

Wahrscheinlichkeit und Statistik

Janis Hutz
<https://janishutz.com>

28. Februar 2026

1 Basics

1.1 Wahrscheinlichkeitsräume

Begriff Ω **Grundraum**, $\omega \in \Omega$ **Elementarereignis**

D 1.1 (*Sigma-Algebra*) $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ist σ -Algebra, falls:

- E1. $\Omega \in \mathcal{F}$
- E2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^C \in \mathcal{F}$ (A Ereignis \Rightarrow nicht A auch)
- E3. $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$
(A_1, \dots Ereignisse $\Rightarrow A_1$ oder A_2 oder ... ein Ereignis)

Bsp σ -Algebren bei 1x Würfeln ($\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$)

- $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$
- $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, dabei $|\mathcal{F}| = 64$
- $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4, 5, 6\}, \Omega\}$

Keine σ -Algebren sind bspw:

- $\mathcal{F} = \{\Omega\}$ (Komplementärereignis \emptyset fehlt, E2 verletzt)
- $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{1\}, \{2, 3, 4, 5, 6\}, \Omega\}$
(E3 verletzt, da bspw $\{4, 5, 6\} \cup \{1\} \notin \mathcal{F}$)

1.1.1 Wahrscheinlichkeitsmass

D 1.2 (*W.M.*) $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ mit $A \mapsto \mathbb{P}[A]$, notiert (Ω, \mathcal{F}) , falls folgende Eigenschaften gelten

- E1. $\mathbb{P}[\Omega] = 1$
- E2. (σ -**Additivität**) $\mathbb{P}[A] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_i]$,
falls $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ (*disjunkte Vereinigung*)

Bsp Wieder mit Würfeln und $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, sind W.M.:

- Abbildung $\forall A \in \mathcal{F} \quad \mathbb{P}[A] = \frac{|A|}{6}$
- Abbildung $\forall A \in \mathcal{F} \quad \mathbb{P}[A] = \sum_{i \in A} p_i$ (p_i dabei prob. Zahl i würfeln; $p_i = \frac{1}{6} \forall i \in \Omega$ ist für fairen Würfel)

1.1.2 Wahrscheinlichkeitsraum

D 1.3 (*W.R.*) ein Tripel $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Begriff A Ereignis, **tritt (nicht) ein** (für ω), if $\omega \in (\notin)A$

B 1.4 $A = \emptyset$ tritt niemals ein, $A = \Omega$ immer.

1.2 Beispiele von Wahrscheinlichkeitsräumen

D 1.5 (*Laplace Modell*) $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, sodass $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ und $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1] \stackrel{\text{def}}{=} \forall A \in \mathcal{F} \quad \mathbb{P}[A] = \frac{|A|}{|\Omega|}$, \mathbb{P} ist W.M.

Bsp Auf Kreis mit $n \geq 3$ Punkten, Modell für Nachbaren ist: $A = \{\{1, 2\}, \dots, \{n-1, n\}, \{n, 1\}\}$ für $\Omega = \{E \subseteq \{1, \dots, n\} \mid |E| = 2\}$, also $\mathbb{P}[A] = \frac{n}{\binom{n}{2}} = \frac{2}{n-1}$

Bsp W. 1. mal Kopf ist bei Wurf k : $p_k = p^{k-1}(1-p)$

1.3 Eigenschaften/Interp. von Ereignissen

T 1.6 \mathcal{F} σ -Algebra. Es gilt: **E4.** $\emptyset \in \mathcal{F}$

E5. $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

E6. $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$

E7. $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$

A^C

A tritt **nicht** ein

$A \cap B$

A **und** B treten ein

$A \cup B$

A **oder** B treten ein

$A \Delta B$

entweder A **oder** B tritt ein

$A \subseteq B$

B tritt ein, falls A eintritt

$A \cap B = \emptyset$

A und B nicht gleichzeitig

$\Omega = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ mit

$\forall \omega \in \Omega$

A_1, A_2, A_3 paarw. disj.

nur eines von A_1, A_2, A_3

kann eintreten

Wir wählen nicht immer $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, bspw. für mehrstufige Experimente ist dies nicht ideal (k. Filtern, Überabzählbarkeit)

1.4 Eigenschaften Wahrscheinlichkeitsmasse

T 1.7 \mathbb{P} Wahrscheinlichkeitsmass auf (Ω, \mathcal{F}) , A Ereignis:

E1. Es gilt $\mathbb{P}[\emptyset] = 0$

E2. Additivität $k \geq 1, A_1, \dots, A_k$ paarw. disj. Ereignisse:
 $\mathbb{P}[A_1 \cup \dots \cup A_k] = \mathbb{P}[A_1] + \dots + \mathbb{P}[A_k]$

E3. $\mathbb{P}[A^C] = 1 - \mathbb{P}[A]$

E4. B Ereignis, dann $\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A \cap B]$

1.4.1 Nützliche Ungleichungen

T 1.8 (*Monot.*) $A, B \in \mathcal{F}$, dann $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}[A] \leq \mathbb{P}[B]$

T 1.9 (*Union Bound*) Für A_1, A_2, \dots (mögl. disj.) gilt:
 $\mathbb{P}[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i] \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_i]$. Auch für endl. n.-leere Ereignisse

1.4.2 Anwendungen der Ungleichungen

Sie sind nützlich für schwer zu berechnende W.

T 1.11 (A_n) mit $A_n \subseteq A_{n+1}$ (mon. wachsend). Dann:
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[A_n] = \mathbb{P}[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n]$

und für (B_n) mit $B_n \supseteq B_{n+1}$ (mon. fallend) gilt:
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[B_n] = \mathbb{P}[\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n]$

B 1.12 Mit Monotonie: $\mathbb{P}[A_n] \leq \mathbb{P}[A_{n+1}]$ und $\mathbb{P}[B_n] \geq \mathbb{P}[B_{n+1}]$. Grenzwerte oben wohldefiniert.

1.5 Bedingte Wahrscheinlichkeit

D 1.13 Für $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ mit $\mathbb{P}[B] > 0$:
$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]}$$

B 1.14 $\mathbb{P}[B|B] = 1$

T 1.15 $B \in \mathcal{P}(\Omega)$, dann ist $\mathbb{P}[\cdot|B]$ ein W-Mass auf Ω

T 1.16 (*Totale W.*) $\Omega = B_1 \cup \dots \cup B_n$ mit B_i s eine Partition von Ω , mit B_i paarw. disj. und $\mathbb{P}[B_i] > 0 \forall 1 \leq i \leq n$. Dann:
$$\forall A \in \mathcal{F} \quad \mathbb{P}[A] = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}[A|B_i] \cdot \mathbb{P}[B_i]$$

T 1.17 (*Bayes*) B_i wie oben, dann $\forall A$ mit $\mathbb{P}[A] > 0$:
$$\forall i = 1, \dots, n \quad \mathbb{P}[B_i|A] = \frac{\mathbb{P}[A|B_i]\mathbb{P}[B_i]}{\sum_{j=1}^n \mathbb{P}[A|B_j]\mathbb{P}[B_j]}$$

1.6 Unabhängigkeit

D 1.18 $A, B \in \mathcal{F}$ **unabh.** falls $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B]$

B 1.19 Falls $\mathbb{P}[A] \in \{0, 1\}$: $\forall B \in \mathcal{F} \quad \mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B]$. Falls A unabh. von sich selbst ($\mathbb{P}[A \cap A] = \mathbb{P}[A]^2$), dann $\mathbb{P}[A] \in \{0, 1\}$. **Implik.:** A unabh. v. $B \Leftrightarrow A$ unabh. v. B^C

T 1.20 Sei $\mathbb{P}[A], \mathbb{P}[B] > 0$. Dann ist equivalent:

(i) $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B]$ (A und B unabhängig)

(ii) $\mathbb{P}[A|B] = \mathbb{P}[A]$ (*Eintreten von B beflusst A nicht*)

(iii) $\mathbb{P}[B|A] = \mathbb{P}[B]$ (*Eintreten von A beflusst B nicht*)

D 1.21 I eine beliebige Menge. $(A_i)_{i \in I}$ **unabhängig** falls:

$$\forall j \subseteq I \text{ endlich} \quad \mathbb{P} \left[\bigcap_{j \in J} A_j \right] = \prod_{j \in J} \mathbb{P}[A_j]$$

2 Zufallsvar., Verteilungsfunktionen

2.1 Abstrakte Definition

D 2.1 (*Zufallsvariable*) kurz Z.V. ist $\mathcal{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, sodass $\forall a \in \mathbb{R}$ gilt: $f = \{\omega \in \Omega \mid \mathcal{X}(\omega) \leq a\} \in \mathcal{F}$ (notwendige Bedingung für Wohldefiniertheit von $\mathbb{P}[f]$)

Notation Ohne ω : $\{X \leq a\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq a\}$, etc

2.2 Verteilungsfunktion

D 2.2 $F_{\mathcal{X}} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, def: $\forall a \in \mathbb{R} \quad F_{\mathcal{X}}(a) = \mathbb{P}[\mathcal{X} \leq a]$