Tarea 5

Jonathan Andrés Niño Cortés

18 de abril de 2016

(1.) Sea X un espacio topológico, se recuerda que un conjunto F_σ es una unión enumerable de conjuntos cerrados y un G_δ es una intersección enumerable de conjuntos abiertos.

(i.) Determine si $\mathbb{Q}$ es un F_σ o un G_δ en $\mathbb{R}$.

Demostración. $\mathbb{Q}$ es un F_σ pues es enumerable y por lo tanto puede verse como la unión enumerable de singletons que son cerrados en $\mathbb{R}$.

$\mathbb{Q}$ no es un G_δ. Para demostrar esto necesitamos usar parte del teorema de categorías de Baire.

Un espacio de Baire es un espacio topológico que tiene la siguiente propiedad:

Para cada colección enumerable de conjuntos abiertos densos $\{U_n\}_{n=1}^\infty$, su intersección $\bigcap_{n=1}^\infty U_n$ es densa.

Lema 1.1. $\mathbb{R}$ *es un espacio de Baire.*

Demostración. □

Ahora para demostrar que $\mathbb{Q}$ no es un G_δ supongase lo contrario. Entonces existe una colección de abiertos U_n tal que $\bigcap_{n=1}^\infty U_n = \mathbb{Q}$. Puesto que cada U_n contiene a $\mathbb{Q}$ podemos concluir que U_n es denso.

Denotese por $\mathbb{I}$ al conjunto de los irracionales. Puesto que $\mathbb{Q}$ es un F_σ tenemos que su complemento $\mathbb{I}$ es un G_δ y es igual a la intersección de la colección $\{\mathbb{R}\backslash\{q\} | q \in \mathbb{Q}\}$. Esta colección también resulta ser una colección enumerable de abiertos densos.

Sin embargo si tomo la intersección de las dos colecciones su resultado es vacío y esto contradice el hecho que $\mathbb{R}$ es un espacio de Baire.

□

(ii.) Escriba un conjunto $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ que no es ni un F_σ ni un G_δ (demuestre por qué).

Demostración. Considere el conjunto $[(-1,1) \cap \mathbb{Q}] \cup [(-1,1)^C \cap \mathbb{I}]$. Claramente este conjunto se encuentra en la σ-algebra de Borel de $\mathbb{R}$ pues se obtiene a partir de la intersección, unión y complementos de abiertos, cerrados, G_δ y F_σ todos en la σ- álgebra de Borel.

Pero adicionalmente este conjunto cumple la propiedad de no ser un G_δ ni un F_σ. $\square$

(**iii.**) Muestre que si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ entonces A difiere de ser $F\sigma$ o $G\delta$ por un conjunto λ–nulo. (λ denota la medida de Lebesgue.)

Demostración. Primero demostramos el siguiente lema

Lema 1.2. *Todo conjunto λ-medible es σ- finito.*

Demostración. Sea A un conjunto λ-medible. Tenemos la igualdad

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap [-n, n]) \tag{1.1}$$

Adicionalmente, puesto que para todo n, $[-n, n]$ es boreleano y por lo tanto λ-medible, tenemos que $A \cap [-n, n]$ también lo es y adicionalmente

$$\lambda(A \cap [-n, n]) \leq n < \infty.$$

Por lo cual A es la unión enumerable de conjuntos de medida finita. Concluimos que A es σ- finito. $\square$

Gracias al teorema de representación de Riez generalizado [**?**, Teorema 12.35] podemos afirmar con certeza que la construcción de la medida de Lebesgue en la sección 9 de [**?**] es equivalente a la de la sección 12 del mismo libro.

En vista de lo anterior y del lema 1.2, es posible utilizar [**?**, Teorema 10.34] para concluir que para cualquier conjunto λ- medible A existe un boreleano C y un σ-compacto F tal que $F \subset A \subset C$ y $\iota(C \cap F^C) = 0$.

Pero en la demostración se menciona que C no solo es Boreleano sino que es G_δ pues corresponde a la intersección de una secuencia de conjuntos abiertos que contienen a A. Adicionalmente, un conjunto es σ-compacto si es la unión enumerable de conjuntos compactos. Puesto que en $\mathbb{R}$ compacto implica cerrado concluimos que F es un F_σ. Por ultimo, claramente $\iota(C \cap F^C)$ implica que $\iota(C \cap A^C) = \iota(A \cap F^C) = 0$. $\square$

(**2.**) Sea μ una medida positiva sobre X, sea $f : X \to [0, \infty]$ medible, $\int_X f d\mu = c$ con $0 < c < \infty$ y sea α una constante. Muestre que:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X n \ln(1 + (f/n)^\alpha) d\mu = \begin{cases} \infty & \text{si } 0 < \alpha < 1 \\ c & \text{si } \alpha = 1 \\ 0 & \text{si } 1 < \alpha < \infty. \end{cases}$$

Demostración. Puesto que $n\ln(1+(f/n)^\alpha)$ se construye a partir de la suma, potenciación, composición con ln que es continua y multiplicación por un escalar concluimos que $n\ln(1+(f/n)^\alpha)$ es μ- medible. Ver [**?**, Teoremas 11.7 y 11.8]

Ahora para calcular la expresión que nos interesa enfoquemonos en el siguiente límite:

$$\lim_{x\to\infty} x\ln(1+(f/x)^\alpha) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+(f/x)^\alpha)}{\frac{1}{x}}$$

Cuando $x \to \infty$ tenemos que $1/x \to 0$ y $(f/x)^\alpha \to 0$ lo que implica que $\ln(1+(f/x)^\alpha) \to \ln(1) = 0$. Por lo anterior podemos usar la regla de L'Hopital.

$$\begin{aligned}
& \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+(f/x)^\alpha)}{\frac{1}{x}} \\
= & \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+(f/x)^\alpha}(-\alpha)\frac{f^\alpha}{x^{\alpha+1}}}{-\frac{1}{x^2}} \\
= & \lim_{x\to\infty} \alpha \frac{1}{\frac{x^\alpha+f^\alpha}{x^\alpha}} \frac{f^\alpha}{x^{\alpha-1}} \\
= & \lim_{x\to\infty} \alpha \frac{x^\alpha}{x^\alpha+f^\alpha} \frac{f^\alpha}{x^{\alpha-1}} \\
= & \lim_{x\to\infty} \alpha \frac{x f^\alpha}{x^\alpha+f^\alpha} \\
= & \lim_{x\to\infty} \alpha \frac{f^\alpha}{x^{\alpha-1}+f^\alpha/x}
\end{aligned}$$

Nota: Recuérdese que en el Lema de Fatou el límite se toma de manera puntual. Por esta razón al calcular el límite anterior el f se trata como una constante pues en realidad se esta calculando para cada $a \in X$.

Esta ultima expresión es igual a f si $\alpha = 1$, 0 si $\alpha > 1$ y ∞ si $\alpha < 1$.. Puesto que este límite existe concluimos que nuestro límite inicial es igual, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} n\ln(1+(f/n)^\alpha) = \begin{cases} \infty & \text{si } 0 < \alpha < 1 \\ f & \text{si } \alpha = 1 \\ 0 & \text{si } 1 < \alpha < \infty. \end{cases} \tag{2.1}$$

Si usamos el lema de Fatou [**?**, 12,23] sobre la secuencia tenemos que

$$\int_x \liminf_{n\to\infty} n\ln(1+(f/n)^\alpha)d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X n\ln(1+(f/n)^\alpha)d\mu \tag{2.2}$$

Entonces para el caso $0 < \alpha < \infty$ por la ecuación (2.2) concluimos que

$$
\begin{aligned}
\infty = \int_X \lim_{n\to\infty} n\ln(1+(f/n)^\alpha)d\mu &= \int_X \liminf_{n\to\infty} n\ln(1+(f/n)^\alpha)d\mu \\
\leq \liminf_{n\to\infty} \int_X n\ln(1+(f/n)^\alpha)d\mu &\leq \lim_{n\to\infty}\int_X n\ln(1+(f/n)^\alpha)d\mu = \infty
\end{aligned}
$$

Por otra parte, para el caso $\alpha \geq 1$ se cumple la siguiente desigualdad.

$$n\ln((1+(f/n)^\alpha)) \leq n\ln((1+f/n)^\alpha) = \alpha n\ln((1+f/n)$$

.

Adicionalmente para todo $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tenemos lo siguiente:

$$\ln(1+x) \leq x \tag{2.3}$$

Para demostrar esto obsérvese que para $x = 0$, $\ln(1) = 0$.

Por otra parte tenemos que para todo $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$0 \leq \frac{d}{dx}\ln(1+x) = \frac{1}{1+x} \leq 1 = \frac{d}{dx}x.$$

Esto quiere decir, por una parte que ambas funciones son crecientes para $x > 0$ y por otra que la función x crece más rápido que la función $\ln(1+x)$. Por lo tanto concluimos (2.3).

Podemos usar (2.3) para el caso $x = f/n$ para concluir que

$$\ln(1+f/n) \leq f/n.$$

A partir de esta expresión se deduce fácilmente que

$$n\ln(1+(f/n)^\alpha) \leq \alpha n\ln(1+f/n) \leq \alpha f.$$

Por lo tanto, concluimos que la secuencia es dominada por αf y por lo tanto podemos utilizar el teorema de convergencia dominada [**?**, Teorema 12.24] para concluir que

$$\lim_{n\to\infty}\int_X n\ln(1+(f/n)^\alpha) = \int_X \lim_{n\to\infty} n\ln(1+(f/n)^\alpha)) \tag{2.4}$$

de donde concluimos por (2.1) que si $\alpha = 1$ entonces la expresión es igual a $\int_X f d\mu = c$ y si $\alpha \geq 1$ entonces la expresión es igual a $\int_X 0 d\mu = 0$ $\square$

(**3.**) Consiga funciones continuas f y g tales que $f \in \mathcal{L}_2((0,\infty),\mathcal{B},\lambda)$ pero $f \notin \mathcal{L}_1((0,\infty),\mathcal{B},\lambda)$ y $g \in \mathcal{L}_1((0,\infty),\mathcal{B},\lambda)$ pero $g \notin \mathcal{L}_2((0,\infty),\mathcal{B},\lambda)$

Demostración. Hace falta demostrar que para las funciones elegidas la integral de Lebesgue es equivalente a la integral de Riemann.

Tómese $f = 1/(x+1)$.

Tenemos que

$$\int_X \frac{1}{x+1} d\lambda = \int_0^\infty \frac{1}{x+1} dx = \ln(x+1)\Big|_0^\infty = \infty \tag{2.5}$$

Mientras que

$$\int_X \frac{1}{(x+1)^2} d\lambda = \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}\Big|_0^\infty = 1 \tag{2.6}$$

Por lo que concluimos que $f \in \mathcal{L}_2((0,\infty), \mathcal{B}, \lambda)$ pero $f \notin \mathcal{L}_1((0,\infty), \mathcal{B}, \lambda)$

Por otra parte, sea g definida de la siguiente manera:

$$g(x) = \begin{cases} 1/\sqrt{x} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 1/x^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \tag{2.7}$$

Es fácil comprobar que la función es continua usando el lema del pegamiento. Por otra parte, evaluando las integrales para comprobar si la función pertenece a $\mathcal{L}_1$ o $\mathcal{L}_2$ tenemos lo siguiente:

$$\int_X |g(x)| d\lambda = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx + \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = 2\sqrt{x}\Big|_0^1 - \frac{1}{x}\Big|_1^\infty = 3 \tag{2.8}$$

$$\int_X |g^2(x)| d\lambda = \int_0^1 \frac{1}{x} dx + \int_1^\infty \frac{1}{x^4} dx = \ln(x)\Big|_0^1 - \frac{1}{3}\frac{1}{x^3}\Big|_1^\infty = \infty \tag{2.9}$$

Concluimos que $g \in \mathcal{L}_1((0,\infty), \mathcal{B}, \lambda)$ pero $g \notin \mathcal{L}_2((0,\infty), \mathcal{B}, \lambda)$.

□