(U) < \infty$$

Por lo tanto, podemos concluir por el test M de Weierstrass [Rud76, Teorema 7.10] que (3.1) converge uniformente y por lo demostrado anteriormente en el **lema 3.1** tenemos que $\lambda((x+A_n) \cap V)$ es continua para todo n. Esto a su vez implica que cualquier suma parcial es continua. Concluimos por lo tanto que (3.1) es continua [Rud76, Teorema 7.12]. □

A continuación pasamos incluso a un caso más general que el anterior.

Lema 3.3. *Para $A, B \subseteq \mathbb{R}$ dos conjuntos λ-medibles con $\lambda(A), \lambda(B) < \infty$ se tiene que la función*

$$x \mapsto \lambda((x+A) \cap B) \tag{3.2}$$

es continua.

Demostración. Por un teorema del libro [HS75, Teorema 9.24] podemos encontrar dos conjuntos abiertos U, V tales que $A \subseteq U$, $\lambda(U) \leq \lambda(A) + \epsilon/6$, $B \subseteq V$ y $\lambda(V) \leq \lambda(B) + \epsilon/6$.

Tenemos que $U = A \cup (U \cap A^c)$ y $V = B \cup (V \cap B^c)$, por lo que tenemos que

$$\begin{aligned} \lambda((x+U) \cap V) &= \lambda((x+A) \cap V) + \lambda((x+((A^c \cap U))) \cap V) \\ &= \lambda((x+A) \cap B) + \lambda((x+A) \cap (B^c \cap V)) + \lambda((x+((A^c \cap U))) \cap V) \end{aligned}$$

Y por lo tanto podemos demostrar la siguiente desigualdad

$$|\lambda((x+U) \cap V) - \lambda((x+A) \cap B)| \leq \lambda(U \cap A^C) + \lambda(V \cap B^C) \leq \epsilon/3 \tag{3.3}$$

pues

$$\begin{aligned}
|\lambda((x+U)\cap V)-\lambda((x+A)\cap B)| &= |\lambda((x+A)\cap(B^c\cap V))+\lambda((x+(A^c\cap U))\cap V)| \\
&\leq \lambda((x+A)\cap(B^c\cap V))+\lambda((x+(A^c\cap U))\cap V) \\
&\leq \lambda(B^c\cap V)+\lambda(x+(A^c\cap U)) \\
&= \lambda(B^c\cap V)+\lambda(A^c\cap U) \\
&= \lambda(V)-\lambda(B)+\lambda(U)-\lambda(A). \\
&\leq \epsilon/6+\epsilon/6=\epsilon/3.
\end{aligned}$$

Por otra parte por el **lema 3.2** sabemos que existe δ tal que si $|x-x'|<\delta$ entonces

$$|\lambda((x+U)\cap V)-\lambda((x'+U)\cap V)|\leq \epsilon/3 \tag{3.4}$$

Ahora podemos usar las desigualdades (3.3) y (3.4) para demostrar que si $|x-x'|<\delta$ entonces

$$|\lambda((x+A)\cap B)-\lambda((x'+A)\cap B)|\leq \epsilon$$

En efecto tenemos que

$$\begin{aligned}
& |\lambda((x+A)\cap B)-\lambda((x'+A)\cap B)| \\
\leq\ & |\lambda((x+A)\cap B)-\lambda((x+U)\cap V)|+|\lambda((x+U)\cap V)-\lambda((x'+A)\cap B)| \\
\leq\ & |\lambda((x+A)\cap B)-\lambda((x+U)\cap V)|+|\lambda((x+U)\cap V)-\lambda((x'+U)\cap V)| \\
& +|\lambda((x'+U)\cap V)-\lambda((x'+A)\cap B)| \\
\leq\ & \epsilon/3+\epsilon/3+\epsilon/3=\epsilon.
\end{aligned}$$

El primer y ultimo valor absoluto se reduce por (3.3) y el valor absoluto del medio por (3.4).

Por lo tanto, (3.2) es continua. □

Finalmente podemos demostrar el ejercicio. Primero supongase que $\lambda(T)<\infty$. Podemos usar el lema demostrado anteriormente para concluir que la función $f(x)=\lambda((x+T)\cap T)$ es continua. Adicionalmente en $x=0$, $f(x)=\lambda(T)$. Luego por continuidad en este punto existe un δ tal que si $|x|<\delta$ entonces $|f(x)-\lambda(T)|<\lambda(T)/2$ de donde concluimos que $f(x)>0$ pues

$$\begin{aligned}
|f(x)-\lambda(T)| &< \lambda(T)/2 \\
-\lambda(T)/2 &< f(x)-\lambda(T) \\
0 &< f(x)-\lambda(T)/2<f(x)
\end{aligned}$$

Esto implica claramente que para $x\in(-\delta,\delta)$, $(x+T)\cap T\neq\emptyset$. Es decir que existe un t tal que $t\in T$ y $t=t'+x$ para algun $t'\in T$. Así que podemos escribir $x=t-t'$, es decir que $x\in T-T$. Por lo tanto la bola de radio δ alrededor de 0 esta contenida en $T-T$ y en particular si tomamos $0<\alpha<\delta$ tenemos que $[-\alpha,\alpha]\subseteq T-T$.

Para el caso en que T tiene medida infinita seleccionamos un conjunto medible T' tal que $T' \subseteq T$ y $0 < \lambda(T) < \infty$.

Para obtenerlo tómese la secuencia de conjuntos $\{A_n\}$ donde $A_n = [-n, n] \cap T$. Claramente la secuencia es creciente y converge a T y para cualquier n tenemos que $\lambda(A_n) \leq 2n < \infty$. Por un teorema del libro [HS75, Teorema 10.13] tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = \lambda(T) = \infty \tag{3.5}$$

Por lo que debe existir por lo menos algún n tal que $\lambda(A_n) > 0$.

Ahora simplemente tomamos $T' = A_n$, aplicamos lo demostrado anteriormente y puesto que por definición tenemos que $T' - T' \subseteq T - T$ concluimos que existe $\alpha > 0$ tal que $[-\alpha, \alpha] \subseteq T' - T' \subseteq T - T$. $\square$

Referencias

[HS75] Edwin Hewitt and Karl Stromberg. *Real and Abstract Analysis.* Springer, New York, 1st edition edition, May 1975.

[Mun00] James Munkres. *Topology.* Pearson, Upper Saddle River, NJ, 2 edition edition, January 2000.

[Rud76] Walter Rudin. *Principles of Mathematical Analysis.* McGraw-Hill Education, New York, 3rd edition edition, January 1976.