Topología I: Tarea #2

Jonathan Andrés Niño Cortés

13 de febrero de 2015

1. Muestre que si $(X, <)$ es un buen orden y $A \subseteq X$ tiene una cota superior entonces A tiene supremo.

   Demostración. Tome $C = \{x \in X \mid x \geq a, \ \forall a \in A\}$ el conjunto de todas las cotas superiores de A. Por la suposición de que A tiene una cota superior este conjunto no es vacío y por la propiedad del buen orden este conjunto tiene un mínimo α que es por definición el supremo de A. $\square$

2. Considere S_Ω con la topología del orden (i.e. la inducida por su buen orden). Pruebe que para cualquier $C \subseteq S_\Omega$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   a) C es cerrado.

   b) Para todo $A \subseteq C$ enumerable, sup $A \in C$.

   Demostración. Por el punto anterior y el Teorema 10.3 sabemos que cualquier conjunto $A \in C$ enumerable tiene supremo.

   Ahora demostramos los siguientes lemas:

   Lema 1. *Sea A un conjunto tal que tenga supremo. Sea $b < sup\ (A)$. Entonces existe $a \in A$ tal que $b < a \leq sup\ A$.*

   Demostración. Como $b <$ sup A tenemos que b no es una cota superior de A porque es menor a la mínima cota superior. Esto es equivalente a que existe un elemento $a \in A$ tal que $b > a$ y por definición de supremo sabemos que $a \leq$ sup A. $\square$

   Lema 2. *En S_Ω, todos los elementos tienen un sucesor.*

   En primer lugar notese que S_Ω no tiene un elemento máximo pues por su definición Ω no se encuentra en el conjunto.

   Demostración. Tomemos un elemento $s \in S_\Omega$, y tomemos el conjunto $\{x \in S_\Omega \,|\, s > x\}$ que no es vacío pues no hay máximo en este conjunto. Por el principio del buen orden este conjunto tiene un mínimo y este es el sucesor de s que denotamos $s + 1$. $\square$

Supongamos que C es cerrado (esto es equivalente a que el complemento de C es abierto) y supongamos por contradicción que existe un subconjunto enumerable de A tal que sup $A \notin C$. Sabemos que la topología del orden tiene como base los intervalos y rayos en el espacio. Entonces como C^c es abierto existe un conjunto de la base contenido en C^c y tal que sup A pertenece a dicho conjunto. Este conjunto debe ser de la forma (∞, b), (a, b) (a, ∞). Obsérvese que no puede ser de la primera forma porque claramente $A \subseteq (\infty, b)$ si sup $A < b$. Pero por otra parte si fuera de la otra forma entonces tenemos que $a <$ sup A. Y por el Lema 1 existe $b \in A$ tal que $a < b <$ sup A. Llegamos a una contradicción porque entonces el conjunto no perteneceria a C^c.

Ahora supongamos que se cumple b). Queremos probar que C^c es abierto, es decir que para cualquier $c \in C^C$ existe un conjunto básico al que c pertenece y que esta contenido en C^c. Para construir este conjunto tomemos un elemento c y tomemos la sección de S_Ω por c, S_c. Por las propiedades de S_Ω esta sección es enumerable. Entonces el conjunto $A = C \cap S_c$ es un subconjunto enumerable de C y por lo tanto es vacío o tiene un supremo y esta contenido en C. Por otra parte, por el Lema 2, todos los elementos tienen un sucesor. Denotamos al sucesor de c por $c + 1$.

Si hay supremo, el intervalo (sup $A, c+1$), es el conjunto que estamos buscando. Si suponemos que hay un elemento de C en este intervalo entonces también perteceria en A. Y este elemento sería mayor a sup A. Contradicción.

Si la intersección es vacía entonces el intervalo $(-\infty, c + 1)$ también funciona. Si hay un elemento de C en este intervalo entonces A no sería vacío. Contradicción.

Por lo tanto C es cerrado. $\square$

3. Considere los conjuntos $X = \{a, b, c, d\}$ y $Y = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ con las topologías $\tau_1 = \{\emptyset, \{a, b\}, \{c, d\}, X\}$ y $\tau_2 = \{\emptyset, \{\alpha\}, \{\alpha, \beta\}, Y\}$ respectivamente. Liste todos los elementos de la topología producto sobre $X \times Y$.

   Demostración. El conjunto $B = \{U \times V \mid U \in \tau_1 \wedge V \in \tau_2\}$ forma una base para la topología producto. Los elementos que pertenecen a este conjunto son

$$\begin{gathered}\{\emptyset, \{(a,\alpha),(b,\alpha)\}, \{(a,\alpha),(a,\beta),(b,\alpha),(b,\beta)\}, \{(a,\alpha),(a,\beta),(a,\gamma),(b,\alpha),(b,\beta)(b,\gamma)\},\\ \{(c,\alpha),(d,\alpha)\}, \{(c,\alpha),(c,\beta),(d,\alpha),(d,\beta)\}, \{(c,\alpha),(c,\beta),(c,\gamma),(d,\alpha),(d,\beta)(d,\gamma)\},\\ \{(a,\alpha),(b,\alpha),(c,\alpha),(d,\alpha)\}, \{(a,\alpha),(a,\beta),(b,\alpha),(b,\beta),(c,\alpha),(c,\beta),(d,\alpha),(d,\beta)\},\\ \{(a,\alpha),(a,\beta),(a,\gamma),(b,\alpha),(b,\beta),(b,\gamma),(c,\alpha),(c,\beta),(c,\gamma),(d,\alpha),(d,\beta),(d,\gamma)\}\}\end{gathered}$$

   Los conjuntos que forman parte de la topología son todos los anteriores más algunos que se pueden obtener como uniones de estos conjuntos. Los conjutnos que faltan son:

$$\begin{gathered}\{\{(a,\alpha),(b,\alpha),(c,\alpha),(c,\beta),(d,\alpha),(d,\beta)\},\\ \{(a,\alpha),(b,\alpha),(c,\alpha),(c,\beta),(c,\gamma),(d,\alpha),(d,\beta),(d,\gamma)\}, \{(a,\alpha),(a,\beta),(b,\alpha),(b,\beta),(c,\alpha),(d,\alpha)\},\\ \{(a,\alpha),(a,\beta),(b,\alpha),(b,\beta),(c,\alpha),(c,\beta),(c,\gamma),(d,\alpha),(d,\beta)(d,\gamma)\}\\ \{(a,\alpha),(a,\beta),(a,\gamma),(b,\alpha),(b,\beta),(b,\gamma),(c,\alpha),(d,\alpha)\},\\ \{(a,\alpha),(a,\beta),(a,\gamma),(b,\alpha),(b,\beta),(b,\gamma),(c,\alpha),(c,\beta),(d,\alpha),(d,\beta)\}\}\end{gathered}$$

$\square$

4. Si L es una recta en el plano, describa la topología L heredada como un subespacio de $\mathbb{R}_\ell \times \mathbb{R}$ y un subespacio de $\mathbb{R}_\ell \times \mathbb{R}_\ell$. En cada caso es una topología familiar.

Demostración. Una recta L la podemos representar como el conjunto de los pares de puntos que satisfacen la ecuación $y = mx+b$ o $x = a$ en el caso que sea una recta vertical. Para hablar de una topología en las rectas vamos a definir un orden. Sean $(a, b), (c, d) \in L$, $(a, b) > (c, d)$ si $a > b$ o $a = c$ y $b > d$. (Extrañamente coincide con el orden lexicográfico). Sin embargo vemos que $a = c$ solo se cumple cuando la recta es vertical en cuyo caso solo depende de la coordenada y. Así, podemos representar el intervalo abierto en L, $(a \times b, a \times c)$ como (b, c). Similarmente vemos que si la recta no es vertical entonces el orden solo depende de la coordenada x, por lo que el intervalo abierto $(a \times b, c \times d)$ se puede representar como (a, c).

Comenzamos considerando la recta como subespacio de $\mathbb{R}_\ell \times \mathbb{R}$.

Vamos a demostrar que si la recta es de la forma $x = a$ entonces la topología de subespacio es ïsomorfa.ª la topología usual de $\mathbb{R}$.

Primero tomemos cualquier conjunto de la base de la topología usual de (b, c) y veamos que es generado por la base heradada de $\mathbb{R}_\ell \times \mathbb{R}$. Esto es sencillo porque (b, c) lo podemos ver como $[a, a+1) \times (b, c) \cap L$. Ahora probamos que cualquier conjunto X de la forma $[x, y) \times (z, w) \cap L$ la podemos generar con conjuntos de la base de la topología del orden de L. Tomemos $p \in X$, es decir, que $p = a \times c$ con $x \leq a < y$ $z < c < w$. Entonces podemos tomar el intervalo abierto (z, w) y vemos que $p \in (z, w) \subseteq X$.

Ahora si la recta es de la forma $y = mx + n$ podemos demostrar que la topología es ïsomorfa.ª $\mathbb{R}_\ell$. Primero tome $[a, b)$ y tome algun $x \in [c, d)$, entonces vemos que $[a, b) = [a, b) \times (c, d)$ con $c <$min$(ma + n, mb + n)$ y $d >$max$(ma + n, mb + n)$.

Ahora para el converso tomese $X = [a, b) \times (c, d) \cap L$ y tomemos un punto $p \in X$. Entonces, $a = x \times y$ con $a \leq x < b$ y $c < y < d$. Pero también se cumple que $y = mx + n$, es decir que $c < y < d$ o de lo contrario la intersección es vacía. Debemos considerar varios casos. Si $m = 0$, entonces el intervalo $[x, b)$ sirve automaticamente, pues $x \times n < b \times n$.

Si $m > 0$ podemos tomar el intervalo $[x,\, \min(b, d'))$. Donde $d = md' + n$. Como la recta es creciente tenemos que $y < d$ implica que $x < d'$. Por lo tanto, el intervalo esta bien definido.

Si $m < 0$ podemos tomar el intervalo $[x,\, \min(b, c'))$. Donde c' es tal que $c = mc' + n$. Como la recta es decreciente, $y > c$ implica que $x < c'$, por lo cual el intervalo esta bien definido.

Si se toma ahora L como subespacio de $\mathbb{R}_\ell \times \mathbb{R}_\ell$. Vemos la necesidad de considerar varios casos. Si $x = a$ entonces la topología es $\mathbb{R}_\ell$. Primero porque $[b, d) = [a, a + 1) \times [b, d) \cap L$. Y segundo porque para cualquier $X = [x, y) \times [z, w) \cap L$ tenemos que si $x \in X$ entonces $x = a \times b$ para $z \leq b < w$. Luego el conjunto $[z, w)$ es tal que $x \in [z, w) \subseteq X$.

Ahora si la recta es de la forma $y = mx + n$. Tomamos $X = [a, b) \times [c, d) \cap L$. Tenemos que si $x \in X$ entonces $a \leq x < b$ y por el otro lado $c \leq mx + n < d$.

Tenemos que los casos cuando $m = 0$ y $m > 0$ son indenticos porque los supuestos que se necesitaban para que los intervalos estuvieran bien definidos se siguen cumpliendo ($x < b$ y $ax + b < d$). Luego en estos casos la topología sigue siendo $\mathbb{R}_\ell$

Sin embargo, cuando $m < 0$ la topología en L es diferente. Ahora el supuesto es que $c \leq y$ y entonces debemos tener en cuenta el caso en que $y = mx + n = c$. Entonces $c' = x$ y por lo tanto el intervalo tentativo $[x, c')$ no esta bien definido.

La topología en este caso es la topología discreta de L para demostrar esto tomemos cualquier punto $p = x \times y \in L$ con $y = mx+n$. Se puede tomar el conjunto $X = [x, x+1) \times [y, y+1) \cap L$ y podemos demostrar que si $q \in X$ entonces $q = p$. En efecto, por definición de pertenencia $q = x' \times y'$ para $x \leq x' < x+1$ y $y \leq y' < y+1$, pero además $y' = mx' + n$

Si suponemos que $x \neq x'$ entonces $x' > x$ y como $m < 0$, tendriamos que $y' < y$. Contradicción porque $y' \geq y$.

Igualmente si suponemos que $y \neq y'$ entonces $y' > y$ y por lo tanto $x' < x$ que contradice el hecho que $x' \geq x$. Por lo tanto, $x' = x$, $y' = y$ y $p = q$. $\square$

5. Sea $I = [0, 1]$. Compare la topología producto sobre $I \times I$, la topología del orden de diccionario sobre $I \times I$, y la topología que $I \times I$ hereda como un subespacio $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ en la topología del orden de diccionario.

Demostración. La topología del producto de $I \times I$ (la vamos a llamar τ_3) es la topología que hereda como subespacio de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con la topología usual. Una base para I son los intervalos y rayos, es decir, los intervalos de la forma (a, b),$[0, b)$ y $(a, 1]$. Y una base para la topología del producto serian los productos cruz entre estos intervalos. Otra base son las bolas abiertas intersecadas con $I \times I$.

Por otra parte, en la topología del orden de diccionario en $I \times I$ (la vamos a llamar τ_2) los básicos son de nuevo intervalos y rayos pero esta vez el orden de diccionario impone una estructura diferente. Un abierto básico es de la forma $(a \times b, c \times d)$. con el orden de diccionario. ($a \times b$ denota el par ordenado (a, b))

Finalmente, la topología heredada de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con el orden de diccionario (la vamos a llamar τ_3) difiere de la anterior en que hay conjuntos que son abiertos que en la anterior no lo son. Podemos probar que una base para esta topología son los intervalos de la forma $(a \times b, a \times c)$, $[a \times 0, a \times b)$ o $(a \times b, a \times 1]$

El conjunto $(1/2 \times 1/3, 1/2 \times 2/3)$ es abierto en τ_2 y en τ_3 pero no es abierto en τ_1. Como se mostró anteriormente este es un conjunto que pertenece a las bases que definimos para tau_2 y tau_3. Ahora para probar que no es abierto en tau_1, tomemos el punto $1/2 \times 1/2$. Tome cualquier bola de radio ϵ alrededor de este punto. Ahora tomemos el elemento $c = \min(b/2, b - \epsilon/2) \times 1/2$. Vemos que el punto c pertenece a la bola pero no a nuestro intervalo. Por lo tanto no es abierto en τ_1.

El conjunto $(1/2 \times 0, 1/2 \times 1]$ es abierto en τ_3 pero no es abierto en τ_2. Es abierto en τ_3 porque es la intersección de $(1/2 \times 0, 1/2 \times 2)$ intersecado con $I \times I$. Por otra parte, para probar que no es abierto en τ_2 tomemos el punto $x = 1/2 \times 1$. Cualquier básico que contenga al punto debe ser de la forma (a', b') con $a' < x$ y $x < b'$ pero un punto que sea mayor estricto que x debe ser de la forma $b' = a \times b$ con $a > 1/2$. Por propiedades de los reales tenemos que existe c tal que $1/2 < c < a$ y entonces tendriamos que cualquier punto de la forma $c \times d$ para cualquier $d \in [0, 1]$ pertenece al intervalo (a', b'). Por lo tanto, (a', b') no esta contenido en $(1/2 \times 0, 1/2 \times 1]$, es decir, no es abierto.

El conjunto $(1/3, 2/3) \times (1/2, 1]$ es abierto en τ_1 pero no es abierto en τ_2. Es abierto en τ_1 porque los conjuntos en el producto ambos son abiertos en I. Sin embargo, no es abierto en tau_2. Tomese de nuevo el punto $x = 1/2 \times 1$. De manera analoga a la anterior un básico

(a', b') que contenga a x debe tener $b' = a \times b$ con $a > 1/2$. Entonces podemos tomar un c tal que $1/2 < c <$min$(2/3, a)$. En particular tenemos que $y = c \times 0$ pertenece a (a', b') pero no pertenece a $(1/3, 2/3) \times (1/2, 1]$.

$\tau_1 \subseteq \tau_3$. Sea X un conjunto en la base de tau_1. Por nuestra discusión anterior este es de la forma $((a, b) \times (c, d)) \cap (I \times I)$. Si es vacío claramente es generado por la base de τ_3. Si no, entonces tomemos un $x \in X$. Por nuestra suposición $x = e \times f$ con $a < e < b$ y $c < f < d$. Entonces podemos tomar el conjunto $B = (e \times c, e \times d) \cap (I \times I)$ que es básico en τ_3 y vemos que $x \in B \in X$.

$\tau_2 \subseteq \tau_3$. Tome un conjunto X en la base de $tau2$. Este es de la forma (a', b') con el orden de diccionario. Este es igual al conjunto (a', b') del orden de diccionario de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ intersecado con $I \times I$.

Concluimos que $\tau_1 \subsetneqq \tau_3$ y $\tau_2 \subsetneqq \tau_3$ mientras que τ_1 y τ_2 no son comparables. $\square$