Topología: Tarea #4

Jonathan Andrés Niño Cortés

18 de febrero de 2015

1. Suponga que para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos un espacio topológico (X_n, τ_n) metrizable (i.e. existe una métrica en X_n que genera la topología τ_n). Muestre que $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ con la topología producto es metrizable.

   Nota: Asumimos para que la prueba sea correcta que $0 \notin \mathbb{N}$.

   Demostración. Vamos a utilizar una estrategia similar a la utilizada para demostrar que $\mathbb{R}^\omega$ es metrizable. Denotemos por d_n la métrica asociada al espacio X_n. Entonces tomamos $\overline{d_n}(x,y) = \min(d(x,y),1)$ la métrica estándar acotada derivada de d_n. Definimos la métrica de $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ como

$$D(x,y) = \sup_{i\in\mathbb{N}}\left(\left\{\frac{\overline{d}_i(x_i,y_i)}{i}\right\}\right)$$

   La primera parte se trata de demostrar que es una métrica. En efecto tenemos que

$$\begin{aligned} D(x,x) &= \sup\left(\left\{\frac{\overline{d}_i(x_i,x_i)}{i}\right\}\right) \\ &= \sup\left(\left\{\frac{0}{i}\right\}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

   Por otra parte si $D(x,y) = 0$ entonces tenemos que para todo $i \in \mathbb{N}$ se cumple que $\overline{d}_i\{x_i,y_i\}$ por lo que $x_i = y_i$. Concluimos que $x = y$.

   También tenemos que $D(x,y) = D(y,x)$

$$D(x,y) = \sup\left(\left\{\frac{\overline{d}_i(x_i,y_i)}{i}\right\}\right) = \sup\left(\left\{\frac{\overline{d}_i(y_i,x_i)}{i}\right\}\right) = D(y,x)$$

   Finalmente para probar la desigualdad triangular tomemos $x,y,z \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Tenemos que para todo $i \in \mathbb{N}$

$$\frac{\overline{d}_i(x_i,z_i)}{i} \leq \frac{\overline{d}_i(x_i,y_i)}{i} + \frac{\overline{d}_i(y_i,z_i)}{i}.$$

pues $\overline{d_i}$ es una métrica.

Pero además,

$$\frac{\overline{d}_i(x_i,z_i)}{i} \leq \frac{\overline{d}_i(x_i,y_i)}{i} + \frac{\overline{d}_i(y_i,z_i)}{i} \leq D(x,y) + D(y,z)$$

pues $D(x,y)$ y $D(y,z)$ son por definición los supremos de los conjuntos que contienen a $\frac{\overline{d}_i(x_i,y_i)}{i}$ y $\frac{\overline{d}_i(y_i,z_i)}{i}$ respectivamente.

Por lo tanto tenemos que $D(x,y)+D(y,z)$ es una cota superior para $\left\{\frac{\overline{d_i}(y_i,x_i)}{i}\right\}$ y por lo tanto el supremo debe ser menor, es decir, $D(x,z) \leq D(x,y)+D(y,z)$.

Ahora necesitamos probar que la topología de la métrica es igual a la topología del producto. En primer lugar tomese cualquier abierto de la topología producto. Este es de la forma

$$B = \prod_{i\in\mathbb{N}} U_i$$

donde U_i es abierto en la topología de X_i para $i = \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ y $U_i = X_n$ para los demás índices. Ahora tomemos un elemento $x \in B$. La coordenada de x en el espacio X_i la vamos a denotar por x_i. Para cada X_i con $i = \alpha_1 \cdots \alpha_n$ podemos hacer una bola de radio ϵ_i alrededor de x_i que este contenida en U_i. Entonces tomamos $\epsilon = \min(\{\frac{\epsilon_i}{i}\})$ donde $i = \alpha_1 \cdots \alpha_n$ y la bola en $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ con centro en x y radio ϵ es tal que esta contenida en B. Para probar esto tomese cualquier elemento $y \in B_\epsilon(x)$. Tenemos que para todo $i = \alpha_1, \cdots, \alpha_n$, $\overline{d_i}(x_i,y_i)/i < \epsilon \leq \epsilon_i/i$ por lo que $\overline{d_i}(x_i,y_i) < \epsilon_i$ y como la bola de radio ϵ_i alrededor de x_i esta contenida en U_i se sigue que $y_i \in U_i$. Para los demás i es trivial que $y_i \in U_i = X_i$. Esto implica que $y \in B$.

En segundo lugar tómese un bola de radio ϵ alrededor de x y tómese cualquier $y \in B_\epsilon(x)$. Entonces vamos a demostrar que existe un abierto de la topología producto contenido en esta bola que contiene a y. Por la propiedad arquimedeana siempre se puede encontrar un $N \in \mathbb{N}$ tal que $\epsilon * N > 1$, es decir tal que $1/N < \epsilon$. Para todos los $i \geq N$ y para todo $y_i \in X_i$ se cumple que $\overline{d}_i(x_i,y_i)/i \leq 1/i < \epsilon$. Para los $i < N$ tomemos la bola de radio ϵ_i alrededor de y_i, donde $\epsilon_i < \epsilon - \overline{d_i}(x_i,y_i)\}$). Sea $B = \prod_{i\in\mathbb{N}} V_i$ donde $V_i = B_{\epsilon_i}(y_i)$ para los $i < N$ y $V_i = X_n$ para $i \geq N$. Claramente $y \in B$, ahora vamos a demostrar que $B \subseteq B_\epsilon(x)$. Tomemos cualquier elemento $b \in B$. Probemos que $D(b,x) < \epsilon$. Obsérvese que para todo $i \in \mathbb{N}$ tenemos que $\overline{d_i}(x_i,b_i)/i < \epsilon$. Si $i \geq N$ esto es trivial porque $\overline{d}_i(x,y)/i \leq 1/i \geq 1/N$. Si $i < N$ entonces $\overline{d_i}(b_i,y_i) < \epsilon - d_i(x_i,y_i), d_i(x_i,y_i)$. Entonces por desigualdad triangular tenemos que $\overline{d_i}(x_i,b_i)/i \leq$

$\overline{d_i}(x_i,y_i)/i+\overline{d_i}(y_i,b_i)/i < \overline{d_i}(x_i,y_i)/i+\epsilon-\overline{d_i}(x_i,y_i)i = \epsilon$. Como solamente se consideran finitos de estos (hasta la coordenada $n-1$) puedo tomar

$$M = \max\left(\left\{\frac{\overline{d_1}(b_1,y_1)}{1}, \cdots, \frac{\overline{d_{n-1}}(b_1,y_{n-1})}{n-1}, \frac{1}{n}\right\}\right)$$

Entonces $D(b,x) \leq M < \epsilon$. Concluimos que $b \in B_\epsilon(x)$.

□

2. Sea (X,d) un espacio métrico separable (i.e. existe $A \subseteq X$ enumerable tal que $\overline{A} = X$). Muestre que X es homeomorfo a un subespacio de $\mathbb{R}^\omega$.

Demostración. Sea la función $f : X \to \mathbb{R}^\omega$ definida como $f(x) = (d(x,a_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

Primero demostramos que esta función es invertible. Sea $x, y \in X$ tales que $x \neq y$. Como el espacio es metrizable tenemos que es de Hausdorf. Entonces existe una bola que contiene a x y otra que contiene a y tal que son disyuntas. Es más, existe una bola centrada en x y algun radio $\delta > 0$ y otra centrada en y con radio $\gamma > 0$ tal que son disyuntas entre sí. Y más aún podemos tomar las bolas centradas en los puntos con radio $\epsilon = \min(\delta,\gamma)$ y siguen siendo disyuntas. Pero además tenemos que A es denso en X. Luego existe $a_n \in A$ tal que $a_n \in B_\epsilon(x)$ y $a_n \notin B_\epsilon(y)$. Luego $d(x,a_n) < \epsilon$ y $d(y,a_n) > \epsilon$ por lo que $f(x) \neq f(y)$.

Vamos a demostrar que la función f es continua. Para eso basta tomar un subbásico en la topología producto y demostrar que su preimagen es abierta en X. Un subbasico típico serían los $y \in Y$ tales que $(y)_n \in (a,b)$ con $0 < a < b$. Denotemos a este conjunto por S. $f^{-1}(S)$ serían los elementos x de X tales que $a < d(x,a_n) < b$. Esto es abierto porque para cualquier $z \in f^{-1}(S)$ podemos tomar la bola de radio menor a $\min(d(z,a_n)-a, b-d(z,a_n))$. y esta bola estaría contenida en $f^{-1}(S)$.

Nótese que la topología de X la puedo generar solamente con las bolas centradas en los elementos de A. Tomemos cualquier $B_\epsilon(x)$ donde $x \in X$. Ahora tomemos cualquier elemento $b \in B_\epsilon(x)$. Tenemos además que existe una bola de radio δ contenida y centro b contenida en $B_\epsilon(x)$. Entonces podemos tomar $B_{\delta/2}(b)$ y como A es denso tenemos que existe $a_n \in A$ tal que $a_n \in B_{\delta/2}(b)$. Finalmente la bola de radio $\delta/2$ alrededor de a_n es tal que contiene a b y esta contenida $B_\epsilon(x)$. Pues por desigualdad triangular $d(c,b) \leq d(c,a_n) + d(a_n,b) < \delta/2 + \delta/2 = \delta$.

Ahora para demostrar que la inversa es continua también tomemos un básico típico de la topología de X, es decir, una bola de radio ϵ centrada en algun punto $a \in A$, que se denotara B. Queremos demostrar que la imagen de $f(B)$ es abierta. Sea $Y = \mathrm{Rang}(f)$. Ahora consideramos la imagen de una bola de radio ϵ centrada en un elemento a_n de A. Por definición, estos serán los elementos $x \in Y$ tales que $0 \leq (x)_n < \epsilon$. Como esta función es inyectiva podemos decir que la preimagen de los elementos en Y tales que $0 \leq (x)_n < \epsilon$ sería la bola de radio ϵ alrededor de a_n. Este conjunto es abierto en Y

pues puede verse como los $x \in \mathbb{R}^\omega$ tales que $(x)_n \in (-\epsilon, \epsilon) \cap$ Rang(f). Por lo tanto la función inversa de f también es continua.

$\square$

3. Muestre que la función $D : \mathbb{R}^\omega \times \mathbb{R}^\omega \to \mathbb{R}$ definida por

$$d(x,y) = \sum_{i \in \omega} \frac{2^{-i}|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|}$$

es una métrica y que la topología inducida por esta métrica es la misma topología producto de $\mathbb{R}^\omega$.

Demostración. Sea d una métrica. En primer lugar vamos a demostrar que la función $d^* : X, X \to \mathbb{R}$ definida como $d^*(x,y) \mapsto \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ es una métrica.

$$d^*(x,x) = \frac{d(x,x)}{1 + d(x,x)} = \frac{0}{1} = 0.$$

Además, si $d^*(x,x) = 0$ entonces el numerador debe ser cero. Es decir, $d(x,y) = 0$ lo que implica que $x = y$.

$$d(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)} = \frac{d(y,x)}{1 + d(y,x)} = d(y,x)$$

Lo más díficil es la desigualdad triangular. Para esto considere la siguente cadena de equivalencias

$$\begin{array}{rcl}
d^*(x,z) & \leq & d^*(x,y) + d^*(y,z) \\
\dfrac{d(x,z)}{1 + d(x,z)} & \leq & \dfrac{d(x,y)}{1 + d(x,y)} + \dfrac{d(y,z)}{1 + d(y,z)} \\
\dfrac{d(x,z)}{1 + d(x,z)} & \leq & \dfrac{d(x,y) + d(x,y)d(y,z) + d(y,z) + d(y,z)d(x,y)}{1 + d(x,y) + d(y,z) + d(x,y)d(y,z)} \\
d(x,z) + d(x,y)d(x,z) + d(y,z) + & & d(x,y) + d(x,y)d(y,z) + d(y,z) + d(y,z)d(x,y) + \\
d(x,z) + d(x,y)d(y,z)d(x,z) & \leq & d(x,y)d(x,z) + 2d(x,y)d(y,z)d(x,z) + d(y,z)d(x,z) \\
 & & d(x,y) + d(x,y)d(y,z) + \\
d(x,z) & \leq & d(y,z) + d(y,z)d(x,y) + d(x,y)d(y,z)d(x,z)
\end{array}$$

Lo ultimo es cierto por la desigualdad triangular de d y porque los demás términos en la derecha son mayores o iguales a 0.

Ahora si tomamos $d(x,y) = |x-y|$ (la métrica usual de $\mathbb{R}$), entonces podemos reescribir D como

$$D(x,y) = \sum_{i\in\omega} \frac{d^*(x_i,y_i)}{2^i}$$

Además obsérvese que $d^(x,y) < 1$ puesto que $d(x,y) < 1 + d(x,y)$. Por otra parte tenemos que la sumatoria $\sum (1/2)^i$ converge pues esta es la serie geométrica evaluada en $1/2 < 1$. De hecho sabemos que

$$\sum_{i\in\omega} = \frac{1}{2^i} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

Entonces, podemos probar que cualquier sumatoria $\sum d^*(x_i,y_i)/2^i)$ converge por el test de la convergencia. Esto porque para todo término tenemos que $d^*(x_i,y_i)/2^i < 1/2^i$, luego como $\sum 1/2^i$ converge, $\sum d^*(x_i,y_i)/2^i$ también. $\square$

Ahora vamos a demostrar que D es una métrica.

$$D(x,x) = \sum_{i\in\omega} \frac{d^*(x,x)}{2^i} = \sum_{i\in\omega} \frac{0}{2^i} = 0$$

También vemos que si $D(x,y) = 0$ entonces $\forall i \in \omega$ $d^*(x_i,y_i) = 0$ por lo que $x_i = y_i$. Concluimos que $x = y$.

$$D(x,y) = \sum_{i\in\omega} \frac{d^*(x_i,y_i)}{2^i} = \sum_{i\in\omega} \frac{d^*(y_i,x_i)}{2^i} = D(y,x)$$

Resta por demostrar la desigualdad triangular. Para series de términos no negativos tenemos lo siguiente:

$$D(x,y) + D(y,z) = \sum_{i\in\omega} \frac{d^*(x_i,y_i)}{2^i} + \sum_{i\in\omega} \frac{d^*(y_i,z_i)}{2^i} = \sum_{i\in\omega} \left(\frac{d^*(x_i,y_i)}{2^i} + \frac{d^*(y_i,z_i)}{2^i} \right)$$

Por la desigualdad triangular de d^* tenemos que $d^*(x_i,z_i)/2^i \le d^*(x_i,y_i)/2^i + d^*(y_i,z_i)/2^i$. Por lo tanto concluimos que

$$D(x,z) = \sum_{i\in\omega} \frac{d^*(x_i,z_i)}{2^i} \le \sum_{i\in\omega} \left(\frac{d^*(x_i,y_i)}{2^i} + \frac{d^*(y_i,z_i)}{2^i} \right)$$

Por lo que la desigualdad triangular se cumple.

Ahora debemos demostrar que la topología que genera esta métrica es igual a la topología producto de $\mathbb{R}^\omega$. Primero nótese que

$$\sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1-\frac{1}{2}^n}{1-\frac{1}{2}} = 2 - 2 * (1 - (1/2)^n) = 2(1/2)^n = (1/2)^{n-1}$$

Como una consecuencia de la propiedad arquimedeana para cualquer $\epsilon > 0$ se puede encontrar un $N \in \omega$ tal que $1/2^{N-1} < \epsilon$. Entonces sea B una bola de radio ϵ alrededor de un punto x y tomemos un punto $y \in B$. Sabemos que $D(x,y) < \epsilon$ luego sea $\delta = \epsilon - D(x,y) > 0$ y podemos tomar un $N \in \omega$ tal que $(1/2)^{N-1} < \delta/2$. Entonces puedo tomar como V_i el abierto $B_{\epsilon_i}(y_i)$ con la métrica d^* donde $\epsilon_i/2^i < \delta/2N)$), si $i \leq N$. De lo contrario podemos tomar a V_i como $\mathbb{R}$. Luego el conjunto $S = \prod_{i\in\omega} V_i$ es tal que $b \in S \subseteq B$. Tome un elemento $s \in S$. Tenemos que $D(s,y) = \sum_{i\in\omega} d^*(s_i, y_i)/2^i$. Ahora podemos separar esta suma como

$$D(s,y) = \sum_{i=0}^{N-1} d^*(s_i,y_i)/2^i + \sum_{i=N}^{\infty} d^*(s_i,y_i)/2^i$$

Por una parte tenemos que $d^*(s_i,y_i)/2^i < \epsilon_i/2^i < \delta/2N$. Luego,

$$\sum_{i=0}^{N-1} \frac{d^*(s_i,y_i)}{2^i} < \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\delta}{2N} = \frac{N * \delta}{2N} = \frac{\delta}{2}.$$

Por la otra tenemos que

$$\sum_{i=N}^{\infty} d^*(s_i,y_i)/2^i < \sum_{i=N}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2}^{N-1} < \delta/2.$$

Por lo tanto, tenemos que $D(s,y) < \delta$.

Finalmente por desigualdad triangular concluimos que

$$D(s,x) \leq D(s,y) + D(x,y) < \delta + D(x,y) = \epsilon - D(x,y) + D(x,y) = \epsilon$$

Lo cual termina esta parte de la demostración.

Ahora tomemos un básico de la topología producto. Este es de la forma

$$B = \prod_{i\in\mathbb{N}} U_i$$

donde U_i es abierto en la topología de X_i para $i = \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ y $U_i = X_n$ para los demás índices. Entonces tomemos cualquier $x \in B$. Entonces, para cada $i = \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ podemos encontrar un abierto $B\epsilon_i(x_i)$ con la métrica d^* tal que esta contenida en U_i.

Para los demás i yo puedo tomar $\epsilon_i = 1$. Por lo tanto, podemos tomar $\epsilon = \min(\{\epsilon_i)(2^i)\})$ pues este conjunto es finito. Luego si tomamos la bola con centro en x y radio ϵ esta estaría contenida en B. Esto es así porque para todo $y \in B_\epsilon(x)$ y para todo $i \in \omega$ yo tengo que $d^*(x_i, y_i)/2^i < \epsilon \leq \epsilon_i/2^i$. Por lo cual $d^*(x_i, y_i) < \epsilon_i$. Esto concluye la demostración, pues esto implica que $y \in B$.