

Theoretische Informatik

Janis Hutz
<https://janishutz.com>

24. September 2025

Inhaltsverzeichnis

1	Combinatorics	3
1.1	Introduction	3
1.2	Simple counting operations	3
1.3	Basic rules of counting	3
1.3.1	Multiplication rule	3
1.3.2	Addition rule	3
1.4	Factorial	4
1.4.1	Operations	4
1.5	Permutations	4
1.5.1	Permutation with repetition	4
1.6	Variations	5
1.6.1	Variations with repetition	5
1.7	Combinations	5
1.7.1	Combination with repetition	5
1.8	Binomial Expansion	5
1.9	Overview	6
2	Alphabete, Wörter, Sprachen und Darstellung von Problemen	7
2.1	Alphabete, Wörter, Sprachen	7
2.2	Algorithmische Probleme	9

1 Combinatorics

1.1 Introduction

Combinatorics was developed from the willingness of humans to gamble and the fact that everybody wanted to win as much money as possible.

1.2 Simple counting operations

The easiest way to find the best chance of winning is to write down all possible outcomes. This can be very tedious though when the list gets longer.

We can note this all down as a list or as a tree diagram. So-called Venn Diagrams might also help represent the relationship between two sets or events. Essentially a Venn Diagram is a graphical representation of set operations such as $A \cup B$.

1.3 Basic rules of counting

1.3.1 Multiplication rule

If one has n possibilities for a first choice and m possibilities for a second choice, then there are a total of $n \cdot m$ possible combinations.

When we think about a task, and we have an **and** in between e.g. properties, we need to multiply all the options.

1.3.2 Addition rule

If two events are mutually exclusive, the first has n possibilities and the second one has m possibilities, then both events together have $n + m$ possibilities.

When we think about a task, and we have an **or** in between e.g. properties, then we need to add all the options.

1.4 Factorial

Factorial

Definition 1.1

The factorial stands for the product of the first n natural numbers where $n \geq 1$. Notation: $!$

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Additionally, $0! = 1$. We read $n!$ as “ n factorial”

1.4.1 Operations

We can rewrite $n!$ as $n \cdot (n-1)!$ or $n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!$ and so on.

It is also possible to write $7 \cdot 6 \cdot 5$ with factorial notation: $\frac{7!}{4!}$, or in other words, for any excerpt of a factorial sequence:

$$n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot m = \frac{n!}{(m-1)!}$$

1.5 Permutations

Permutations

Definition 1.2

A permutation of a group is any possible arrangement of the group's elements in a particular order

Permutation rule without repetition: The number of n *distinguishable* elements is defined as: $n!$

1.5.1 Permutation with repetition

For n elements n_1, n_2, \dots, n_k of which some are identical, the number of permutations can be calculated as follows:

$$p = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

where n_k is the number of times a certain element occurs. As a matter of fact, this rule also applies to permutations without repetition, as each element occurs only once, which means the denominator is 1, hence $\frac{n!}{(1!)^n} = n!$

Beispiel 1.1: CANADA has 6 letters, of which 3 letters are the same. So the word consists of 3 A's, which can be arranged in $3!$ different ways, a C, N and D, which can be arranged in $1!$ ways each. Therefore, we have:

$$\frac{6!}{3! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{6!}{3!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$$

Since $1!$ equals 1, we can always ignore all elements that occur only once, as they won't influence the final result.

1.6 Variations

Variations

Definition 1.3

A **variation** is a selection of k elements from a universal set that consists of n *distinguishable* elements.

Variation rule without repetition: The ${}_nP_k$ function is used to **place** n elements on k places. In a more mathematical definition: The number of different variations consisting of k different elements selected from n distinguishable elements can be calculated as follows:

$$\frac{n!}{(n-k)!} = {}_nP_k$$

1.6.1 Variations with repetition

If an element can be selected more than once and the order matters, the number of different variations consisting of k elements selected from n distinguishable elements can be calculated using n^k

1.7 Combinations

Combination

Definition 1.4

A combination is a selection of k elements from n elements in total without any regard to order or arrangement.

Combination rule without repetition:

$${}_nC_k = \binom{n}{k} = \frac{{}_nP_k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

1.7.1 Combination with repetition

In general the question to ask for combinations is, in how many ways can I distribute k objects among n elements?

$${}_{n+k-1}C_k = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

1.8 Binomial Expansion

Binomial expansion is usually quite hard, but it can be much easier than it first seems. The first term of the expression of $(a+b)^n$ is always $1a^n b^0$. Using the formula for combination without repetition, we can find the coefficients of each element:

$$\text{6th row} \left\{ \begin{array}{ccccccc} {}^6C_0 & {}^6C_1 & {}^6C_2 & {}^6C_3 & {}^6C_4 & {}^6C_5 & {}^6C_6 \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\ \frac{6!}{0!6!} & \frac{6!}{1!5!} & \frac{6!}{2!4!} & \frac{6!}{3!3!} & \frac{6!}{4!2!} & \frac{6!}{5!1!} & \frac{6!}{6!0!} \end{array} \right.$$

This theory is based on the Pascal's Triangle and the numbers of row n correspond to the coefficients of each element of the expanded term.

We can calculate the coefficient of each part of the expanded term k with combinatorics as follows: $\binom{n}{k}$

Binomial Expansion

Formel 1.1

In general:

$$(a+b)^n = 1a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

1.9 Overview



2 Alphabete, Wörter, Sprachen und Darstellung von Problemen

2.1 Alphabete, Wörter, Sprachen

Alphabet

Definition 2.1

Eine endliche, nicht leere Menge Σ . Elemente sind Buchstaben (Zeichen & Symbole).
Beispiele: Σ_{bool} , Σ_{lat} latin characters, Σ_{Tastatur} , Σ_m m -adische Zahlen (m -ary numbers, zero index)

Wort

Definition 2.2

Über Σ eine (möglicherweise leere) Folge von Buchstaben aus Σ . Leeres Wort λ (ab und zu ε) hat keine Buchstaben.

$|w|$ ist die Länge des Wortes (Anzahl Buchstaben im Wort), während Σ^* die Menge aller Wörter über Σ ist und $\Sigma^+ = \Sigma^* - \{\lambda\}$

In diesem Kurs werden Wörter ohne Komma geschrieben, also $x_1x_2\dots x_n$ statt x_1, x_2, \dots, x_n . Für das Leersymbol gilt $|\cdot|$, also ist es nicht dasselbe wie λ

Für viele der Berechnungen in Verbindung mit der Länge der Wörter kann Kombinatorik nützlich werden. In Kapitel 1 findet sich eine Zusammenfassung über jenes Thema (in English)

Ein mögliches Alphabet beispielsweise um einen Graphen darzustellen ist folgendes:

Angenommen, wir speichern den Graphen als Adjazenzmatrix ab, dann können wir beispielsweise mit dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1, \#\}$ diese Matrix darstellen, in dem wir jede neue Linie mit einem $\#$ abgrenzen. Das Problem hierbei ist jedoch, dass dies nicht so effizient ist, besonders nicht, wenn der Graph sparse ist, da wir dann viele $\#$ im Vergleich zu nützlicher Information haben.

Konkatenation

Definition 2.3

$\Sigma^* \times \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$, so dass $\text{Kon}(x, y) = x \cdot y = xy \quad \forall x, y \in \Sigma^*$.

Intuitiv ist dies genau das was man denkt: Wörter zusammenhängen (wie in Programmiersprachen). Die Operation ist assoziativ und hat das Neutralelement λ , was heisst, dass (Σ^*, Kon) ein Monoid ist.

Offensichtlich ist die Konkatenation nur für ein-elementige Alphabete kommutativ.

Die Notation $(abc)^n$ wird für die n -fache Konkatenation von abc verwendet

Umkehrung

Definition 2.4

Sei $a = a_1a_2\dots a_n$, wobei $a_i \in \Sigma$ für $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, dann ist die Umkehrung von a , $a^R = a_na_{n-1}\dots a_1$

Iteration

Definition 2.5

Die i -te Iteration x^i von $x \in \Sigma^*$ für alle $i \in \mathbb{N}$ ist definiert als $x^0 = \lambda$, $x^1 = x$ und $x^i = xx^{i-1}$

Teilwort, Präfix, Suffix

Definition 2.6

Seien $v, w \in \Sigma^*$

- v heisst **Präfix** von $w \iff \exists y \in \Sigma^* : w = vy$
- v heisst **Suffix** von $w \iff \exists x \in \Sigma^* : w = xv$
- v heisst **Teilwort** von $w \iff \exists x, y \in \Sigma^* : w = xvy$
- $v \neq \lambda$ heisst **echtes** Teilwort (gilt auch für Präfix, Suffix) von w genau dann, wenn $v \neq w$ und v ein Teilwort (oder eben Präfix oder Suffix) von w ist

Kardinalität, Vorkommen und Potenzmenge**Definition 2.7**

Für Wort $x \in \Sigma^*$ und Buchstabe $a \in \Sigma$ ist $|x|_a$ definiert als die Anzahl Male, die a in x vorkommt. Für jede Menge A ist $|A|$ die Kardinalität und $\mathcal{P}(A) = \{S \mid S \subseteq A\}$ die Potenzmenge von A .

Kanonische Ordnung**Definition 2.8**

Wir definieren eine Ordnung $s_1 < \dots < s_m$ auf Σ . Die **kanonische Ordnung** auf Σ^* für $u, v \in \Sigma^*$ ist definiert als:

$$u < v \iff |u| < |v| \vee (|u| = |v| \wedge u = x \cdot s_i \cdot u' \wedge v = x \cdot s_j \cdot v' \text{ für beliebige } x, u', v' \in \Sigma^* \text{ und } i < j)$$

Oder in Worten, geordnet nach Länge und dann danach, ob man ein gemeinsames Teilwort finden kann

Sprache**Definition 2.9**

$L \subseteq \Sigma^*$ ist eine Sprache, deren Komplement $L^C = \Sigma^* - L$ ist. Dabei ist L_\emptyset die **leere Sprache** und L_λ die einelementige Sprache die nur aus dem leeren Wort besteht.

Die **Konkatenation** von L_1 und L_2 ist $L_1 \cdot L_2 = L_1 L_2 = \{vw \mid v \in L_1 \wedge w \in L_2\}$ und $L^0 := L_\lambda$ und $L^{i+1} = L^i \cdot L \quad \forall i \in \mathbb{N}$ und $L^* = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L^i$ ist der **Kleene'sche Stern** von L , wobei $L^+ = \bigcup_{i \in \mathbb{N} - \{0\}} L^i = L \cdot L^*$

Da Sprachen Mengen sind, gelten auch die üblichen Operationen, wie Vereinigung (\cup) und Schnitt (\cap). Die Gleichheit von zwei Sprachen bestimmen wir weiter mit $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B$. Um $A \subseteq B$ zu zeigen reicht es hier zu zeigen dass für jedes $x \in A$, $x \in B$ hält. Wir betrachten nun, wie die üblichen Operationen mit der neu hinzugefügten Konkatenation interagieren.

Distributivität von Kon und \cup **Lemma 2.1**

Für Sprachen L_1, L_2 und L_3 über Σ gilt: $L_1 L_2 \cup L_1 L_3 = L_1 (L_2 \cup L_3)$

Der Beweis hierfür läuft über die oben erwähnte "Regel" zur Gleichheit. Um das Ganze einfacher zu machen, teilen wir auf: Wir zeigen also erst $L_1 L_2 \subseteq L_1 (L_2 \cup L_3)$ und dann äquivalent für $L_1 L_3$.

Distributivität von Kon und \cap **Lemma 2.2**

Für Sprachen L_1, L_2 und L_3 über Σ gilt: $L_1 (L_2 \cap L_3) \subseteq L_1 L_2 \cap L_1 L_3$

L 2.3: Es existieren $U_1, U_2, U_3 \in (\Sigma_{\text{bool}})^*$, so dass $U_1 (U_2 \cap U_3) \subsetneq U_1 U_2 \cap U_1 U_3$

Homomorphismus**Definition 2.10**

Σ_1, Σ_2 beliebige Alphabete. Ein **Homomorphismus** von Σ_1^* nach Σ_2^* ist jede Funktion $h : \Sigma_1^* \rightarrow \Sigma_2^*$ mit:

- (i) $h(\lambda) = \lambda$
- (ii) $h(uv) = h(u) \cdot h(v) \quad \forall u, v \in \Sigma_1^*$

Erneut gilt hier, dass im Vergleich zu allgemeinen Homomorphismen, es zur Definition von einem Homomorphismus ausreicht, $h(a)$ für alle Buchstaben $a \in \Sigma_1$ festzulegen.

2.2 Algorithmische Probleme

Ein Algorithmus $A : \Sigma_1^* \rightarrow \Sigma_2^*$ ist eine Teilmenge aller Programme, wobei ein Program ein Algorithmus ist, sofern es für jede zulässige Eingabe eine Ausgabe liefert, es darf also nicht eine endlosschleife enthalten.

Entscheidungsproblem

Definition 2.11

Das **Entscheidungsproblem** (Σ, L) ist für jedes $x \in \Sigma^*$ zu entscheiden, ob $x \in L$ oder $x \notin L$. Ein Algorithmus A löst (Σ, L) (erkennt L) falls für alle $x \in \Sigma^*$: $A(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in L \\ 0, & \text{falls } x \notin L \end{cases}$.

Funktion

Definition 2.12

Algorithmus A berechnet (realisiert) eine **Funktion (Transformation)** $f : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$ falls $A(x) = f(x) \ \forall x \in \Sigma^*$ für Alphabete Σ und Γ

Berechnung

Definition 2.13

Sei $R \subseteq \Sigma^* \times \Gamma^*$ eine Relation in den Alphabeten Σ und Γ . Ein Algorithmus A **berechnet** R (**löst das Relationsproblem** R) falls für jedes $x \in \Sigma^*$, für das ein $y \in \Gamma^*$ mit $(x, y) \in R$ existiert gilt: $(x, A(x)) \in R$