# Tarea 4

Jonathan Andrés Niño Cortés

29 de febrero de 2016

(**1.**) (**i.**) Sea $\mathfrak{m}$ una medida exterior de Carathéodory sobre $X$. Si para todo $A \subseteq X$ existe $B \in M_{\mathfrak{m}}$ con $A \subseteq B$ y $\mathfrak{m}(A) = \mathfrak{m}(B)$ la medida exterior se llama regular. Muestre que si m es una medida de Carathéodory regular y $\mathfrak{m}(A) < \infty$, entonces $A \in M_{\mathfrak{m}}$ si y sólo si

$$\mathfrak{m}(A) + \mathfrak{m}(X\ A) = \mathfrak{m}(X)$$

(**ii.**) Muestre que aunque se tenga $\mathfrak{m}(X) < \infty$ en general pueden existir conjuntos $A \subseteq X$ **no medibles** según Carathéodory tales que

$$\mathfrak{m}(A) + \mathfrak{m}(X\ A) = \mathfrak{m}(X)$$

(Sugerencia: Existe un ejemplo con $|X| = 3$.)

(**2.**) (**i.**) Denote por $\mathbb{R}_d$ la recta real con la topología discreta. Muestre que el espacio $\mathbb{R}_d \times \mathbb{R}$ con la topología producto es localmente compacto.

(**ii.**) Para $f$ definida sobre $\mathbb{R}_d \times \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}$ fijo, sea $f_{[x]}$ la función definida sobre $\mathbb{R}$ por:

$$f_{[x]}(y) := f(x, y).$$

Muestre que si $f \in C_{00}(\mathbb{R}_d \times \mathbb{R})$ se tiene que $f_{[x]}$ es identicamente cero excepto que para un número finito de elementos $x \in \mathbb{R}$.

(**iii.**) Sea $S$ la integral de Riemann y defina $I$ sobre $C_{00}(\mathbb{R}_d \times \mathbb{R})$ por:

$$I(f) := \sum_{x \in \mathbb{R}} S(f_{|x|}).$$

Muestre que $I$ es un funcional lineal positivo sobre $C_{00}(\mathbb{R}_d \times \mathbb{R})$.

(**iv.**) Sea $\iota(A) := \overline{\overline{I}}(\chi_A)$, muestre que el conjunto $A = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ es localmente $\iota$–nulo, sin embargo no es $\iota$–nulo.

(**3.**) Sea $T \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto $\lambda$–medible tal que $\lambda(T) > 0$. Muestre que $T - T$ contiene un intervalo. (Ejercicio 10.43 del libro de texto, viene con sugerencia.)