Computación Cuántica: Tarea #1

Jonathan Andrés Niño Cortés

11 de marzo de 2015

1. Si

$$|a\rangle = \begin{pmatrix} -2 \\ 4i \\ 1 \end{pmatrix} \; |b\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$$

   a) $\langle a| = \begin{pmatrix} -2 & -4i & 1 \end{pmatrix}$

   b) $\langle b| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \end{pmatrix}$

   c) $\langle a|b\rangle = -2 + i$

   d) $\langle b|a\rangle = -2 - i$

   e) $|c\rangle = |a\rangle + 2|b\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 4i \\ 1+2i \end{pmatrix}$

   f) $\langle c|a\rangle = \begin{pmatrix} -15 - 2i \end{pmatrix}$

   g) $\frac{|a\rangle}{||a||} = \frac{1}{\sqrt{21}} \begin{pmatrix} -2 \\ 4i \\ 1 \end{pmatrix}$

$|+\rangle = \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $|-\rangle = \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

La matriz de cambio de base de esta base a la canónica es $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Por otra parte la matriz inversa obtenida a través de Gauss-Jordan da de nuevo $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Esta es la propiedad que esperabamos de la compuerta de Hadamard.

3. Utilizando Grand-Schmidt, tome $|w_1\rangle = \frac{v_1}{||v_1||} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Ahora tome $|w_2'\rangle = |v_2\rangle - \frac{\langle v_1|v_2\rangle}{\langle v_1|v_1\rangle}|v_1\rangle = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{3-i}{2} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i-\frac{1+3i}{2} \\ 2-\frac{3-i}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-i}{2} \\ \frac{1+i}{2} \end{pmatrix}$

Y $|w_2\rangle = \frac{|w_2'\rangle}{\langle w_2'|w_2'\rangle} = |w_2'\rangle$ pues, $\langle w_2'|w_2'\rangle = 1$.

4. Sea $|h\rangle$ y $|v\rangle$ vectores ortogonales y unitarios. Sea

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= 1/2|h\rangle + \sqrt{3}/2|v\rangle \\ |\psi_2\rangle &= 1/2|h\rangle - \sqrt{3}/2|v\rangle \\ |\psi_3\rangle &= |h\rangle \end{aligned}$$

Calcular

a) $\langle\psi_1|\psi_2\rangle = \langle\psi_1|(1/2|h\rangle - \sqrt{3}/2|v\rangle)\rangle = 1/2\langle\psi_1|h\rangle - \sqrt{3}/2\langle\psi_1|v\rangle$
$= 1/2\langle 1/2|h\rangle + \sqrt{3}/2|v\rangle|h\rangle - \sqrt{3}/2\langle 1/2|h\rangle + \sqrt{3}/2|v\rangle|v\rangle$
$= (1/2)(1/2)\langle h|h\rangle + (\sqrt{3}/2)(1/2)\langle v|h\rangle - (\sqrt{3}/2)(1/2)\langle h|v\rangle - (\sqrt{3}/2)(\sqrt{3}/2)\langle v|v\rangle$
$= 1/4 + 0 + 0 - 3/4 = -1/2$.
Luego $|\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2 = 1/4$

b) $\langle\psi_1|\psi_3\rangle = \langle\psi_1|h\rangle = \langle 1/2|h\rangle + \sqrt{3}/2|v\rangle|h\rangle = 1/2\langle h|h\rangle + \sqrt{3}/2\langle v|h\rangle = 1/2$
Luego $|\langle\psi_1|\psi_3\rangle|^2 = 1/4$

c) $\langle\psi_3|\psi_2\rangle = \langle h|\psi_2\rangle = \langle h|1/2|h\rangle - \sqrt{3}/2 \ = 1/2\langle h|h\rangle - \sqrt{3}/2\langle h|v\rangle = 1/2$
Luego $|\langle\psi_3|\psi_2\rangle|^2 = 1/4$

5. *a)* Por el hint podemos ver que $|0\rangle\langle 0|$ es equivalente a proyección sobre el espacio generado por $|0\rangle$. Asimismo, $|1\rangle\langle 1|$ es la matriz de proyección en la segunda coordenada. Luego,
$|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) $|00\rangle\langle 11|$ es el operador que envia $|x\rangle$ a $\langle 11|x\rangle|00\rangle$ entonces la matriz que la representa es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Los demás son similares y dan como resultado $|00\rangle\langle 11| + 2|00\rangle\langle 10| + 3|11\rangle\langle 01| =$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Vamos a demostrar que $A = \sum_{i=1}^{n} |u_i\rangle\langle u_1|$ es la identidad. Tome cualquier vector $|x\rangle$ en el espacio. Entonces se puede representar de forma única como $a_1|u_1\rangle + a_2|u_2\rangle + \cdots + a_n|u_n\rangle$,. Pero obsérvese que $|u_i\rangle\langle u_i||x\rangle = \langle u_i|x\rangle|u_i\rangle$. Pero, $\langle u_i|x\rangle|u_i\rangle = \langle u_i|(a_1|u_1\rangle +$

$a_2|u_2\rangle + \cdots + a_n|u_n\rangle))\rangle|u_i\rangle = (a_1\langle u_i|u_1\rangle + a_2\langle u_i|u_2\rangle + \cdots + a_n\langle u_i|u_n\rangle)|u_i\rangle$, pero como la base es ortonormal, todos los términos exceptuando $a_i\langle u_i|u_i\rangle = a_i$ desapareceran y obtenemos que $\langle u_i|x\rangle|u_i\rangle = a_i|u_i\rangle$.

Por lo tanto, $A = (\sum_{i=1}^n |u_i\rangle\langle u_1|)|x\rangle = \sum_{i=1}^n \langle u_i|x\rangle|u_i\rangle = \sum_{i=1}^n a_i|u_i\rangle = |x\rangle$.

7. $|\psi\rangle\langle\phi|$ es tal que envia $|x\rangle$ a $\langle\phi|x\rangle|\psi\rangle$. Tenemos que

   $\langle\phi|1\rangle|\psi\rangle = \langle(e|1\rangle + f|2\rangle + g|3\rangle)|1\rangle|\psi\rangle = (\overline{e}\langle 1|1\rangle + \overline{f}\langle 2|1\rangle + \overline{g}\langle 3|1\rangle)|\psi\rangle = \overline{e}|\psi\rangle = \overline{e}a|1\rangle + \overline{e}b|2\rangle + \overline{e}c|3\rangle$

   Similarmente,

   $\langle\phi|2\rangle|\psi\rangle = \langle(e|1\rangle + f|2\rangle + g|3\rangle)|2\rangle|\psi\rangle = (\overline{e}\langle 1|2\rangle + \overline{f}\langle 2|2\rangle + \overline{g}\langle 3|2\rangle)|\psi\rangle = \overline{f}|\psi\rangle = \overline{f}a|1\rangle + \overline{f}b|2\rangle + \overline{f}c|3\rangle$

   Y por último,

   $\langle\phi|3\rangle|\psi\rangle = \langle(e|1\rangle + f|2\rangle + g|3\rangle)|3\rangle|\psi\rangle = (\overline{e}\langle 1|3\rangle + \overline{f}\langle 2|3\rangle + \overline{g}\langle 3|3\rangle)|\psi\rangle = \overline{g}|\psi\rangle = \overline{g}a|1\rangle + \overline{g}b|2\rangle + \overline{f}g|3\rangle$

   Luego la representación matricial de $|\psi\rangle\langle\phi|$ es

$$\begin{pmatrix} \overline{e}a & \overline{f}a & \overline{g}a \\ \overline{e}b & \overline{f}b & \overline{g}b \\ \overline{e}c & \overline{f}c & \overline{g}c \end{pmatrix}$$

8. *a)* Tenemos que $\langle a|(\alpha A)^\dagger|b\rangle = \overline{\langle b|\alpha A|a\rangle} = \overline{\alpha}\overline{\langle b|A|a\rangle} = \overline{\alpha}\langle a|A^\dagger|b\rangle = \langle a|\overline{\alpha}A^\dagger|b\rangle$.

   b)

9. Calcule el adjunto de $2\,|0\rangle\,\langle 1| - i\,|1\rangle\,\langle 0|$

   La matriz asociada a este elemento es

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

   Por el punto anterior sabemos que $A^\dagger$ es la transpuesta de la conjugada de A luego la matriz adjunta es

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

10. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$

    Calculamos valores y vectores propios

$$|A-\lambda Id| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & i \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -i & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} + i \begin{vmatrix} 0 & 1-\lambda \\ -i & 0 \end{vmatrix} =$$

$-\lambda(1-\lambda)(-\lambda) + i(-1)(1-\lambda)(-i) = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = -(\lambda+1)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = -(\lambda+1)(\lambda-1)^2$

El vector propio asociado a -1 lo obtenemos del kernel de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 2 & 0 \\ -i & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calculando obtenemos que este kernel es generado por el vector normalizado $|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}$

Por otra parte los valores propios asociados al valor 1 se obtienen del kernel de $\begin{pmatrix} -1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Calculando obtenemos que este espacio es generado por los vectores normalizados $|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$ y $|3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Estos vectores forman una base ortonormal por lo que podemos escribir $A = -1 |1\rangle \langle 1| + |2\rangle \langle 2| + |3\rangle \langle 3|$.

11. Las matrices de Pauli son

$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

diagonalize las matrices de Pauli.

El polinomio característico de σ_x es $\lambda^2 - 1 = (\lambda-1)(\lambda+1)$. El vector propio asociado a 1 es $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y el vector propio asociado a -1 es $|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

El polinomio característico de Y es también $\lambda^2 - 1 = (\lambda-1)(\lambda+1)$. El vector propio asociado a 1 es $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y el vector propio asociado a -1 es $|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

12. Muestre que $Tr(A |\phi\rangle \langle\psi|) = \langle\psi|A|\phi\rangle$ $Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_i i = \sum_{i=1}^{n} \langle u_i|A|u_i\rangle$.

Por otra parte,

$$\begin{aligned} Tr(A|\phi \times \psi|) &= \sum_{i=1}^{n} \langle u_i|A|\phi \times \psi|u_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle \psi|u_i \times u_i|A|\phi\rangle \\ &= \langle \psi|\sum_{i=1}^{n} u_i \times u_i|A|\phi\rangle \end{aligned}$$

Pero vimos que $\sum_{i=1}^{n} u_i \times u_i$ es la identidad luego esto es igual a $\langle\psi|A|\phi\rangle$.

13.

14. *a)*

$$\begin{aligned} [\sigma_x, \sigma_y] &= \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_x \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2i & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix} = -2i\sigma_z \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} [\sigma_y, \sigma_z] &= \sigma_y\sigma_z - \sigma_z\sigma_y \\ &= \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -2i \\ -2i & 0 \end{pmatrix} = -2i\sigma_x \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} [\sigma_z, \sigma_x] &= \sigma_z\sigma_x - \sigma_x\sigma_z \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = -2i\sigma_y \end{aligned}$$

$$|+\rangle\langle 0| + |-\rangle\langle 1| = (1/\sqrt{2}\,|0\rangle + 1/\sqrt{2}\,|1\rangle)\langle 0| + (1/\sqrt{2}\,|0\rangle - 1/\sqrt{2}\,|1\rangle)\langle 1|$$
$$= 1/\sqrt{2}\,|0\rangle\langle 0| + 1/\sqrt{2}\,|1\rangle\langle 0| + 1/\sqrt{2}\,|0\rangle\langle 1| - 1/\sqrt{2}\,|1\rangle\langle 1|$$
$$= 1/\sqrt{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 1|)$$
$$= 1/\sqrt{2}(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix})$$
$$= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

15. a) $\sigma_x \otimes \sigma_y = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & -i\\ 0 & 0 & i & 0\\ 0 & -i & 0 & 0\\ i & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

 b) $\sigma_y \otimes \sigma_x = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & -i\\ 0 & 0 & -i & 0\\ 0 & i & 0 & 0\\ i & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

 c) $\sigma_z \otimes \sigma_x = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$

 d) $\sigma_x \otimes \sigma_y\,|\phi\rangle = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & -i\\ 0 & 0 & -i & 0\\ 0 & i & 0 & 0\\ i & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}|\phi\rangle = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & -i\\ 0 & 0 & -i & 0\\ 0 & i & 0 & 0\\ i & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \frac{i}{\sqrt{2}}\\ \frac{i}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix}$

16. El enunciado es falso.

 Tomese por ejemplo la base ortonormal encontrada en el punto 3.

 $|u_1\rangle = \begin{pmatrix}i/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$ $|u_2\rangle = \begin{pmatrix}(i-1)/2\\ (i+1)/2\end{pmatrix}$

 Calculando la expresión $|u_1\rangle\otimes|u_1\rangle + |u_2\rangle\otimes|u_2\rangle = \begin{pmatrix}-1/2\\ i/2\\ i/2\\ 1/2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-i/2\\ -1/2\\ -1/2\\ i/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/2 - i/2\\ i/2 - 1/2\\ i/2 - 1/2\\ 1/2 + i/2\end{pmatrix}$

 Vemos que esto es diferente a $|00\rangle + |11\rangle = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$

 Creemos que la expresión correcta hubiera sido tomando el producto tensorial entre los vectores y sus conjugados.

1. Veamos que $\{N_{l,m}\}$ es una familia de operadores de medición.

   En efecto,

$$\sum_{l,m} N_{l,m}^{\dagger} N_{l,m} = \sum_{l,m} (M_m L_l)^{\dagger} M_m L_l = \sum_{l,m} L_l^{\dagger} M_m^{\dagger} M_m L_l = \sum_{l} L_l^{\dagger} \sum_{m} (M_m^{\dagger} M_m) L_l$$

   Pero la suma interna es igual a la identidad por nuestra suposición que $\{M_m\}$ es una familia de operadores de medición. Luego obtenemos que $\sum_{l,m} N_{l,m}^{\dagger} N_{l,m} = \sum_l L_l^{\dagger} (I) L_l = \sum_l L_l^{\dagger} L_l = I$

   y esto ultimo también es igual a la identidad por nuestra suposición que $\{L_l\}$ también es una familia de operadores de medición.

2. En un punto anterior se mostró que $|u_i\rangle \langle u_i|$ es el operador de proyección sobre la coordenada generada por el vector u_1. Las propiedaddes de las proyecciones es que son auto-adjuntas e idempotentes. Por lo tanto, usando primero que es autoadjunta y luego que es idempotente tenemos que

$$|u_i\rangle \langle u_i|^{\dagger} |u_i\rangle \langle u_i| = |u_i\rangle \langle u_i| |u_i\rangle \langle u_i| = |u_i\rangle \langle u_i|$$

   Luego $\sum_{i=0}^{n} |u_i\rangle \langle u_i|^{\dagger} |u_i\rangle \langle u_i| = \sum_{i=0}^{n} |u_i\rangle \langle u_i|$ y en un punto anterior demostramos que esto es igual a la Identidad. Por lo tanto, esto forma una familia de operadores de medición.

3. $\{P_v, I - P_v\}$ es una familia de operadores de medición.

   En efecto tomemos la expresión $P_v^{\dagger} P_v + (I - P_v)^{\dagger} (I - P_v)$. Tenemos que $(A + B)^{\dagger} = A^{\dagger} + B^{\dagger}$ y que $(\alpha A)^{\dagger} = \overline{\alpha} A^{\dagger}$. Además $I = I^{\dagger}$ es unitaria y autoadjunta. Luego la expresión es equivalente a $P_v^{\dagger} P_v + I - P_v - P_v^{\dagger} + P_v^{\dagger} P_v$. Pero en el punto anterior vimos que las proyecciones son autoadjuntas e idempotentes.

   Luego $P_v^{\dagger} P_v = P_v$ y $P_v^{\dagger} = P_v$. Por lo tanto, la expresión se reduce a $P_v + I - P_v - P_v + P_v = I$.

4. - El primer bit sea 0. El operador asociado es $|0\rangle \langle 0| \otimes \overbrace{I \otimes \cdots \otimes I}^{\text{n-1-veces}}$
   - Los primeros m-bits sean 0. El operador asociado es $\overbrace{|0\rangle \langle 0| \otimes \cdots \otimes |0\rangle \langle 0|}^{\text{m-veces}} \otimes \overbrace{I \otimes \cdots \otimes I}^{\text{n-m-veces}}$
   - El primer bit sea 0 y el segundo sea 1. El operador asociado es $|0\rangle \langle 0| \otimes \overbrace{I \otimes \cdots \otimes I}^{\text{n-2-veces}} \otimes |1\rangle \langle 1|$
   - Todos los bits sean 1.
     $\overbrace{|1\rangle \langle 1| \otimes \cdots \otimes |1\rangle \langle 1|}^{\text{n-veces}}$

5. En puntos anteriores ya vimos que P_i es un operador autoadjunto e idempotente. El teorema espectral me da una descomposición del espacio como la suma directa de los espacios asociados a cada valor propio.

   Tenemos que ver que $\sum_{\lambda \in \text{Spec}(A)} P_\lambda^\dagger P_\lambda = I$. Pero ya vimos que $P_\lambda^\dagger P_\lambda = P_\lambda$.

   Luego $\sum_{\lambda \in \text{Spec}(A)} P_\lambda^\dagger P_\lambda = \sum_{\lambda,i} |v_{\lambda,i}\rangle \langle v_{\lambda,i}| = I$ por el punto 2.

6. *a*) La probabilidad que $|\psi\rangle$ este en $|01\rangle$ es $3/8$.

   b) La probabilidad que $|\psi\rangle$ tenga el primer q-bit 0 es $1/8+3/8 = 1/2$. La probabilidad que tenga el primer q-bit 1 es $1/4 + 1/4 = 1/2$

   c) Después de medir en el liter a) el estado resultante debe ser $|\psi'\rangle = |01\rangle$.
   En el literal b) en el primer caso el estado resultante sería

$$|\psi'\rangle = \frac{1/\sqrt{8}\,|00\rangle + \sqrt{3/8}\,|01\rangle}{1/\sqrt{2}} = 1/2\,|00\rangle + \sqrt{3}/2\,|01\rangle$$

   Y en el segundo caso sería

$$|\psi'\rangle = \frac{1/2\,|10\rangle + 1/2\,|11\rangle}{1/\sqrt{2}} = 1/\sqrt{2}\,|10\rangle + 1/\sqrt{2}\,|11\rangle$$

7.

8.

9. Primero para ver condiciones necesarias tome $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$. Vemos que el producto tensorial es igual a $\begin{pmatrix} xz \\ xw \\ yz \\ yw \end{pmatrix}$

   Encontramos el criterio de Peres-Horodecki que nos indica que una condición necesaria (y suficiente para dimensión 2 * 2). El criterio se trata de evaluar la matriz $|\phi\rangle \langle\phi|$, esta puede verse como $\sum_{k,l \in B} |k\rangle \langle l|$ donde B son las proyecciones sobre los vectores de la base canónica de $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ es decir $a\,|00\rangle$, $b\,|01\rangle$, $c\,|10\rangle$ y $d\,|11\rangle$. A su vez $|ab\rangle \langle ab| = |a\rangle \langle a| \otimes |b\rangle \langle b|$. Luego la suma queda como $\sum_{j,k \in \{0,1\}} |j\rangle \langle j| \otimes |k\rangle \langle k|$.

   Luego se calcula la matriz A^{T_B} es igual a $\sum_{j,k \in \{0,1\}} |j\rangle \langle j| \otimes (|k\rangle \langle k|)^T$. El criterio dice que ϕ es entrelazado si A^{T_B} tiene algún valor negativo.

10.