

Projekt 1 mit Python

BZG1101a Analysis 1, Herbstsemester 2025/2026
Bericht

Janis Aebischer

Version 1.0 vom 25. November 2025

- ▶ Technik und Informatik
- ▶ Elektrotechnik und Informationstechnologie

Inhaltsverzeichnis

1 Beispiel eines Grenzwerts

In der ersten Übung geht es um die Visualisierung des Grenzwerts folgender Funktion:

$$f(x) = \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \quad \text{für } x > 0 \quad (1)$$

Wir wissen, dass

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$$

Durch das plotten der Funktion ?? im Intervall $(0, 10]$ ist ersichtlich, dass die Funktion einen Grenzwert bei $y = 1$ hat.

exercise01/exercise01.png

Abbildung 1: Darstellung einer Funktion mit Grenzwert

Der Grenzwert lässt sich mathematisch wie folgt berechnen:

Wir suchen

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

Wir wissen, dass

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Durch ersetzen von $\frac{1}{x}$ durch z erhalten wir

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z}$$

Dieses Limit ist uns bekannt, somit wissen wir, dass

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$$

2 Logarithmische Skala

In der zweiten Übung geht es um die Darstellung von Graphen einer Kurve in unterschiedlichen Skalen. Dazu plotten wir jeweils die Funktion

$$f(x) = 3x^2 \quad (2)$$

im Intervall $(0, 10]$. 0 wird hier absichtlich ausgeschlossen, da $\log_{10}(0)$ nicht definiert ist.

2.1 Darstellung linear-linear

Als erstes wird die Funktion mit linear skalierten X- und Y-Achse dargestellt. Wie in Abbildung ?? ersichtlich, führt dies zu einer quadratischen Funktion.



exercise02/exercise02-linear-linear.png

Abbildung 2: Darstellung einer Funktion mit linearer X- und Y-Achse

2.2 Darstellung log-linear

In einem zweiten Schritt wird die Funktion mit logarithmisch skalierter X-Achse dargestellt. In Python kann dazu der Befehl `semilogx()` verwendet werden. Dieser skaliert die X-Achse logarithmisch (\log_{10}), während er die Y-Achse linear belässt. Wie in Abbildung ?? ersichtlich, führt dies zu einer Exponentialfunktion.

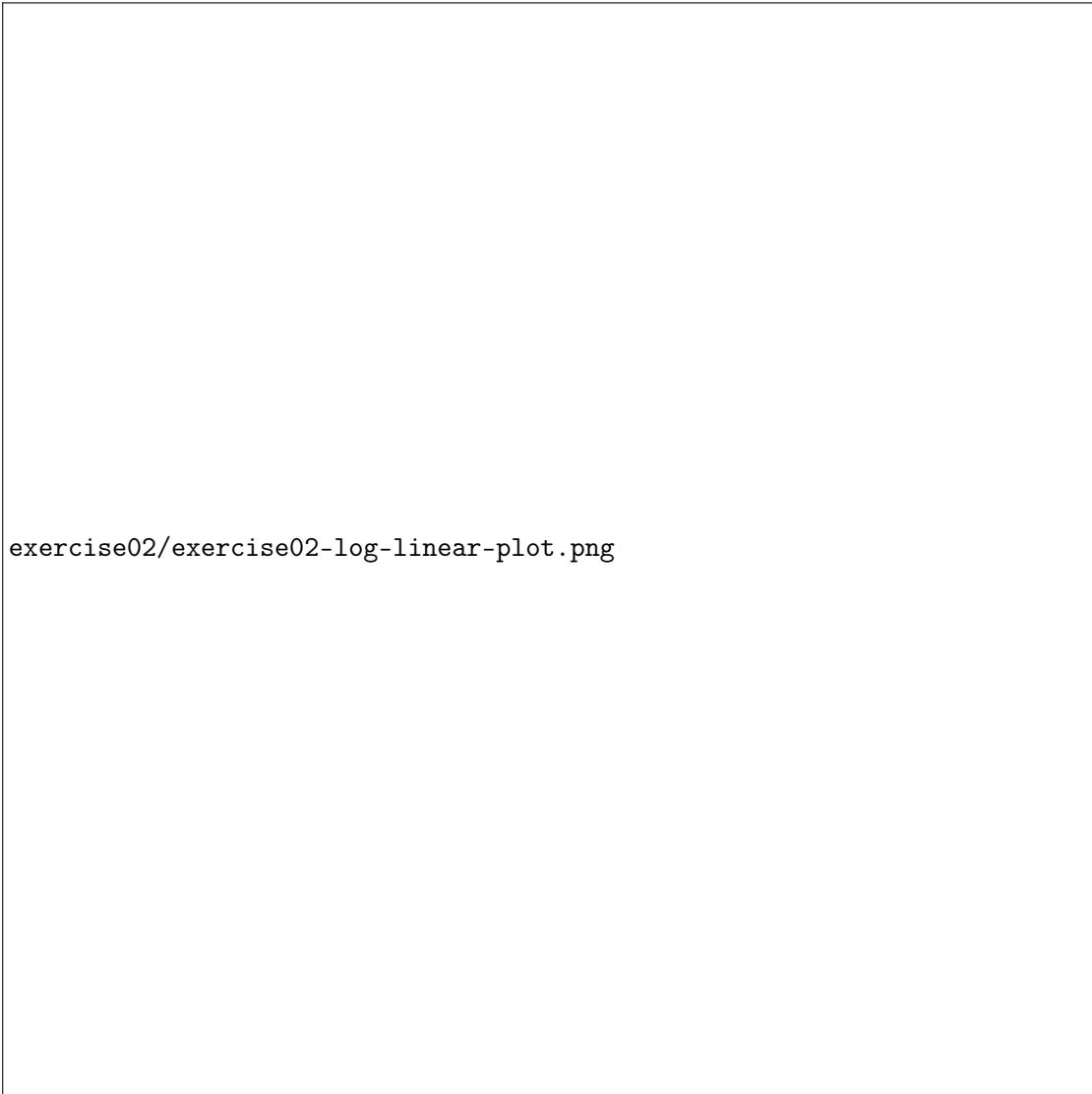
`exercise02/exercise02-log-linear-semilogx.png`

Abbildung 3: Darstellung einer Funktion mit logarithmischer X- und linearer Y-Achse (Mit dem Befehl `semilogx()`)

Die gleiche Kurve lässt sich auch durch „manuelle“ Skalierung der X-Achse erreichen, in dem wir

$$u = \log_{10}(x)$$

setzen und anschliessend auf der Horizontalachse u darstellen. Die Kurve wird dadurch zwar verschoben, es entsteht aber die gleiche Form einer Exponentialkurve wie mit *semilogx()*.

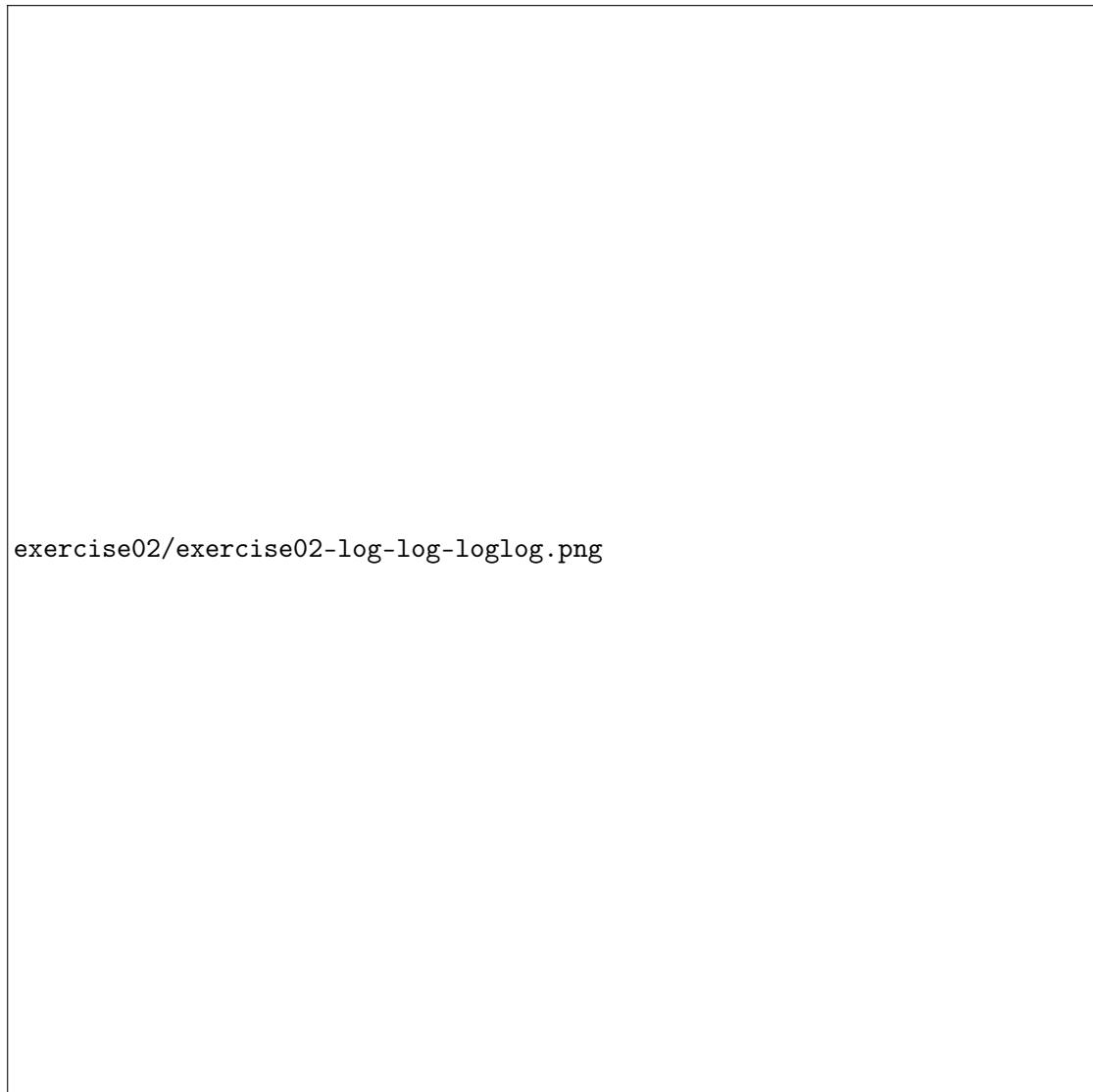


exercise02/exercise02-log-linear-plot.png

Abbildung 4: Darstellung einer Funktion mit logarithmischer X- und linearer Y-Achse (Mit dem Befehl *plot()*)

2.3 Darstellung log-log

Als letztes wird die Funktion mit logarithmisch skalierten X- und Y-Achse dargestellt. In Python kann dazu der Befehl `loglog()` verwendet werden. Dieser skaliert beide Achsen logarithmisch (\log_{10}). Wie in Abbildung ?? ersichtlich, führt dies zu einer linearen Funktion.



exercise02/exercise02-log-log-loglog.png

Abbildung 5: Darstellung einer Funktion mit logarithmischer X- und Y-Achse (Mit dem Befehl `loglog()`)

Auch hier lässt sich die gleiche Kurve wieder durch „manuelle“ Skalierung der X- und Y-Achse erreichen, in dem wir

$$u = \log_{10}(x) \text{ und } v = \log_{10}(f(x)) = \log_{10}(y)$$

setzen. Anschliessend tragen wir u auf der horizontalen und v auf der vertikalen Achse auf. Dadurch entsteht ebenfalls eine lineare Funktion.

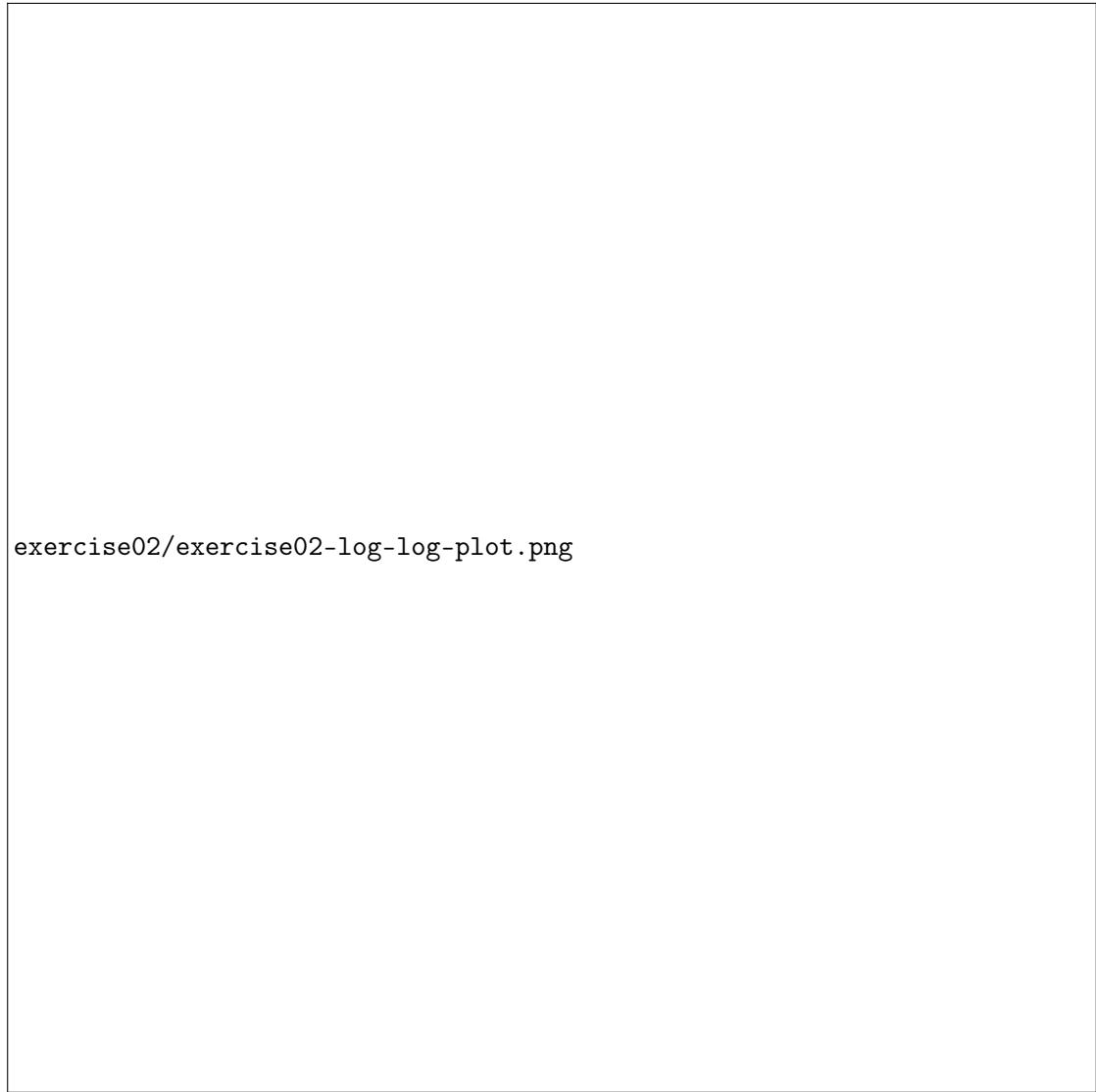


Abbildung 6: Darstellung einer Funktion mit logarithmischer X- und Y-Achse (Mit dem Befehl `plot()`)

Durch Einsetzen und Umformen lässt sich die Funktion dieser Geraden bestimmen:

$$\begin{aligned}v &= \log_{10}(f(x)) \\&= \log_{10}(3x^2) \\&= 2\log_{10}(x) + \log_{10}(3) \\&= 2u + \log_{10}(3)\end{aligned}$$

Die Gerade hat also eine Steigung von $2u = 2\log_{10}(x)$ und einen Y-Achsenabschnitt bei $y = \log_{10}(3)$.

3 Ableitung

In Übung 3 geht es um die Annäherung der Ableitung. Die Ableitung ist im Allgemeinen wie folgt bestimmt:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Mit dieser Formel nähert man sich dem Punkt der Ableitung von nur einer Seite an. Man rechnet also die Steigung der Funktion zwischen dem Punkt, an welchem man die Ableitung ermitteln möchte und einem zweiten Punkt, welcher um h verschoben ist. Wenn man sich dem genauen Wert der Ableitung an einem Punkt noch schneller nähern will, kann man folgende Formel verwenden:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + \frac{h}{2}) - f(x - \frac{h}{2})}{h}$$

Hiermit rechnet man also die Steigung zwischen zwei Punkten, welche einmal $\frac{h}{2}$ vor dem Punkt der zu ermittelnden Ableitung um einmal $\frac{h}{2}$ dahinter liegen. Da man sich mit dieser Formel der genauen Steigung an einem Punkt „von beiden Seiten“ nähert, erhält man für das gleiche h ein genaueres Resultat.

3.1 Annäherung der Ableitung von $\cos(x)$

Um dies an einem praktischen Beispiel zu untersuchen, versuchen wir die Ableitung von $\sin x$ durch die oben genannten Formeln zu bestimmen. Die korrekte Ableitung von $\sin x$ ist wie folgt:

$$\sin' x = \cos x$$

Um den Unterschied und die Funktion der beiden Varianten der Annäherung zur Ableitung



Abbildung 7: Annäherung der Ableitung einer Funktion - Schritt 1: $h = 0.8$



Abbildung 8: Annäherung der Ableitung einer Funktion - Schritt 2: $h = 0.4$



Abbildung 9: Annäherung der Ableitung einer Funktion - Schritt 3: $h = 0.2$



Abbildung 10: Annäherung der Ableitung einer Funktion - Schritt 4: $h = 0.1$



Abbildung 11: Annäherung der Ableitung einer Funktion - Schritt 5: $h = 0.01$

