Topología: Tarea #4

Jonathan Andrés Niño Cortés

16 de febrero de 2015

1. Suponga que para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos un espacio topológico (X_n, τ_n) metrizable (i.e. existe una métrica en X_n que genera la topología τ_n). Muestre que $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ con la topología producto es metrizable.

   Demostración. Vamos a utilizar una estrategia similar a la utilizada para demostrar que $\mathbb{R}^\omega$ es metrizable. Denotemos por d_n la métrica asociada al espacio X_n. Entonces tomamos $\overline{d_n}(x, y) = \min(d(x, y), 1)$ la métrica estándar acotada derivada de d_n. Entonces definimos la métrica de $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ como

   $$D(x, y) = \sup_{i\in\mathbb{N}}\left(\left\{\frac{\overline{d}_i(x_i, y_i)}{i}\right\}\right)$$

   En primer lugar demostremos que es una métrica. Por una parte,

   $$\begin{aligned} D(x, x) &= \sup\left(\left\{\frac{\overline{d}_i(x_i, x_i)}{i}\right\}\right) \\ &= \sup\left(\left\{\frac{0}{i}\right\}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

   Por otra parte si $D(x, y) = 0$ entonces tenemos que para todo $i \in \mathbb{N}$ se cumple que $\overline{d}_i\{x_i, y_i\}$ por lo que $x_i = y_i$. Concluimos que $x = y$.
   También tenemos que $D(x, y) = D(y, x)$

   $$D(x, y) = \sup\left(\left\{\frac{\overline{d}_i(x_i, y_i)}{i}\right\}\right) = \sup\left(\left\{\frac{\overline{d}_i(y_i, x_i)}{i}\right\}\right) = D(y, x)$$

   Finalmente para probar la desigualdad triangular tomemos $x, y, z \in \prod_{n\text{ß}\mathbb{N}} X_n$. Tenemos que para todo $i \in \mathbb{N}$

   $$\frac{\overline{d}_i(x_i, z_i)}{i} \le \frac{\overline{d}_i(x_i, y_i)}{i} + \frac{\overline{d}_i(y_i, z_i)}{i}$$

pues $\overline{d_i}$ es una métrica.

Pero además,

$$\frac{\overline{d}_i(x_i, z_i)}{i} \leq \frac{\overline{d}_i(x_i, y_i)}{i} + \frac{\overline{d}_i(y_i, z_i)}{i} \leq D(x, y) + D(y, z)$$

pues $D(x, y)$ y $D(y, z)$ son por definición los supremos de los conjuntos que contienen a $\frac{\overline{d}_i(x_i, y_i)}{i}$ y $\frac{\overline{d}_i(y_i, z_i)}{i}$ respectivamente.

Por lo tanto tenemos que $D(x, y) + D(y, z)$ es una cota superior para $\left\{\frac{\overline{d}_i(y_i, x_i)}{i}\right\}$ y por lo tanto el supremo debe ser menor, es decir, $D(x, z) \leq D(x, y) + D(y, z)$.

Ahora necesitamos probar que la topología de la métrica es igual a la topología del producto.

En primer lugar tomese cualquier abierto de la topología producto.

Este es de la forma

$$B = \prod_{i \in \mathbb{N}} U_i$$

donde U_i es abierto en la topología de X_i para $i = \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ y $U_i = X_n$ para los demás índices.

Ahora tomemos un elemento $x \in B$. La coordenada de x en el espacio X_i la vamos a denotar por x_i.

Para cada X_i con $i = \alpha_1 \cdots \alpha_n$ podemos hacer una bola de radio ϵ_i alrededor de x_i que este contenida en U_{α_j}.

Entonces tomamos $\epsilon = \min(\{\frac{\epsilon_i}{i}\})$ donde $i = \alpha_1 \cdots \alpha_n$ y la bola en $\prod_{n ß \mathbb{N}} X_n$ con centro en x y radio ϵ es tal que esta contenida en B.

Para probar esto tomese cualquier elemento $y \in B_\epsilon(x)$. Tenemos que para todo $i = \alpha_1, \cdots, \alpha_n$, $\overline{d_i}(x_i, y_i)/i < \epsilon \leq \epsilon_i/i$ por lo que $\overline{d_i}(x_i, y_i) < \epsilon_i$ y como la bola de radio ϵ_i alrededor de x_i esta contenida en U_i se sigue que $y_i \in U_i$. Para los demás i es trivial que $y_i \in U_i = X_i$. Esto implica que $y \in B$.

En segundo lugar tómese un bola de radio ϵ alrededor de x. Y tomese cualquier $y \in B_\epsilon(x)$. Entonces vamos a demostrar que existe un abierto de la topología producto contenido en esta bola.

Por la propiedad arquimedeana siempre se puede encontrar un $N \in \mathbb{N}$ tal que $\epsilon * N > 1$, es decir tal que $1/N < \epsilon$. Para todos los $i \geq N$ y para todo $y_i \in X_i$ se cumple que $\overline{d}_i(x_i, y_i)/i \leq 1/i < \epsilon$.

Para los $i < N$ tomemos la bola de radio ϵ_i alrededor de y_i, donde $\epsilon_i < \epsilon - \overline{d_i}(x_i, y_i)\})$.

Sea $B = \prod_{i \in \mathbb{N}} V_i$ donde $V_i = B_{\epsilon_i}(y_i)$ para los $i < N$ y $V_i = X_n$ para $i \geq N$.

Claramente $y \in B$, ahora vamos a demostrar que $B \subseteq B_\epsilon(x)$.

Tomemos cualquier elemento $b \in B$. Probemos que $D(b, x) < \epsilon$.

Obsérvese que para todo $i \in \mathbb{N}$ tenemos que $\overline{d_i}(x_i, b_i)/i < \epsilon$. Si $i \geq N$ esto es trivial porque $\overline{d}_i(x, y)/i \leq 1/i \geq 1/N$. Si $i < N$ entonces $\overline{d_i}(b_i, y_i) < \epsilon - d_i(x_i, y_i), d_i(x_i, y_i)$.

Entonces por desigualdad triangular tenemos que $\overline{d_i}(x_i, b_i)/i \leq \overline{d_i}(x_i, y_i)/i + \overline{d_i}(y_i, b_i)/i < \overline{d_i}(x_i, y_i)/i + \epsilon - \overline{d_i}(x_i, y_i)i = \epsilon$.

Como solamente se consideran finitos de estos (hasta la coordenada $n-1$) puedo tomar

$$M = \max\left(\left\{\frac{\overline{d_1}(b_1, y_1)}{1}, \cdots, \frac{\overline{d_{n-1}}(b_1, y_{n-1})}{n-1}, \frac{1}{n}\right\}\right)$$

Entonces $D(b, x) \leq M < \epsilon$. Concluimos que $b \in B_\epsilon(x)$.

□

2. Sea (X, d) un espacio métrico separable (i.e. existe $A \subseteq X$ enumerable tal que $\overline{A} = X$). Muestre que X es homeomorfo a un subespacio de $\mathbb{R}^\omega$.

Demostración. Sea la función $f : X \to \mathbb{R}^\omega$ definida como $f(x) = (d(x, a_n))_{n \in \mathbb{N}}$.

Primero demostramos que esta función es continua. Sea $x, y \in X$ tales que $x \neq y$. Como el espacio es metrizable tenemos que es de Hausdorf. Entonces existe una bola que contiene a x y otra que contiene a y tal que son disyuntas. Es más, existe una bola centrada en x y algun radio $\delta > 0$ y otra centrada en y con radio $\gamma > 0$ tal que son disyuntas entre sí. Y más aún podemos tomar las bolas centradas en los puntos con radio $\epsilon = \min(\delta, \gamma)$ y siguen siendo disyuntas.

Pero además tenemos que A es denso en X. Luego existe $a_n \in A$ tal que $a_n \in B_\epsilon(x)$ y $a_n \notin B_\epsilon(y)$. Luego $d(x, a_n) < \epsilon$ y $d(y, a_n) > \epsilon$ por lo que $f(x) \neq f(y)$.

Sea $Y = \text{Rang}(f)$ Ahora consideramos la imagen de una bola de radio ϵ centrada en un elemento a_n de A. Por definición, estos serán los elementos $x \in Y$ tales que $0 \leq (x)_n < \epsilon$. Como esta función es inyectiva podemos decir que la preimagen de los elementos en Y tales que $0 \leq (x)_n < \epsilon$ sería la bola de radio ϵ alrededor de a_n. Este conjunto es abierto en Y pues puede verse como los $x \in \mathbb{R}^\omega$ tales que $(x)_n \in (-\epsilon, \epsilon) \cap \text{Rang}(f)$, pues por definición la distancia siempre es mayor o igual a 0.

Vamos a demostrar que la función f es continua. Para eso basta tomar un subbásico en la topología producto y demostrar que su preimagen es abierta en X. Un subbasico típico serían los $y \in Y$ tales que $(y)_n \in (a, b)$ con $0 < a < b$. Denotemos a este conjunto por S. $f^{-1}(S)$ serían los elementos x de X tales que $a < d(x, a_n) < b$. Esto es abierto porque para cualquier $z \in f^{-1}(S)$ podemos tomar la bola de radio menor a $\min(d(z, a_n) - a, b - d(z, a_n))$. y esta bola estaría contenida en $f^{-1}(S)$.

Nótese que la topología de X la puedo generar solamente con las bolas centradas en los elementos de A. Tomemos cualquier $B_\epsilon(x)$ donde $x \in X$. Ahora tomemos cualquier elemento $b \in B_\epsilon(x)$. Tenemos además que existe una bola de radio δ contenida y centro b contenida en $B_\epsilon(x)$. Entonces podemos tomar $B_{\delta/2}(b)$ y como A es denso tenemos que existe $a_n \in A$ tal que $a_n \in B_{\delta/2}(b)$.

Finalmente la bola de radio $\delta/2$ alrededor de a_n es tal que contiene a b y esta contenida $B_\epsilon(x)$. Pues por desigualdad triangular $d(c,b) \leq d(c,a_n) + d(a_n,b) < \delta/2 + \delta/2 = \delta$.

Ahora para demostrar que la inversa es continua también tomemos un básico típico de la topología de X, es decir, una bola de radio ϵ centrada en algun punto $a \in A$, que se denotara B. Queremos demostrar que la imagen de $f(B)$ es abierta y efectivamente este el caso por lo discutido al principio de la demostración.

Ahora por otra parte si el centro no esta en A, entonces

$\square$

3. Muestre que la función $D : \mathbb{R}^\omega \times \mathbb{R}^\omega \to \mathbb{R}$ definida por

$$d(x,y) = \sum_{i \in \omega} \frac{2^{-i}|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|}$$

es una métrica y que la topología inducida por esta métrica es la misma topología producto de $\mathbb{R}^\omega$.

Demostración. Sea d una métrica. En primer lugar vamos a demostrar que la función $d^* : X, X \to \mathbb{R}$ definida como $d^*(x,y) \mapsto \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ es una métrica.

$$d^*(x,x) = \frac{d(x,x)}{1 + d(x,x)} = \frac{0}{1} = 0.$$

Además, si $d^*(x,x) = 0$ entonces el numerador debe ser cero. Es decir, $d(x,y) = 0$ lo que implica que $x = y$.

$$d(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)} = \frac{d(y,x)}{1 + d(y,x)} = d(y,x)$$

Lo más díficil es la desigualdad triangular. Para esto considere la siguente cadena de equivalencias

$$
\begin{aligned}
d^*(x,z) &\leq d^*(x,y)+d^*(y,z)\\
\frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} &\leq \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}+\frac{d(y,z)}{1+d(y,z)}\\
\frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} &\leq \frac{d(x,y)+d(x,y)d(y,z)+d(y,z)+d(y,z)d(x,y)}{1+d(x,y)+d(y,z)+d(x,y)d(y,z)}\\
d(x,z)+d(x,y)d(x,z)+d(y,z)+ & \quad d(x,y)+d(x,y)d(y,z)+d(y,z)+d(y,z)d(x,y)+\\
d(x,z)+d(x,y)d(y,z)d(x,z) &\leq d(x,y)d(x,z)+2d(x,y)d(y,z)d(x,z)+d(y,z)d(x,z)\\
& \quad d(x,y)+d(x,y)d(y,z)+\\
d(x,z) &\leq d(y,z)+d(y,z)d(x,y)+d(x,y)d(y,z)d(x,z)
\end{aligned}
$$

Lo ultimo es cierto por la desigualdad triangular de d y porque los demás términos en la derecha son mayores o iguales a 0.

Ahora si tomamos $D(x,y)=|x-y|$ (la métrica usual de $\mathbb{R}$), entonces podemos reescribir D como

$$D(x,y)=\sum_{i\in\omega}\frac{d^*(x_i,y_i)}{2^i}$$

Además obsérvese que $d*(x,y)<1$ puesto que $d(x,y)<1+d(x,y)$.

Por otra parte tenemos que la sumatoria $\sum(1/2)^i$ converge pues esta es la serie geométrica evaluada en $1/2<1$. De hecho sabemos que

$$\sum_{i\in\omega}=\frac{1}{2^i}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2.$$

Entonces, podemos probar que cualquier sumatoria $\sum d^*(x_i,y_i)/2^i)$ converge por test de la convergencia.

Esto porque para todo término tenemos que $d^*(x_i,y_i)/2^i<1/2^i$, luego como $\sum 1/2^i$ converge, $\sum d^*(x_i,y_i)/2^i$ también. $\square$

Ahora vamos a demostrar que D es una métrica.

$$D(x,x)=\sum_{i\in\omega}\frac{d^*(x,x)}{2^i}=\sum_{i\in\omega}\frac{0}{2^i}=0$$

También vemos que si $D(x,y)=0$ entonces $\forall i\in\omega\ d^*(x_i,y_i)=0$ por lo que $x_i=y_i$. Concluimos que $x=y$.

$$D(x,y)=\sum_{i\in\omega}\frac{d^*(x_i,y_i)}{2^i}=\sum_{i\in\omega}\frac{d^*(y_i,x_i)}{2^i}=D(y,x)$$

Resta por demostrar la desigualdad triangular. Para series de términos no negativos tenemos lo siguiente:

$$D(x,y)+D(y,z)=\sum_{i\in\omega}\frac{d^*(x_i,y_i)}{2^i}+\sum_{i\in\omega}\frac{d^*(y_i,z_i)}{2^i}=\sum_{i\in\omega}\left(\frac{d^*(x_i,y_i)}{2^i}+\frac{d^*(y_i,z_i)}{2^i}\right)$$

Por la desigualdad triangular de d^* tenemos que $d^*(x_i,z_i)/2^i \leq d^*(x_i,y_i)/2^i + d^*(y_i,z_i)/2^i$. Por lo tanto concluimos que

$$D(x,z)=\sum_{i\in\omega}\frac{d^*(x_i,z_i)}{2^i}\leq\sum_{i\in\omega}\left(\frac{d^*(x_i,y_i)}{2^i}+\frac{d^*(y_i,z_i)}{2^i}\right)$$

Por lo que la desigualdad triangular se cumple.

Ahora debemos demostrar que la topología que genera esta métrica es igual a la topología producto de $\mathbb{R}^\omega$.

Primero nótese que

$$\sum_{i=n}^{\infty}\frac{1}{2^i}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-\frac{1-\frac{1}{2}^n}{1-\frac{1}{2}}=2-2*(1-(1/2)^n)=2(1/2)^n=(1/2)^{n-1}$$

Como una consecuencia de la propiedad arquimedeana para cualquer $\epsilon>0$ se puede encontrar un $N\in\omega$ tal que $1/2^{N-1}<\epsilon$.

Entonces sea B una bola de radio ϵ alrededor de un punto x y tomemos un punto $y\in B$. Sabemos que $D(x,y)<\epsilon$ luego sea $\delta=\epsilon-D(x,y)>0$ y podemos tomar un $N\in\omega$ tal que $(1/2)^{N-1}<\delta/2$. Entonces puedo tomar como V_i el abierto $B_{\epsilon_i}(y_i)$ con la métrica d^* donde $\epsilon_i/2^i<\delta/2N)$), si $i\leq N$. De lo contrario podemos tomar a V_i como $\mathbb{R}$. Luego el conjunto $S=\prod_{i\in\omega}V_i$ es tal que $b\in S\subseteq B$.

Tome un elemento $s\in S$. Tenemos que $D(s,y)=\sum_{i\in\omega}d^*(s_i,y_i)/2^i$. Ahora podemos separar esta suma como

$$D(s,y)=\sum_{i=0}^{N-1}d^*(s_i,y_i)/2^i+\sum_{i=N}^{\infty}d^*(s_i,y_i)/2^i$$

Por una parte tenemos que $d^*(s_i,y_i)/2^i<\epsilon_i/2^i<\delta/2N$. Luego,

$$\sum_{i=0}^{N-1}\frac{d^*(s_i,y_i)}{2^i}<\sum_{i=0}^{N-1}\frac{\delta}{2N}=\frac{N*\delta}{2N}=\frac{\delta}{2}.$$

Por la otra tenemos que

$$\sum_{i=N}^{\infty} d^*(s_i, y_i)/2^i < \sum_{i=N}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2}^{N-1} < \delta/2.$$

Por lo tanto, tenemos que $D(s, y) < \delta$.

Finalmente por desigualdad triangular concluimos que

$$D(s, x) \leq D(s, y) + D(x, y) < \delta + D(x, y) = \epsilon - D(x, y) + D(x, y) = \epsilon$$

Lo cual termina esta parte de la demostración.

Ahora tomemos un básico de la topología producto. Este es de la forma

$$B = \prod_{i \in \mathbb{N}} U_i$$

donde U_i es abierto en la topología de X_i para $i = \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ y $U_i = X_n$ para los demás índices.

Entonces tomemos cualquier $x \in B$. Entonces, para cada $i = \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ podemos encontrar un abierto $B\epsilon_i(x_i)$ con la métrica d^* tal que esta contenida en U_i. Para los demás i yo puedo tomar $\epsilon_i = 1$. Por lo tanto, podemos tomar $\epsilon = \min(\{\epsilon_i)(2^i)\})$ pues este conjunto es finito.

Entonces si tomamos la bola con centro en x y radio ϵ esta estaría contenida en B. Esto es así porque para todo $y \in B_\epsilon(x)$ y para todo $i \in \omega$ yo tengo que $d^*(x_i, y_i)/2^i < \epsilon \leq \epsilon_i/2^i$. Por lo cual $d^*(x_i, y_i) < \epsilon_i$. Esto concluye la demostración, pues esto implica que $y \in B$.