Tarea 5

Jonathan Andrés Niño Cortés

19 de abril de 2016

(1.) Sea X un espacio topológico, se recuerda que un conjunto F_σ es una unión enumerable de conjuntos cerrados y un G_δ es una intersección enumerable de conjuntos abiertos.

(i.) Determine si $\mathbb{Q}$ es un F_σ o un G_δ en $\mathbb{R}$.

Demostración. $\mathbb{Q}$ es un F_σ pues es enumerable y por lo tanto puede verse como la unión enumerable de singletons que son cerrados en $\mathbb{R}$.

$\mathbb{Q}$ no es un G_δ. Para demostrar esto necesitamos usar parte del teorema de categorías de Baire.

Un espacio de Baire es un espacio topológico que tiene la siguiente propiedad:

Para cada colección enumerable de conjuntos abiertos densos $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$, su intersección $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ es densa. Ver [Rud76, Lema 48.1]

Una herramienta útil para manejar espacios de Baire es el llamado **teorema de categorización de Baire** que enuncia que un espacio localmente compacto de Hausdorff o un espacio métrico completo es un espacio de Baire. A partir de lo cual podemos concluir que $\mathbb{R}$ y cualquier subespacio abierto y cerrado de $\mathbb{R}$ son espacios de Baire. Ver [Rud76, Teorema 48.2]

Ahora para demostrar que $\mathbb{Q}$ no es un G_δ supongase lo contrario. Entonces existe una colección de abiertos U_n tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \mathbb{Q}$. Puesto que cada U_n contiene a $\mathbb{Q}$ podemos concluir que U_n es denso.

Denótese por $\mathbb{I}$ al conjunto de los irracionales. Puesto que $\mathbb{Q}$ es un F_σ tenemos que su complemento $\mathbb{I}$ es un G_δ y es igual a la intersección de la colección $\{\mathbb{R}\backslash\{q\} | q \in \mathbb{Q}\}$. Esta colección también resulta ser una colección enumerable de abiertos densos.

Sin embargo, si tomo la intersección de las dos colecciones su resultado es vacío y esto contradice el hecho que $\mathbb{R}$ es un espacio de Baire.

□

(ii.) Escriba un conjunto $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ que no es ni un F_σ ni un G_δ (demuestre por qué).

Demostración. Considere el conjunto $A = [(-1,1)\cap\mathbb{Q}]\cup[(-1,1)^C\cap\mathbb{I}]$. Claramente este conjunto se encuentra en la σ-algebra de Borel de $\mathbb{R}$ pues se obtiene a partir de la intersección, unión y complementos de abiertos, cerrados, G_δ y F_σ todos en la σ- álgebra de Borel.

Pero adicionalmente este conjunto cumple la propiedad de no ser un G_δ ni un F_σ.

Para demostrar esto suponga que el conjunto es un G_δ. Entonces existe una secuencia $\{U_n\}$ de conjuntos abiertos tal que $A = \bigcap_{n=0}^{\infty} U_n$. Por lo tanto si tomamos la secuencia $\{U_n \cap (-1,1)\}$ tendríamos una secuencia de conjuntos abiertos cuya intersección es igual a $(-1,1)\cap\mathbb{Q}$. Pero usando los mismos argumentos para demostrar que $\mathbb{Q}$ no es un G_δ (ver el literal anterior) llegamos a una contradicción, pues $(-1,1)$ es también un espacio de Baire y $\mathbb{Q}$ es denso en este subespacio.

Ahora para demostrar que no es F_σ supongase por contradicción que el complemento $[(-1,1)\cap\mathbb{I}]\cup[(-1,1)^C\cap\mathbb{Q}]$ es G_δ. De nuevo tendriamos una secuencia de conjuntos abiertos $\{V_n\}$ tales que $\bigcap_{n=0}^{\infty} V_n = A^C$. Pero entonces si tomamos la secuencia de $\{V_n \cap (-1,1)^C\}$ esta sería una secuencia de abiertos (en la topología de subespacio de $(-1,1)^C$ que también es de Baire) cuya intersección es igual a $(-1,1)^C\cap\mathbb{Q}$ lo cual también es una contradicción por un argumento análogo al anterior.

□

(**iii.**) Muestre que si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ entonces A difiere de ser $F\sigma$ o $G\delta$ por un conjunto λ–nulo. (λ denota la medida de Lebesgue.)

Demostración. Primero demostramos el siguiente lema

Lema 1.1. *Todo conjunto λ-medible es σ- finito.*

Demostración. Sea A un conjunto λ-medible. Tenemos la igualdad

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap [-n,n]) \tag{1.1}$$

Adicionalmente, puesto que para todo n, $[-n,n]$ es boreleano y por lo tanto λ-medible, tenemos que $A\cap[-n,n]$ también lo es y adicionalmente

$$\lambda(A\cap[-n,n]) \leq n < \infty.$$

Por lo cual A es la unión enumerable de conjuntos de medida finita. Concluimos que A es σ- finito. □

Gracias al teorema de representación de Riez generalizado [HS75, Teorema 12.35] podemos afirmar con certeza que la construcción de la medida de Lebesgue en la sección 9 de [HS75] es equivalente a la de la sección 12 del mismo libro.

En vista de lo anterior y del lema 1.1, es posible utilizar [HS75, Teorema 10.34] para concluir que para cualquier conjunto λ- medible A existe un boreleano C y un σ-compacto F tal que $F \subset A \subset C$ y $\iota(C \cap F^C) = 0$.

Pero en la demostración se menciona que C no solo es Boreleano sino que es G_δ (solo para el caso en que $\iota(A) < \infty$) pues corresponde a la intersección de una secuencia de conjuntos abiertos que contienen a A. Adicionalmente, un conjunto es σ-compacto si es la unión enumerable de conjuntos compactos. Puesto que en $\mathbb{R}$ compacto implica cerrado concluimos que F es un F_σ. Por ultimo, claramente $\iota(C \cap F^C)$ implica que $\iota(C \cap A^C) = \iota(A \cap F^C) = 0$. □

(**2.**) Sea μ una medida positiva sobre X, sea $f : X \to [0, \infty]$ medible, $\int_X f d\mu = c$ con $0 < c < \infty$ y sea α una constante. Muestre que:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X n \ln(1 + (f/n)^\alpha) d\mu = \begin{cases} \infty & \text{si } 0 < \alpha < 1 \\ c & \text{si } \alpha = 1 \\ 0 & \text{si } 1 < \alpha < \infty. \end{cases}$$

Demostración. Puesto que $n \ln(1 + (f/n)^\alpha)$ se construye a partir de la suma, potenciación, composición con ln que es continua y multiplicación por un escalar concluimos que $n \ln(1 + (f/n)^\alpha)$ es μ- medible. Ver [HS75, Teoremas 11.7 y 11.8]

Ahora para calcular la expresión que nos interesa enfoquemonos en el siguiente límite:

$$\lim_{x\to\infty} x \ln(1 + (f/x)^\alpha) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1 + (f/x)^\alpha)}{\frac{1}{x}}$$

Cuando $x \to \infty$ tenemos que $1/x \to 0$ y $(f/x)^\alpha \to 0$ lo que implica que $\ln(1 + (f/x)^\alpha) \to \ln(1) = 0$. Por lo anterior podemos usar la regla de L'Hopital.

$$\begin{aligned}
& \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1 + (f/x)^\alpha)}{\frac{1}{x}} \\
= \quad & \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+(f/x)^\alpha}(-\alpha)\frac{f^\alpha}{x^{\alpha+1}}}{-\frac{1}{x^2}} \\
= \quad & \lim_{x\to\infty} \alpha \frac{1}{\frac{x^\alpha + f^\alpha}{x^\alpha}} \frac{f^\alpha}{x^{\alpha-1}} \\
= \quad & \lim_{x\to\infty} \alpha \frac{x^\alpha}{x^\alpha + f^\alpha} \frac{f^\alpha}{x^{\alpha-1}} \\
= \quad & \lim_{x\to\infty} \alpha \frac{x f^\alpha}{x^\alpha + f^\alpha} \\
= \quad & \lim_{x\to\infty} \alpha \frac{f^\alpha}{x^{\alpha-1} + f^\alpha / x}
\end{aligned}$$

Nota: Recuérdese que en el Lema de Fatou el límite se toma de manera puntual. Por esta razón al calcular el límite anterior el f se trata como una constante pues en realidad se esta calculando para cada $a \in X$.

Esta ultima expresión es igual a f si $\alpha = 1$, 0 si $\alpha > 1$ y ∞ si $\alpha < 1$.. Puesto que este límite existe concluimos que nuestro límite inicial es igual, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} n\ln(1+(f/n)^\alpha) = \begin{cases} \infty & \text{si } 0 < \alpha < 1 \\ f & \text{si } \alpha = 1 \\ 0 & \text{si } 1 < \alpha < \infty. \end{cases} \tag{2.1}$$

Si usamos el lema de Fatou [HS75, 12,23] sobre la secuencia tenemos que

$$\int_x \liminf_{n\to\infty} n\ln(1+(f/n)^\alpha)d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X n\ln(1+(f/n)^\alpha)d\mu \tag{2.2}$$

Entonces para el caso $0 < \alpha < \infty$ por la ecuación (2.2) concluimos que

$$\begin{aligned} \infty = \int_X \lim_{n\to\infty} n\ln(1+(f/n)^\alpha)d\mu &= \int_X \liminf_{n\to\infty} n\ln(1+(f/n)^\alpha)d\mu \\ \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X n\ln(1+(f/n)^\alpha)d\mu &\leq \lim_{n\to\infty} \int_X n\ln(1+(f/n)^\alpha)d\mu = \infty \end{aligned}$$

Por otra parte, para el caso $\alpha \geq 1$ se cumple la siguiente desigualdad.

$$n\ln((1+(f/n)^\alpha)) \leq n\ln((1+f/n)^\alpha) = \alpha n\ln((1+f/n)$$

.

Adicionalmente para todo $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tenemos lo siguiente:

$$\ln(1+x) \leq x \tag{2.3}$$

Para demostrar esto obsérvese que para $x = 0$, $\ln(1) = 0$.

Por otra parte tenemos que para todo $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$0 \leq \frac{d}{dx}\ln(1+x) = \frac{1}{1+x} \leq 1 = \frac{d}{dx}x.$$

Esto quiere decir, por una parte que ambas funciones son crecientes para $x > 0$ y por otra que la función x crece más rápido que la función $\ln(1+x)$. Por lo tanto concluimos (2.3).

Podemos usar (2.3) para el caso $x = f/n$ para concluir que

$$\ln(1+f/n) \leq f/n.$$

A partir de esta expresión se deduce fácilmente que

$$n \ln(1+(f/n)^\alpha) \leq \alpha n \ln(1+f/n) \leq \alpha f.$$

Por lo tanto, concluimos que la secuencia es dominada por αf y por lo tanto podemos utilizar el teorema de convergencia dominada [HS75, Teorema 12.24] para concluir que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X n \ln(1+(f/n)^\alpha) = \int_X \lim_{n\to\infty} n \ln(1+(f/n)^\alpha)) \tag{2.4}$$

de donde concluimos por (2.1) que si $\alpha = 1$ entonces la expresión es igual a $\int_X f d\mu = c$ y si $\alpha \geq 1$ entonces la expresión es igual a $\int_X 0 d\mu = 0$ $\square$

(**3.**) Consiga funciones continuas f y g tales que $f \in \mathcal{L}_2((0,\infty),\mathcal{B},\lambda)$ pero $f \notin \mathcal{L}_1((0,\infty),\mathcal{B},\lambda)$ y $g \in \mathcal{L}_1((0,\infty),\mathcal{B},\lambda)$ pero $g \notin \mathcal{L}_2((0,\infty),\mathcal{B},\lambda)$

Demostración. Tómese $f(x) = 1/(x+1)$.

Para calcular la integral podemos usar el hecho de que esta función es el límite de una secuencia de funciones continuas de soporte compacto. Considere la secuencia de funciones $\{f_n(x)\}$ definida de la siguiente manera

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1/2n \\ \text{lineal} & \text{si } 1/2n \leq x \leq 1/n \\ 1/(x+1) & \text{si } 1/n \leq n \\ \text{lineal} & \text{si } n \leq x \leq n+1 \\ 0 & \text{si } n+1 \leq x \end{cases}$$

donde lineal indica que la función se define de tal manera que la función es lineal en dicho intervalo manteniendo la continuidad de la función. De esta manera las funciones son continuas y de soporte compacto pues solo son distintas a 0 en el intervalo $[1/2n, n]$.

Es fácil ver que la secuencia es monótona y que su límite es precisamente la función $f(x)$ pues para cualquier $x \in (0,\infty)$ existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in [1/2m, m]$ para todo $m \geq n$ y por lo tanto $f_m(x) = f(x)$. Luego podemos usar Bepo Levi [HS75, Teorema 12.22] para concluir que

$$\int_X |f(x)| d\lambda = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n(x) d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x) d\lambda \tag{2.5}$$

Ahora, gracias al teorema de representación de Riesz [HS75, Teorema 12.36] sabemos que para las funciones de soporte compacto f_n la integral de Lebesgue coincide con la integral de Riemann. Por lo tanto, tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x) d\lambda &= \lim_{n\to\infty} \int_{1/n}^{n} f_n(x) dx \\ &= \lim_{n\to\infty} 1/(4+4n) + \ln(n+1) - \ln(1/n+1) + 1/2n \\ &= 0 + \infty - 0 + 0 \\ &= \infty \end{aligned}$$

Concluimos que $f \notin \mathcal{L}_1$.

$$\int_X \frac{1}{(x+1)^2} d\lambda = \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}\Big|_0^\infty = 1 \tag{2.6}$$

Ahora para calcular la integral de $|f(x)^2| = 1/(x+1)^2$ de nuevo nos valemos de una sucesión monótona de funciones continuas de soporte compacto que convergen puntualmente a $1/(x+1)^2$. Sea esta secuencia $\{f'_n(x)\}$ definida como

$$f'_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1/2n \\ \text{lineal} & \text{si } 1/2n \leq x \leq 1/n \\ 1/(x^2+1)^2 & \text{si } 1/n \leq n \\ \text{lineal} & \text{si } n \leq x \leq n+1 \\ 0 & \text{si } n+1 \leq x \end{cases}$$

Usando el mismo argumento que para la integral anterior tenemos que

$$\begin{aligned} \int_X |f(x)|^2 d\lambda &= \int_X \lim_{n\to\infty} f'_n(x) d\lambda \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_X f'_n(x) d\lambda \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{1/n}^n f'_n(x) dx \\ &= \lim_{n\to\infty} n/(4(n+1)^2) - 1/(n+1) + 1/(1/n+1) + 1/2n^2 \\ &= 0 - 0 + 1 + 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Por lo que concluimos que $f \in \mathcal{L}_2$.

Por otra parte, sea g definida de la siguiente manera:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{de lo contrario } x \geq 1 \end{cases} \tag{2.7}$$

Es fácil comprobar que la función es continua usando el lema del pegamiento. De nuevo vamos a usar el mismo método usado anteriormente para evaluar las integrales que determinaran si la función pertenece o no $\mathcal{L}_1$ o $\mathcal{L}_2$. Para lo primero considere la secuencia $\{g_n(x)\}$ definida como

$$g_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1/2n \\ \text{lineal} & \text{si } 1/2n \leq x \leq 1/n \\ \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 & \text{si } 1/n \leq 1 \\ 0 & \text{si } 1 \leq x \end{cases} \tag{2.8}$$

De nuevo la secuencia resulta ser una secuencia monótona de funciones de soporte compacto que converge puntualmente a g aunque esta vez los intervalos donde las funciones no son cero son $[1/2n, 1]$. Por lo tanto tenemos por los mismos argumentos anteriores que

$$\begin{aligned}
\int_X |g(x)| d\lambda &= \int_X \lim_{n\to\infty} g_n(x) d\lambda \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_X g_n(x) d\lambda \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{1/n}^{1} g_n(x) dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}-1}{4n} + 2 - 2\sqrt{1/n} - 1 + 1/n \\
&= 0 + 2 + 0 - 1 + 0 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Por lo que $g \in \mathcal{L}_2$.

Por otra parte considérese la sucesión de funciones $g'(x)$ definida como

$$g_n'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1/2n \\ \text{lineal} & \text{si } 1/2n \leq x \leq 1/n \\ (\frac{1}{\sqrt{x}} - 1)^2 & \text{si } 1/n \leq 1 \\ 0 & \text{si } 1 \leq x \end{cases} \tag{2.9}$$

Vemos que esta sucesión converge a $|g(x)|^2$. Por lo usando de nuevo los mismos argumentos anteriores tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_X |g(x)|^2 d\lambda &= \int_X \lim_{n\to\infty} g_n'(x) d\lambda \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_X g_n'(x) d\lambda \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{1/n}^{1} g_n'(x) dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n}-1)^2}{4n} + \ln(1) - \ln(1/n) + 4 - 4\sqrt{1/n} + 1 - 1/n \\
&= \frac{1}{4} + 0 - (-\infty) - 4 + 0 - 0 \\
&= \infty
\end{aligned}$$

Concluimos que $g \notin \mathcal{L}_2$.

$\square$

Referencias

[HS75] Edwin Hewitt and Karl Stromberg. *Real and Abstract Analysis.* Springer, New York, 1st edition edition, May 1975.

[Rud76] Walter Rudin. *Principles of Mathematical Analysis.* McGraw-Hill Education, New York, 3rd edition edition, January 1976.