PROGRAMAZIO LINEALA: SIMPLEX METODOA

EBAZPIDE GRAFIKOA:

- Soluzio bakarra duen problema: (p. 9)

$$\max\ z = 2x_1 + x_2$$
$$x_1 + x_2 \leq 6$$
$$x_1 - 2x_2 \leq 2$$
$$-4x_1 + 3x_2 \leq 12$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$\Rightarrow$

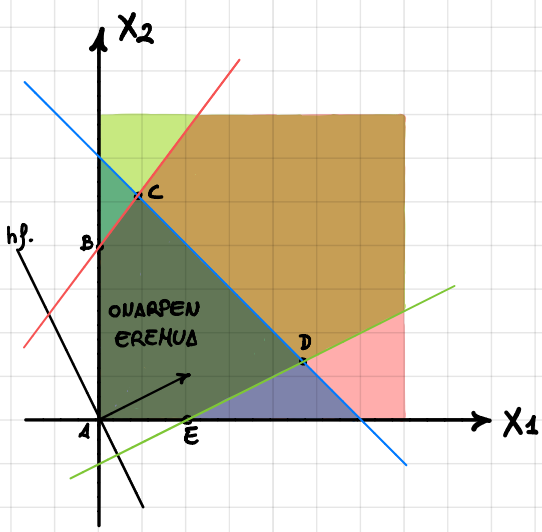
hf: $2x_1 + x_2 = 0 \rightarrow (0,0), (1,-2)$

r: $x_1 + x_2 = 6 \rightarrow (0,6), (6,0)$

s: $x_1 - 2x_2 = 2 \rightarrow (0,-1), (2,0)$

t: $-4x_1 + 3x_2 = 12 \rightarrow (0,4), (-3,0)$

$$\nabla f\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = (2,1)$$



Optimoa izateko, hautagaiak onarpen eremuko erpinak izan behar dira: A, B, C, D, E

Optimoa: D puntua $(14/3, 4/3)$

$$\begin{cases} r: x_1 + x_2 = 6 \\ s: x_1 - 2x_2 = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 6 - x_2 \\ x_1 = 2 + 2x_2 \end{cases} \rightarrow 6 - x_2 = 2 + 2x_2 \rightarrow 3x_2 = 4 \rightarrow x_2 = 4/3, \quad x_1 = 14/3$$

$$\boxed{D\ (14/3,\ 4/3)\ \text{soluzio optimoa da}}$$

- Soluzio anizkoitza duen problema (p.10)

$$\max \quad z = x_1 + x_2$$
$$x_1 + x_2 \leq 6$$
$$x_1 - 2x_2 \leq 2$$
$$-4x_1 + 3x_2 \leq 12$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$\Rightarrow$

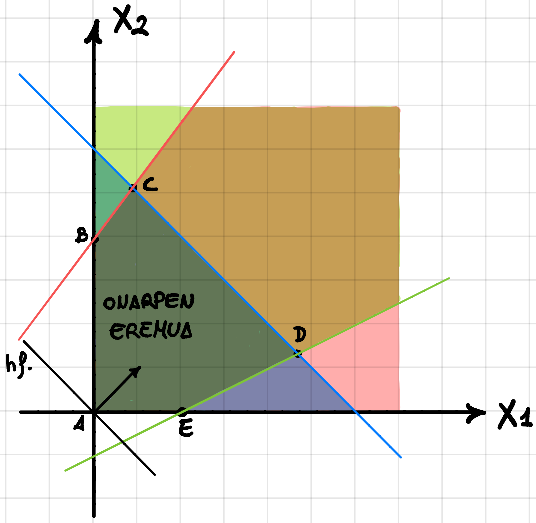
h.f: $x_1 + x_2 = 0 \rightarrow (0,0), (1,-1)$

r: $x_1 + x_2 = 6 \rightarrow (0,6), (6,0)$

s: $x_1 - 2x_2 = 2 \rightarrow (0,-1), (2,0)$

t: $-4x_1 + 3x_2 = 12 \rightarrow (0,4), (-3,0)$

$$\nabla f\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = (1,1)$$



Kasu honetan helburu funtzioa r zuzenaren paraleloa denez, helburu funtzioa gradienteak zehazten duen noranzkoan mugitzean, zuzenaren gainean geratzen dela ikus dezakegu.

Hortaz, problemak infinitu soluzio ditu, CD zuzenkian dauden puntu guztiak baitira problemaren soluzioa.

- Problema mugatugabea (p.11)

$$\max \quad z = 2x_1 + x_2$$
$$x_1 - 2x_2 \leq 2$$
$$-4x_1 + 3x_2 \leq 12$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

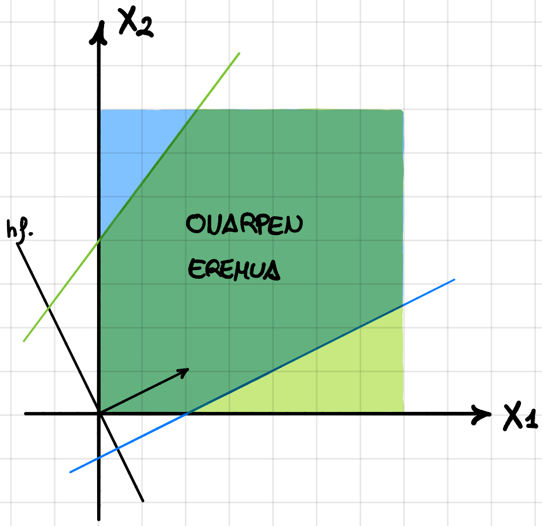
$\Rightarrow$

hf: $2x_1 + x_2 = 0 \rightarrow (0,0), (1,-2)$

r: $x_1 - 2x_2 = 2 \rightarrow (0,-1), (2,0)$

s: $-4x_1 + 3x_2 = 12 \rightarrow (0,4), (-3,0)$

$$\nabla f\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = (2,1)$$



Oraingoan, poligonoa mugagabea da eta helburu funtzioa gradientearen noranzkoan desplazatzean, onarpen eremutik irten gabe desplaza genezake.

Hortaz, problema mugagabea da eta infinitu soluzio ditu.

• Problema bideraezina (p. 12)

$$\max z = x_1 + x_2$$
$$2x_1 + x_2 \leq 5$$
$$x_1 \geq 4$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

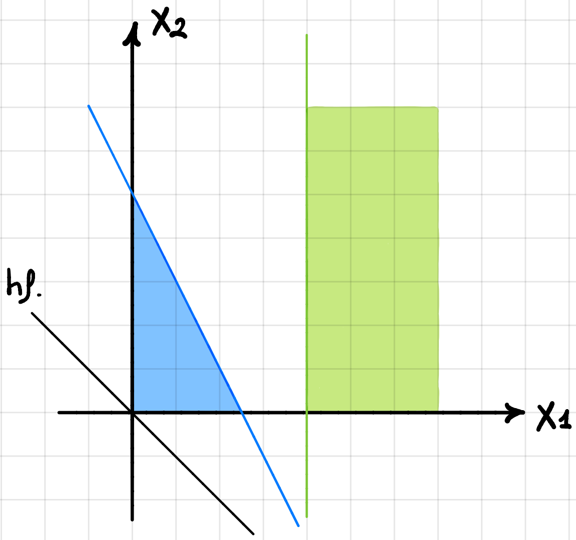
$\Rightarrow$

hf: $x_1 + x_2 = 0 \rightarrow (0,0), (1,-1)$

r: $2x_1 + x_2 = 5 \rightarrow (0,5), (2,1)$

s: $x_1 = 4$

$$\nabla f \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = (1, 1)$$



Problemak zehaztutako murrizketak aldi berean betetzen dituen punturik existitzen ez denez, onarpen eremua multzo hutsa da eta problema bideraezina dela esaten da.

SENTIKORTASUN ANALISIA GRAFIKO BIDEZ (p.17)

$$\max\ z = 5x_1 + 7x_2$$
$$8x_1 + 14x_2 \leq 63$$
$$10x_1 + 4x_2 \leq 45$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$\Rightarrow$

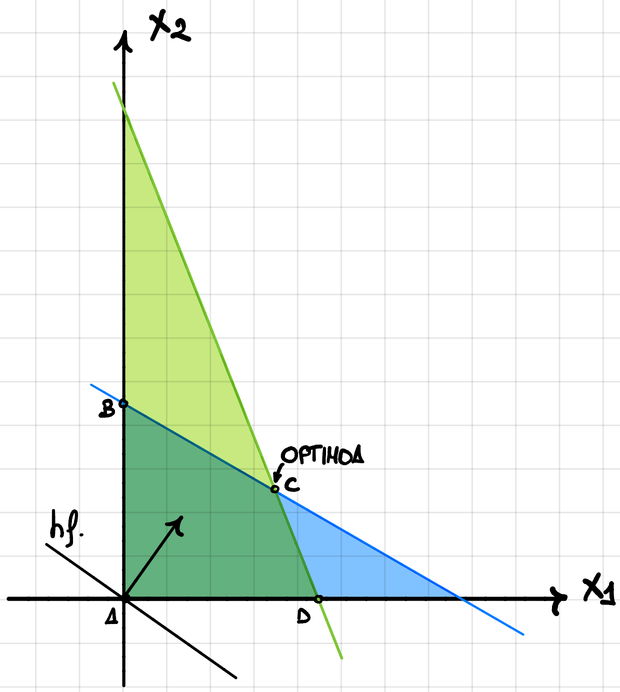
hf: $5x_1 + 7x_2 = 0 \rightarrow (0,0),\ (7,-5)$

r: $8x_1 + 14x_2 = 63 \rightarrow (0, 4'5), (7'9, 0)$

s: $10x_1 + 4x_2 = 45 \rightarrow (0, 11'25), (4'5, 0)$

$$\nabla f\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = (5,7)$$

- Soluzio optimoa lortu



C puntua optimoa da : r eta s

$$-\begin{cases} 8x_1 + 14x_2 = 63 \\ 10x_1 + 4x_2 = 45 \end{cases}$$

$$-2x_1 + 10x_2 = 18 \rightarrow x_1 = 5x_2 - 9$$

$8(5x_2 - 9) + 14x_2 = 63 \rightarrow 40x_2 - 72 + 14x_2 = 63 \rightarrow$

$\rightarrow 54x_2 = 135 \rightarrow x_2 = 2'5,\ x_1 = 3'5$

Puntu optimoa : $C(3'5, 2'5)$

- Helburu-funtzioko koefizienteak optimoa aldatu gabe nola alda daitezkeen aztertu (sentikortasun analisia)

C_1 helburu funtzioko koefizientea:

0 izan daiteke errazago adierazteko

malda: $y = mx + n$

hf: $C_1x_1 + 7x_2 = K \rightarrow x_2 = \frac{-C_1x_1 + K}{7} \rightarrow m_{hf} = \frac{-C_1}{7}$

r: $8x_1 + 14x_2 = 63 \rightarrow x_2 = \frac{63 - 8x_1}{14} \rightarrow m_r = \frac{-8}{14}$

s: $10x_1 + 4x_2 = 45 \rightarrow x_2 = \frac{45 - 10x_1}{4} \rightarrow m_s = \frac{-10}{4}$

Optimoa ez aldatzeko:

$$\frac{-10}{4} < \frac{-C_1}{7} < \frac{-8}{14}$$

C_2 helburu funtzioko koefizientea:

$$h.f: 5x_1 + C_2 x_2 = K \rightarrow x_1 = \frac{-C_2 x_2 + K}{5} \rightarrow m_{hf} = \frac{-C_2}{5}$$

Optimoa ez aldatzeko: $\frac{-10}{4} < \frac{-C_2}{5} < \frac{-8}{14}$

$\frac{-C_1}{7} = \frac{-10}{4}$ bada, h.f eta s paraleloak dira. Kasu horretan, helburu funtzioaren eta s zuzenaren maldak berdinak dira eta problemak infinitu soluzio ditu, CB zuzenkian dauden puntu guztiak baitira soluzioa.

$\frac{-C_1}{7} < \frac{-10}{4}$ bada, emaitza aldatzen da eta optimo berria B puntua da.

- Gai-askea txikitzean zer gertatzen den aztertu.

Gai askea aldatzen badugu, zuzena paraleloki desplazatzen da. r zuzeneko gai askea txikitzean, zuzena beherantz mugituko da, C puntua B puntura hurbilduz.

SIMPLEX METODOAREN OINARRIZKO TEOREMAK (p.23)

$$\max\ z = 4x + 3y \qquad\qquad \max\ z = 4x + 3y \qquad\qquad \max\ z = 4x + 3y$$

$$\begin{array}{lcl}
x - 2y \geq -4 & & -x + 2y \leq 4 & & -x + 2y + r = 4 \\
2x + 3y \leq 13 & \Rightarrow & 2x + 3y \leq 13 & \Rightarrow & 2x + 3y + s = 13 \\
x - y \leq 4 & & x - y \leq 4 & & x - y + t = 4 \\
x, y \geq 0 & & x, y \geq 0 & & x, y, r, s, t \geq 0
\end{array}$$

dena maximizatzen jarri

lasaiera aldagaiak gehitu

Bideragarria izateko, x_B-ko osagai guztiak ≥ 0 izan behar dira.

$$A = \begin{array}{c} \\ \left(\begin{array}{cc|ccc} -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 13 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$x_B = \underbrace{B^{-1}}_{=I} \cdot b = b = (r, s, t)^T = (4, 13, 4)^T$$

$$x_N = (x, y)^T$$

elementu guztiak $\neq 0$ direlako.

Oinarrizko soluzioa bideragarria eta ez-endekatua da, aldagai guztiak $\emptyset$ baino handiagoak direlako.

SIMPLEX METODOA

• Adibidea (p. 32)

$$\min\ z = 2x_2 - 3x_3 + 2x_5$$
$$x_1 + 3x_2 - x_3 + x_5 = 6$$
$$-x_2 + 3x_3 + x_4 = 10 \quad \Rightarrow \text{Forma estandarrean idatzita dago.}$$
$$-4x_2 + 4x_3 + 8x_5 + x_6 = 12$$
$$x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 6$$

$$A = \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \end{array} \; B$$
$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & -1 & \boxed{0} & 1 & \boxed{0} \\ \boxed{0} & -1 & 3 & \boxed{1} & 0 & \boxed{0} \\ \boxed{0} & -4 & 4 & \boxed{0} & 8 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

$$x_N = (x_2, x_3, x_5)^T$$
$$x_B = (x_1, x_4, x_6)^T$$

Hasierako oinarrizko soluzio bideragarria:

$$x_B = B^{-1} \cdot b = b = (6, 10, 12)^T$$
$$x_N = (0, 0, 0)^T$$

Simplex taula:

Coin	Aoin	$B^{-1} \cdot b$	0	2	-3	0	2	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_1	6	1	3	-1	0	1	0
0	x_4	10	0	-1	3 PIBOTA	1	0	0
0	x_6	12	0	-4	$\boxed{4}$	0	8	1
$z = 0$		z_j	0	0	0	0	0	0
		$z_j - c_j$	0	-2	3	0	-2	0

Kostu minimoak: $\exists w_j > 0 \rightarrow$ Jarraitu guztiak < 0 izan behar dira

Sartze irizpidea: $w_j = \max\{-2, 3, -2\} = 3 \rightarrow x_3$ aldagaia oinarrira sartzen da.

Irtete irizpidea: $\min\left\{\frac{x_{Bk}}{y_{kj}} / y_{kj} > 0\right\} = \min\left\{\frac{10}{3}, \frac{12}{4}\right\} = \frac{12}{4} = 3 \rightarrow x_6$ oinarritik irteten da.

Simplex taulan beharrezko aldaketak egin:

Coin	Aoin	$B^{-1}\cdot b$	0	2	-3	0	2	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_1	9	1	2	0	0	3	1/4
0	x_4	1	0	$\boxed{2}$ PIBOTA	0	1	-6	-3/4
-3	x_3	3	0	-1	1	0	2	1/4
$z=-9$		z_j	0	3	-3	0	-6	-3/4
		z_j-c_j	0	1	0	0	-8	-3/4

$$\begin{cases} e_{3b} \leftarrow e_3/4 \\ e_{1b} \leftarrow e_1 + e_{3b} \\ e_{2b} \leftarrow e_2 - 3e_{3b} \end{cases}$$

Kostu minimoak: $\exists w_j > 0 \rightarrow$ Jarraitu

Sartze irizpidea: $w_j = \max\{1\} = 1 \rightarrow x_2$ oinarrira sartzen da

Irtete irizpidea: $\min\left\{\frac{9}{2}, \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2} \rightarrow x_4$ oinarritik irteten da

Simplex taulan beharrezko aldaketak egin:

Coin	Aoin	$B^{-1}\cdot b$	0	2	-3	0	2	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_1	8	1	0	0	-1	9	1
2	x_2	1/2	0	1	0	1/2	-3	-3/8
-3	x_3	7/2	0	0	1	1/2	-1	-1/8
$z=-19/2$		z_j	0	2	-3	-1/2	-3	-3/8
		z_j-c_j	0	0	0	-1/2	-5	-3/8

$$\begin{cases} e_{2b} \leftarrow e_2/2 \\ e_{1b} \leftarrow e_1 - 2e_{2b} \\ e_{3b} \leftarrow e_3 + e_{2b} \end{cases}$$

Kostu minimoak: $\forall w_j \leq 0 \rightarrow$ Gelditu, optimoa aurkitu dugu

$(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*, x_6^*) = (8, 1/2, 7/2, 0, 0, 0)$ eta $z^* = -19/2$

Gainera, solUzio optimoa bakarra da, oinarrizkoak ez diren aldagaien kostu murriztuak $\neq 0$ direlako.

- Adibidea (p.33)

X_1 = "Orduko ekoizten diren K motako ontzi kopurua".

X_2 = " L "

$$\max\ 29x_1 + 45x_2$$
$$2x_1 + 8x_2 \leq 60$$
$$4x_1 + 4x_2 \leq 60$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

• Adibidea (p. 34)

$$\max\ z = -x_1 + 3x_2 \qquad\qquad \max\ z = -x_1 + 3x_2$$
$$-2x_1 + x_2 \leq 1 \qquad\qquad -2x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$-x_1 + x_2 \leq 4 \quad \Rightarrow \quad -x_1 + x_2 + x_4 = 4$$
$$x_i \geq 0 \quad i = 1,2 \qquad\qquad x_i > 0 \quad i = 1, \dots, 4$$

$$A = \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4\ B \end{array}$$
$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad x_N = (x_1, x_2)^T \qquad x_B = (x_3, x_4)^T$$

Hasierako oinarrizko soluzio bideragarria:

$x_B = B^{-1} \cdot b = (1,4)^T$

$x_N = (0,0)^T$

Simplex taula:

Coin	Aoin	$B^{-1} \cdot b$	-1	3	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3	1	-2	$\boxed{1}$ PIBOTA	1	0
0	x_4	4	-1	1	0	1
$z = 0$		z_j	0	0	0	0
		$z_j - c_j$	1	-3	0	0

Kostu murriztuak: $\exists W_j < 0 \rightarrow$ Jarraitu

Sartze irizpidea: $W_j = \min\{-3\} = -3 \rightarrow x_2$ oinarrira sartzen da

Irteteze irizpidea: $\min\left\{\frac{1}{1}, \frac{4}{1}\right\} = 1 \rightarrow x_3$ oinarritik irteten da

Simplex taulan beharrezko aldaketak egin:

Coin	Aoin	$B^{-1}\cdot b$	-1	3	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4
3	x_2	1	-2	1	1	0
0	x_4	3	$\boxed{1}$ PIBOTA	0	-1	1
$z=3$		z_j	-6	3	3	0
		z_j-c_j	-5	0	3	0

$\{ e_{2b} \leftarrow e_2 - e_1$

Kostu murriztuak: $\exists w_j < 0 \rightarrow$ Jarraitu

Sartze irizpidea: $\min\{z_j - c_j\} = -5 \rightarrow x_1$ oinarrira sartzen da

Irteteze irizpidea: $\min\left\{\frac{3}{1}\right\} = 3 \rightarrow x_4$ oinarritik irteten da

Simplex taulan beharrezko aldaketak egin:

Coin	Aoin	$B^{-1}\cdot b$	-1	3	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4
3	x_2	7	0	1	-1	2
-1	x_1	3	1	0	-1	1
$z=18$		z_j	-1	3	-2	5
		z_j-c_j	0	0	-2	5

$\{ e_{1b} \leftarrow e_1 + 2e_2$

Kostu murriztuak: $\exists w_j < 0 \rightarrow$ Jarraitu

Sartze irizpidea: $w_j = \min\{-2, 5\} = -2 \rightarrow x_3$ oinarrira sartzen da

Irtete irizpidea: $\min\{\}$

$y_{i,j} < 0 \quad k=1,2 \quad j=3 \rightarrow$ Ez dago oinarritik irten daitekeen hautagairik, beraz, problema mugatugabea da.

- Adibidea (p.35)

$$\max\ z = 60x_1 + 35x_2 + 20x_3$$
$$8x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 48$$
$$4x_1 + 2x_2 + 3/2\, x_3 \leq 20$$
$$2x_1 + 3/2\, x_2 + 1/2\, x_3 \leq 8$$
$$x_2 \leq 5$$
$$x_i \geq 0 \quad i = 1,2,3$$

$\Rightarrow$

$$\max\ z = 60x_1 + 35x_2 + 20x_3$$
$$8x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 = 48$$
$$4x_1 + 2x_2 + 3/2\, x_3 + x_5 = 20$$
$$2x_1 + 3/2\, x_2 + 1/2\, x_3 + x_6 = 8$$
$$x_2 + x_7 = 5$$
$$x_i \geq 0 \quad i = 1,2,3,4,5,6,7$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|cccc} 8 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 3/2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3/2 & 1/2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array} \quad B$$

Hasierako oinarrizko soluzio bideragarria:

$x_B = B^{-1} \cdot b = (x_4, x_5, x_6, x_7) = (48, 20, 8, 5)$

$x_N = (x_1, x_2, x_3) = (0,0,0)$

Simplex taula:

Coin	Aoin	$B^{-1}b$	60 x_1	35 x_2	20 x_3	0 x_4	0 x_5	0 x_6	0 x_7
0	x_4	48	8	6	1	1	0	0	0
0	x_5	20	4	2	3/2	0	1	0	0
0	x_6	8	$\boxed{2}$ PIBOTA	3/2	1/2	0	0	1	0
0	x_7	5	0	1	0	0	0	0	1
$z=0$		z_j	0	0	0	0	0	0	0
		$z_j - c_j$	-60	-35	-20	0	0	0	0

Kostu murriztuak: $\exists w_j < 0 \rightarrow$ Jarraitu

Sartze irizpidea: $w_j = \min\{-60, -35, -20\} = -60 \rightarrow x_1$ oinarrira sartzen da

Irtete irizpidea: $\min\left\{\frac{48}{8}, \frac{20}{4}, \frac{8}{2}\right\} = \frac{8}{2} = 4 \rightarrow x_6$ oinarritik irteten da

Simplex taulan beharrezko aldaketak egin:

Coin	Aoin	$B^{-1}b$	60	35	20	0	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	x_4	16	0	0	-1	1	0	-4	0
0	x_5	4	0	-1	$\boxed{1/2}$ PIBOTA	0	1	-2	0
60	x_1	4	1	3/4	1/4	0	0	1/2	0
0	x_7	5	0	1	0	0	0	0	1
$z=240$		z_j	60	45	15	0	0	30	0
		z_j-c_j	0	10	-5	0	0	30	0

$$\begin{cases} e_{3b} \leftarrow e_3/2 \\ e_{1b} \leftarrow e_1 - 8e_{3b} \\ e_{2b} \leftarrow e_2 - 4e_{3b} \\ e_{4b} \leftarrow e_4 \end{cases}$$

Kostu murriztuak: $\exists w_j < 0 \rightarrow$ Jarraitu

Sartze irizpidea: $w_j = \min\{10, -5, 30\} = -5 \rightarrow x_3$ oinarrira sartzen da

Irtete irizpidea: $\min\left\{\frac{4\cdot 2}{1}, \frac{4\cdot 4}{1}\right\} = 8 \rightarrow x_5$ oinarritik irteten da

Simplex taulan beharrezko aldaketak egin:

Coin	Aoin	$B^{-1}b$	60	35	20	0	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	x_4	24	0	0	0	1	2	-8	0
20	x_3	8	0	-2	1	0	2	-4	0
60	x_1	2	1	5/4	0	0	-1/2	3/2	0
0	x_7	5	0	1	0	0	0	0	1
$z=280$		z_j	60	35	20	0	10	10	0
		z_j-c_j	0	0	0	0	10	10	0

$$\begin{cases} e_{2b} \leftarrow 2e_2 \\ e_{1b} \leftarrow e_1 + e_{2b} \\ e_{3b} \leftarrow e_3 - e_{2b}/4 \\ e_{4b} \leftarrow e_4 \end{cases}$$

Kostu murriztuak: $\forall w_j \geq 0 \rightarrow$ Gelditu

Soluzioa: $z^* = 280$, $x_1^* = 2$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 8$, $x_4^* = 24$, $x_5^* = 0$, $x_6^* = 0$, $x_7^* = 5$

x_2 aldagai ez-oinarrizkoan kostu minimoa $\emptyset$ denez, problemak soluzio infinituak ditu. Beste soluzio bat lor daiteke x_2 aldagaia oinarrian sartuz.

ZIGORTZE METODOA (p.38)

$$\max\ z = x_1 + x_2 \qquad\qquad \max\ z = x_1 + x_2 \qquad\qquad \max\ z = x_1 + x_2 - Mq_1 - Mq_2$$

$$-2x_1 + x_2 \le 2 \qquad\qquad -2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \qquad\qquad -2x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$$2x_1 + x_2 = 9 \quad \Rightarrow \quad 2x_1 + x_2 = 9 \quad \Rightarrow \quad 2x_1 + x_2 + q_1 = 9$$

$$3x_1 + x_2 \ge 11 \qquad\qquad 3x_1 + x_2 - x_4 = 11 \qquad\qquad 3x_1 + x_2 - x_4 + q_2 = 11$$

$$x_i \ge 0 \quad i = 1,2 \qquad\qquad x_i \ge 0 \quad i = 1,\dots,4 \qquad\qquad x_1, x_2, x_3, x_4, q_1, q_2 \ge 0$$

Lasaiera aldagaiak gehitu

Identitatea ezin denez lortu, q_1 eta q_2 gehitu

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & q_1 & q_2 & B \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hasierako oinarrizko soluzio bideragarria:

$$x_B = (x_3, q_1, q_2) = (2, 9, 11)$$

$$x_N = (x_1, x_2, x_4) = (0,0,0)$$

Simplex taula:

C_{oin}	A_{oin}	$B^{-1}b$	1	1	0	0	-M	-M
			x_1	x_2	x_3	x_4	q_1	q_2
0	x_3	2	-2	1	1	0	0	0
-M	q_1	9	2	1	0	0	1	0
-M	q_2	11	$\boxed{3}$ PIBOTA	1	0	-1	0	1
$z = -20M$		z_j	-5M	-2M	0	M	-M	-M
		$z_j - c_j$	-5M-1	-2M-1	0	M	0	0

Kostu murriztuak: $\exists w_j < 0 \rightarrow$ Jarraitu

Sartze irizpidea: $w_j = \min\{-5M-1, -2M-1, M\} = -5M-1 \rightarrow x_1$ oinarrira sartzen da

Irtete irizpidea: $\min\left\{\frac{9}{2}, \frac{11}{3}\right\} = \frac{11}{3} \rightarrow q_2$ oinarritik irteten da

Simplex taulan beharrezko aldaketak egin:

C_{oin}	A_{oin}	$B^{-1}\cdot b$	1	1	0	0	$-M$	$-M$
			x_1	x_2	x_3	x_4	q_1	q_2
0	x_3	$28/3$	0	$5/3$	1	$-2/3$	0	$2/3$
$-M$	q_1	$5/3$	0	$1/3$	0	$\boxed{2/3}$ PIBOTA	1	$-2/3$
1	x_1	$11/3$	1	$1/3$	0	$-1/3$	0	$1/3$
$z=\frac{11}{3}-\frac{5M}{3}$		z_j	1	$\frac{1}{3}-\frac{M}{3}$	0	$\frac{-2M}{3}-\frac{1}{3}$	$-M$	$\frac{2M}{3}+\frac{1}{3}$
		z_j-c_j	0	$\frac{-M}{3}-\frac{2}{3}$	0	$\frac{-2M}{3}-\frac{1}{3}$	0	$\frac{5M}{3}+\frac{1}{3}$

$$\begin{cases} e_{3b} \leftarrow e_3/3 \\ e_{1b} \leftarrow e_1+2e_{3b} \\ e_{2b} \leftarrow e_2-2e_{3b} \end{cases}$$

Kostu murriztuak: $\exists\, w_j<0 \rightarrow$ Jarraitu

Sartze irizpidea: $w_j=\min\left\{\frac{-M}{3}-\frac{2}{3}, \frac{-2M}{3}-\frac{1}{3}\right\}=\frac{-2M}{3}-\frac{1}{3} \rightarrow x_4$ oinarrira sartzen da

Irtete irizpidea: $\min\left\{\frac{5\cdot 3}{3\cdot 2}\right\}=\frac{5}{2} \rightarrow q_1$ oinarritik irteten da

Simplex taulan beharrezko aldaketak egin:

C_{oin}	A_{oin}	$B^{-1}\cdot b$	1	1	0	0	$-M$	$-M$
			x_1	x_2	x_3	x_4	q_1	q_2
0	x_3	11	0	2	1	0	1	0
0	x_4	$5/2$	0	$\boxed{1/2}$ PIBOTA	0	1	$3/2$	-1
1	x_1	$9/2$	1	$1/2$	0	0	$1/2$	0
$z=9/2$		z_j	1	$1/2$	0	0	$1/2$	0
		z_j-c_j	0	$-1/2$	0	0	$\frac{1}{2}+M$	M

$$\begin{cases} e_{2b} \leftarrow 3e_2/2 \\ e_{1b} \leftarrow e_1+2e_{2b}/3 \\ e_{3b} \leftarrow e_3+e_{2b}/3 \end{cases}$$

Kostu murriztuak: $\exists\, w_j<0 \rightarrow$ Jarraitu

Sartze irizpidea: $w_j=\min\{-1/2, 1/2+M, M\}=-1/2 \rightarrow x_2$ oinarrira sartzen da

Irtete irizpidea: $\min\left\{\frac{11}{2}, \frac{5\cdot 2}{2}, \frac{9\cdot 2}{2}\right\}=5 \rightarrow x_4$ oinarritik irteten da

Simplex taulan beharrezko aldaketak egin:

C_{oin}	A_{oin}	$B^{-1} \cdot b$	1	1	0	0	-M	-M
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_3	11	0	0	1	-4	-5	4
1	x_2	5/2	0	1	0	2	3	-2
1	x_1	9/2	1	0	0	-1	-1	1
$z = 7$		z_j	1	1	0	1	2	-1
		$z_j - c_j$	0	0	0	1	2+M	M-1

$$\begin{cases} e_{2b} \leftarrow 2e_2 \\ e_{1b} \leftarrow e_1 - 2e_{2b} \\ e_{3b} \leftarrow e_3 - e_{2b}/2 \end{cases}$$

Kostu murriztuak: $\forall w_j \geq 0 \rightarrow$ Gelditu

Oinarrizkoak ez diren aldagaien kostu murriztua $\neq 0$ da, beraz, soluzioa bakarra da. Bestalde $q_1^* = q_2^* = 0$ direnez, optimoa lortu dugu.

Soluzio optimoa: $x_1^* = 2$, $x_2^* = 5$, $x_3^* = 1$, $x_4^* = 0$, $q_1^* = 0$, $q_2^* = 0$, $z^* = 7$

BI FASEKO METODOA (p.43)

$$\min\ z=-3x_1+5x_2 \quad\quad \min\ z=-3x_1+5x_2 \quad\quad \max\ z=-3x_1+5x_2$$

$$x_1\le 4 \quad\quad x_1+x_3=4 \quad\quad x_1+x_3=4$$

$$x_2\le 6 \quad \Rightarrow \quad x_2+x_4=6 \quad \Rightarrow \quad x_2+x_4=6$$

$$3x_1+2x_2\ge 18 \quad\quad 3x_1+2x_2-x_5=18 \quad\quad 3x_1+2x_2-x_5+g_1=18$$

$$x_i\ge 0\ \ i=1,2 \quad\quad x_i\ge 0\ \ i=1,\dots,5 \quad\quad g_1, x_i\ge 0\ \ i=1,\dots,5$$

LEHENENGO FASEA:

$$\min\ g_1$$

$$x_1+x_3=4$$

$$x_2+x_4=6$$

$$3x_1+2x_2-x_5+g_1=18$$

$$g_1, x_i\ge 0 \quad i=1,\dots,5$$

$$A=\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & g_1 \end{array} \ B \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Hasierako oinarrizko soluzio bideragarria:

$$x_B=(x_3, x_4, g_1)^T=(4,6,18)^T$$

$$x_N=(x_1,x_2,x_5)^T=(0,0,0)^T$$

Simplex taula:

C_{oin}	A_{oin}	$B^{-1}b$	0	0	0	0	0	1
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	g_1
0	x_3	4	$\boxed{1}$ PIBOTA	0	1	0	0	0
0	x_4	6	0	1	0	1	0	0
1	g_1	18	3	2	0	0	-1	1
$z=18$		z_j	3	2	0	0	-1	1
		z_j-c_j	3	2	0	0	-1	0

Kostu murriztuak: $\exists w_j > 0 \rightarrow$ Jarraitu

Sartze irizpidea: $w_j = \max\{3, 2, -1\} = 3 \rightarrow x_1$ oinarrira sartzen da

Irtete irizpidea: $\min\left\{\frac{4}{1}, \frac{18}{3}\right\} = 4 \rightarrow x_3$ oinarritik irteten da

Simplex taulan beharrezko aldaketak egin:

			0	0	0	0	0	1
C_{oin}	A_{oin}	$B^{-1}b$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	q_1
0	x_1	4	1	0	1	0	0	0
0	x_4	6	0	1	0	1	0	0
1	q_1	6	0	$\boxed{2}$ PIBOTA	-3	0	-1	1
$z = 6$		z_j	0	2	-3	0	-1	1
		$z_j - c_j$	0	2	-3	0	-1	0

$\{ e_{3b} \leftarrow e_3 - 3e_1$

Kostu murriztuak: $\exists w_j > 0 \rightarrow$ Jarraitu

Sartze irizpidea: $w_j = \max\{2, -3, -1\} = 2 \rightarrow x_2$ oinarrira sartzen da

Irtete irizpidea: $\min\left\{\frac{6}{1}, \frac{6}{2}\right\} = 3 \rightarrow q_1$ oinarritik irteten da

Simplex taulan beharrezko aldaketak egin:

			0	0	0	0	0	1
C_{oin}	A_{oin}	$B^{-1}b$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	q_1
0	x_1	4	1	0	1	0	0	0
0	x_4	3	0	0	3/2	1	1/2	-1/2
0	x_2	3	0	1	-3/2	0	-1/2	1/2
$z = 0$		z_j	0	0	0	0	0	0
		$z_j - c_j$	0	0	0	0	0	-1

$\begin{cases} e_{3b} \leftarrow e_3/2 \\ e_{2b} \leftarrow e_2 - e_{3b} \end{cases}$

Kostu murriztuak: $\forall w_j \leq 0 \rightarrow$ Gelditu

Lehenengo fasea bukatu dugu eta oinarrizko soluzio bateragarria lortu dugu: $x_1 = 4$, $x_2 = 3$, $x_3 = 0$, $x_4 = 3$, $x_5 = 0$, $q_1 = 0$

BIGARREN FASEA:

Bigarren faseko hasierako Simplex taula:

C_{oin}	A_{oin}	$B^{-1}b$	-3	5	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
-3	x_1	4	1	0	1	0	0
0	x_4	3	0	0	$3/2$	1	$1/2$
5	x_2	3	0	1	$-3/2$	0	$-1/2$
$z=3$		z_j	-3	5	$-21/2$	0	$-5/2$
		z_j-c_j	0	0	$-21/2$	0	$-5/2$

Kostu murriztuak: $\forall w_j \leq 0 \rightarrow$ Gelditu

Optimoa lortu dugu, gainera, oinarrizkoak ez diren aldagaien kostu murriztuak $\neq 0$ dira, beraz, soluzioa bakarra da.

$x_1^{\infty}=4,\ x_2^{\infty}=3,\ x_3^{\infty}=0,\ x_4^{\infty}=3,\ x_5^{\infty}=0,\ z^{\infty}=3$