Tarea 2

Jonathan Andrés Niño Cortés

5 de febrero de 2016

1. (Necessity for the space on which we construct the measure to be locally compact.) Describe $C_0(\mathbb{Q})$. Show that if X is locally compact and Hausdorff, then $C_0(X)$ contains more than just the zero function.

   Demostración. En primer lugar vamos a demostrar que $C_0(\mathbb{Q}) = \{\mathbf{0}\}$ ($\mathbf{0}$ denota la función constante 0).

   Supongase por contradicción que existe una función $f \in C_0(\mathbb{Q})$ distinta de $\mathbf{0}$. Por lo tanto, existe un $q \in \mathbb{Q}$ tal que $||f(q)|| > 0$. Tomese $\epsilon = ||f(q)||$. Puesto que $f \in C_0(\mathbb{Q})$ existe un K tal que si $p \notin K$ entonces $f(p) < \epsilon/3$. Adicionalmente tenemos que f es continua. Por lo tanto, existe una bola $B_\delta(q)$ tal que si $p \in B_\delta(q)$ entonces $||f(q) - f(p)|| < \epsilon/3$.

   Por desigualdad triangular tenemos lo siguiente

   $$||f(q) - f(p)|| + ||f(p) - 0|| \geq ||f(q) - 0||$$
   $$||f(p)|| \geq ||f(q)|| - ||f(q) - f(p)|| > \epsilon - \epsilon/3 = 2\epsilon/3 > \epsilon/3$$

   Esto implica que $B_\delta(q) \subseteq K$ pero esto es una contradicción porque todo compacto en K tiene interior vacío.

   Ahora, vamos a demostrar que si un espacio X es localmente compacto y de Hausdorff entonces existe una función distinta de $\mathbf{0}$ en $C_{00}(X)$ y por lo tanto también en $C_0(X)$. Por topología sabemos que X es un espacio completamente regular o de Tychonoff. Tomemos un punto $x \in X$. Puesto que X es localmente compacto existen un compacto K y un abierto U tales que $x \in U \subseteq K$. Luego podemos utilizar que X es completamente regular para separar el punto x del conjunto cerrado U^C por medio de una función continua f. Esta función es tal que $f(U^C) = \{0\}$ y $f(x) = 1$. Por algebra de conjuntos sabemos que $K^C \subseteq U^C$ por lo que tenemos que $f(K^C) = \{0\}$. Es decir que la función tiene soporte compacto dado por K. Por lo tanto, concluimos que $f \neq 0$ y $f \in C_{00}(\mathbb{X})$. □

2. (Properties of $\mathfrak{M}$.) Denote by $\mathfrak{M}$ the set of lower semicontinuous functions as defined in Definition 7.20, page 88 of the textbook.

a) Show that f is lower semicontinuous at x_0 if and only if for every real number $\alpha < f(x_0)$, there is a neighbourhood U of x_0 such that $f(x) > \alpha$ for all $x \in U$. (Here $f(x_0)$ can be a real number or $+\infty$.)

Demostración. La definición de función *semicontinua hacia abajo* según el libro es la siguiente:

La función $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ es semicontinua hacia abajo en el punto x_0 si cumple la siguiente condición:

Si $f(x_0) < \infty$ entonces para todo $\epsilon > 0$ existe un vecindario U de x_0 tal que $f(x) > f(x_0) - \epsilon$ para todo $x \in U$. Si $f(x) = \infty$ entonces para cada número positivo α existe un vecindario U de x_0 tal que $f(x) > \alpha$ para todo $x \in U$.

En primer lugar observesé que para el caso en que $f(x_0) = \infty$ las definiciones son equivalentes puesto que todo número α es menor a ∞.

Ahora, para el caso en que $f(x_0) < \infty$ si realizamos la sustitución $\alpha = f(x_0) - \epsilon$. Claramente, para todo α existe un ϵ tal que $f(x_0) - \epsilon = \alpha$ y adicionalmente si $\epsilon > 0$ entonces $\alpha < f(x_0)$. Por lo tanto, las deficiones son equivalentes.

□

b) Show that for $f : X \to (-\infty, +\infty]$ we have that $f \in \mathfrak{M}$ if and only if $f^{-1}((t, +\infty])$ is open in X for every $t \in R$.

Para una de las direcciones tomese cualquier $x_0 \in X$, queremos probar que f es semicontinua hacia abajo para este punto. Entonces tomemos cualquier $\alpha < f(x_0)$. Vemos que $f^{-1}((\alpha, +\infty])$ es un abierto tal que contiene a x_0 y todo imagen de este conjunto es mayor que α. Por lo tanto es semicontinua hacia abajo.

Para la otra dirección tomese cualquier conjunto de la forma $f^{-1}((t, +\infty])$ y tome cualquier x_0 en el conjunto. Puedo tomar un α tal que $t < \alpha < f(x_0)$ y por semicontinuidad hacia abajo se que existe un vencidario U de x_0 tal que para todo $x \in U$, $f(x) > \alpha$ esto quiere decir que $f(U) \subseteq (\alpha, \infty] \subseteq (t, \infty]$ y por lo tanto U es una vecindad de x_0 contenida en $f^{-1}((t, +\infty])$. Probamos que cualquier x_0 es interior por lo cual $f^{-1}((t, +\infty])$ es abierto.

3. (Concrete examples of the first Daniell extension.)

a) Let $S : C_{00}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ denote the Riemann integral. Compute carefully $\overline{S}(\chi_U)$, where χ_U denotes the characteristic function of U and U is any open subset of $\mathbb{R}$.

Demostración. Antes de calcular $\overline{S}$, observese que χ_U es una función semicontinua hacia abajo. Esto lo podemos demostrar utilizando el punto b del punto anterior, es decir, demostrando que para todo $t \in \mathbb{R}$, $f^{-1}((t, \infty))$ es abierto. Tenemos varios casos: Si $t < 0$ entonces $\{0, 1\} \subseteq< (t, \infty)$ y por lo tanto $f^{-1}((t, \infty)) = f^{-1}(\{0, 1\}) = \mathbb{R}$ que es abierto.

Si $0 \leq t < 1$ entonces $f^{-1}((t, \infty)) = f^{-1}(\{1\}) = U$ que es abierto por hipótesis.

Por ultimo, si $1 \leq t$ entonces $f^{-1}((t, \infty)) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ que es abierto.

Vamos primero a demostrar que para $U = (a, b)$ con $a, b \in \mathbb{R}$, $\overline{S}(\chi_U) = b - a$.
Recordemos que $\overline{S}(\chi_U) = \sup\{S(f) : f \in C_{00}(\mathbb{R}) \wedge f \leq \chi_U\}$. Vamos a demostrar que $b - a$ es este supremo. Primero para probar que es cota superior observese que para cualquier $f < \chi_U$ si $x \notin (a, b)$ entonces $f(x) = 0$. Luego claramente la función se desvanece fuera de $[a, b]$. Por lo tanto, por lo demostrado en (8.12) del libro, $S(f) = \int_a^b f(x)dx$. Puesto que f es acotada por 1 concluimos que $S(f) = \int_a^b f(x)dx < (b - a) * (1) = b - a$.
Ahora demostremos que no existe una cota menor. Para demostrar esto tomemos para cualquier $\alpha < b - a$ la función f_α definida de la siguiente manera.

$$f_\alpha(x) := \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{a'-a} & a \leq x \leq a' \\ 1 & a' \leq x \leq b' \\ \frac{b-x}{b-b'} & b' \leq x \leq b \\ 0 & b \leq x \end{cases}$$

donde $a' = \dfrac{b + a - \alpha}{2}$ y $b' = \dfrac{b + a + \alpha}{2}$.
Es facil ver que esta función es continua y menor a χ_U y adicionalmente se desvanece fuera de $[a, b]$ y todos sus valores son mayores a 0. Por lo tanto, esta función pertenece a $C_00(\mathbb{R})$. Calculando el valor de $S(f_\alpha)$ obtenemos:

$$\begin{aligned} S(f_\alpha) &= \int_a^b f_\alpha(x)dx \\ &= \int_a^{a'} \frac{x-a}{a'-a}dx + \int_{a'}^{b'} dx + \int_{b'}^{b} \frac{b-x}{b-b'}dx \\ &= \frac{a'-a}{2} + b' - a' + \frac{b-b'}{2} \\ &= \frac{b-a-\alpha}{4} + \alpha + \frac{b-a-\alpha}{4} \\ &= \frac{b-a-\alpha}{2} + \alpha \\ &> \alpha \end{aligned}$$

Por lo que ningun α es cota superior.
Ahora, para abiertos U de la forma (a, ∞) tenemos que $\overline{S}(\chi_U) = \infty$.
Podemos tomar la sucesión de funciones $f_n(x) = \chi_{U_n}$ donde $U_n = (a, a + n)$. Claramente tenemos que $f_n(x) < f_{n+1}(x)$ y además todo $f_n(x) < \chi_U$. Luego tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} f_n \leq \chi_U$$

.

Por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned}\overline{S}(\chi_U) &\geq \overline{S}(\lim_{n\to\infty} f_n)\\ &= \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f_n)\\ &= \lim_{n\to\infty} n\\ &= \infty\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\overline{S}(\chi_U) = \infty$.

De manera analoga podemos demostrar que para $U = (-\infty, a)$ y $U = (-\infty, \infty)$, $\overline{S}(\chi_U) = \infty$. Lo que nos permite concluir que para cualquier intervalo abierto $U = (a, b)$ con $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $\overline{S}(\chi_U) = b - a$.

Por ultimo, para generalizar a cualquier abierto U en $\mathbb{R}$ podemos utilizar el teorema (6.59) del libro que dice que existe una única colección contable de intervalos abiertos disyuntos $\mathfrak{U} = \{V_n\}$ tales que $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} V_n = U$. Podemos escribir V_n como (a_n, b_n) con $a_n, b_n \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Luego tenemos que $\chi_U = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \chi_{V_n}$ y por el colorario (9.14) concluimos que

$$\overline{S}(\chi_U) = \overline{S}(\sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_{V_n}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \overline{S}(V_N) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (b_n - a_n)$$

. □

b) Let $E_a : C_{00}(X) \to \mathbb{C}$ denote the evaluation functional defined by $E_a(f) := f(a)$. Compute $\overline{E}_a(f)$ for $f \in \mathfrak{M}^+$.

Demostración. Nota: En el ejercicio (9.9) del libro de donde se tomó este punto se dice que se tome E_a como se define en (9.2.c). Aqui se dice que E_a se define para cualquier espacio no vacío localmente compacto de Hausdorff, por lo cual vamos a usar estos supuestos para realizar el ejercicio.

Recordemos la definición de $\overline{E}_a(f)$.

$$\overline{E_a}(f) = \sup\{E_a(g) = g(a) : g \in C_{00}(\mathbb{R}) \wedge g \leq f\}$$

Vamos a probar que $\overline{E}_a(f) = f(a)$ demostrando que $f(a)$ es la mínima cota superior del conjunto. Por un lado es facil ver que es cota pues si $g \leq f$ entonces $g(a) \leq f(a)$, por lo que $E_a(g) \leq f(a)$.

Ahora si tomamos cualquier $\alpha < f(a)$, existe un $\alpha' \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha < \alpha' < f(a)$. Para este α' existe un vecindario U de a tal que $f(x) > \alpha'$ para todo punto x en dicho vecindario.

Puesto que X es localmente compacto (vease la nota) tenemos que existe un compacto K y un abierto V tales que $a \in V \in K$. Entonces tomemos el abierto

$U \cap V$. Por nuestros supuestos tenemos que X es completamente regular por lo que existe una función continua $g : X \to [0, 1]$ que separa el punto a del cerrado $(U \cap V)^C$, es decir que cumple que $g(a) = 1$ y $g(x) = 0$ para todo $x \in (U \cap V)^C$. A partir de esta función podemos construir la función continua $h(x) = \alpha' g(x)$.

Esta función pertenece claramente a $C_{00}(X)$ pues se desvanece fuera de K, $E_a(h) = \alpha'$ y $h \leq f$ puesto que para todo $x \notin U$ $h(x) = 0$ y para todo $x \in U$, $h(x) \leq \alpha' < f(x)$. Por lo tanto, encontramos una función para la cual α no es cota. Puesto que esto es para cualquier $\alpha < f(a)$ concluimos que el supremo es efectivamente $f(a)$.

$\square$