Tarea 6

Jonathan Andrés Niño Cortés

13 de mayo de 2016

(1.) **(a.)** Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Muestre directamente (como sugerido en el Ejercicio 16.56, p.255 del libro) que para todo funcional lineal acotado f sobre $\mathcal{H}$ existe un único $y \in \mathcal{H}$ tal que

$$f(x) = \langle x, y \rangle \tag{1.1}$$

para todo $x \in \mathcal{H}$ y qu además, $||f|| = ||y||$.

Demostración. En el libro se menciona como sugerencia utilizar el Ejercicio 16.42 p.252. En este ejercicio se pide probar que si se tiene un espacio H y un subespacio M de H entonces existe un espacio $M^\perp$ tal que $H = M \oplus M^\perp$. Esto sin embargo, se ha demostrado anteriormente en curso como álgebra lineal. La demostración se realiza extendiendo la base ortogonal de M a una base ortogonal de H y tomando $M^\perp$ como el span de los elementos agregados. No se darán más detalles con respecto a esta demostración.

Sea f un funcional lineal acotado. Sea $M = f^{-1}(0)$. En efecto M resulta ser un subespacio de H. Esto también se demuestra en álgebra lineal y a este subespacio se le llama el kernel de f. Valiendonos del Ejercicio 16.42 p.252. tenemos un subespacio $M^\perp$ tal que M y $M^\perp$ son ortogonales y $M \oplus M^\perp = H$.

Si $M = H$ entonces $f(x) = 0$ para todo $x \in H$ y por lo tanto, podemos tomar $y = 0$, pues por propiedades del producto interno tenemos que

$$f(x) = \langle x, 0 \rangle = 0 \tag{1.2}$$

En caso contrario tenemos que $M^\perp$ es distinto al espacio trivial $\{0\}$. Por lo tanto existe un elemento no cero $z \in M^\perp$ y tomamos $y = \overline{f(z)}\ ||z||^{-2} z$.

Para demostrar que nuestra elección del elemento y es correcta, partimos con la siguiente observación: Para todo $x \in H$, $(x - \frac{f(x)}{f(z)} z) \in M$, pues si aplicamos el funcional f a este elemento tenemos que

$$f(x - \frac{f(x)}{f(z)} z) = f(x) - \frac{f(x)}{f(z)} f(z) = 0 \tag{1.3}$$

Es fácil ver que $y \in M^{\perp}$ y por lo tanto para todo $x \in H$ tenemos que $(x - \frac{f(x)}{f(z)}z)$ y y son perpendiculares. Dicho de otra manera

$$\langle (x - \frac{f(x)}{f(z)}z), \overline{f(z)}\ ||z||^{-2}z\rangle = 0. \tag{1.4}$$

Usando las propiedades del producto interno podemos desarrollar la expresión anterior.

$$\begin{aligned}
\langle (x - \frac{f(x)}{f(z)}z), \overline{f(z)}\ ||z||^{-2}z\rangle &= 0 \\
\langle x, \overline{f(z)}\ ||z||^{-2}z\rangle &= \langle \frac{f(x)}{f(z)}z, \overline{f(z)}\ ||z||^{-2}z\rangle \\
&= \frac{f(x)}{f(z)}\overline{\left(\frac{\overline{f(z)}}{||z||^2}\right)}\langle z, z\rangle \\
&= \frac{f(x)}{f(z)}\frac{f(z)}{||z||^2}||z||^2 \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

Queda demostrado que $f(x) = \langle x, y\rangle$.

La unicidad de y esta dada por la desigualdad de Cauchy-Bunyakovskií-Schwarz. Sean y, y' tales que $f(x) = \langle x, y\rangle = \langle x, y'\rangle$. Por un lado tenemos que $f(y) = \langle y, y\rangle = \langle y, y'\rangle$. Por el otro lado tenemos que $f(y') = \langle y', y\rangle = \langle y', y'\rangle$. Luego tenemos que

$$\langle y, y\rangle\langle y', y'\rangle = \langle y, y'\rangle\langle y', y\rangle \tag{1.5}$$

Esta igualdad solamente se da si y es linealmente dependiente de y', (ver Teorema 16.2 p.234) es decir, que existe α tal que $y' = \alpha y$. Pero adicionalmente tenemos que

$$f(x) = \langle x, y\rangle = \langle x, \alpha y\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle$$

de donde concluimos que $\alpha = \overline{\alpha} = 1$. Luego $y = y'$.

Solo resta demostrar que $||f|| = ||y||$.

El teorema 14.2 p.210 nos dice que

$$||f|| = \sup\left\{\frac{||f(x)||}{||x||} : x \in H, x \neq 0\right\}.$$

Por nuestra definición de y tenemos que

$$||y|| = ||(\overline{f(z)}||z||^{-2})z|| = \frac{||f(z)||\ ||z||}{||z||^2} = \frac{||f(z)||}{||z||}.$$

Por lo cual concluimos que $||y|| \leq ||f||$.

Para la otra desigualdad nótese que por la desigualdad de Cauchy-Bunyakovskií-Schwarz

$$\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \geq \langle x, y\rangle\langle y, x\rangle.$$

O de manera equivalente

$$||x||\ ||y|| \geq |\langle x, y\rangle|.$$

Pero por lo demostrado anteriormente tenemos que $||f(x)|| = |\langle x, y\rangle|$. Por lo cual concluimos que para cualquier $x \in H$

$$||y|| \geq \frac{||f(x)||}{||x||}.$$

Concluimos que $||f|| = ||y||$ $\square$

(**b.**) Utilice la respuesta en **(a.)** para mostrar que para todo funcional lineal acotado sobre $\mathcal{L}_2(X, \mathcal{A}, \mu)$ (puede considerar espacios de medida regulares y $\sigma-$finitos) existe $h \in \mathcal{L}_2(X, \mathcal{A}, \mu)$ tal que

$$L(f) = \int_X f\overline{h}\ d\mu \tag{1.6}$$

(Esto se utilizó sin demostración para demostrar el Lema 19.22 p.313 que era la base de la demostración del teorema de Lebesgue-Radon-Nykodým.)

Demostración. Por lo discutido en la sección 13 sabemos que $\mathcal{L}_2(X, (\mathcal{A}), \mu)$ con el producto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_X f\overline{g}\ d\mu$$

es un espacio de Hilbert (ver 13.11 y 13.15).

Entonces la existencia de h es consecuencia directa de lo demostrado en el punto anterior. $\square$

(**2.**) (**a.**) Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$, $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ espacios de medida $\sigma-$finitos. Suponga que existe $A \subset X$ tal que $A \notin \mathcal{M}$ y que existe $B \in \mathcal{N}$ tal que $\nu(B) = 0$. Muestre que entonces $(X \times Y, \mathcal{M} \times \mathcal{N}, \mu \times \nu)$ no es completo.

Demostración. Vamos a demostrar que $A \times B$ es el testigo que $X \times Y$ no es completo.

En primer lugar vamos a demostrar que el rectángulo $X \times B$ tiene medida 0. Por la definición de la medida $\mu \times \nu$ tenemos que

$$\mu \times \nu(X \times B) = \int_X \nu((X \times B)_x)\ d\mu$$

Tenemos que $(X \times B)_x$ es B para todo $x \in X$. Luego

$$\mu \times \nu(X \times B) = \int_X \nu(B)\ d\mu = \int_X 0\ d\mu = 0$$

Claramente $A \times B$ es un subconjunto de $X \times B$, sin embargo este conjunto no se encuentra en la σ- álgebra.

Para demostrar esto supongase que pertenece a la $\sigma-$álgebra. Por el Teorema 21.4 p.380 tenemos que todo conjunto E^y pertenece a $\mathcal{M}$ pero si tomamos $y \in B$, entonces $E^y = A$ y por hipótesis $A \notin \mathcal{M}$. Llegamos a una contradicción concluimos que $A \times B$ no esta la $\sigma-$álgebra y por lo tanto la medida no es completa. $\square$

(**b.**) Muestre que $(\mathbb{R}^2, \mathcal{M}_\lambda \times \mathcal{M}_\lambda, \lambda \times \lambda)$ no es completo. (Este es el Ejercicio 21.21, p.392).

Demostración. Por lo demostrado en el Teorema 10.28 p.135 sabemos de la existencia de un conjunto A que no se encuentra en $\mathcal{M}_\lambda$. Este conjunto se conoce como el conjunto de Vitali. Por otra parte en la medida de Lebesgue todos los singletons tienen medida 0. Por lo tanto podemos tomar $B = \{0\}$. Entonces se cumplen todas las hipótesis del literal anterior y por lo tanto concluimos que el espacio medible $\mathcal{R}^\in$ no es completo. $\square$