x_1: "A osagaiaren gramo kopurua"

x_2: "B osagaiaren gramo kopurua"

x_3: "C osagaiaren gramo kopurua"

A osagaiaren gramo bakoitzeko gutxienez C osagaiaren 4 gramo gutxienez: $x_1 \leq 4x_3$

C zati bakoitzeko B zati bat eta alderantziz: $x_2 = x_3$

280 gramo baino gehiago: $x_1 + x_2 + x_3 \geq 280$

500 gramo baino gutxiago: $x_1 + x_2 + x_3 \leq 500$

10 gramoko kostuak: $A = 24 \to 2'4$ €/g , $B = 72 \to 7'2$ €/g , $C = 80 \to 8$ €/g $\Longrightarrow z = 2'4x_1 + 7'2x_2 + 8x_3$

a) $\min\ z = 2'4x_1 + 7'2x_2 + 8x_3$

$x_1 \leq 4x_3$

$\boxed{x_2 = x_3}$

$x_1 + x_2 + x_3 \geq 280$

$x_1 + x_2 + x_3 \leq 500$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

$\xrightarrow{\text{ordezkatu}}$

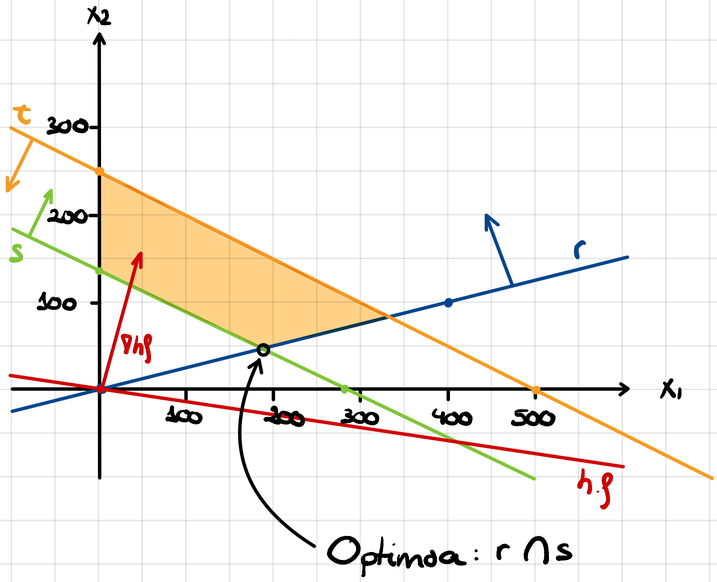
$\min\ z = 2'4x_1 + \underbrace{(7'2 + 8)}_{15'2}x_2$

$x_1 \leq 4x_2$

$x_1 + 2x_2 \geq 280$

$x_1 + 2x_2 \leq 500$

$x_1, x_2 \geq 0$



$hf: 2'4x_1 + 15'2x_2 = 0$

$\nabla hf(x_1, x_2) = (2'4, 15'2)$

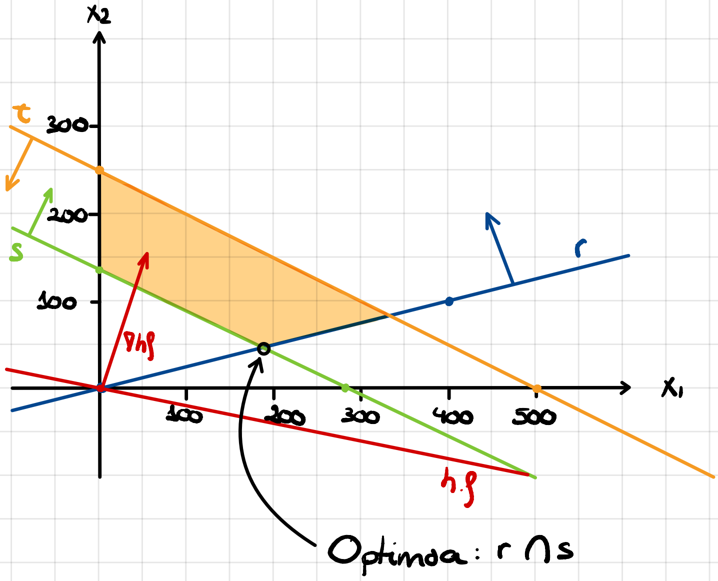
$$\begin{cases} r: 4x_2 - x_1 = 0 & (0,0), (125, 500) \\ s: x_1 + 2x_2 = 280 & (280, 0), (0, 140) \\ t: x_1 + 2x_2 = 500 & (500, 0), (0, 250) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 4x_2 \longrightarrow x_1 = 560/3 \\ x_1 + 2x_2 = 280 \longrightarrow 6x_2 = 280 \longrightarrow x_2 = 140/3 \end{cases}$$

Optimoa: $\left(\frac{560}{3}, \frac{140}{3}\right) \longrightarrow \boxed{x_1^* = \frac{560}{3},\ x_2^* = x_3^* = \frac{140}{3},\ z^* = \frac{3472}{3}}$

b) A-ren prezioa $= 30€/10gr$-ko : $c_1 = 3$

$$\min\ z = 3x_1 + 15'2x_2$$
$$x_1 \leq 4x_2$$
$$x_1 + 2x_2 \geq 280$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 500$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



$hf: 3x_1 + 15'2x_2 = 0$

$\nabla hf(x_1, x_2) = (3, 15'2)$

$$\begin{cases} r: 4x_2 - x_1 = 0 & (0,0), (125, 500) \\ s: x_1 + 2x_2 = 280 & (280,0), (0,140) \\ t: x_1 + 2x_2 = 500 & (500,0), (0,250) \end{cases}$$

A osagaiaren prezioa aldatzean, x_1 aldagaiari lotutako c_1 helburu funtzioko koefizientea aldatu egin da. Horren ondorioz, eredua bideragarria izaten jarraitu arren, optimaltasunean eragina izan dezake.

Grafikoki aztertuz, hasierako ereduaren eta eredu berriaren onarpen eremuak berdinak dira, baina helburu funtzioaren malda aldatu egin dela (eta beraz, bere gradiente bektorearen koordenatuak ere) ikus daiteke. Kasu honetan, puntu optimoa berdina izaten jarraitzen du ($x_1^* = \frac{560}{3}$, $x_2^* = x_3^* = \frac{140}{3}$) baina helburu funtzioaren balioa aldatu egin da: $z^* = \frac{3808}{3}$.

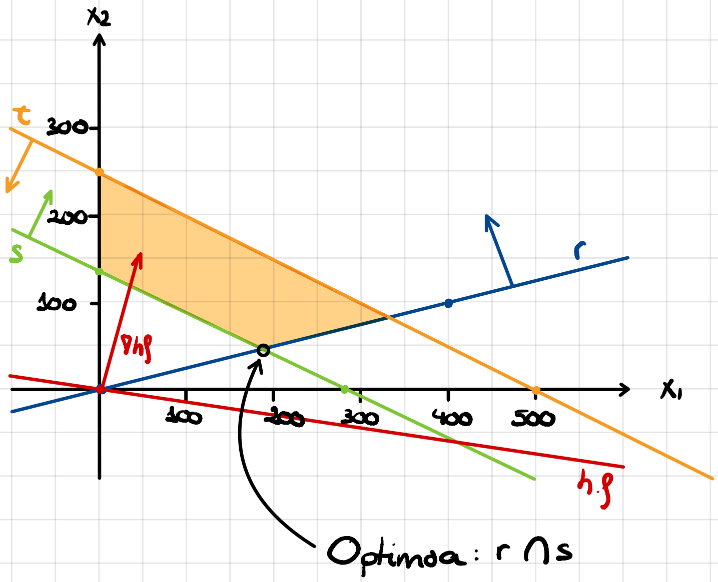
Hala ere, baliteke beste aldaketa batzuekin puntu optimoa ere aldatzea. Hau da, badago tarte bat non helburu funtzioa libreki alda daitekeen puntu optimoari eragin gabe, baina tarte horretatik kanpo puntu hori aldatu egingo da.

c) b_3 txikitu

$$\min z = 2'4x_1 + 15'2x_2$$
$$x_1 \leq 4x_2$$
$$x_1 + 2x_2 \geq 280$$
$$x_1 + 2x_2 \leq b_3$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Leherketaren pisu maximoa aldatzean, 3. murrizketari lotutako b_3 gai askea aldatuko da. Aldaketa honen ondorioz, t zuzena desplazatu egingo da, bere malda mantenduz; kasu honetan gai askea txikitu nahi denez ezkerrera mugituko da, beraz, onarpen eremua ere txikituko da.

a) atalean ikusi dugunez, problemaren puntu optimoa r eta s zuzenen arteko ebakidura da, hortaz, t desplazatzeak ez du puntuan inolako eraginik izango, onarpen eremua multzo hutsa bihurtzen ez den bitartean.

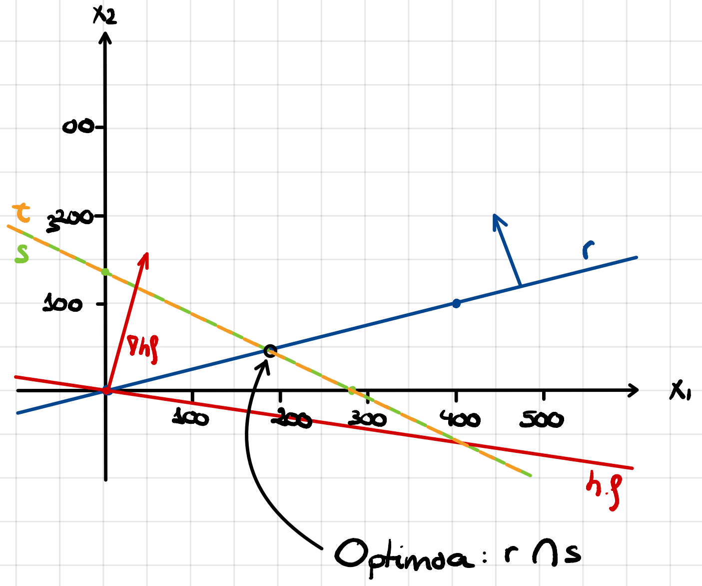


$hf: 2'4x_1 + 15'2x_2 = 0$

$\nabla hf(x_1,x_2) = (2'4, 15'2)$

$$\begin{cases} r: 4x_2 - x_1 = 0 & (0,0),(125,500) \\ s: x_1 + 2x_2 = 280 & (280,0),(0,140) \\ t: x_1 + 2x_2 = 500 & (500,0),(0,250) \end{cases}$$

Grafikoan ikus daitekeenez, s eta t zuzenak paraleloak dira, beraz, t zuzena s zuzenarekin gainjartzen denean lortuko dugu puntu optimoa mantentzen duen b_3-ren balio minimoa.



$hf: 2'4x_1 + 15'2x_2 = 0$

$\nabla hf(x_1, x_2) = (2'4, 15'2)$

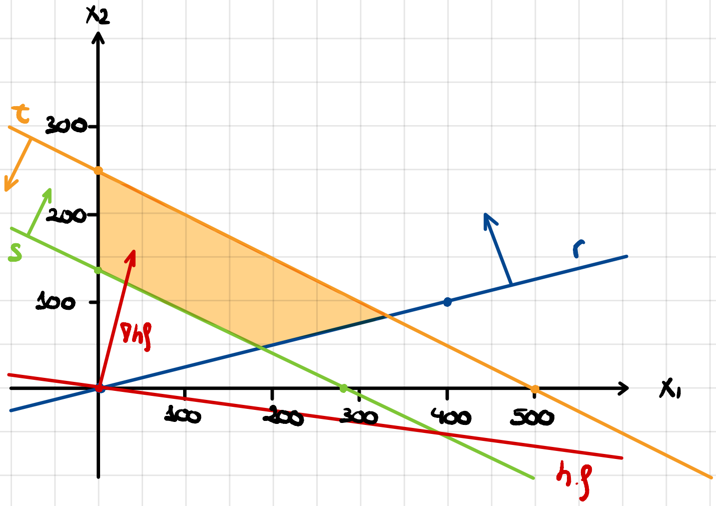
$$\begin{cases} r: 4x_2 - x_1 = 0 \\ s: x_1 + 2x_2 = 280 \\ t: x_1 + 2x_2 = 280 \end{cases}$$

Beraz, $\boxed{b_3 \geq 280}$ den bitartean puntu optimoa mantenduko da.

d) $c_2 - 2$, $c_3 + 5$

$$\min\ z = 2'4x_1 + 5'2x_2 + 13x_3 \qquad \longrightarrow \qquad \min\ z = 2'4x_1 + 18'2x_2$$

$$\begin{aligned} & x_1 \leq 4x_3 \\ & x_2 = x_3 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \geq 280 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \leq 500 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned} \qquad \qquad \begin{aligned} & x_1 \leq 4x_2 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \geq 280 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \leq 500 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



$hf: 2'4x_1 + 18'2x_2 = 0$

$\nabla hf(x_1, x_2) = (2'4, 18'2)$

$$\begin{cases} r: 4x_2 - x_1 = 0 & (0,0), (125,500) \\ s: x_1 + 2x_2 = 280 & (280,0), (0,140) \\ t: x_1 + 2x_2 = 500 & (500,0), (0,250) \end{cases}$$

c) Ebatzi, $5x_1 \leq x_3$

$$
\begin{aligned}
\min\ z &= 2'4x_1 + 7'2x_2 + 8x_3 \\
5x_1 &\leq x_3 \\
x_2 &= x_3 \\
x_1 + x_2 + x_3 &\geq 280 \\
x_1 + x_2 + x_3 &\leq 500 \\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

$\xrightarrow{\text{forma estandarrean idatzi}}$

$$
\begin{aligned}
\min\ z &= 2'4x_1 + 7'2x_2 + 8x_3 \\
5x_1 - x_3 &\leq 0 \\
x_2 - x_3 &= 0 \\
x_1 + x_2 + x_3 &\geq 280 \\
x_1 + x_2 + x_3 &\leq 500 \\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

$\xrightarrow{\text{lasaiera aldagaiak gehitu}}$

$$
\begin{aligned}
\min\ z &= 2'4x_1 + 7'2x_2 + 8x_3 \\
5x_1 - x_3 + x_4 &= 0 \\
x_2 - x_3 &= 0 \\
x_1 + x_2 + x_3 - x_5 &= 280 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_6 &= 500 \\
x_i \geq 0,\ i &= \{1..6\}
\end{aligned}
$$

$\xrightarrow{\text{aldagai artifizialak gehitu}}$

$$
\begin{aligned}
\min\ z &= 2'4x_1 + 7'2x_2 + 8x_3 \\
5x_1 - x_3 + x_4 &= 0 \\
x_2 - x_3 + g_1 &= 0 \\
x_1 + x_2 + x_3 - x_5 + g_2 &= 280 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_6 &= 500 \\
x_i \geq 0,\ i = \{1..6\};\ & g_1, g_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

LEHENENGO FASEA:

$$
\begin{aligned}
\min\ & g_1 + g_2 \\
5x_1 - x_3 + x_4 &= 0 \\
x_2 - x_3 + g_1 &= 0 \\
x_1 + x_2 + x_3 - x_5 + g_2 &= 280 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_6 &= 500
\end{aligned}
$$

Hasierako oinarrizko soluzio bideragarria:

$x_B = (x_4, g_1, g_2, x_6)^T = (0, 0, 280, 500)$

C_{oin}	A_{oin}	$B^{-1}b$	0	0	0	0	0	0	1	1
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	g_1	g_2
0	x_4	0	5	0	-1	1	0	0	0	0
1	g_1	0	0	$\boxed{1}$	-1	0	0	0	1	0
1	g_2	280	1	1	1	0	-1	0	0	1
0	x_6	500	1	1	1	0	0	1	0	0
$z = 280$		z_j	1	2	0	0	-1	0	1	1
		w_j	1	2	0	0	-1	0	0	0

$\exists w_j > 0 \longrightarrow$ Jarraitu

Sartze irizpidea: $\max\{1, 2\} = 2 \rightarrow x_2$ sartu

Irtetze irizpidea: $\min\{\frac{0}{1}, \frac{280}{1}\} = 0 \rightarrow g_1$ irten

C_{oin}	A_{oin}	$B^{-1}b$	0	0	0	0	0	0	1	1
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	g_1	g_2
0	x_4	0	5	0	-1	1	0	0	0	0
0	x_2	0	0	1	-1	0	0	0	1	0
1	g_2	280	1	0	$\boxed{2}$	0	-1	0	-1	1
0	x_6	500	1	0	2	0	0	1	-1	0
$z=280$		z_j	1	0	2	0	-1	0	-1	1
		w_j	1	0	2	0	-1	0	-2	0

$e_3 \leftarrow e_3 - e_2$

$e_4 \leftarrow e_4 - e_2$

$\exists w_j > 0 \longrightarrow$ Jarraitu

Sartze irizpidea: $\max\{1,2\} = 2 \rightarrow x_3$ sartu

Irteteze irizpidea: $\min\left\{\frac{280}{2}, \frac{500}{2}\right\} = 140 \longrightarrow g_2$ irten

C_{oin}	A_{oin}	$B^{-1}b$	0	0	0	0	0	0	1	1
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	g_1	g_2
0	x_4	140	11/2	0	0	1	-1/2	0	-1/2	1/2
0	x_2	140	1/2	1	0	0	-1/2	0	-1/2	1/2
0	x_3	140	1/2	0	1	0	-1/2	0	-1/2	1/2
0	x_6	220	0	0	0	0	-1	1	0	-1
$z=0$		z_j	0	0	0	0	0	0	0	0
		w_j	0	0	0	0	0	0	-1	-1

$e_1 \leftarrow e_1 + e_{3b}$

$e_2 \leftarrow e_2 + e_{3b}$

$e_{3b} \leftarrow \frac{1}{2} e_3$

$e_4 \leftarrow e_4 - 2e_{3b}$

$\forall w_j \leq 0 \longrightarrow$ Gelditu

Lehenengo fasea bukatu dugu eta oinarrizko soluzio bideragarria lortu dugu:

$x_1 = 0,\ x_2 = 140,\ x_3 = 140,\ x_4 = 140,\ x_5 = 0,\ x_6 = 220,\ g_1 = 0,\ g_2 = 0$

BIGARREN FASEA:

Bigarren faseko hasierako Simplex taula:

C_{oin}	A_{oin}	$B^{-1}b$	2'4	7'2	8	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_4	140	$\boxed{11/2}$	0	0	1	-1/2	0
7'2	x_2	140	1/2	1	0	0	-1/2	0
8	x_3	140	1/2	0	1	0	-1/2	0
0	x_6	220	0	0	0	0	-1	1
$z=2128$		z_j	7'6	7'2	8	0	-7'6	0
		w_j	5'2	0	0	0	-7'6	0

$\exists w_j > 0 \longrightarrow$ Jarraitu

Sartze irizpidea: $\max\{5'2\} = 5'2 \longrightarrow x_1$ sartu

Irtetze irizpidea: $\min\left\{\frac{140}{11/2}, \frac{140}{1/2}, \frac{140}{1/2}\right\} = \frac{280}{11} \longrightarrow x_4$ irten

C_{oin}	A_{oin}	$B^{-1}\cdot b$	x_1 (2'4)	x_2 (7'2)	x_3 (8)	x_4 (0)	x_5 (0)	x_6 (0)
2'4	x_1	280/11	1	0	0	2/11	-1/11	0
7'2	x_2	1400/11	0	1	0	-1/11	-7/22	0
8	x_3	1400/11	0	0	1	-1/11	-7/22	0
0	x_6	220	0	0	0	0	-1	1
$z = \frac{21952}{11}$		z_j	2'4	7'2	8	-10'4/11	-111'2/11	0
		w_j	0	0	0	-10'4/11	-111'2/11	0

$e_{1b} \leftarrow \frac{2}{11} e_1$

$e_2 \leftarrow e_2 - \frac{1}{2} e_{1b}$

$e_3 \leftarrow e_3 - \frac{1}{2} e_{1b}$

$\forall w_j \leq 0 \longrightarrow$ Gelditu, optimoa aurkitu dugu

Gainera, oinarrizkoak ez diren aldagaien kostu murriztuak $\neq 0$ dira, hortaz, soluzioa bakarra da.

$x_1^* = \frac{280}{11}$, $x_2^* = x_3^* = \frac{1400}{11}$, $x_4^* = 220$, $x_5^* = x_6^* = 0$

DUALA:

$$
\begin{array}{ll}
\min & z = 2'4x_1 + 5'2x_2 + 13x_3 \\
 & 5x_1 - x_3 \leq 0 \\
 & x_2 - x_3 = 0 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 \geq 280 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 \leq 500 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}
\quad \longrightarrow \quad
\begin{array}{ll}
\min & z = 2'4x_1 + 5'2x_2 + 13x_3 \\
 & -5x_1 + x_3 \geq 0 \\
 & x_2 - x_3 = 0 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 \geq 280 \\
 & -x_1 - x_2 - x_3 \geq -500 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\max & z = -500u_1 + 280u_2 \\
 & -5u_1 + u_3 - u_4 \leq 2'4 \\
 & u_2 + u_3 - u_4 \leq 5'2 \\
 & u_1 - u_2 + u_3 - u_4 \leq 13 \\
 & u_1, u_3, u_4 \geq 0 \\
 & u_2 \text{ ez-murriztua}
\end{array}
\quad \longrightarrow \quad
\begin{array}{ll}
\max & z = -500u_1 + 280u_2 \\
 & -5u_1 + u_3 - u_4 + u_5 = 2'4 \\
 & u_2 + u_3 - u_4 + u_6 = 5'2 \\
 & u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + u_7 = 13 \\
 & u_1, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7 \geq 0 \\
 & u_2 \text{ ez murriztua}
\end{array}
$$