

# Wahrscheinlichkeit und Statistik

Janis Hutz  
<https://janishutz.com>

25. Februar 2026

## 1 Basics

### 1.1 Wahrscheinlichkeitsräume

**Begriff**  $\Omega$  **Grundraum**,  $\omega \in \Omega$  **Elementarereignis**

**D 1.1** (*Sigma-Algebra*)  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  ist  $\sigma$ -Algebra, falls:

- E1.  $\Omega \subseteq \mathcal{F}$
- E2.  $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^C \in \mathcal{F}$  ( $A$  Ereignis  $\Rightarrow$  nicht  $A$  auch)
- E3.  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

( $A_1, \dots$  Ereignisse  $\Rightarrow A_1$  oder  $A_2$  oder  $\dots$  ein Ereignis)

**Bsp**  $\sigma$ -Algebren bei 1x Würfeln ( $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ )

- $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$
- $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ , dabei  $|\mathcal{F}| = 64$
- $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4, 5, 6\}, \Omega\}$

Keine  $\sigma$ -Algebren sind bspw:

- $\mathcal{F} = \{\Omega\}$  (Komplementärereignis  $\emptyset$  fehlt, E2 verletzt)
- $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{1\}, \{2, 3, 4, 5, 6\}, \Omega\}$  (E3 verletzt, da bspw  $\{4, 5, 6\} \cup \{1\} \notin \mathcal{F}$ )

#### 1.1.1 Wahrscheinlichkeitsmass

**D 1.2** (*W.M.*)  $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  mit  $A \mapsto \mathbb{P}[A]$ , notiert  $(\Omega, \mathcal{F})$ , falls folgende Eigenschaften gelten

- E1.  $\mathbb{P}[\Omega] = 1$
- E2. ( $\sigma$ -**Additivität**)  $\mathbb{P}[A] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_i]$ , falls  $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$  (*disjunkte Vereinigung*)

**Bsp** Wieder mit Würfeln und  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ , sind W.M.:

- Abbildung  $\forall A \in \mathcal{F} \quad \mathbb{P}[A] = \frac{|A|}{6}$
- Abbildung  $\forall A \in \mathcal{F} \quad \mathbb{P}[A] = \sum_{i \in A} p_i$  ( $p_i$  dabei prob. Zahl  $i$  würfeln;  $p_i = \frac{1}{6} \forall i \in \Omega$  ist für fairen Würfel)

### 1.1.2 Wahrscheinlichkeitsraum

**D 1.3** (*W.R.*) ein Tripel  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

**Begriff**  $A$  Ereignis, **tritt (nicht) ein** (für  $\omega$ ), if  $\omega \in (\notin)A$

**B 1.4**  $A = \emptyset$  tritt niemals ein,  $A = \Omega$  immer.

### 1.2 Beispiele von Wahrscheinlichkeitsräumen

**D 1.5** (*Laplace Modell*)  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , sodass  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$  und  $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1] \stackrel{\text{def}}{=} \forall A \in \mathcal{F} \quad \mathbb{P}[A] = \frac{|A|}{|\Omega|}$ ,  $\mathbb{P}$  ist W.M.

**Bsp** Auf Kreis mit  $n \geq 3$  Punkten, Modell für Nachbaren ist:  $A = \{\{1, 2\}, \dots, \{n-1, n\}, \{n, 1\}\}$  für  $\Omega = \{E \subseteq \{1, \dots, n\} \mid |E| = 2\}$ , also  $\mathbb{P}[A] = \frac{n}{\binom{n}{2}} = \frac{2}{n-1}$

**Bsp** W. 1. mal Kopf ist bei Wurf  $k$ :  $p_k = p^{k-1}(1-p)$

### 1.3 Eigenschaften/Interp. von Ereignissen

**T 1.6**  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -Algebra. Es gilt: **E4.**  $\emptyset \in \mathcal{F}$

**E5.**  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

**E6.**  $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$

**E7.**  $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$

$A^C$

A tritt **nicht** ein

$A \cap B$

A und B treten ein

$A \cup B$

A oder B treten ein

$A \Delta B$

entweder A oder B tritt ein

$A \subseteq B$

B tritt ein, falls A eintritt

$A \cap B = \emptyset$

A und B nicht gleichzeitig

$\Omega = A_1 \cup A_2 \cup A_3$  mit

$\forall \omega \in \Omega$  nur eines von  $A_1, A_2, A_3$

$A_1, A_2, A_3$  paarw. disj.

kann eintreten

Wir wählen nicht immer  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ , bspw. für mehrstufige Experimente ist dies nicht ideal (k. Filtern, Überabzählbarkeit)

### 1.4 Eigenschaften Wahrscheinlichkeitsmasse

**T 1.7**  $\mathbb{P}$  Wahrscheinlichkeitsmass auf  $(\Omega, \mathcal{F})$ ,  $A$  Ereignis:

**E1.** Es gilt  $\mathbb{P}[\emptyset] = 0$

**E2. Additivität**  $k \geq 1, A_1, \dots, A_k$  paarw. disj. Ereignisse:  $\mathbb{P}[A_1 \cup \dots \cup A_k] = \mathbb{P}[A_1] + \dots + \mathbb{P}[A_k]$

**E3.**  $\mathbb{P}[A^C] = 1 - \mathbb{P}[A]$

**E4.**  $B$  Ereignis, dann  $\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A \cap B]$

### 1.4.1 Nützliche Ungleichungen

**T 1.8** (*Monot.*)  $A, B \in \mathcal{F}$ , dann  $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}[A] \leq \mathbb{P}[B]$

**T 1.9** (*Union Bound*) Für  $A_1, A_2, \dots$  (mögl. disj.) gilt:  $\mathbb{P}[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i] \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_i]$ . Auch für endl. n.-leere Ereignisse

### 1.4.2 Anwendungen der Ungleichungen

Sie sind nützlich für schwer zu berechnende W.

**T 1.11** ( $A_n$ ) mit  $A_n \subseteq A_{n+1}$  (mon. wachsend). Dann:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[A_n] = \mathbb{P}[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n]$

und für  $(B_n)$  mit  $B_n \supseteq B_{n+1}$  (mon. fallend) gilt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[B_n] = \mathbb{P}[\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n]$

**B 1.12** Mit Monotonie:  $\mathbb{P}[A_n] \leq \mathbb{P}[A_{n+1}]$  und  $\mathbb{P}[B_n] \geq \mathbb{P}[B_{n+1}]$ . Grenzwerte oben wohldefiniert.

### 1.5 Bedingte Wahrscheinlichkeit

**D 1.13** Für  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  mit  $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$  mit  $\mathbb{P}[B] > 0$ :

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]}$$

**B 1.14**  $\mathbb{P}[B|B] = 1$

**T 1.15**  $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ , dann ist  $\mathbb{P}[\cdot|B]$  ein W-Mass auf  $\Omega$

**T 1.16** (*Totale W.*)  $\Omega = B_1 \cup \dots \cup B_n$  mit  $B_i$ s eine Partition von  $\Omega$ , mit  $B_i$  paarw. disj. und  $\mathbb{P}[B_i] > 0 \forall 1 \leq i \leq n$ .

Dann:  $\forall A \in \mathcal{F} \quad \mathbb{P}[A] = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}[A|B_i] \cdot \mathbb{P}[B_i]$

**T 1.17** (*Bayes*)  $B_i$  wie oben, dann  $\forall A$  mit  $\mathbb{P}[A] > 0$ :

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \mathbb{P}[B_i|A] = \frac{\mathbb{P}[A|B_i]\mathbb{P}[B_i]}{\sum_{j=1}^n \mathbb{P}[A|B_j]\mathbb{P}[B_j]}$$

### 1.6 Unabhängigkeit

**D 1.18**  $A, B \in \mathcal{F}$  **unabh.** falls  $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B]$

**B 1.19** Falls  $\mathbb{P}[A] \in \{0, 1\}$ :  $\forall B \in \mathcal{F} \quad \mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B]$ . Falls  $A$  unabh. von sich selbst ( $\mathbb{P}[A \cap A] = \mathbb{P}[A]^2$ ), dann  $\mathbb{P}[A] \in \{0, 1\}$ . **Implik.:**  $A$  unabh. v.  $B \Leftrightarrow A$  unabh. v.  $B^C$

**T 1.20** Sei  $\mathbb{P}[A], \mathbb{P}[B] > 0$ . Dann ist equivalent:

(i)  $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B]$  ( $A$  und  $B$  unabhängig)

(ii)  $\mathbb{P}[A|B] = \mathbb{P}[A]$  (*Eintreten von B beflusst A nicht*)

(iii)  $\mathbb{P}[B|A] = \mathbb{P}[B]$  (*Eintreten von A beflusst B nicht*)

**D 1.21**  $I$  eine beliebige Menge.  $(A_i)_{i \in I}$  **unabhängig** falls:

$$\forall j \subseteq I \text{ endlich} \quad \mathbb{P} \left[ \bigcap_{j \in J} A_j \right] = \prod_{j \in J} \mathbb{P}[A_j]$$

## 2 Zufallsvar., Verteilungsfunktionen

### 2.1 Abstrakte Definition

**D 2.1** (Zufallsvariable) kurz Z.V. ist  $\mathcal{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass  $\forall a \in \mathbb{R}$  gilt:  $f = \{\omega \in \Omega \mid \mathcal{X}(\omega) \leq a\} \in \mathcal{F}$  (notwendige Bedingung für Wohldefiniertheit von  $\mathbb{P}[f]$ )

**Notation** Ohne  $\omega$ :  $\{X \leq a\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq a\}$ , etc

### 2.2 Verteilungsfunktion

**D 2.2**  $F_{\mathcal{X}} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ , def:  $\forall a \in \mathbb{R} \quad F_{\mathcal{X}}(a) = \mathbb{P}[\mathcal{X} \leq a]$