Adierazpide geometrikoa (bektorea): (a,b)

z-ren aurkakoa: $-z=-a-bi$

z-ren konjugatua: $\bar{z}=a-bi$

z-ren modulua: $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\rho$

z-ren argumentua: $\begin{cases} \arg(z)=\alpha=\arctan(b/a) \\ \arg(z)=\alpha+2k\pi \quad (k=0 \text{ arg nag}) \end{cases}$

Moduluaren eta konjugatuaren propietateak

$|z|>0$ baldin $z\neq 0$

$|z_1-z_2|=|z_1|-|z_2|$

$|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$

$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$ baldin $z_2\neq 0$

$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$

$\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$

$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

Era binomikoa: $a+bi$

Era kartesiarra: (a,b)

Era polarra: $\rho_\alpha \begin{cases} \rho=\sqrt{a^2+b^2} \\ \alpha=\arctan(b/a) \end{cases}$

Era trigonometrikoa: $\rho(\cos\alpha+i\sin\alpha)$

KALKULUAK ERA BINOMIKOAN

- Batuketa: $z_1+z_2=(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$
- Biderketa: $z_1\cdot z_2=(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$
- Zatiketa $(z_2\neq 0)$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(a+bi)}{(c+di)}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{(c^2+d^2)}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

- Berreketa: Newtonen binomioa

$$z^n=(a+bi)^n=\binom{n}{0}a^n(bi)^0+\binom{n}{1}a^{n-1}(bi)^1+\dots+\binom{n}{n}a^0(bi)^n=\frac{n!}{0!n!}a^n(bi)^0+\frac{n!}{1!(n-1)!}a^{n-1}(bi)^1+\dots+\frac{n!}{n!0!}a^0(bi)^n$$

- i-ren berreturak

$i^0=1=i^4$ | $i^2=-1=i^6$ | $i^4=1$

$i^1=i=i^5$ | $i^3=-i=i^3$

$i^n=i^{4c+r}=i^{4c}\cdot i^r=1^c\cdot i^r=i^r$

$n \,\underline{|\, 4}$
$r \quad c$

$\boxed{(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$

KALKULUAK ERA POLARREAN

- Biderketa: $z_1\cdot z_2=(\rho_\alpha)\cdot(\rho'_{\alpha'})=(\rho\rho')_{\alpha+\alpha'}$
- Zatiketa: $\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_\alpha}{\rho'_{\alpha'}}=\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)_{\alpha-\alpha'}$
- Berreketa: $z^n=(\rho_\alpha)^n=(\rho^n)_{\alpha n}$
- Erroketa: $\sqrt[n]{\rho_\alpha}=r_\theta \begin{cases} r=\sqrt[n]{\rho} \\ \theta=\frac{\alpha+2k\pi}{n} \quad k=0,1,\dots,(n-1) \end{cases}$

MOIVRE: $(1_\alpha)^n=(1^n)_{n\alpha}$

$(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=\cos(n\alpha)+i\sin(n\alpha)$

$e^{-\infty}=0$

EULER

$\begin{cases} e^{i\varphi}=\cos\alpha+i\sin\alpha \\ e^{-i\varphi}=\cos\alpha-i\sin\alpha \end{cases}$

$e^{i\varphi}\cdot e^{-i\varphi}=\|\cdot e^{i\varphi}\|=e^{2i\varphi}=1$

$\log_n(a)=\frac{\ln(a)}{\ln(n)}$

$e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}=\cos\alpha+i\sin\alpha+\cos\alpha-i\sin\alpha=2\cos\alpha \to \cos\alpha=\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}$

$e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}=\cos\alpha+i\sin\alpha-\cos\alpha+i\sin\alpha=2i\sin\alpha \to \sin\alpha=\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}$

ERA ESPONENTZIALA

$z=\rho[\cos(\varphi+2k\pi)+i\sin(\varphi+2k\pi)]=\rho\cdot e^{i(\varphi+2k\pi)}=|z|e^{i(\varphi+2k\pi)}$ ($k=0$ deter. nag)

$z=e^{\ln|z|}\cdot e^{i(\varphi+2k\pi)}\to z=e^{\ln|z|+i(\varphi+2k\pi)}$

LOGARITMO NEPERTARRAK

$z=e^{\ln|z|+i(\varphi+2k\pi)}\to \ln\left(e^{\ln|z|+i(\varphi+2k\pi)}\right)=\ln(z)$

$\ln(z)=\ln|z|+i(\varphi+2k\pi)$ ($k=0$ det. nag)

z-K BERRETURAK

$$z^{z'}=\left[e^{\ln|z|+i(\varphi+2k\pi)}\right]^{(a'+b'i)}=e^{[\ln|z|+i(\varphi+2k\pi)](a'+b'i)}$$

$\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)=1 \begin{cases} \cos^2(\alpha)=1-\sin^2(\alpha) \\ \sin^2(\alpha)=1-\cos^2(\alpha) \end{cases}$

DEG	0	30	45	60	90	120	135	150	180	210	225	240	270	300	315	330	360
RAD	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π	$7\pi/6$	$5\pi/4$	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$5\pi/3$	$7\pi/4$	$11\pi/6$	2π
SIN x	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-1/2$	0
COS x	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-1/2$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
TAN x	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	X	$-\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}/3$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	X	$-\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}/3$	0

Re ⊖ Im ⊕	Re ⊕ Im ⊕
Re ⊖ Im ⊖	Re ⊕ Im ⊖

SEGIDAK: $(a_n=\{a_1,a_2,a_3,\dots,a_n\})$

- Konbergentea: $\lim_{n\to\infty} a_n=L$ $(L\in\mathbb{R})$
- Dibergentea (ez-konbergente): $\lim_{n\to\infty} a_n=L$ $(L\notin\mathbb{R})$

- Bornatua: $|a_n|\leq C \ \forall n\in\mathbb{N}$
  - Konbergentea bada, orduan bornatua
  - Bornatua eta (b_n) limitea $=0$: $\lim_{n\to\infty}[a_n b_n]=0$
  - Bornatua eta (b_n) limitea ∞: $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{a_n}{b_n}\right]=0$

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e \qquad \ln(A/B)=-\ln(B/A)$

Baliokidetasuna ez da aplikatzen ⊕ V ⊖, bakarrik ⊗, ⊖, ⊛ edo ⓡ

- Baliokideak: $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{a_n}{b_n}\right]=1$

- $\lim_{n\to\infty}[a_n]=0 \Rightarrow$ 1) $\tan(a_n)\sim\sin(a_n)\sim\arcsin(a_n)\sim\arctan(a_n)\sim a_n$
  2) $1-\cos(a_n)\sim\frac{a_n^2}{2}$ 3) $e^{a_n}-1\sim a_n$
  4) $\ln(1+a_n)\sim a_n$ // $\lim_{n\to\infty}[a_n]=1\to\ln(a_n)\sim a_n-1$

- Infinituak: $n^n \gg n! \gg a^n \gg n^b \gg \ln n^p$
  $a>1$, $b>0 \wedge p>0$

- $n\to\infty \Rightarrow$ 1) $a_0+a_1n+a_2n^2+\dots+a_{k-1}n^{k-1}+a_kn^k\sim a_kn^k$ $(k>0)$
  2) $\ln(a_0+a_1n+a_2n^2+\dots+a_{k-1}n^{k-1}+a_kn^k)\sim\ln n^k=k\ln n$ $(k>0)$

PROGRESIOAK

- Aritmetikoa: $\{a_1, a_1+r, a_1+2r+\dots+a_1+(n-1)r\}$

$a_n=a_1+(n-1)r$ | Arrazoia: $r=a_n-a_{n-1}$

$a_{n+1}=\frac{a_n+a_{n+2}}{2}$ | $S(n)=a_1+\frac{(n-1)r}{2}=\frac{(a_1+a_n)n}{2}$

- Geometrikoa: $\{a_1, a_1r, a_1r^2,\dots,a_1r^{(n-1)}\}$

$a_n=a_1r^{(n-1)}$ | $r=\frac{a_n}{a_{n-1}}$ | $a_{n+1}=\sqrt{a_n\cdot a_{n+2}}$

$S(n)=\frac{a_1(r^n-1)}{r-1}=\frac{a_nr-a_1}{r-1}$

- Aritmetiko-geometrikoa: $a_n=\{a_1,(a_1+r_1)r_2,(a_1+2r_1)r_2^2,\dots,(a_1+(n-1)r_1)r_2^{(n-1)}\}$

$a_n=(a_1+(n-1)r_1)r_2^{(n-1)}$

$S(n)=\frac{a_1(1-r_2^n)}{1-r_2}+\frac{r_1r_2(1-nr_2^{n-1}+(n-1)r_2^n)}{(1-r_2)^2}$

r_1: arrazoi aritmetikoa | r_2: arrazoi geometrikoa

- Hipergeometrikoa:

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{pn+q}{pn+r}$ $(/p,q,r\in\mathbb{R} \wedge p+q-r\neq 0$

$S(n)=\frac{(pn+q)a_n-a_1\cdot r}{p+q-r}$

- Erroaren irizpidea: ⊛

$\exists=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=L\Rightarrow\begin{cases} L<1\to\text{Konb.} \mid L>1\to\text{Dib} \\ L=1\Rightarrow\text{Zalantzazko kasua} \end{cases}$

- Konparaziozko irizpidea:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

$a_n\leq b_n \wedge \sum_{n=1}^{\infty}(b_n)=\text{Konb.}\to\text{Konb.}$

$a_n\leq b_n \wedge \sum_{n=1}^{\infty}(a_n)=\text{Dib.}\to\text{Dib.}$

SERIEAK: $S(n)=a_1+a_2+a_3+\dots+a_n=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$

- Konbergentea:
  - Beharrezko baldintza $\to\lim_{n\to\infty}[a_n]=0$
    $S=\lim_{n\to\infty}[S(n)]=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ $(\neq 0 \to$ Dibergente$)$
  - Propietateak:
    1) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=S_a+S_b$ (Konb)
    2) $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(a_n)=\lambda S_a$ (Konb)
    3) $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, $\sum_{n=1}^{\infty}[\lambda(a_n)+\mu(b_n)]=\lambda S_a+\mu S_b$ (Konb)

- Serie absolutuki konbergenteak

$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|)\to$ Gai positibozko seriea Konb. $\to$ Konb.

Edozein serie abs. Konb. $\to$ Konb.

- GAI POSITIBOKO SERIEAK $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$; $a_n>0 \ \forall n\in\mathbb{N}$

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$ non $a_n=\frac{1}{n^k}\to$ serie harmonikoa; $k>1\to$ Konb, $k\leq 1\to$ Diber.

- Zatiduraren irizpidea:

$\exists=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=L\Rightarrow L<1\to$ Konb. | $L>1\to$ Dib. | $L=1\to$ Zalantzazko kasua

- Raaberren irizpidea:

$\exists=\lim_{n\to\infty}n\left[1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right]=L\Rightarrow L>1\to$ Konb. | $L<1\to$ Dib / $L=1\to$ Zalantzazko kasua.

n-garren berretura denean erabili ⊛

- SERIE ALTERNATUAK: $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)$, $a_na_{n+1}\leq 0 \ \forall n\in\mathbb{N}$

- Leibnitz-en irizpidea

$\lim_{n\to\infty}[a_n]=0 \wedge |a_{n+1}|\leq|a_n| \ \forall n\in\mathbb{N}\to$ Konb.

*Absolutuki konbergenteen irizpidea aplika daiteke.

- Serie bereziak:

- Geometrikoa: $a_n=a_1r^{n-1}$, $r\neq 1$ Konbergente $\to |r|<1\Rightarrow S(n)=\frac{a_1}{1-r}$

$S(n)=\frac{a_nr-a_1}{r-1}=\frac{r^n-1}{r-1}a_n$ (batura partziala)

- Aritmetiko-geometrikoa

$a_n=[a_1+(n-1)r_1]r_2^{n-1}$ Konbergente $\to |r_2|<1\Rightarrow S(n)=\frac{a_1}{1-r_2}+\frac{r_1r_2}{(1-r_2)^2}$

$r_1=\Delta$ aritmetikoa; $r_2\neq 1\to\Delta$ geometrikoa

$S(n)=\frac{a_1(1-r_2^n)}{1-r_2}+\frac{r_1r_2[1-nr_2^{n-1}+(n-1)r_2^n]}{(1-r_2)^2}$ (batura partziala)

- Hipergeometrikoa

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{pn+q}{pn+r}$ $p\neq 0$, $(r-q)/p\neq 1$ (batura partziala)

Konbergente $\to[(r-q)/p]>1\Rightarrow S(n)=\frac{a_1\cdot r}{r-p+q}$

ZUZENA

- Esplizitua: $y = mx + n$
- Puntu-malda: $y - y_0 = m(x - x_0)$
- Kanonikoa: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$
- Bi puntuetatik: $\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$

ZIRKONFERENTZIA

- $C(a,b) \to$ zentroa
- $r \to$ erradioa
- Orokorra: $C(a,b)$ $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$
- Kanonikoa: $C(0,0)$ $x^2 + y^2 = r^2$

TRIGONOMETRIAREN OINARRIZKO FORMULA

$ch^2x - sh^2x = 1$

$ch^2x + sh^2x = e^x + e^{-x}$; $e^{\ln 4} =$

$ch^2x - sh^2x = e^x$; $e^{\ln 1/4} = 1/4$

ELIPSEA

- $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ } Fokuak
- $a \to$ erdi ardatz Re
- $b \to$ erdi-ardatz Im
- Kanonikoa: $(0,0)$ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
- Puntuan zentratua (x_0, y_0): $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$

$d_1 + d_2 = 2a$

HIPERBOLA

$F_1(-c,0)$

$F_2(c,0)$

$a \to$ erdi-ardatz Re

$b \to$ erdi-ardatz Im

Kanonikoa: $(0,0)$ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Puntuan zentratua (x_0, y_0): $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{2} = 1$

PARABOLA: $F(p/2, 0)$ ekuazioa $\to d = x + p/2 = 0$

OX parabola

- Erpina $(0,0)$: $y^2 = 2px$
- Erpina (x_0, y_0): $(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0)^2$
- Erpina kalkulatzeko: $x' = 0$

$p > 0 \to$ eskuinera

$p < 0 \to$ ezkerrera

OY parabola

Erpina $(0,0)$: $x^2 = 2py$

Erpina (x_0, y_0): $(x-x_0)^2 = 2p(y-y_0)$

$y = ax^2 + bx + c$

Erpina kalkulatzeko: $y' = 0$

$(x_0, y_0) = \left(-b/2a, \frac{(4ac - b^2)}{4a}\right)$

$a > 0 \to$ gorantz

$a < 0 \to$ beherantz

$chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\quad shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ $\quad \coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

$chx = ch(-x)$, $ch\,0 = 1$, F. Bikoitia, $ch\,x \geq 1$

$sh(-x) = -sh\,x$, $sh\,0 = 0$, F. Bakoitia $(\nexists 0)$

$\tanh(-x) = -\tanh(x)$, $\coth$ Bakoitiak, $\tanh 0 = 0$, $\nexists \coth 0$

$ch(x \pm y) = ch.$

$sh(x \pm y) = shx \cdot chy \pm chx \cdot shy$

$ch\,2x = ch^2x + sh^2x = 2ch^2x - 1 = 2sh^2x + 1$

$sh\,2x = 2shx \cdot chx$

$chx = \sqrt{sh^2x + 1}$ Beti > 1

$shx = \pm\sqrt{ch^2x - 1}$

$chx = \sqrt{\frac{ch2x + 1}{2}}$

$shx = \pm\sqrt{\frac{ch2x - 1}{2}}$ $\quad \oplus \to x > 0$ $\ominus \to x < 0$

$\tanh x = \pm\sqrt{\frac{ch2x - 1}{ch2x + 1}}$ $\quad \oplus \to x > 0$ $\ominus \to x < 0$

$y = \arg sh\,x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ $\quad D = (-\infty, \infty)$

$y = \arg ch\,x = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1})$ $\quad D = [1, \infty)$

$y = \arg\tanh x = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)$ $\quad D = (-1, 1)$

INFINITESIMO = x_0 puntuan $\lim_{x \to x_0} [f(x)] = 0$

$\frac{1}{f(x)}$ INFINITU $\hookrightarrow f(x)$ INFINITESIMO

INFINITESIMO BALIOKIDEAK

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \Rightarrow g(x) \sim f(x)$

LIMITEEN PROPIETATEAK

- $\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = L_1 + L_2$
- $\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L_1 \cdot L_2$
- $\lim_{x \to x_0} [f(x)/g(x)] = L_1/L_2$ $\quad (L_2 \neq 0)$
- $\lim_{x \to x_0} [f(x)^{g(x)}] = L_1^{L_2}$ $\quad (L_1 > 0)$

$\lim_{x \to x_0} [f(x)] = L$

- $\lim_{x \to x_0} [|f(x)|] = |L|$
- $\lim_{x \to x_0} [a^{f(x)}] = a^L$
- $\lim_{x \to x_0} [\ln(f(x))] = \ln(L)$
- $\lim_{x \to x_0} \left[(1 + f(x))^{\frac{1}{f(x)}}\right] = e$

JARRAITUA

1) $\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \exists \lim_{x \to x_0^+} f(x)$

2) $\exists f(x_0)$

3) $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

ETENAK

1) Gaindigarria: $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq f(x_0)$

2) 1. Mailako gaindiezina (Finitua / Infinitua)

$\lambda_1 = \lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lambda_2 = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$

Jauzia $f(x) = \lambda_2 - \lambda_1$

3) 2. mailako gaindiezina: Albo limiteetako bat ez da existitzen

DERIBAGARRIA

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x)$

$f'(x_0)^- = f'(x_0)^+$

ZUZEN UKITZAILEAREN EKUAZIOA

$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

ZUZEN NORMALAREN EKUAZIOA

$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$

KURBEN ANGELUA

$\tan\varphi = \left|\frac{f'(x_0) - g'(x_0)}{1 + f'(x_0) \cdot g'(x_0)}\right|$

PLANO UKITZAILEA

$z - c = z'_x]_{(a,b)}(x - a) + z'_y]_{(a,b)}(b - y)$

ALDERANTZIZKO FUNTZIOA

$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dx/dy}$

FUNTZIO INPLIZITUA

$F(x,y) = 0 \to F'(x,y) = 0$

- y, x-ren funtzioa

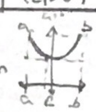
ROLLE

1) Jarraia $[a,b]$ tartean

2) Deribagarria (a,b) tartean

3) $f(a) = f(b)$

$\exists c \in (a,b) / f'(c) = 0$



LAGRANGE

1) Jarraia $[a,b]$ tartean

2) Deribagarria (a,b) tartean

$\exists c \in (a,b) / \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$

Funtzio bornatua x_0 puntuan eta $\lim g(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$

MAX/MIN: $\min(f(x)) = -\max(-f(x))$

$x_1 = \frac{a+b}{2} - \frac{\delta}{2}$; $x_2 = \frac{a+b}{2} + \frac{\delta}{2}$ $(\delta > 0)$

$f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow \hat{x} \in [a, x_2]$

$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow \hat{x} \in [x_1, b]$

- Iterazioak: $(\ell = b - a)$

$\ell_n = \frac{b - a}{2^n} + \delta\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$

Errore max: $\frac{\ell_n}{2}$

Erdiko puntua: $\hat{x} = \frac{a_n + b_n}{2}$

MUTURRAK

- Gorakor/Beherakor:
  - $f(x_0) \to$ Gorakor Aderib. $f'(x_0) > 0$
  - $f(x_0) \to$ Beherakor Aderib $f'(x_0) < 0$

- Max/Min: Funtzioaren aldakuntza

$f(x_0 \pm h) > f(x_0) \Rightarrow MIN$

$f(x_0 \pm h) < f(x_0) \to MAX$

$h > 0$ $\wedge$ oso txikia

Lehenengo deribatua

$\ominus \to \oplus \Rightarrow MIN$

$\oplus \to \ominus \Rightarrow MAX$

Zeinua ez bada aldatzen: Inflexio puntua

Bigarren deribatua

$f''(x_0) > 0 \to MIN$

$f''(x_0) < 0 \to MAX$

Kalkulua:

1) Puntu Kritikoak: $f'(x_0) = 0$, $\nexists f'(x_0)$

2) MAX/MIN ABSOLUTUAK $\to (a,b)$ tartean mutur erlatiboak $\wedge$ Konparatu $f(a)$ eta $f(b)$-rekin

SCHWARZ-EN TEOREMA (C^1 klasekoa)

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)$

A.A. JARRAITASUNA

1) $\exists f(a,b)$

2) $\exists \lim f(x,y)$

3) $f(a,b) = \lim f(x,y)$

PROPIETATEAK

- $K \cdot f(x,y) / h \in \mathbb{R}$
- $(f \pm g)(x,y) = f(x,y) \pm g(x,y)$
- $(f \cdot g)(x,y) = f(x,y) \cdot g(x,y)$
- $(f/g)(x,y) = \left(\frac{f(x,y)}{g(x,y)}\right) / g(a,b) \neq 0$
- $(f \circ g)(x,y) = f(g(x,y))$
- $(g \circ f)(x,y) = g(f(x,y))$

DIKOTOMIA METODOA

$g(x) = 0$

1) $g(x)$ deribagarria $[a,b]$ tartean

2) $g(x)$ zeinua mantendu $[a,b]$ tartean

3) $g(a) \cdot g(b) < 0$

- $x_1 = \frac{a+b}{2} \to g(x_1)$-ren zeinua
- $g(a) \vee g(b)$ eta $g(x_1)$ zeinu desb. hartu

$E \leq \frac{b - a}{2^n}$ $\quad n =$ iterazio kopurua

NEWTON-RAPHSON

$g(x) = 0$

1) $g(x)$ C^2 klasekoa $[a,b]$ tartean

2) $g'(x) \wedge g''(x)$ zeinua mantendu $[a,b]$-n

3) $g(a) \cdot g(b) < 0$

$x_0 \in [a,b] / g'(x) \neq 0$

- $y - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0)$

$y = 0$

$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}$

ONDOZ ONDOKO HURBILKETA:

$x = g(x)$

1) $g(x)$ C^1 klasekoa tartean (1. deribatua jarraia)

2) $|g'(x)| < K$ $(K \leq 1)$: $[a,b]$ tartean

3) $g([a,b]) \subset [a,b]$

$x_0 \in [a,b]$

- $x_1 = g(x_0)$; $x_2 = g(x_1)$ ...

$x_n = g(x_{n-1}) = \hat{x}$

Konbergentea $\hat{x}$ soluziora

TAYLORREN GARAPENA: $x = a$

$P_n(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n$

$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!} + \dots$

Errorea: $R_{n+1}(x)$

$R_{n+1} \leq \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n-1}\right|$ $\xi \in (a,x)$

- Maclaurin-en garapena

$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} + \frac{f''(0)}{2!} + \dots$

$R_{n+1}(x) \leq \left|\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}\right| \cdot \theta \in (0,1)$

KATEAREN ERREGELA

$z = f(x,y)$, $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$

$$z \begin{cases} u \begin{cases} x \\ y \end{cases} \\ v \begin{cases} x \\ y \end{cases} \end{cases}$$

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$

A.A. DERIBAGARRITASUNA

- **Deribatu partzialak:**
  - x-rekiko: y kte: $\frac{df(x,y)}{dx} = f'_x(x,y)$
  - y-rekiko: x kte: $\frac{df(x,y)}{dy} = f'_y(x,y)$
- **Limiteak:**

x-rekiko: $\lim_{x \to a} \frac{f(x,b) - f(a,b)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$

y-rekiko: $\lim_{y \to b} \frac{f(a,y) - f(a,b)}{y - b} = \lim_{k \to 0} \frac{f(a,b+k) - f(a,b)}{k}$

- Plano ukitzailearen ekuazioa:

$z - c = z'_x]_{(a,b)}(x - a) + z'_y]_{(a,b)}(y - b)$

- $f(x,y)$ funtzioa (a,b) puntuan deribagarria da puntu horretan deribatu partzialak badauzka. ($\ominus \vee \oplus$)

GRADIENTE BEKTOREA:

$\nabla f(a,b) = \left(\frac{\partial f(a,b)}{\partial x}, \frac{\partial f(a,b)}{\partial y}\right)$

Norabide-deribatuaren balio maximoa gradientearen modulua da.

NORABIDE DERIBATUA: Puntua: $\bar{x} = (a,b)$; Bektorea: $\bar{v} = (v_1, v_2)$

- f-ren deribatua $\bar{v}$ bektorearekiko: $D_{\bar{v}}f(\bar{x}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\bar{x} + t\bar{v}) - f(\bar{x})}{t}$
- $\bar{v}$ bektore unitarioa $\to f$-ren norabide-deribatua bektorearekiko.
- $z = f(x,y)$, (a,b)-n deribagarria eta $\bar{v} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$:

$D_{\bar{v}}f(a,b) = f'_x]_{(a,b)} \cdot \cos\varphi + f'_y]_{(a,b)} \cdot \sin\varphi$

- Norabide deribatuak funtzioaren aldakuntza $\bar{v}$ bektorearen norabidean.
- Deribatu partzialak oinarri kanoniko bektorearekiko norabide deribatuak dira.
- $f(x,y)$ (a,b)-n deribagarria $\to D_{\bar{v}}f(a,b) = \nabla f(a,b) \cdot \bar{v}$
- Gradiente bektorearen norabidea $f(x,y)$ gainazalaren sestra kurben normalaren norabidea da.

A.A. MUTURRAK

- **Puntu batean:**

1) Deribatu partzialak

2) Puntu kritikoak:

- $f'_x(a,b) = 0 \wedge f'_y(a,b) = 0$
- $\nexists f'_x(a,b) \vee f'_y(a,b)$

3) Matrize hessiarra:

$Hf(a,b) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2} \end{vmatrix}$

4) Baldintzak

- $|Hf(a,b)| > 0 \wedge \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2} > 0$

MINIMO ERLATIBOA:

- $|Hf(a,b)| > 0 \wedge \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2} < 0$

MAXIMO ERLATIBOA

- $|Hf(a,b)| < 0 \to$ Zela puntua
- $|Hf(a,b)| = 0 \to$ Zalantza kasua

- **Kurban (MUTURRAK)** Kurba

1) Funtzio lagrangiarra

$L(\lambda,(x,y)) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$

2) Puntu kritikoak:

- $L'_x = 0$
- $L'_y = 0$
- $\varphi(x,y) = 0$

3) Matrize hesiar orlatua:

$HL(\lambda,(x,y)) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} & L'_{x^2} & L'_{xy} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} & L'_{yx} & L'_{y^2} \end{bmatrix}$

4) Baldintzak:

- $|HL(\lambda,(x,y))| < 0$ MINIMO LOKALA
- $|HL(\lambda,(x,y))| > 0$ MAXIMO LOKALA