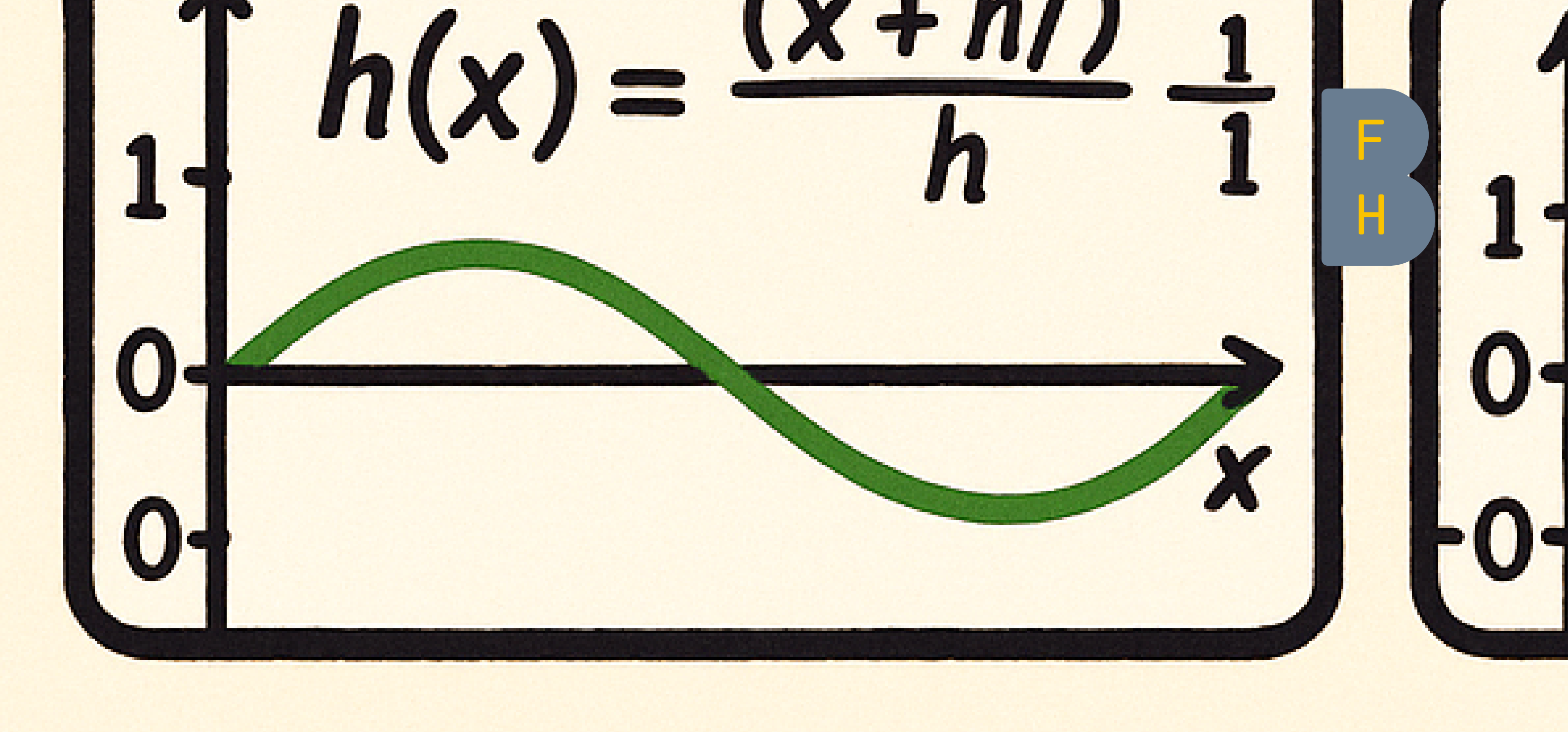

Projekt 1 mit Python

BZG1101a Analysis 1, Herbstsemester 2025/2026
Bericht

Janis Aebischer

Version 1.0 vom 26. November 2025

- Technik und Informatik
- Elektrotechnik und Informationstechnologie

Inhaltsverzeichnis

1 Beispiel eines Grenzwerts

In der 1. Übung soll man die Funktion:

$$f(x) = \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \quad \text{für } x > 0 \tag{1}$$

in einem Graphen darstellen. Alle wichtigen Parameter dieser Funktion sollen ersichtlich sein. Aus dem Unterricht haben wir gelernt, dass die Funktion:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \tag{2}$$

gegen den Grenzwert 1 konvergiert. In der Aufgabenstellung ist jedoch eine andere Funktion gegeben. Diese Funktion kann auch so etwas anders geschrieben werden.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1 \tag{3}$$

Aus den gewonnenen Erkenntnissen aus dem Unterricht kann der Grenzwert für die gefragte Funtion 1 berechnet werden. Da wir wissen, dass der Bruch $1/x, x \to \infty$ extrem klein wird haben wir ein Verhalten des Grenzwerts wie in Funktion 2 ploten wir die verlangte Funtion 1 erhalten wir folgenden Plot: im Intervall $(0, 5]$ ist ersichtlich, dass die Funktion einen Grenzwert bei $y = 1$ hat.

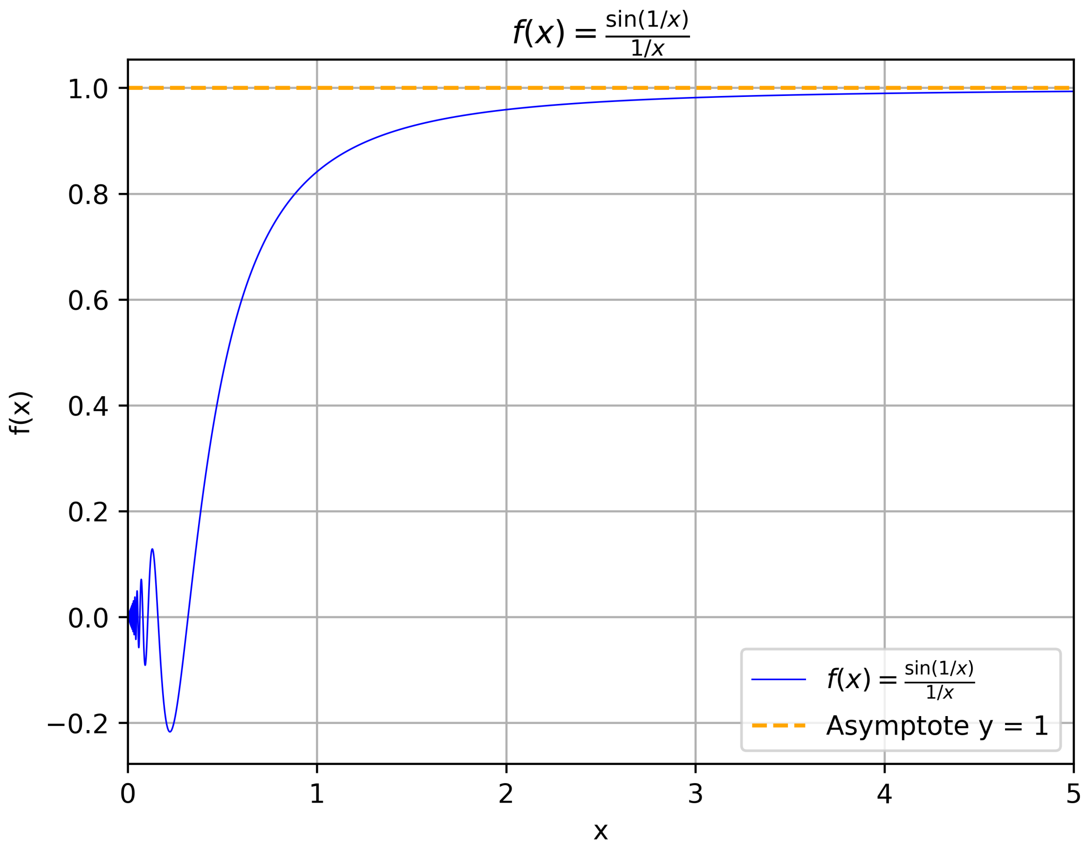

Abbildung 1: Plot der Funktion 1

Zu sehen ist, wie die Funktion gegen 1 konvergiert. Für eine bessere Sichtbarkeit des Grenzwerts, ist eine gestrichelte Asymptote eingezeichnet. Um den Grenzwert sichtbar und möglichst viel von der Funktion zu zeigen wurde ein Intervall von $(0, 5]$ gewählt. Wichtig! Die Funktion darf nicht durch 0 geteilt werden. Dies kann auch so aus der Funktion 1 entnommen werden.

2 Logarithmische Skala

In der 2. Übung soll man die Funktion:

$$f(x) = 3x^2 \tag{4}$$

In verschiedenen Skalen darstellen. Das Intervall in der Aufgabenstellung wird als $[0, 10]$ angegeben. Da jedoch mit $\log_{10}(x)$ gerechnet wird und $\log_{10}(0)$ nicht definiert ist, wird das Intervall auf $(0, 10]$ festgelegt.

2.1 Darstellung des Plots (X-Achse: linear, Y-Achse: linear)

Als erstes wird die Funktion ganz üblich in der linearen Skala dargestellt. Da die Funktion 4 quadratisch ist, ist im Plot auch das bekannte Verhalten einer quadratischen Funktion zu sehen. Es ist eine Parabel zu sehen. Wegen dem gewählten Intervall jedoch nur im positiven Spektrum.

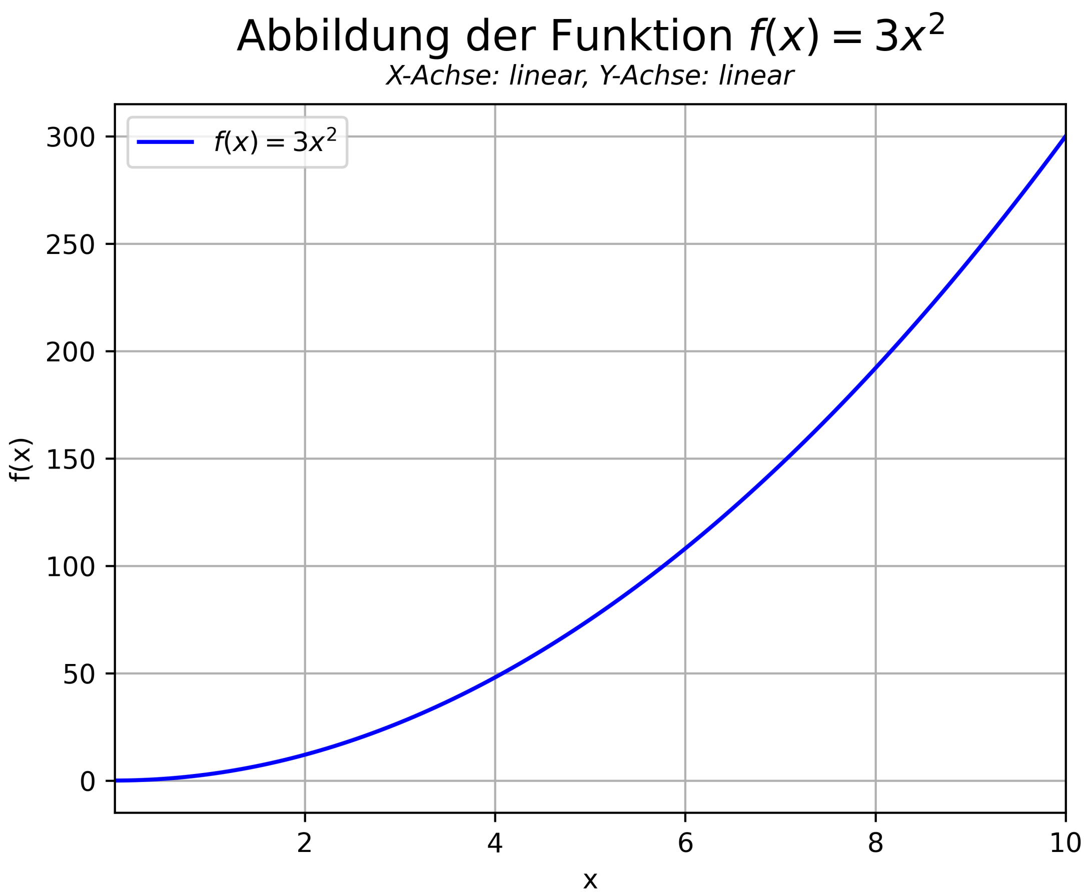

Abbildung 2: Plot der Funktion 4 in linearer Skala

2.2 Darstellung des Plots (X-Achse: logarithmisch, Y-Achse: linear)

Die zweite Skala in welcher die Funktion 4 dargestellt werden soll ist die sogenannte semilog Skala. Eine Achse ist logarithmisch, die vorher quadratische Funktion, sieht jetzt wie eine Exponentialfunktion aus. Es gibt zwei Varianten wie diese Skala erzeugt werden kann. Die "manuelle"Variante ist das ändern der Skala im Pythonscript. Nach dem umstellen der Skala erhalten wir folgenden Graphen:

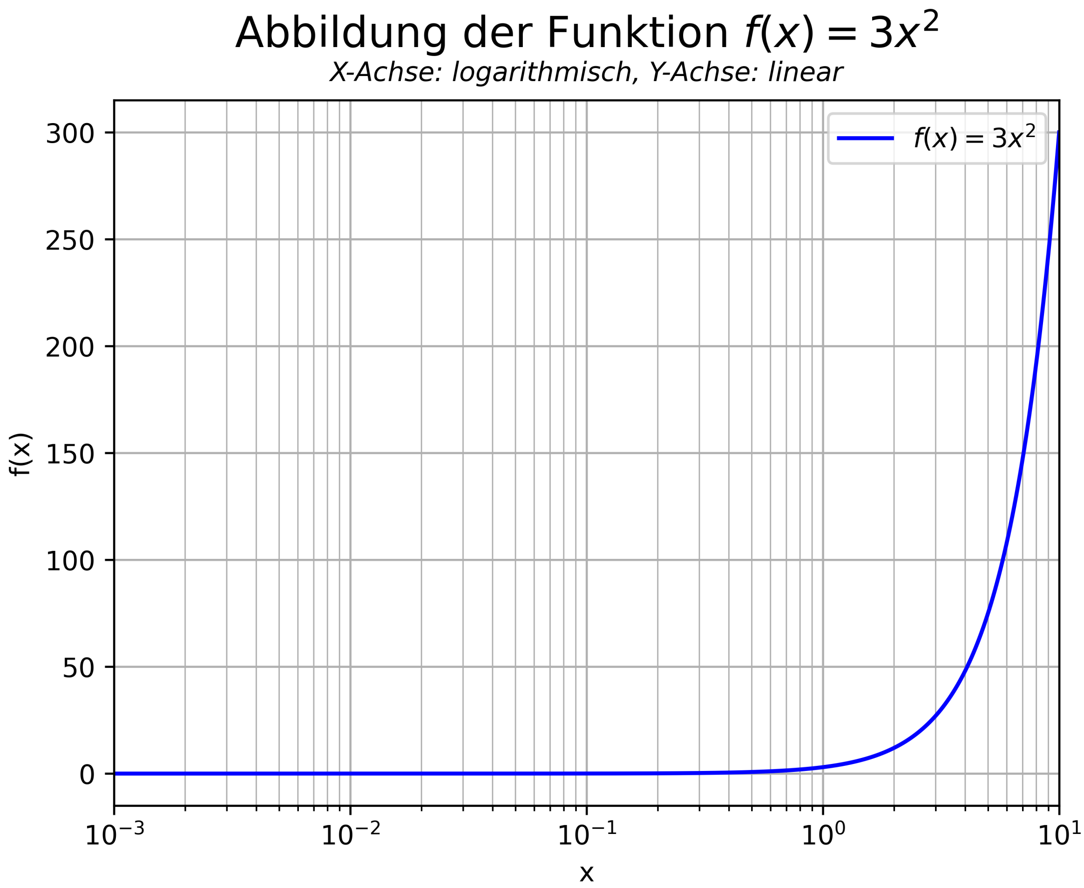

Abbildung 3: Plot der Funktion 4 in semilog Skala, Python

"Manuelle"Methode Der gleiche Plot lässt sich auch noch anders realisieren. Dazu wird die gewünschte Achse, in diesem Fall die X-Achse, logarithmisch skaliert. Die X-Achse wird dazu gleich 5 gesetzt. Die Kurve ist dadurch nicht mehr an gleicher Position wie vorher, die Form jedoch ist die gleiche wie in Abbildung 3.

$$u = \log_{10}(x) \tag{5}$$

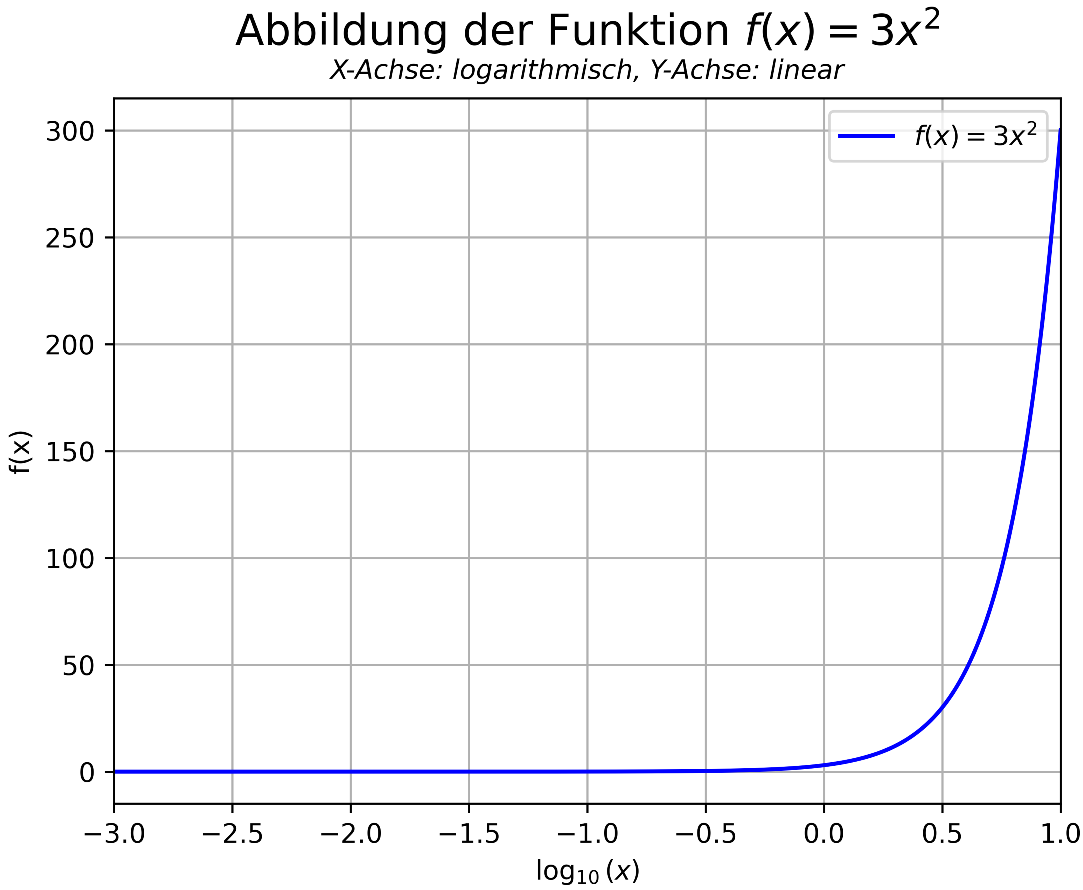

Abbildung 4: Plot der Funktion 4 in semilog Skala, u-Methode

2.3 Darstellung des Plots (X-Achse: logarithmisch, Y-Achse: logarithmisch)

Die dritte Skala in welcher die Funktion 4 dargestellt werden soll ist die logarithmische Skala. Beide Achsen sind logarithmisch. In der u-v-Darstellung wird die Kurve zu einer Gerade; die Steigung entspricht dem Exponenten 2 und der Achsenabschnitt dem $\log_{10}(3)$. Es gibt zwei Varianten wie diese Skala erzeugt werden kann. Die "manuelle"Variante ist das ändern der Skala im Pythonscript. Nach dem umstellen der Skala erhalten wir folgenden Graphen:

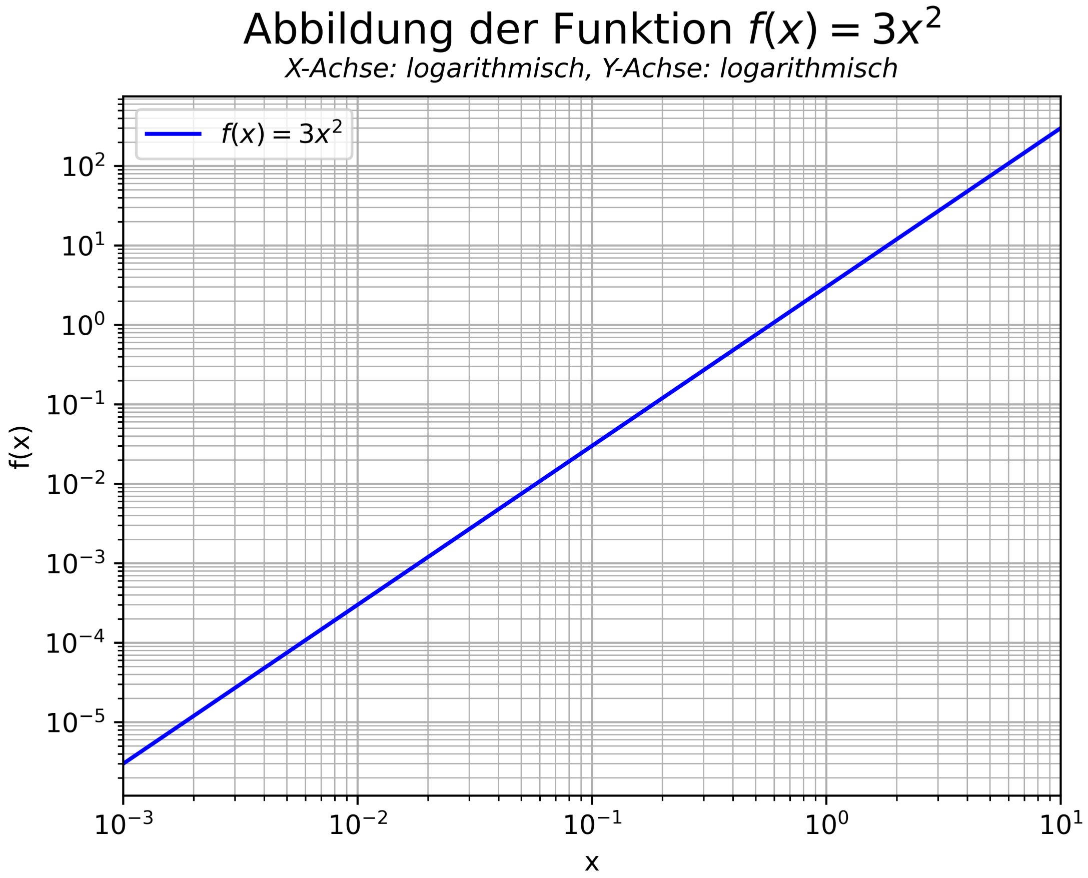

Abbildung 5: Plot der Funktion 4 in logarithmischer Skala, Python

"Manuelle"Methode Wie schon im vorherigen Kapitel gesehen, kann auch dies wieder "manuell"über Umrechnung der Skala geschehen. Dafür berechnen wir zusätzlich das v. u und v können anschliessend als Achsen eingetragen werden. Auch hier ist die Skala nicht die selbe wie in 5, die Form der Kurve ist jedoch äquivalent.

$$u = \log_{10}(x) \text{ und } v = \log_{10}(f(x)) = \log_{10}(y)$$

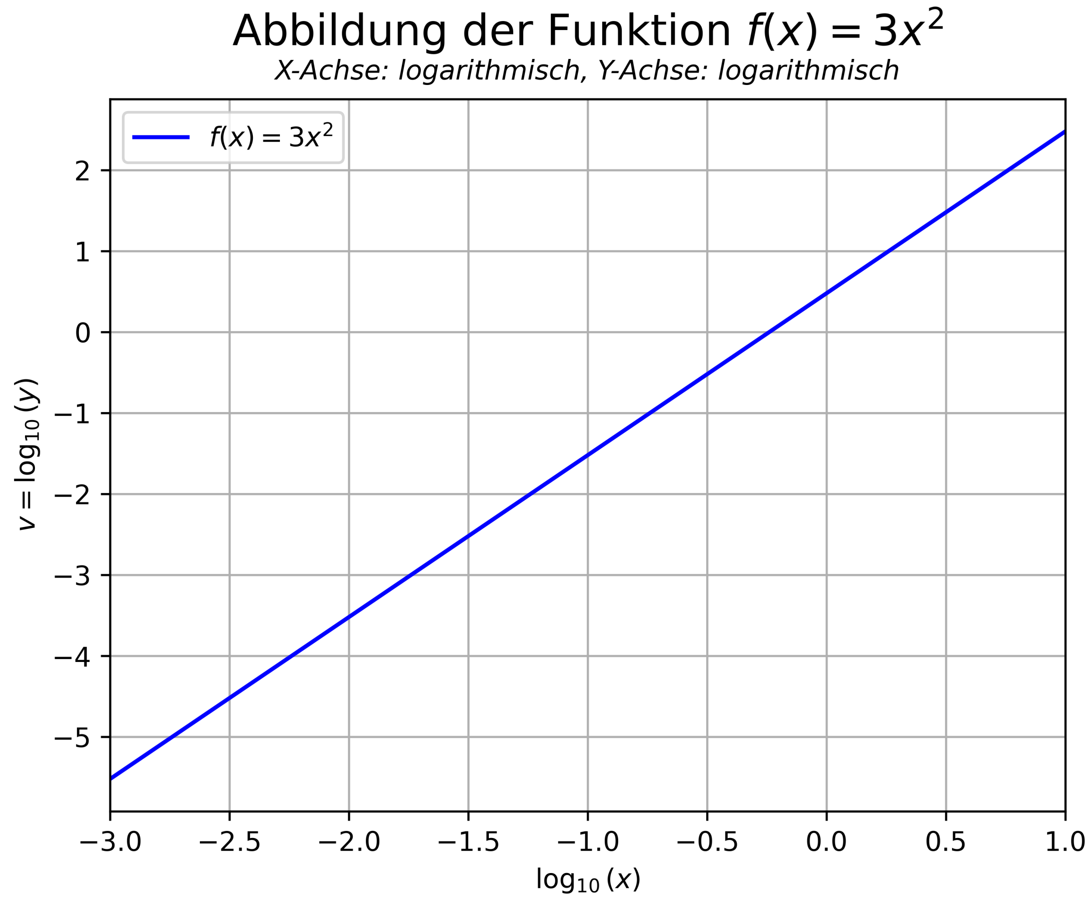

Abbildung 6: Plot der Funktion 4 in logarithmischer Skala, u-v-Methode

3 Ableitung

In der 3. Übung soll gezeigt werden wie die Funktion:

$$f(x) = \cos(x) \tag{6}$$

im Intervall $(0, \pi)$ numerisch approximiert wird. Die exakte Ableitung der Funktion 6 ist bekannt:

$$f'(x) = -\sin(x). \tag{7}$$

Um diese Ableitung mit dem Computer zu berechnen, verwenden wir Differenzenquotienten, die den Grenzwert aus der Ableitungsdefinition näherungsweise ersetzen.

Vorwärtsdifferenz. Die erste Methode ist der sogenannte Vorwärtsdifferenzenquotient

$$g(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \tag{8}$$

Dabei wird die Steigung der Sekante durch die beiden Punkte $(x, f(x))$ und $(x+h, f(x+h))$ verwendet, um sich der Tangentensteigung $f'(x)$ zu nähern. Für kleinere Werte von h liegen die beiden Punkte näher beieinander, und die Sekante nähert sich der Tangente an.

Zentrale Differenz. Die zweite Methode ist der zentrale Differenzenquotient

$$h(x) = \frac{f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f\left(x - \frac{h}{2}\right)}{h}. \tag{9}$$

Hier werden zwei Punkte symmetrisch um x betrachtet, nämlich $x - \frac{h}{2}$ und $x + \frac{h}{2}$. Die Sekante durch diese beiden Punkte schneidet die Kurve „links und rechts“ von x und liefert dadurch in vielen Fällen eine bessere Annäherung an die Tangente.

Vergleich der Methoden. Damit der Unterschied zwischen den beiden Methoden ersichtlicher wird, ist alles in einem Plot zusammengeführt. Die jeweilig benutzten h-Werte sind im Plot aufgeführt.

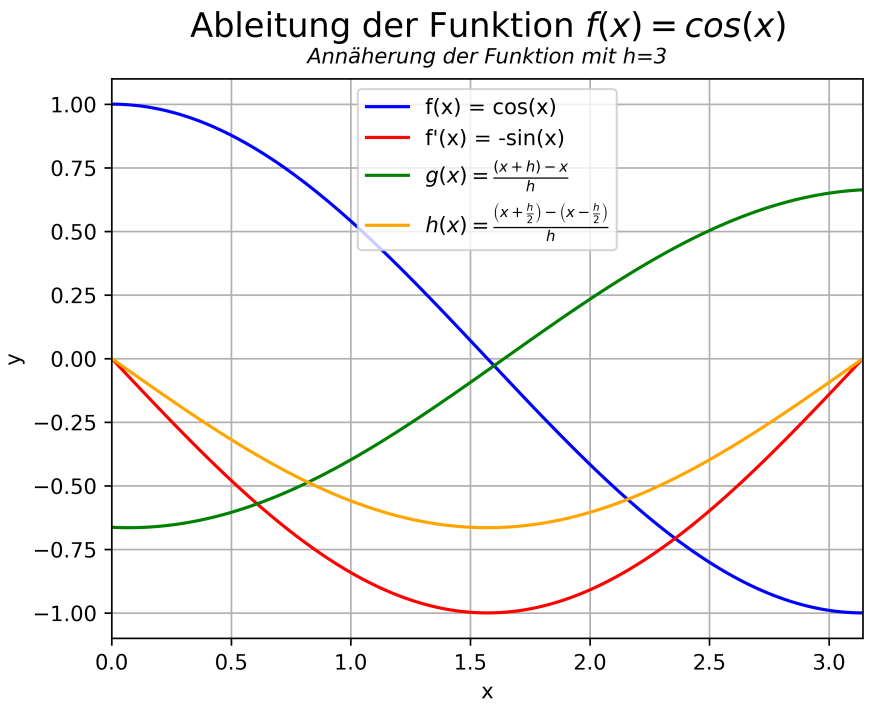

Abbildung 7: Annäherung der Ableitung der Funktion 6 mit h=3

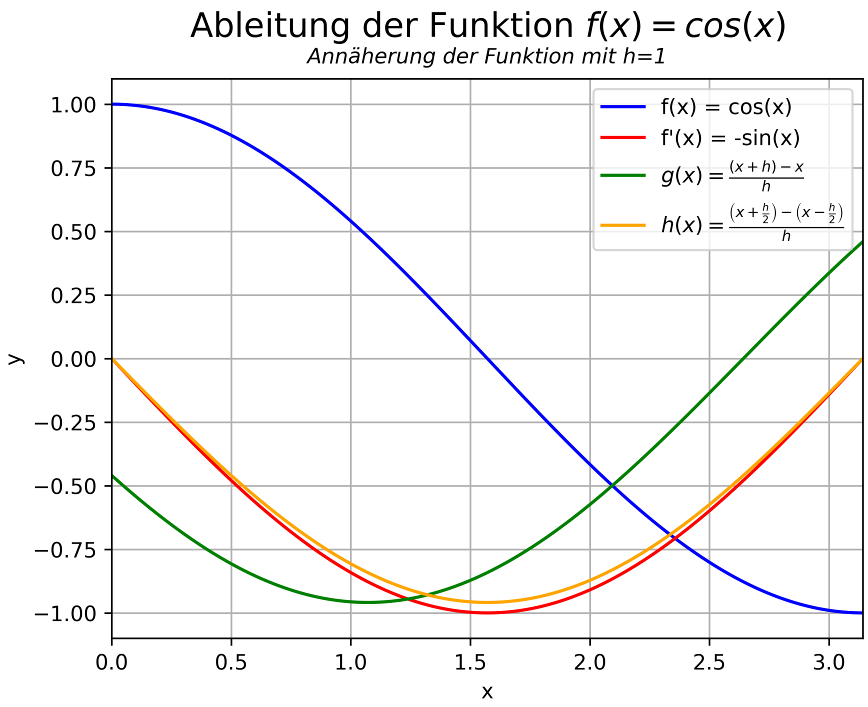

Abbildung 8: Annäherung der Ableitung der Funktion 6 mit h=1

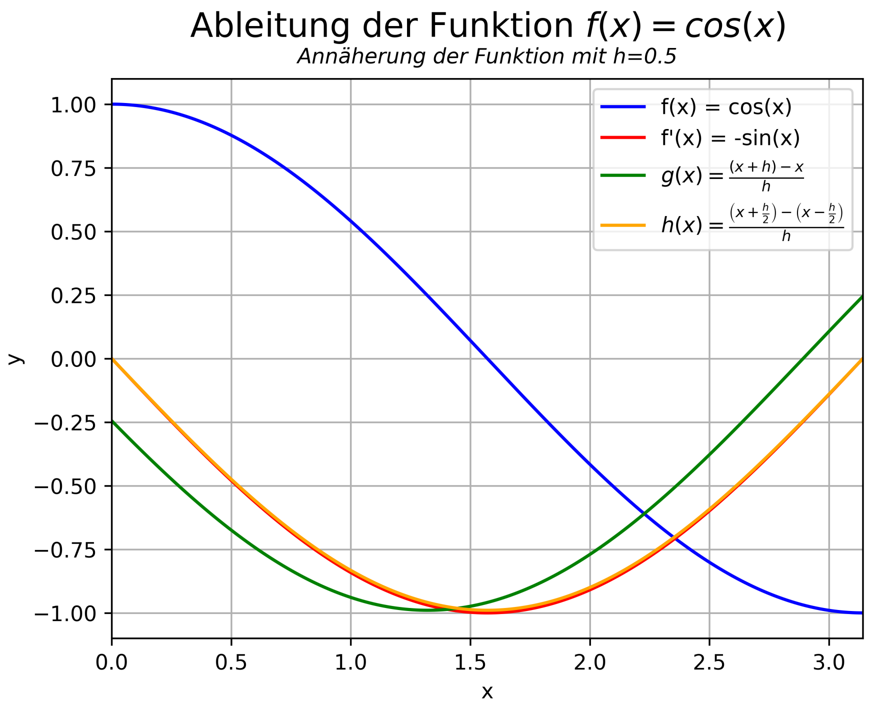

Abbildung 9: Annäherung der Ableitung der Funktion 6 mit h=0.5

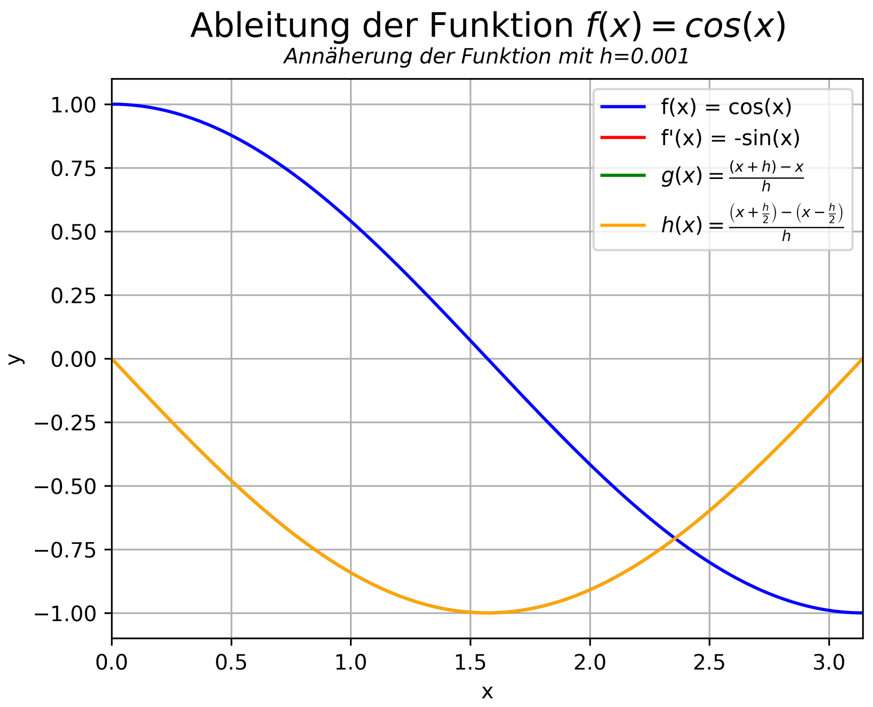

Abbildung 10: Annäherung der Ableitung der Funktion 6 mit h=0.001

Abbildungsverzeichnis