Topología I: Tarea #3

Jonathan Andrés Niño Cortés

13 de febrero de 2015

1. Muestre que si (X, τ) es un espacio puerta y además es Haussdorff, entonces X tiene a lo sumo un punto límite.

   Demostración. Basada en la demostración de `http://en.wikipedia.org/wiki/Door_space`

   En primer lugar la definición de punto límite implica que x es un punto límite de X si y solo si singletón $\{x\}$ no es abierto. Supongamos que p es un punto límite, y tomemos cualquier punto $x \in X$, tal que $x \neq p$. Por la propiedad de Haussdorff tenemos que existen conjuntos abiertos U y V tales que $U \cap V = \emptyset$, $p \in U$, y $x \in V$. Ahora, por un lado tenemos que $V\backslash\{x\} \cup \{p\}$ no es abierto. Si lo fuera entonces tendriamos que $(V\backslash\{x\} \cup \{p\}) \cap U = \{p\}$ sería abierto. Lo que contradice nuestra suposición de que p es un punto limite.

   Por lo tanto por la propiedad del espacio puerta $V\backslash\{x\} \cup \{p\}$ debe ser cerrado. Es decir que $X\backslash(V\backslash\{x\} \cup \{p\})$ es abierto. Finalmente, si tomamos $X\backslash(V\backslash\{x\} \cup \{p\}) \cap V$ también seria abierto. Pero este ultimo es igual a $\{x\}$ por lo que x es un punto aislado. Con esto concluimos que cualquier otro punto no es punto límite. □

2. Sea $X \subseteq \mathbb{R}$ con la topología de subespacio. Muestre que si X es un espacio puerta entonces X es enumerable.

   Demostración. Por un teorema sabemos que la topología de subespacio de una topología de Haussdorff es de Haussdorff. También sabemos que la topología usual de $\mathbb{R}$ es de Haussdorff pues se puede interpretar como la topología del orden simple asociado a $\mathbb{R}$.

   Entonces X es un espacio puerta que ádemas es de Haussdorf. Utilizando el punto anterior concluimos que tiene a lo sumo un punto límite.

   Como un conjunto enumerable más un elemento también es enumerable, solo falta demostrar que una topología de subespacio discreta debe ser a lo sumo enumerable.

   Tomemos X una colección de puntos aislados de $\mathbb{R}$. Como son aislados yo tengo que para todo $x \in X$ existe una vecindad $B(x)_{\epsilon_x}$de x en $\mathbb{R}$ tal que $X \cap B(x)_{\epsilon_x} = \{x\}$. Es necesario demostrar que puedo encontrar U_x tales que si $x \neq y$ entonces $U_x \cap U_y = \emptyset$.

   Lema 1. *Sea $x, y, z \in X$ tales que $x < y < z$. Entonces $B(x)_{\epsilon_x} \cap B(z)_{\epsilon_z} = \emptyset$.*

   Demostración. Tome $a \in B(x)_{\epsilon_x} \cap B(z)_{\epsilon_z}$. Tenemos que $y \notin B(x)_{\epsilon_x}$, luego $y - x > \epsilon_x$ Por otra parte $y \notin B(z)_{\epsilon_z}$ por lo que $z - y > \epsilon_y$. Suponga que no $B(x)_{\epsilon_x} \cap B(z)_{\epsilon_z}$es vacío, entonces se puede tomar $b \in B(x)_{\epsilon_x} \cap B(z)_{\epsilon_z}$. Tenemos que $z - b < |z - b| < z - y$ y $b - x < |b - x| < y - x$. De la primera se concluye que $-b < -y$ es decir que $b > y$ y de la segunda se concluye que $b < y$. Llegamos a una contradicción con la asimetria del orden de los reales por lo que nuestra suposición es falsa. Luego el conjunto es vacío. $\square$

Lema 2. *Si a y b son puntos en X con $a < b$ tales que sus bolas respectivas se intersecan, entonces no existe ningun elemento $c \in X$ tal que $a < c < b$ (el intervalo abierto entre a y b intersecado con X es vacío).*

Demostración. Si las bolas se intersectan entonces cualquier elemento $c \in (a, b)$ pertenece o bien a la bola de a o a la bola de b. Como la intersección de estas bolas con X solo debe tener a a y a b concluimos que $(a, b) \cap X = \emptyset$ $\square$

Lema 3. *Sea $x \in X$, entonces hay a lo sumo un punto $y > x$ tal que la bolas de x y y se pueda intersecar y hay a lo sumo un punto $z < x$ tal que la bola de x y y se pueden intersecar. Por lo tanto solo pueden haber a lo sumo dos bolas que intersequen a la bola de x.*

Demostración. Supongamos que $y > x$ es tal que las bolas se intersecan. Por el Lema 2 no hay elementos de X en el intervalo (x, y) y por el Lema 1 cualquier otro punto mayor que x es vacío. Similarmente si suponemos que $z < y$ es tal que las bolas se intersecan entonces no hay elemento entre z y y por el Lema 2 y cualquier elemento menor a z es tal que su bola no interseca a la de x. $\square$

Este ultimo resultado nos permite construir el conjunto U_x que estabamos buscando. Si la bola $B(x)_{\epsilon_x}$ no se interseca con ninguna otra bola entonces tomamos U_x como esa bola. Por otro lado, si se intersecan con una o dos bolas puedo tomar como U_x la bola con radio menor a la mitad del minimo entre las distancias de los centros de las bolas que se intersecan. De esta forma se genera un conjunto de bolas abiertas disyuntas que contienen a cada uno de los puntos aislados.

Por otra parte, por análisis sabemos que los racionales son densos dentro de los reales de tal manera que dentro de cualquier abierto de $\mathbb{R}$ siempre puedo encontrar un racional. Por lo tanto, por cada conjunto abierto hay un racional distinto. Si suponemos que X es no enumerable entonces $\{U_x\}$ también seria no enumerable y por lo tanto abrian no enumerables racionales. Contradicción. $\square$

3. Sea $A \subset S_\Omega$. Demuestre que si A es enumerable entonces $\overline{A}$ es enumerable.

Demostración. Tomemos el conjunto $B = \cup_{a \in A} S_a$. Esta sería la unión de una colección enumerable de conjuntos enumerables y por lo tanto también es enumerable. Ahora si suponemos que A no tiene una cota superior entonces para todo $x \in S_\Omega$ se cumple que existe $a \in A$ tal que $x < a$ (de lo contrario sería una cota superior). Entonces $x \in S_a \subseteq B$. Por lo tanto $S_\Omega \subseteq B$ y entonces B no sería enumerable. Contradicción.

Por lo tanto existe una cota superior de A. Por el primer punto de la tarea anterior entonces se tendria que A tiene supremo α y tendriamos que $C = S_\alpha \cup \{\alpha\}$ seria enumerable pues es la unión de una sección que es enumerable y un singletón.

Además es cerrado porque su complemento (α, ∞) es abierto en S_Ω y sería tal que $A \subseteq C$. Como la clausura es el mínimo cerrrado que contiene a A concluimos que $A \subseteq \overline{A} \subseteq C$. Y por lo tanto $\overline{A}$ es también enumerable. $\square$

4. Pruebe que si $f : \mathbb{R}_\ell \mapsto S_\Omega$ es una función continua entonces f no es inyectiva.

   Demostración. Vamos a demostrar la contrarecíproca. Si f es inyectiva entonces la función no es continua. Para demostrar que una función es continua basta con demostrar que para una base de la topología de llegada todos los básicos tienen preimagen abierta. Para demostrar que una funcin no es continua basta encontrar un abierto tal que su preimagen no es abierta. Si se prueba que ningun elemento de la base tiene preimagen abierta. a excepcin del vacío, entonces facilmente se puede encontrar dicho abierto. Por ejemplo, se puede tomar cualquier elemento en el rango de f y tomar un bsico B de ese elemento. Como hay un elemento en el rango tendriamos que $f^{-1}(B)$ no es vacío y por lo tanto su preimagen no sera abierta.

   Una base para la topología de S_Ω serian todos los abiertos enumerables. Para demostrar esto podemos tomar cualquier conjunto abierto A en S_Ω. Y podemos tomar cualquier elemento $x \in A$. Por la tarea anterior sabemos que todo elemento tiene sucesor. Sea el sucesor denotado como $x+1$. La sección S_{x+1} es un conjunto abierto enumerable que contiene a x. Por lo tanto, la intersección $S_{x+1} \cap A$ seria un conjunto enumerable tal que x pertenece al conjunto y a su vez es subconjunto de A.

   Por otra parte en la topología de $\mathbb{R}_\ell$ una base son los conjuntos de la forma $[a, b)$. Cualquier conjunto de esta forma es vaco o no enumerable. Como cualquier conjunto abierto es unión de estos conjuntos concluimos que todo conjunto abierto es vaco o no enumerable.

   Finalmente, si tomamos cualquier función inyectiva f, tenemos que la cardinalidad de $f^{-1}(X)$ es menor o igual a la cardinalidad de X. Pero si tomamos cualquier básico en S_Ω su preimagen seria a lo sumo enumerable, y por lo tanto concluimos que es vacía o no es abierta. Por lo discutido al principio f no puede ser continua. $\square$

5. Sean $f : A \to B$ y $g : C \to D$ funciones continuas. Definimos la función $f \times g : A \times C \to B \times D$ por la ecuación
$$(f \times g)(\langle a, c\rangle) = \langle f(a), g(c)\rangle$$
   Pruebe que $f \times g$ es continua.

   Demostración. Basta con demostrar que cualquier abierto de una base de $B \times D$ tiene preimagen abierta por $f \times g$.

   Una base son los conjuntos de la forma $U \times V$ con U abierto en B y V abierto en D. Tomemos $(f \times g)^{-1}(U \times V)$. Esto es igual a $f^{-1}(U) \times g^{-1}(V)$. Por nuestras hipotesis tenemos que $f^{-1}(U)$ y $g^{-1}(V)$ son abiertos en A y C respectivamente, por lo que $f^{-1}(U) \times g^{-1}(V)$ es abierto también. Concluimos que $f \times g$ es continuo. $\square$