Topología I: Tarea #1

Jonathan Andrés Niño Cortés

13 de febrero de 2015

Para cada $a \in \mathbb{Z}^+$ y $b \in \mathbb{Z}$ definimos el conjunto $S(a,b) := \{an + b : n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z}$

1. Pruebe que la colección $\{S(a,b) : (a,b) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}\}$ es base para una topología (que llamaremos τ_F) sobre $\mathbb{Z}$.

Demostración. Sea $x \in \mathbb{Z}$. En primer lugar, $x \in S(1,0)$ ya que $x = 1 * x + 0$.

En segundo lugar, sea $S(a,b)$ y $S(c,d)$ conjuntos de la colección y sea $x \in S(a,b) \cap S(c,d)$. De manera equivalente, $\underline{x = an + b = cm + d}$ $(*)$, para algunos $n, m \in \mathbb{Z}$. Se puede demostrar que $x \in S(ac, x) \subseteq S(a,b) \cap S(c,d)$.

Por un lado, $x \in S(ac, x)$, pues $x = ac * 0 + x$. Por otro lado, sea $y \in S(ac, x)$ (es decir, que $y = acp + x$, $p \in \mathbb{Z}$). Ahora,

$$\begin{aligned} y &= acp + x \\ &= acp + an + b \text{ por } (*) \\ &= a(cp + n) + b \end{aligned}$$

Similarmente

$$\begin{aligned} y &= acp + x \\ &= acp + cm + d \text{ por } (*) \\ &= c(ap + m) + d \end{aligned}$$

Lo que muestra que $y \in S(a,b) \cap S(c,d)$. □

2. Muestra que la topología τ_F no es la (usual) topología discreta sobre $\mathbb{Z}$. Más aún, muestre que ningún conjunto finito $A \subset \mathbb{Z}$ es abierto.

Demostración. Se debe exceptuar el vacío, que siempre es finito y abierto.

Obsérvese que la base esta formada por subconjuntos infinitos de $\mathbb{Z}$. Como cualquier conjunto abierto corresponde a la unión de elementos de la base, se concluye que si un conjunto es abierto entonces este es infinito. □

3. Muestre que $(\mathbb{Z}, \tau_F)$ es un espacio de Hausdorff.

Demostración. Sea $x, y \in \mathbb{Z}$ tales que $x \neq y$. Sin perdida de generalidad suponga que $x < y$. Vamos a demostrar que $S(m, x)$ y $S(m, y)$, con $m = y - x + 1$ son dos conjuntos abiertos que contienen a x y y respectivamente y que son disyuntos.

Lo primero es cierto, porque $x = 0 * m + x$ y $y = 0 * m + y$, es decir, $x \in S(m, x)$ y $y \in S(m, y)$.

Para la otra proposición, supongase por contradicción que no son disyuntos. Entonces tomamos z en la intersección y existen $p, q \in \mathbb{Z}$ tales que $z = mp + x = mq + y$. De aquí deducimos que $m(p - q) = y - x$, es decir que m divide a $y - x$. Pero tenemos que $0 < y - x < m$, por lo cual esto es una contradicción. □

4. Pruebe que cada $S(a, b)$ es un conjunto cerrado (i.e. complemento de un abierto).

Demostración. Veamos que el complemento de $S(a, b)$ lo podemos escribir como unión de conjuntos en la base, es decir un conjunto abierto.

Vamos a demostrar que

$$S(a, b)^C = \bigcup_{i=1}^{a-1} S(a, b + i)$$

Utilizamos el método de doble contenencia. Primero tomemos un elemento x en la unión. Entonces existen $n, i \in \mathbb{Z}$, tales que $0 < i < a$ y $x = an + b + i$. Si suponemos por contradicción que $x \in S(a, b)$, entonces $x = am + b$ para algún $m \in \mathbb{Z}$.

A partir de estas dos expresiones de x concluimos que

$$\begin{aligned} am + b &= an + b + i \\ am &= an + i \\ a(m - n) &= i \end{aligned}$$

Es decir que a divide a i, pero esto no es posible por el intervalo en que se encuentra i $(0 < i < a)$. Luego $x \in S(a, b)^C$

Para la otra contenencia si $x \notin S(a, b)$ entonces no existe ningun n tal que $x = an + b$. Por el algortimo de la división sabemos que existen enteros $q, r \in \mathbb{Z}$ tales que $x - b = aq + r$ con $0 \leq r < q$. Pero $r \neq 0$ pues de lo contrario contradiciría nuestra hipótesis inicial. Por lo tanto, vemos que $x = aq + b + r$, es decir que $x \in S(a, b + r)$, y por lo tanto pertenece a la unión. □

5. Muestre que

$$\mathbb{Z} \backslash \{-1, 1\} = \bigcup_{p \text{ primo}} S(p, 0)$$

y use los problemas 2 y 4 para concluir que existen infinitos primos.

Demostración. La igualdad anterior se da como consecuencia del teorema fundamental de la aritmética. Todo número entero positivo tiene una expansión en primos que es única. Por lo tanto, existe un p primo tal que p divide a n, es decir, $n \in (S, p)$. El número 1 (y el -1) es un caso especial ya que por convención es equivalente a la multiplicación de un conjunto vacío de primos, de tal manera que no hay ningun primo que divida a 1 (similarmente se cumple para el -1). Por otra parte, si m es negativo entonces podemos escribirlo como $m = -1 * n$ para $n > 1$ y por lo tanto por transitividad de la división existe un p que divide a m.

Ahora por el punto 4) tenemos que los conjuntos en la unión también son cerrados.

Por las leyes de De morgan tenemos que la unión finita de conjuntos cerrados es cerrada, partiendo del hecho que la intersección finita de a biertos es abierta. Sea $\mathcal{A}$ una colección finita de conjuntos.

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A^C = (\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A)^C$$

Vemos que la parte derecha de la igualdad es el complemento de un conjunto abierto y por lo tanto es cerrado.

Si suponemos que el número de primos es finito entonces la unión es un conjunto cerrado por lo anterior y por lo tanto su complemento es abierto. Pero esto es una contradicción con el punto 2) porque el conjunto $\{-1, 1\}$ es finito. $\square$