Ikerketa Operatiboa

1. talde lana (1. ariketa). 2020-2021 kurtsoa

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco   Euskal Herriko Unibertsitatea

Departamentua: Matematika Aplikatua
Universidad del Pais Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea

Titulazioa: Kudeaketaren eta Informazio Sistemen Informatikaren Ingeniaritzako Gradua
Kurtsoa: 2. (2. Lauhilekoa)

Egileak: Janire Arana González
Unai González Araco
Andoni Olabarria Franco
Iker Palacios Tamayo

1. Ariketa - Leherketak

Eraikuntza-enpresa batek urtegi bat eraikitzean arrokak mozteko leherketak egin nahi ditu. Nahasketa leherkorra sortzeko hiru osagai erabiltzen dira (A, B eta C), honela: A osagaiaren gramo bakoitzeko C osagaiaren 4 gramo erabili behar dira gutxienez. Bestalde, C osagaiaren zati bakoitzeko B osagaiaren zati bat erabili behar da, eta alderantziz.

Leherketa arrakastatsua izateko, ez du 280 gramo baino gutxiago pisatu behar, baina 500 gramotik gorakoa bada, leherketa oso arriskutsua izango litzateke.

Osagaien 10 gramoko kostuak 24 euro, 72 euro eta 80 euro badira, hurrenez hurren:

a) Kostu minimoa egiten duen eta segurua den nahasketa leherkorra grafikoki zehaztu.

b) A osagaiaren urritasuna dela eta, bere prezioa 30 euro igo da 10 gramoko. Nola eragingo du aldaketa honek nahastearen konposizioan?

c) Zein kopurutan murriztu daiteke leherketaren pisu maximoa a) atalean aurkitu dugun emaitza mantentzeko?

d) Adierazi zenbat aldatzen den nahastearen kostua, baldin eta, aldi berean, B osagaiaren kostua 20 euro murrizten bada 10 gramo bakoitzeko, eta C osagaiaren kostua 50 euro handitzen bada 10 gramo bakoitzeko.

e) Leherketaren pisua kalkulatu, A eta C zatien arteko proportzioa honela aldatuko balitz: A osagaiaren 5 zati bakoitzeko, gutxienez C osagaiaren zati bat erabili behar da.

Ebazpena

---

a) Kostu minimoa egiten duen eta segurua den nahasketa leherkorra <u>grafikoki</u> zehaztu.

1. <u>Problema mota zehaztu:</u>

   Kostu minimoa zehaztea eskatzen denez, **minimizazio** problema da.

2. <u>Problema aztertu:</u>

   Lehenik eta behin, problema planteatu behar dugu:

   - **Nahasketa leherkorra sortzeko hiru osagai erabiltzen dira (A, B eta C).**

     $$x_1 = \text{"}A\ osagaiaren\ gramo\ kopurua\text{"}$$
     $$x_2 = \text{"}B\ osagaiaren\ gramo\ kopurua\text{"}$$
     $$x_3 = \text{"}C\ osagaiaren\ gramo\ kopurua\text{"}$$

   - **A osagaiaren gramo bakoitzeko C osagaiaren 4 gramo erabili behar dira gutxienez.**

     $$x_1 \leq 4x_3$$

   - **Bestalde, C osagaiaren zati bakoitzeko B osagaiaren zati bat erabili behar da, eta alderantziz.**

     $$x_2 = x_3$$

   - **Leherketa arrakastatsua izateko, ez du 280 gramo baino gutxiago pisatu behar, baina 500 gramotik gorakoa bada, leherketa oso arriskutsua izango litzateke.**

     $$280 \leq x_1 + x_2 + x_3 \leq 500 \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geq 280 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 500 \end{cases}$$

   - **Osagaien 10 gramoko kostuak 24 euro, 72 euro eta 80 euro badira, hurrenez hurren:**

     $$A\ osagaiaren\ kostua = 24€/10g \quad \longrightarrow \quad 2.4€/g$$
     $$B\ osagaiaren\ kostua = 72€/10g \quad \longrightarrow \quad 7.2€/g$$
     $$C\ osagaiaren\ kostua = 80€/10g \quad \longrightarrow \quad 8€/g$$

     $$z = 2.4x_1 + 7.2x_2 + 8x_3$$

- Gainera, gure aldagai guztiek kopuru bat adierazten dutenez, bakarrik balio positiboak hartuko dituzte (ezin baitugu objektu kopuru negatiboa izan).

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

3. Problema planteatu:

Orain arte planteatutako murrizketak problema gisa adieraziz:

$$\begin{aligned} min\ z &= 2.4x_1 + 7.2x_2 + 8x_3 \\ & x_1 \leq 4x_3 \\ & x_2 = x_3 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \geq 280 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \leq 500 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Ikus daitekeenez, gure problemak hiru aldagai (x_1, x_2 eta x_3) ditu, baina grafikoki ebatzi ahal izateko bi aldagai bakarrik izan ditzakegu, hortaz, aldaketa bat egin behar dugu. Ereduko bigarren murrizketak ($x_2 = x_3$) bi aldagaiek balio bera dutela adierazten du, beraz, horietako bat ordezkatu dezakegu (kasu honetan x_3 x_2-rekin ordezkatu da):

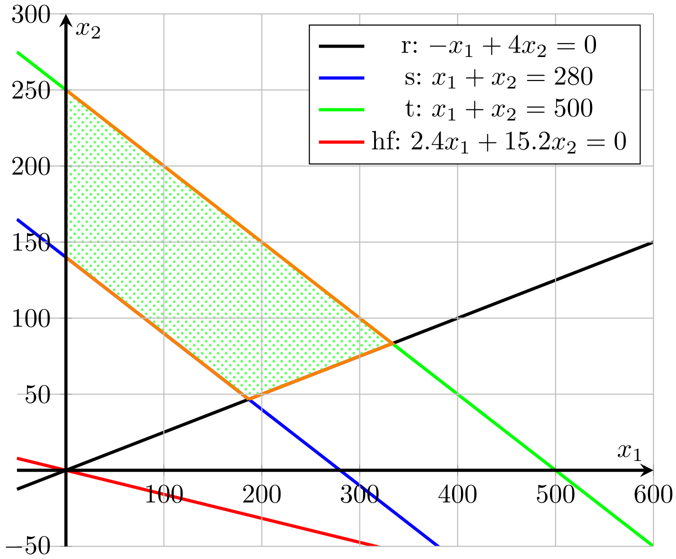
$$\begin{array}{l} min\ z = 2.4x_1 + 7.2x_2 + 8x_3 \\ \quad x_1 \leq 4x_3 \\ \quad x_2 = x_3 \\ \quad x_1 + x_2 + x_3 \geq 280 \\ \quad x_1 + x_2 + x_3 \leq 500 \\ \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \xrightarrow{x_2 = x_3} \begin{array}{l} min\ z = 2.4x_1 + 15.2x_2 \\ \quad x_1 \leq 4x_2 \\ \quad x_1 + 2x_2 \geq 280 \\ \quad x_1 + 2x_2 \leq 500 \\ \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

4. Adierazpen grafikoa:

Behin bi aldagaiko problema lortuta, helburu-funtzioa eta murriztapen guztiak berdintza gisa adieraziko ditugu:

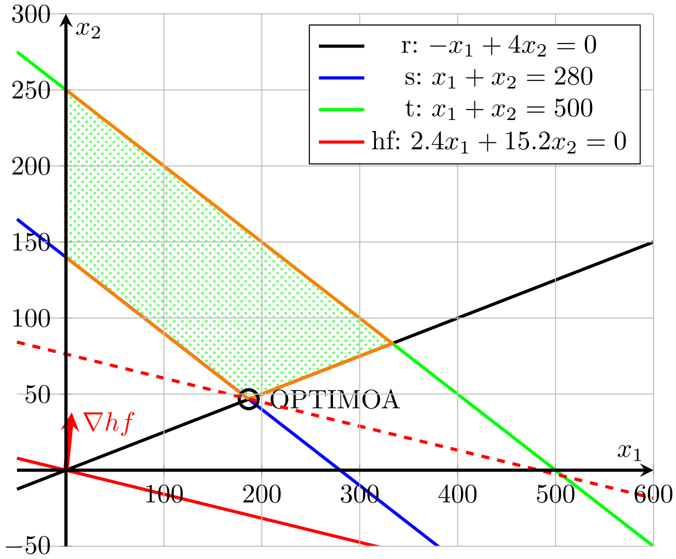
$$\begin{array}{ll} min & z = 2.4x_1 + 15.2x_2 \\ & x_1 \leq 4x_2 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 280 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 500 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{rll} -x_1 + 4x_2 = & 0 & (r) \\ x_1 + x_2 = & 280 & (s) \\ x_1 + x_2 = & 500 & (t) \end{array} \right.$$

Murrizketetatik lortutako ekuazioak, grafikoan soluzioaren onarpen eremua mugatuko duten zuzenak izango dira.



5. Puntu optimoa aurkitu

Behin onarpen eremua irudikatuta, puntu optimoa aurkitu behar da. Horretarako, helburu funtzioaren gradiente bektorea kalkulatuko dugu: $\nabla hf(x_1, x_2) = (2.4, 15.2)$. Puntu optimoa aurkitzeko, helburu-funtzioa bektore horren noranzkoan desplazatu behar dugu; minimizazio problema ebzaten ari garenez, optimoa helburu-funtzioak ikutzen duen lehenengo puntua izango da (maximizazio kasuan azken puntua izango litzateke).



Grafikoan ikus daitekeenez, puntu optimoa r eta s zuzenen ebakidura da ($r \cap s$); gainera, helburu-funtzioak puntu bakarra ikutzen duenez, soluzioa bakarra izango da. Beraz, bere koordenatuak kalkulatuko ditugu.

$$\left\{ \begin{array}{rll} -x_1 + 4x_2 = & 0 & (r) \\ x_1 + x_2 = & 280 & (s) \end{array} \right. \longrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} x_1 = & 4x_2 \\ 6x_2 = & 280 \end{array} \right. \longrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} x_1 = & 560/3 \\ x_2 = & 280/6 \end{array} \right.$$

Emaitza optimoa: $x_1^* = 560/3, \quad x_2^* = x_3^* = 140/3, \quad z^* = 3472/3$

b) A osagaiaren urritasuna dela eta, bere prezioa 30 euro igo da 10 gramoko. Nola eragingo du aldaketa honek nahastearen konposizioan?

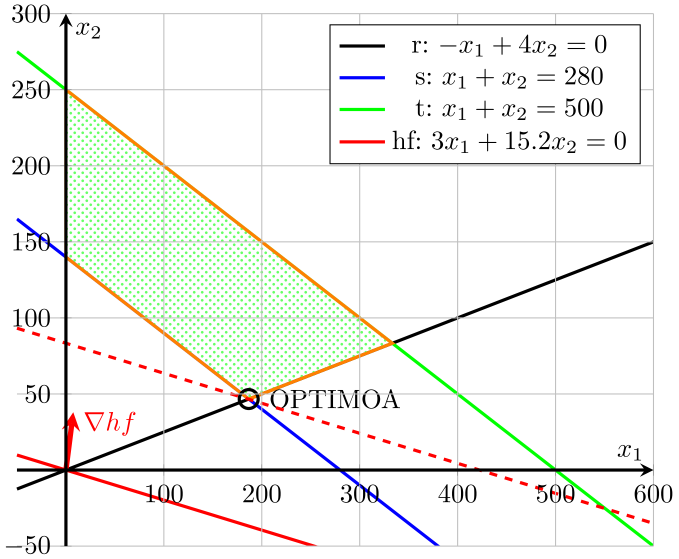
1. Problema aztertu eta planteatu:

   A osagaiaren prezioa aldatzean, x_1 aldagaiari lotutako c_1 helburu funtzioko koefizientea aldatu egin da. Horren ondorioz, eredua bideragarria izaten jarraitu arren (murrizketak ez baitira aldatu), optimaltasunean eragina izan dezake. Beraz, hau da gure helburu-funtzio berria: $z = 3x_1 + 7.2x_2 + 8x_3$. Berriro ere, grafikoki ebatzi ahal izateko, bi aldagaiko problema bihurtuko dugu.

$$\begin{array}{l} min\ z = 3x_1 + 7.2x_2 + 8x_3 \\ \quad x_1 \leq 4x_3 \\ \quad x_2 = x_3 \\ \quad x_1 + x_2 + x_3 \geq 280 \\ \quad x_1 + x_2 + x_3 \leq 500 \\ \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array} \xrightarrow{x_2 = x_3} \begin{array}{l} min\ z = 3x_1 + 15.2x_2 \\ \quad x_1 \leq 4x_2 \\ \quad x_1 + 2x_2 \geq 280 \\ \quad x_1 + 2x_2 \leq 500 \\ \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

2. Adierazpen grafikoa:

   Grafikoa aztertuz, hasierako ereduaren eta eredu berriaren onarpen eremuak berdinak dira (murrizketak ez direlako aldatu), baina helburu funtzioaren malda aldatu egin dela (eta beraz, bere gradiente bektorearen koordenatuak ere $\nabla hf(x_1, x_2) = (3, 15.2)$) ikus daiteke.



3. Sentikortasun analisia:

   Aurreko grafikoan ikus daitekeenez, helburu funtzioa gradientearen noranzkoan desplazatzean ikutzen duen puntua aurreko berdina da. Hortaz, problema honen emaitza optimoa $x_1^* = 560/3$, $x_2^* = x_3^* = 140/3$ izaten jarraitzen duenez, A osagaiaren kostu aldaketak nahasketaren konposizioan eraginik ez duela ondorioztа dezakegu.

c) Zein kopurutan murriztu daiteke leherketaren pisu maximoa a) atalean aurkitu dugun emaitza mantentzeko?

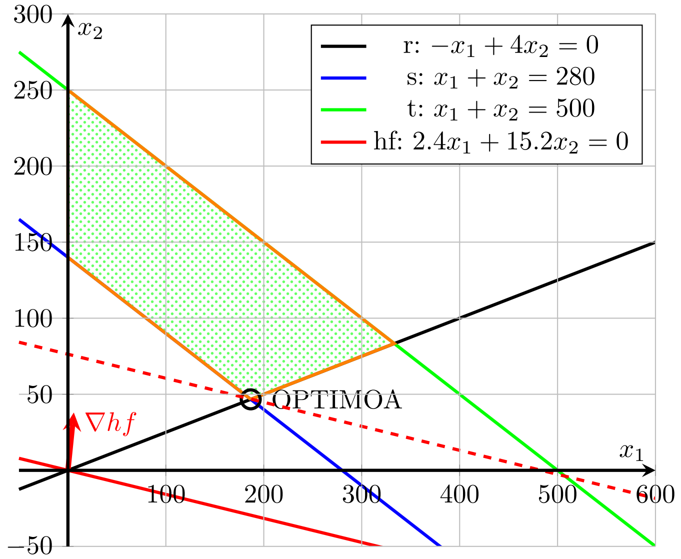
1. Problema aztertu eta planteatu:

   Leherketaren pisu maximoa aldatzean, 3. murrizketari lotutako b_3 gai askea aldatuko da. Aldaketa honen ondorioz, t zuzena paraleloki desplazatu egindo da, hau da, grafikoan zehar mugituko da baina bere malda mantenduz. Kasu honetan gai askea txikitu nahi denez zuzena ezkerrera mugituko da, beraz, onarpen eremua ere txikitu egingo da. Bi aldagaiko eredua erabiliz:

$$\begin{aligned} min\ z &= 2.4x_1 + 15.2x_2 \\ x_1 &\leq 4x_2 \\ x_1 + 2x_2 &\geq 280 \\ x_1 + 2x_2 &\leq b_3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

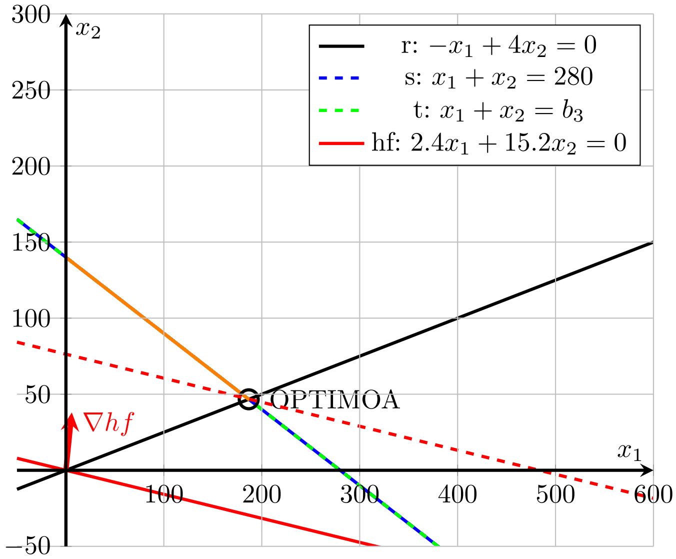
2. Adierazpen grafikoa:

   a) atalean kalkulatu dugunez, problemaren puntu optimoa r eta s zuzenen arteko ebakidura da, hortaz, t zuzena desplazatzeak ez du puntuan eraginik izango (murrizketa ez-aktiboa da), baizik eta onarpen eremuari bakarrik eragingo dio. Beraz, onarpen eremua multzo hutsa bihurtzen ez den bitartean puntu optimoa mantenduko da; kontrako kasuan problema bideraezina bihurtuko litzateke, ez bailitzateke existituko punturik onarpen eremuaren barruan.



3. Sentikortasun analisia:

   Goiko grafikoan ikus daitekeenez, s eta t zuzenak paraleloak dira. Hori dela eta, kalkulurik egin gabe esan dezakegu soluzio optimoa mantendu egingo dela bi zuzenak gainjartzen diren arte, hori baita onarpen eremu posiblerik txikiena.



Orain onarpen eremua r zuzenetik gora hedatzen da, baina bakarrik $s \cap t$ zuzenaren gainean. Hortaz, s=t diren arte txikitu dezakegu b_3. Beraz, $b_3 \geq 280$ den bitartean puntu optimoa ez da aldatuko.

d) Adierazi zenbat aldatzen den nahastearen kostua, baldin eta, aldi berean, B osagaiaren kostua 20 euro murrizten bada 10 gramo bakoitzeko, eta C osagaiaren kostua 50 euro handitzen bada 10 gramo bakoitzeko.

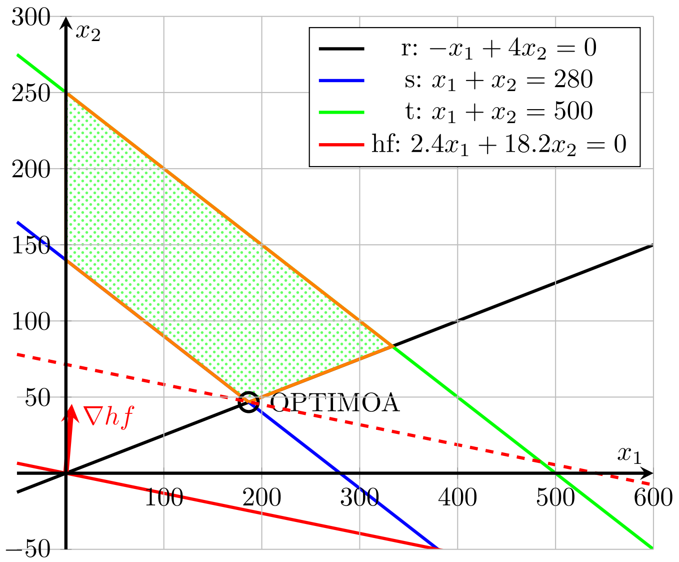
1. Problema aztertu eta planteatu:

   Oraingoan, B eta C osagaien kostuak aldatuko direnez, helburu funtzioko c_2 eta c_3 koefizienteetan izango du eragina. B osagaiaren kostua 20€-tan murriztuko denez 10 gramoko, gramo bakoitzeko 2€ gutxiago izango dira, beraz: $c_2 = 7.2 - 2 = 5.2$. C-ren kasuan 50€ igoko da prezioa 10 gramoko, beraz, 5€ handituko da gramo bakoitzeko: $c_3 = 8 + 5 = 13$. Hortaz, honako helburu funtzioa daukagu: $z = 2.4x_1 + 5.2x_2 + 13x_3$. Bi aldagaiko problema bihurtuz:

$$
\begin{array}{ll}
min & z = 2.4x_1 + 5.2x_2 + 13x_3 \\
 & x_1 \leq 4x_3 \\
 & x_2 = x_3 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 \geq 280 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 \leq 500 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}
\quad \xrightarrow{x_2 = x_3} \quad
\begin{array}{ll}
min & z = 2.4x_1 + 18.2x_2 \\
 & x_1 \leq 4x_2 \\
 & x_1 + 2x_2 \geq 280 \\
 & x_1 + 2x_2 \leq 500 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

2. Adierazpen grafikoa:

   Murrizketak ez direnez aldatu, onarpen eremua berdin mantentzen da, baina helburu funtzioa aldatu egin da (eta beraz, bere gradiente bektorea ere: $\nabla hf(x_1, x_2) = (2.4, 18.2)$).



3. Sentikortasun analisia:

   Grafikoan ikus daitekeenez, berriro ere hasierako puntu optimoa mantendu egiten da ($x_1^* = 560/3, x_2^* = x_3^* = 140/3$), baina helburu funtzioko koefizienteak aldatu egin direnez, bere azkeneko balioa ere aldatu egin da. Hasierako ereduan, helburu funtzioaren balioa puntu optimoan $z^* = 3472/3$ zen, baina koefizienteen balioa handitu denez, z-ren balioa ere handitu egin da, $z^* = 3892/3$. Hortaz, zenbat eta altuagoa izan osagaien prezioa, gero eta handiagoa izango da nahasketaren kostua, nahiz eta bere konposizioa ez aldatu.

e) Leherketaren pisua kalkulatu, A eta C zatien arteko proportzioa honela aldatuko balitz: A osagaiaren 5 zati bakoitzeko, gutxienez C osagaiaren zati bat erabili behar da.

1. Problema aztertu:

   Hasierako probleman, A osagaiaren gramo bakoitzeko gutxienez C osagaiaren 4 gramo erabili behar zirela zehazten zen ($x_1 \leq 4x_3$), baina proportzio berriarekin, murrizketa honela geldituko litzateke: $5x_1 \leq x_3$. Lehenik eta behin, problema berria idatziko dugu:

$$\begin{array}{ll} \min\ z = 2.4x_1 + 5.2x_2 + 13x_3 & \\ \quad x_1 \leq 4x_3 & \\ \quad x_2 = x_3 & \\ \quad x_1 + x_2 + x_3 \geq 280 & \\ \quad x_1 + x_2 + x_3 \leq 500 & \\ \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ll} \min\ z = 2.4x_1 + 5.2x_2 + 13x_3 & \\ \quad 5x_1 \leq x_3 & \\ \quad x_2 = x_3 & \\ \quad x_1 + x_2 + x_3 \geq 280 & \\ \quad x_1 + x_2 + x_3 \leq 500 & \\ \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 & \end{array}$$

2. Problema egokitu:

   Behin problema idatzita, forma estandarrean idatzi behar dugu. Horretarako, murrizketetan lasaiera aldagaiak (kostu nulua izaten duten aldagai positiboak) sartuko ditugu, desberdintzak berdintza bihurtzeko:

$$
\begin{array}{ll}
min\ z = 2.4x_1 + 5.2x_2 + 13x_3 & \\
\quad 5x_1 - x_3 \leq 0 & \\
\quad x_2 = x_3 & \longrightarrow \\
\quad x_1 + x_2 + x_3 \geq 280 & \\
\quad x_1 + x_2 + x_3 \leq 500 & \\
\quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
min\ z = 2.4x_1 + 5.2x_2 + 13x_3 \\
\quad 5x_1 - x_3 + x_4 = 0 \\
\quad x_2 - x_3 = 0 \\
\quad x_1 + x_2 + x_3 - x_5 = 280 \\
\quad x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 500 \\
\quad x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}
$$

Problema forma estandarrean idatzita, hurrengo pausua aldagaiek osatzen duten matrizean identitatea aurkitzea da.

$$
\text{A=} \begin{pmatrix} -5 & 0 & 1 & \boxed{1} & 0 & \boxed{0} \\ 0 & 1 & -1 & \boxed{0} & 0 & \boxed{0} \\ 1 & 1 & 1 & \boxed{0} & -1 & \boxed{0} \\ 1 & 1 & 1 & \boxed{0} & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}
$$

Ikus daitekeenez, uneko matrizean ezinezkoa da identitatea lortzea, hasieran '=' zuten murrizketetan ezin delako lasaiera aldagairik gehitu, eta '≥' zutenetan, aldiz, kentzen sartu delako gehitu beharrean. Beraz, lasaiera aldagaietaz gainera, aldagai artifizialak ere sartu behar ditugu:

$$
\begin{array}{ll}
min\ z = 2.4x_1 + 5.2x_2 + 13x_3 & \\
\quad 5x_1 - x_3 + x_4 = 0 & \\
\quad x_2 - x_3 = 0 & \longrightarrow \\
\quad x_1 + x_2 + x_3 - x_5 = 280 & \\
\quad x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 500 & \\
\quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
min\ z = 2.4x_1 + 5.2x_2 + 13x_3 \\
\quad 5x_1 - x_3 + x_4 + q_1 = 0 \\
\quad x_2 - x_3 + q_2 = 0 \\
\quad x_1 + x_2 + x_3 - x_5 = 280 \\
\quad x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 500 \\
\quad x_1, x_2, x_3, q_1, q_2 \geq 0
\end{array}
$$

Berriro ere matrizea begiratuz:

$$
\text{A=} \begin{pmatrix} -5 & 0 & 1 & \boxed{1} & 0 & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ 0 & 1 & -1 & \boxed{0} & 0 & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{0} \\ 1 & 1 & 1 & \boxed{0} & -1 & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{1} \\ 1 & 1 & 1 & \boxed{0} & 0 & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{0} \end{pmatrix}
$$

Problemaren oinarrizko soluzioa gure X_B bektorea izango da, non $X_B = B^{-1} \cdot b$ den, B identitatea izanik (identitatearen alderantzikoa identitatea izaten jarraitzen du):

$$
X_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 280 \\ 500 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_4 \\ q_1 \\ q_2 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_4 \\ q_1 \\ q_2 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 280 \\ 500 \end{pmatrix}
$$

Beraz, X_N bektorea oinarrizkoak ez diren aldagaiek osatuko dute:

$$
x_N = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

3. Bideragarritasuna aztertu:

   Lehenik eta behin, ebazten hasi aurretik zein metodo erabiliko dugun aukeratu behar dugu. Horretarako, murrizketa berriaren ondorioz bideragarritasunean aldaketarik gertatu den begiratu behar dugu.

   Bideragarritasuna mantentzen bada, Zigortze edo Bi Fase metodoen bidez ebatzi daiteke (soluzio bideragarri batetik hasten direlako); kontrako kasuan, Simplex dual algoritmoa aplikatu beharko da (soluzio optimo baina ez-bideragarri batetik hasten delako). Problema bat bideragarria izango da $B \cdot X_B \geq 0$ betetzen den bitartean:

$$B \cdot b \geq 0 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 280 \\ 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 280 \\ 500 \end{pmatrix} \geq 0 \quad \checkmark$$

   $B \cdot X_B \geq 0$ betetzen denez bideragarria da, beraz, ez da Simplex Dual erabili behar. Kasu honetan Bi Fase metodoa erabili dugu.

4. Ebazpena:

   - **LEHENENGO FASEA:**

     Fase honetan, murrizketa berdinak baina helburu-funtzio desberdina duen problema minimizatu behar da. Helburu funtzio berria aldagai artifizialen batura izango da:

$$\begin{aligned} min\ z &= q_1 + q_2 \\ & 5x_1 - x_3 + x_4 + q_1 = 0 \\ & x_2 - x_3 + q_2 = 0 \\ & x_1 + x_2 + x_3 - x_5 = 280 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 500 \\ & x_1, x_2, x_3, q_1, q_2 \geq 0 \end{aligned}$$

     Hasierako oinarrizko soluzio bideragarria:

$$X_B = \begin{pmatrix} x_4 \\ q_1 \\ q_2 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 280 \\ 500 \end{pmatrix}$$

     1. iterazioa: Hasierako Simplex taula:

C_{oin}	A_{oin}	$B^{-1} \cdot b$	0	0	0	0	0	0	1	1
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	q_1	1_2
0	x_4	0	5	0	-1	1	0	0	0	0
1	q_1	0	0	$\boxed{1}$	-1	0	0	0	1	0
1	q_2	280	1	1	1	0	-1	0	0	1
0	x_6	500	1	1	1	0	0	1	0	0
Z=280		Z_j	1	2	0	0	-1	0	1	1
		W_j	1	2	0	0	-1	0	0	0

     $\exists W_j > 0 \longrightarrow$ Jarraitu

     Sartze irizpidea: $\underset{k\in\{1,2,\ldots,n+m\}}{max} z_k - c_k = \underset{k\in\{1,2,\ldots,n+m\}}{max} \{1, 2\} = 2 \longrightarrow x_2$ sartu

     Irtete irizpidea: $min \left\{ \frac{x_{Bk}}{y_{kj}} / y_{kj} > 0 \right\} = min \left\{ \frac{0}{1}, \frac{280}{1} \right\} = 0 \longrightarrow q_1$ irten

<u>2. iterazioa:</u> Aurreko taulari honako aldaketak egingo dizkiogu, pibotea lortzeko:

$$\begin{cases} \mathrm{e}_3 \leftarrow e_3 - e_2 \\ \mathrm{e}_4 \leftarrow e_4 - e_2 \end{cases}$$

C_{oin}	A_{oin}	$B^{-1} \cdot b$	0	0	0	0	0	0	1	1
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	q_1	1_2
0	x_4	0	5	0	-1	1	0	0	0	0
0	x_2	0	0	1	-1	0	0	0	1	0
1	q_2	280	1	0	$\boxed{2}$	0	-1	0	-1	1
0	x_6	500	1	0	2	0	0	1	-1	0
Z=280		Z_j	1	0	2	0	-1	0	-1	1
		W_j	1	0	2	0	-1	0	-2	0

$\exists W_j > 0 \longrightarrow$ Jarraitu

Sartze irizpidea: $\max\limits_{k \in \{1,2,\ldots,n+m\}} z_k - c_k = \max\limits_{k \in \{1,2,\ldots,n+m\}} \{1,2\} = 2 \longrightarrow x_3$ sartu

Irtete irizpidea: $min \left\{ \frac{x_{Bk}}{y_{kj}} / y_{kj} > 0 \right\} = min \left\{ \frac{280}{2}, \frac{500}{2} \right\} = 140 \longrightarrow q_2$ irten

<u>3. iterazioa:</u> Aurreko taulari honako aldaketak egingo dizkiogu, pibotea lortzeko:

$$\begin{cases} \mathrm{e}_1 \leftarrow e_1 + e_{3b} \\ \mathrm{e}_2 \leftarrow e_2 + e_{3b} \; e_3 \leftarrow e_3 - \frac{1}{2} e_{3b} \\ \mathrm{e}_4 \leftarrow e_4 - 2e_{3b} \end{cases}$$

C_{oin}	A_{oin}	$B^{-1} \cdot b$	0	0	0	0	0	0	1	1
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	q_1	1_2
0	x_4	140	11/2	0	0	1	-1/2	0	-1/2	1/2
0	x_2	140	11/2	1	0	0	-1/2	0	-1/2	1/2
0	x_3	140	1/2	0	1	0	-1/2	0	-1/2	1/2
0	x_6	220	0	0	0	0	-1	1	0	-1
Z=0		Z_j	0	0	0	0	0	0	0	0
		W_j	0	0	0	0	0	0	-1	-1

$\forall W_j \leq 0 \longrightarrow$ Gelditu

Lehenengo fasea bukatu dugu eta oinarrizko soluzio bideragarria lortu dugu:

$x_1 = 0, x_2 = 140, x_3 = 140, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 220, q_1 = 0, q_2 = 0$

- **BIGARREN FASEA:**

<u>1. iterazioa:</u> Bigarren faseko hasierako Simplex taula:

C_{oin}	A_{oin}	$B^{-1} \cdot b$	2.4	7.2	8	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_4	140	$\boxed{11/2}$	0	0	1	-1/2	0
7.2	x_2	140	11/2	1	0	0	-1/2	0
8	x_3	140	1/2	0	1	0	-1/2	0
0	x_6	220	0	0	0	0	-1	1
Z=2128		Z_j	7.6	7.2	8	0	-7.6	0
		W_j	5.2	0	0	0	-7.6	0

$\exists W_j > 0 \longrightarrow$ Jarraitu

Sartze irizpidea: $\underset{k\in\{1,2,\ldots,n+m\}}{max} z_k - c_k = \underset{k\in\{1,2,\ldots,n+m\}}{max} \{5.2\} = 5.2 \longrightarrow x_1$ sartu

Irtete irizpidea: $min \left\{ \frac{x_{Bk}}{y_{kj}} / y_{kj} > 0 \right\} = min \left\{ \frac{140}{11/2}, \frac{140}{11/2}, \frac{140}{11/2} \right\} = \frac{280}{11} \longrightarrow x_4$ irten

2. iterazioa: Aurreko taulari honako aldaketak egingo dizkiogu, pibotea lortzeko:

$$\begin{cases} \mathrm{e}_{1b} \leftarrow \frac{2}{11} e_1 \\ \mathrm{e}_2 \leftarrow e_2 - \frac{1}{2} e_{1b},\ e_3 \leftarrow e_3 - \frac{1}{2} e_{1b} \end{cases}$$

C_{oin}	A_{oin}	$B^{-1} \cdot b$	2.4	7.2	8	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
2.4	x_1	140	1	0	0	2/11	-1/11	0
7.2	x_2	140	0	1	0	-1/11	-7/22	0
8	x_3	140	0	0	1	-1/11	-7/22	0
0	x_6	220	0	0	0	0	-1	1
Z=21952/11		Z_j	2.4	7.2	8	-10.4/11	-111.2/11	0
		W_j	0	0	0	-10.4/11	-111.2	0

$\forall W_j \leq 0 \longrightarrow$ Gelditu

Gainera, oinarrizkoak ez diren aldagaien kostu murriztuak $\neq 0$ direnez, soluzioa bakarra da.

$x_1^* = 280/11, x_2^* = x_3^* = 1400/11, x_4^* = 220, x_5^* = x_6^* = 0 \ eta \ z^* = 21952/11$

Leherketaren pisua 3. eta 4. murrizketek baldintzatzen dutenez, badakigu $280 \leq x_1 + x_2 + x_3 \leq 500$ bete behar dela. Beraz, bere pisu totala hiru aldagaien batura izango da: $x_1 + x_2 + x_3 = 280/11 + 1400/11 + 1400/11 = 3080/11 = 280$. Hortaz, leherketak 280 gramoko pisua izango du (har dezakeen pisu minimoa).