

1 Grundlagen

Axiome der reellen Zahlen

\mathbb{R} ist ein kommutativer, angeordneter & ordnungsvollständiger Körper. Ordnungsvollständigkeit unterscheidet \mathbb{R} von \mathbb{Q} .

| | | |
|----|--|--|
| A1 | $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ | $x + (y + z) = (x + y) + z$ |
| A2 | $\forall x \in \mathbb{R}$ | $x + 0 = x$ |
| A3 | $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}$ | $x + y = 0$ |
| A4 | $\forall x, z \in \mathbb{R}$ | $x + z = z + x$ |
| M1 | $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ | $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ |
| M2 | $\forall x \in \mathbb{R}$ | $x \cdot 1 = x$ |
| M3 | $\forall x \neq 0 \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}$ | $x \cdot y = 1$ |
| M4 | $\forall x, z \in \mathbb{R}$ | $x \cdot z = z \cdot x$ |
| D | $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ | $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ |
| O1 | $\forall x \in \mathbb{R}$ | $x \leq x$ |
| O2 | $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ | $x \leq y \wedge y \leq z \implies x \leq z$ |
| O3 | $\forall x, y \in \mathbb{R}$ | $x \leq y \wedge y \leq x \implies x = y$ |
| O4 | $\forall x, y \in \mathbb{R}$ | $x \leq y \vee y \leq x$ (Total) |
| K1 | $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ | $x \leq y \implies x + z \leq y + z$ |
| K2 | $\forall x \geq 0, y \geq 0 \in \mathbb{R}$ | $x \cdot y \geq 0$ |

Ordnungsvollständigkeit

$\forall A, B \neq \emptyset \subseteq \mathbb{R}$ s.d. $\forall a \in A, b \in B \quad (a \leq b) : \exists c \in \mathbb{R} : \forall a \in A \forall b \in B \quad (a \leq c \wedge c \leq b)$

Archimedisches Prinzip

$\forall x > 0, y \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} : (y \leq n \cdot x)$

Absolutbetrag

| | | |
|-------|-------------------------------|--------------------------|
| Def: | $\forall x \in \mathbb{R}$ | $ x := \max\{x, -x\}$ |
| (i) | $\forall x \in \mathbb{R}$ | $ x \geq 0$ |
| (ii) | $\forall x, y \in \mathbb{R}$ | $ xy = x \cdot y $ |
| (iii) | $\forall x, y \in \mathbb{R}$ | $ x + y \leq x + y $ |
| (iv) | $\forall x, y \in \mathbb{R}$ | $ x + y \geq x - y $ |

Young'sche Ungleichung

$\forall \epsilon > 0 \forall x, y \in \mathbb{R} : 2|xy| \leq \epsilon x^2 + \frac{1}{\epsilon} y^2$

Bernoulli Ungleichung

$\forall n \in \mathbb{N}, x > -1 \quad (1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x$

Infimum & Supremum

Für $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$\sup A := \begin{cases} \min\{c \in \mathbb{R} \mid \forall a \in A : a \leq c\} \\ +\infty \quad \text{falls oben unbeschr.} \end{cases}$$
$$\inf A := \begin{cases} \max\{c \in \mathbb{R} \mid \forall a \in A : c \leq a\} \\ -\infty \quad \text{falls unten unbeschr.} \end{cases}$$

Monotonie

Für $f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}, \quad x, y \in D$:

| | | |
|-------------------|--------------------------------|------------------------------------|
| mon. wachsend | $\stackrel{\text{def.}}{\iff}$ | $x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$ |
| str. mon. wachs. | $\stackrel{\text{def.}}{\iff}$ | $x < y \implies f(x) < f(y)$ |
| mon. fallend | $\stackrel{\text{def.}}{\iff}$ | $x \geq y \implies f(x) \geq f(y)$ |
| str. mon. fallend | $\stackrel{\text{def.}}{\iff}$ | $x < y \implies f(x) < f(y)$ |

Intervalle

Untermengen von \mathbb{R} .

| | | |
|-------------------|--------------------------------|--|
| offenes Intervall | $\stackrel{\text{def.}}{\iff}$ | $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ |
| geschl. Intervall | $\stackrel{\text{def.}}{\iff}$ | $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ |
| kompakt | $\stackrel{\text{def.}}{\iff}$ | $I = [a, b], \quad a \leq b$ |

$$\text{Länge } \mathcal{L}(I) := \begin{cases} b - a & \exists a, b : a \leq b, \quad [a, b] = I \\ +\infty & \text{else} \end{cases}$$

Satz von Cauchy-Cantor

$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \dots$ s.d. $\forall i \geq 1 : I_i$ kompakt.

$$\mathcal{L}(I_1) < +\infty \implies \bigcap_{n \geq 1} I_n \neq \emptyset$$

Injektivität & Surjektivität

Für eine Funktion $f : X \rightarrow Y$:

| | | |
|-----------|--------------------------------|---|
| Injektiv | $\stackrel{\text{def.}}{\iff}$ | $\forall a, b \in X : f(a) = f(b) \implies a = b$ |
| Surjektiv | $\stackrel{\text{def.}}{\iff}$ | $\forall y \in Y : \exists x \in X : f(x) = y$ |

Quadratische Gleichungen

$a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \quad D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

Binomialkoeffizient

$$n, k \in \mathbb{N}^*, \quad n \geq k$$
$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$$

2 Folgen

Folge $(a_n)_{n \geq 1} \quad a : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$

Teilfolge $(a_{l(n)})_{l(n) \geq 1} \quad l : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^* \forall n \, l(n) < l(n+1)$

Limes

$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) := l$ ist eindeutig definiert, falls:

- (i) $\forall \epsilon > 0 : \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \notin]l - \epsilon, l + \epsilon[\}$ ist endlich
- (ii) $\forall \epsilon > 0, \exists N \geq 1 : |a_n - l| < \epsilon, \forall n \geq N$

Konvergenz

$(a_n)_{n \geq 1}$ ist konvergent, falls $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ existiert.

Konvergente Folgen sind immer beschränkt.

Nicht umgekehrt: $(-1)^n$ ist beschränkt, aber nicht konvergent.

Rechenregeln Limes

Für konvergente $(a_n)_{n \geq 1}, (b_n)_{n \geq 1}$:

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n)$
 - (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n)$
 - (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{a_n}{b_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) \setminus \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n)$
- wobei $\forall n \geq 1 (b_n \neq 0) \quad \wedge \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) \neq 0$
- (iv) $\exists K \forall n \geq K (a_n \leq b_n) \implies \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n)$

Limes Inferior & Limes Superior

Für $(a_n)_{n \geq 1}$ beschränkt:

$$b_n := \inf\{a_k \mid k \geq n\} \quad c_n := \sup\{a_k \mid k \geq n\}$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n) := \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n) := \lim_{n \rightarrow \infty} (c_n)$$

$$\forall n \in \mathbb{N} (b_n \leq c_n) \implies \liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n)$$

Komplement-Trick

Nützlich für einige Grenzwerte:

$$\sqrt{ax + b} - \sqrt{cx + d} = \frac{ax + b - (cx + d)}{\sqrt{ax + b} + \sqrt{cx + d}}$$

Komplexe Folgen

$$(b_n)_{n \geq 1} \in \mathbb{R}, \quad (a_n)_{n \geq 1} \in \mathbb{C}$$

In \mathbb{C} gelten die selben Resultate, aber:

- (i) $\forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq b_n \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = 0$
- (ii) $\liminf(a_n)$ und $\limsup(a_n)$ existieren nicht.

$$(a_n)_{n \geq 1} \in \mathbb{C} \text{ konv.} \iff (\Re(a_n))_{n \geq 1}, (\Im(a_n))_{n \geq 1} \text{ konv.}$$

2.1 Konvergenzkriterien

Monotoner Konvergenz-Satz

$(a_n)_{n \geq 1}$ mon. fallend, $(b_n)_{n \geq 1}$ mon. steigend:

$$a_n \text{ unten beschr.} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \inf\{a_n \mid n \geq 1\}$$

$$b_n \text{ oben beschr.} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) = \sup\{b_n \mid n \geq 1\}$$

Sandwich-Satz

$$(a_n), (b_n), (c_n) \text{ s.d. } \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n \leq c_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (c_n) = A \implies \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) = A$$

Cauchy Kriterium I

$$(a_n)_{n \geq 1} \text{ beschr.} \wedge \liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n)$$

Cauchy Kriterium II

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \geq 1 : |a_n - a_m| < \epsilon \quad \forall n, m \geq N$$

Bolzano-Weierstrass

$$(a_n)_{n \geq 1} \text{ beschr.} \implies \text{Ex existiert konv. Teilfolge } (b_n)_{n \geq 1}$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n)$$

3 Reihen

$$\text{Reihe} \quad (S_n)_{n \geq 1} \text{ s.d. } S_n := \sum_{k=1}^n a_k$$

$$\text{Konvergenz} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k$$

Absolute Konvergenz

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \text{ konv.} \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konv.}$$

$$\forall (a_k)_{k \geq 1} : \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

Rechenregeln

Für konvergente Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \sum_{j=1}^{\infty} b_j, \alpha \in \mathbb{R}$:

$$(i) \quad \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_k \right) + \left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j \right)$$

$$(ii) \quad \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha \cdot a_k) = \alpha \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \right)$$

Konvergente Reihen sind Nullfolgen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konv} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

Nicht umgekehrt: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert, obwohl $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Doppelfolge $(a_{i,j})_{i,j \geq 1}$

$$\text{Doppelreihe } \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} \right), \quad \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_{i,j} \right)$$

Die beiden Grenzwerte können verschieden sein.

Cauchy

$$\exists B \geq 0 : \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m |a_{i,j}| \leq B \quad \forall m \geq 0$$

$$\implies S_i := \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} \text{ und } U_j := \sum_{i=0}^{\infty} a_{i,j} \text{ konv. abs.}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} S_i = L_1 \text{ und } \sum_{j=0}^{\infty} U_j = L_2 \text{ konv. abs. s.d. } L_1 = L_2.$$

Jede Anordnung $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ s.d. $b_k := a_{\sigma(k)}$ konv. abs.

Cauchy Produkt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^n a_{n-j} \cdot b_j \right) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \dots$$

3.1 Konvergenzkriterien

Vergleichssatz

Für $\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ mit $\forall k \geq 1 (0 \leq a_k \leq b_k)$
oder $\exists K \geq 1 (0 \leq a_k \leq b_k) \forall k \geq K$

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ konv.} \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konv.}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ div.} \implies \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ div.}$$

Cauchy Kriterium

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \geq 1 \quad \left| \sum_{k=n}^m a_k \right| < \epsilon \quad \forall m \geq n \geq N$$

Monotoner Konvergenz-Satz

$$\forall k \in \mathbb{N}^* (a_k \geq 0) \text{ konv.} \iff \sum_{k=1}^n a_k \text{ oben beschränkt}$$

Leibniz

Für $(a_n)_{n \geq 1}$ mon. fall. und $\forall n (a_n \geq 0)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k \text{ konv.}$$

Dirichlet

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ abs. konv.

$$\implies \forall \phi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^* \text{ (bijektiv)} : \sum_{k=1}^{\infty} a_{\phi(k)} \text{ abs. konv.}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\phi(k)}, \text{ unabh. von } \phi.$$

Quotientenkriterium

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ abs. konv.}$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ div.}$$

Wobei $(a_n)_{n \geq 1}$ mit $\forall n (a_n \neq 0)$

Wurzelkriterium

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} < 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ abs. konv.}$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} > 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ div.}$$

Beide Kriterien geben keine Aussage bei genau 0.

3.2 Fundamentalreihen

Potenzreihen (Konvergenzradius)

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k \text{ abs. konv.} \iff |z| < \rho$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k \text{ div.} \iff |z| > \rho$$

$$\rho = \begin{cases} +\infty, & \limsup_{n \rightarrow \infty} |c_k|^{\frac{1}{k}} = 0 \\ (\limsup_{n \rightarrow \infty} |c_k|^{\frac{1}{k}})^{-1}, & \limsup_{n \rightarrow \infty} |c_k|^{\frac{1}{k}} > 0 \end{cases}$$

Geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \iff |q| < 1$$

Harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

Zeta Funktion

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \text{ konv.} \iff s > 1$$

Exponentialfunktion

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z \text{ konv. } \forall z \in \mathbb{C}$$

4 Stetige Funktionen

$D \subset \mathbb{R}, x_0 \in D, f, g : D \rightarrow \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}$

Stetigkeit

f stetig in $x_0 \stackrel{\text{def.}}{\iff} \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in D : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$

f stetig $\stackrel{\text{def.}}{\iff} \forall x \in D : f$ stetig in x

Stetigkeit durch Folgen

f stetig in $x_0 \iff \forall (a_n)_{n \geq 1} \in D : \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(x_0)$

Rechenregeln

Für f, g stetig in x_0 :

- (i) $f + g, \lambda \cdot f, f \cdot g$
- (ii) $g(x_0) \neq 0 \implies \frac{f}{g} : \{x \in D \mid g(x) \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}$

sind stetig in x_0 .

4.1 Theoreme

Zwischenwertsatz

$\forall c \in \mathbb{R} : f(a) \leq c \leq f(b) \implies \exists z \in I : a \leq z \leq b \wedge f(z) = c$
 $I \subset \mathbb{R}$ (Intervall), $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ (stetig), $a, b \in I$

Polynom-Nullstellen

Für alle $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, P(x) = a_n x^n + \dots + a_0 : a_n \neq 0 \wedge n \geq 1 \implies \exists x \in \mathbb{R} : P(x) = 0$

Min-Max-Satz

Stetige f sind auf I immer beschränkt.
 $\exists u, v \in I : f(u) \leq f(x) \leq f(v) \quad \forall x \in I$
 $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f$ stetig auf I, I ist kompakt

Stetigkeit in Kompositionen

$D_1, D_2 \subset \mathbb{R}, f : D_1 \rightarrow D_2, g : D_2 \rightarrow \mathbb{R}$
 f, g stetig in $x_0, f(x_0) \implies g \circ f : D_1 \rightarrow \mathbb{R}$ in x_0 stetig.
 f, g stetig $\implies g \circ f : D_1 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig

Stetigkeit der Umkehrabbildung

$I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ist ein Intervall
 $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, str. mon.
 $\implies f^{-1} : f(I) \subset \mathbb{R} \rightarrow I$ stetig, str. mon.
& $f(I) = [f(a), f(b)]$ ist ein Intervall.

4.2 Funktionenfolgen

Funktionenfolge $(f_n)_{n \geq 1}$

Formal: eine Abbildung $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^D$ s.d. $n \mapsto f(n) =: f_n$

Punktweise Konvergenz

$(f_n)_{n \geq 1}$ konv. pw. gegen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, wenn:
 $\forall x \in D : f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$

f muss nicht stetig sein, auch wenn $\forall n \in \mathbb{N} : f_n$ stetig.

Gleichmässige Konvergenz

$(f_n)_{n \geq 1}$ konv. glm. gegen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, wenn:
 $\forall \epsilon > 0, \exists N \geq 1 : \forall n \geq N, \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$

Wobei N nur von ϵ abh. (nicht von x).
 f_n glm. konv. $\implies f_n$ pw. konv.

Alternative Definition für gleichmässige Konvergenz

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| = 0 \iff f_n$ glm. konv. gegen f .

Gleichmässige Konvergenz ist stetig

$D \subset \mathbb{R}, f_n : D \rightarrow \mathbb{R}, f : D \rightarrow \mathbb{R}$
 $\forall n \in \mathbb{N} : f_n$ stetig in D , glm. konv. gegen f
 $\implies f$ auch stetig in D .

Es folgt: f nicht stetig $\implies f_n$ nicht glm. konv.

Cauchy Kriterium

$f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ konv. glm. in D , wenn:
 $\forall \epsilon > 0, \exists N \geq 1 : \forall n, m \geq N, \forall x \in D : |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$

Limes-Funktion stetiger glm. konv. Folgen

$f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ glm. konv. Folge stetiger Funktionen.
 $\implies f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ ist stetig.

Glm. Konvergenz von Funktionenreihen

$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ konv. glm. in D , falls:
 $S_n(x) := \sum_{k=0}^n f_k(x)$ glm. konv. ist.

Vergleichssatz für stetige Funk.-Reihen

$D \subset \mathbb{R}, f_n : D \rightarrow \mathbb{R},$ alle f_n stetig
 $\forall x \in D : |f_n(x)| \leq c_n$ für $(c_n)_{n \geq 1}$ s.d. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konv.
 $\implies \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ konv., $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ stetig in D .

Potenzreihen

$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ s.d. $\rho > 0, f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, |x| < \rho$
 $\implies \forall 0 \leq r < \rho : \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ konv. glm. in $[-r, r]$
& $f : (-\rho, \rho) \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig.

4.3 Grenzwerte von Funktionen

$D \subset \mathbb{R}, f, g : D \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$ ist Häufungspunkt für D

Häufungspunkt

$x_0 \in \mathbb{R}$ ist ein Häufungspunkt in D , falls:
 $\forall \delta > 0 : ((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}) \cap D \neq \emptyset$
Man kann (in D) beliebig nah zu x_0 , wobei $x_0 \notin D$ möglich.

Grenzwert für Funktionen

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$, wenn für L gilt:

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in D \cap ((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}) : |f(x) - L| < \epsilon$

Grenzwert durch Folgen

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ gdw.
 $\forall (a_n)_{n \geq 1}$ in $D \setminus \{x_0\}$ s.d. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0 : \lim_{x \rightarrow x_0} f(a_n) = L$

Stetigkeit durch Grenzwert

f stetig in $x_0 \in D \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Rechenregeln

Wenn $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ existieren:

$\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
 $\lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

Grenzwerte abschätzen

$f \leq g \implies \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ falls existent

Sandwich bei Funktionen

$g_1 \leq f \leq g_2 \wedge \lim_{x \rightarrow x_0} g_1(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g_2(x)$
 $\implies \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existiert: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g_1(x)$

Komposition und Grenzwert

Hier: $D, E \subset \mathbb{R}$, x_0 Hf.-P. in D , $f : D \rightarrow E$, $g : E \rightarrow \mathbb{R}$
 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x))$, falls g stetig in $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

5 Differenzierbare Funktionen

Differenzierbarkeit

f diff.-bar in $x_0 \stackrel{\text{def.}}{\iff} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existiert.
 f diff.-bar in $D \stackrel{\text{def.}}{\iff} \forall x_0 \in D : f$ in x_0 diff.-bar.

$$f'(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$D \subset \mathbb{R}$, $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 Häufungspunkt von D

Weierstrass

f diff.-bar in $x_0 \iff \exists c \in \mathbb{R}, r : D \rightarrow \mathbb{R} :$
 $f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + r(x)(x - x_0)$
 $r(x_0) = 0$ und r stetig in x_0

Weitere Bedingung

f in x_0 diff.-bar $\iff \exists \phi : D \rightarrow \mathbb{R}$, ϕ stetig in x_0 s.d.
 $\forall x \in D : f(x) = f(x_0) + \phi(x)(x - x_0)$, $\phi(x_0) = f'(x_0)$

Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit

f diff.-bar (in x_0) $\implies f$ stetig (in x_0) $\implies f$ integr.

Nicht umgekehrt: $f(x) = |x|$ ist stetig, aber nicht diff.-bar.

Rechenregeln

- (i) $(f + g)(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
- (ii) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
- (iii) $(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

f, g in x_0 diff.-bar, (iii) : $g(x_0) \neq 0$

Kompositionen

$D, E \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ ist H.-P. in D , $f(x_0)$ ist H.-P. in E
 $f : D \rightarrow E$ diff.-bar in x_0 , $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ diff.-bar in $f(x_0)$
 $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}$ diff.-bar in x_0 :
 $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$

Ableitung der Umkehrabbildung

y_0 ist Häufungspunkt in E , f^{-1} in $f(x_0)$ diff.-bar und:

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

$f : D \rightarrow E$ ist bijektiv, $x_0 \in D$ ist H.-P.,
 f diff.-bar in x_0 , f^{-1} in $f(x_0)$ stetig.

5.1 Erste Ableitung

Spezielle Punkte: Lokale Extrema

$D \subset \mathbb{R}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D$

x_0 lokales Minimum, wenn:

$$\exists \delta > 0, \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D : f(x) \geq f(x_0)$$

x_0 lokales Maximum, wenn:

$$\exists \delta > 0, \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D : f(x) \leq f(x_0)$$

Sattelpunkte & Wendepunkte sind *keine* Extrema.

Lokale Extrema durch Ableitung

$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$, f in x_0 diff.-bar

Falls x_0 ein lok. Extremum ist: $f'(x_0) = 0$.

$$f'(x_0) > 0 \implies \exists \delta > 0 : \\ f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta), \\ f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$$

$$f'(x_0) < 0 \implies \exists \delta > 0 : \\ f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta), \\ f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$$

Verhalten von f mittels f'

$f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, in (a, b) diff.-bar

$\forall \xi \in (a, b) : \dots$

$$f'(\xi) = 0 \implies f \text{ ist konstant}$$

$$f'(\xi) = g'(\xi) \implies \exists c \in \mathbb{R} : f(x) = g(x) + c \quad \forall x \in [a, b]$$

$$f'(\xi) \geq 0 \implies f \text{ auf } [a, b] \text{ mon. wachsend.}$$

$$f'(\xi) > 0 \implies f \text{ auf } [a, b] \text{ str. mon. wachsend.}$$

$$f'(\xi) \leq 0 \implies f \text{ auf } [a, b] \text{ mon. fallend.}$$

$$f'(\xi) < 0 \implies f \text{ auf } [a, b] \text{ str. mon. fallend.}$$

$$\exists M \geq 0 : |f'(\xi)| \leq M \quad \forall \xi \in (a, b) \\ \implies \forall x_1, x_2 \in [a, b] : |f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|$$

5.2 Höhere Ableitungen

Definitionen: Höhere Ableitungen

$D \subset \mathbb{R}$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ diff.-bar in D , jedes $x_0 \in D$ ist H.P. von D ,
 $f^{(1)} := f'$, $n \geq 2$

f ist n -mal diff.-bar in $D \stackrel{\text{def.}}{\iff} f^{(n-1)}$ in D diff.-bar.
 $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$ die n -te Ableitung von f .

f ist n -mal stetig diff.-bar in $D \stackrel{\text{def.}}{\iff} f^n$ stetig in D

f ist glatt $\stackrel{\text{def.}}{\iff} \forall n \geq 1 f$ ist n -mal diff.-bar.

Stetigkeit tieferer Ableitungen

f n -mal diff.-bar $\iff f$ $n - 1$ -mal stetig diff.-bar

Rechenregeln

$D \subset \mathbb{R}$, $n \geq 1$, $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ n -mal diff.-bar in D

$$(i) (f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$$

$$(ii) (f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

$$(iii) \forall x \in D : g(x) \neq 0 \implies \frac{f}{g} \text{ in } D \text{ } n\text{-mal diff.-bar}$$

Komposition höherer Ableitungen

$E, D \subset \mathbb{R}$ s.d. alle $x_0 \in E, D$ H.-P. sind,

$f : D \rightarrow E$, $g : E \rightarrow \mathbb{R}$, f, g n -mal diff.-bar

$g \circ f$ ist n -mal diff.-bar.

$$(f \circ g)^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^n A_{n,k}(x) (g^{(k)} \circ f)(x)$$

$A_{n,k}$ ist ein Polynom in $f', f^{(2)}, \dots, f^{(n+1-k)}$.

Extrema mehrfach differenzierbarer f

$n \geq 0$, $a < x_0 < b$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ in (a, b) $(n+1)$ -mal diff.-bar

Wenn: $f'(x_0) = f^{(2)}(x_0) = \dots = f^{(n)}(x_0) = 0$:

$$n \equiv_2 0, \quad x_0 \text{ lokales Extremum} \implies f^{(n+1)}(x_0) = 0$$

$$n \equiv_2 1, \quad f^{(n+1)}(x_0) > 0 \implies x_0 \text{ str. lokales Minimum}$$

$$n \equiv_2 1, \quad f^{(n+1)}(x_0) < 0 \implies x_0 \text{ str. lokales Maximum}$$

Extrema zweimal differenzierbarer f

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, stetig, 2-mal diff.-bar in (a, b)

$a < x_0 < b$, $f'(x_0) = 0$, dann:

$$f^{(2)}(x_0) > 0 \implies x_0 \text{ str. lokales Minimum}$$

$$f^{(2)}(x_0) < 0 \implies x_0 \text{ str. lokales Maximum}$$

5.3 Wichtige Theoreme

Satz von Rolle

$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, f diff.-bar in (a, b)
 $f(a) = f(b) \implies \exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0$

Satz von Lagrange

$f : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in (a, b) diff.-bar:

$$\exists \xi \in (a, b) : f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

Satz von Cauchy

$f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, in (a, b) diff.-bar
 $\exists \xi \in (a, b) : g'(\xi)(f(b) - f(a)) = f'(\xi)(g(b) - g(a))$

Falls $\forall x \in (a, b), g'(x) \neq 0$:
 $\implies g(a) \neq g(b), \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

Satz von L'Hôpital

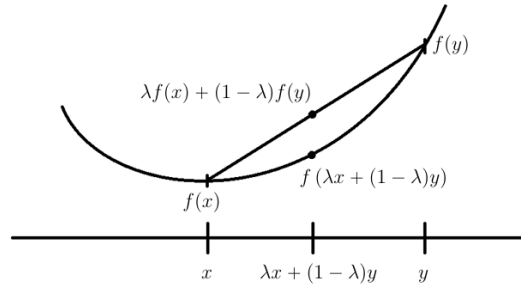
Falls: $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow b^-} = 0, \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert:

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Auch falls: $b = +\infty, \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty, x \rightarrow a^+$

$f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ diff.-bar in $(a, b), g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$

5.4 Konvexe/Konkave Funktionen



Definition: Konvex

$I \subset \mathbb{R}$ ist ein beliebiges Intervall, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$

f konvex auf I , falls: $\forall x \leq y \in I, \quad \forall \lambda \in [0, 1] :$
 $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$

f str. konvex auf I , falls: $\forall x < y \in I, \quad \forall \lambda \in (0, 1) :$
 $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$

Summe konvexer Funktionen ist konvex

$f : I \rightarrow \mathbb{R}, f$ konvex, $n \geq 1, \{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R},$
 $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1], \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$

$$f(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

Bedingungen für Konvexität

$f : I \rightarrow \mathbb{R}, f$ beliebig

f (str.) konvex $\iff \forall x_0 < x < x_1 \in I :$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq / < \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$$

$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, f$ diff.-bar in (a, b)

f (str.) konvex $\iff f'$ (str.) mon. wachsend.

$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, f$ 2 mal diff.-bar in (a, b)

f (str.) konvex $\iff f'' \geq 0$ (bzw. $f'' > 0$) auf (a, b) .

5.5 Potenzreihen & Taylorpolynome

Gleichmäßige Konvergenz erhält Differenzierbarkeit

$f_n : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ist Funktionenfolge,

f_n einmal in (a, b) diff.-bar $\forall n \geq 1$

$(f_n)_{n \geq 1}$ und $(f'_n)_{n \geq 1}$ glm. konv. in (a, b) .

$\implies f := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ ist stetig diff.-bar s.d. $f' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n$

Potenzreihen sind differenzierbar

$\sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k$ ist Potenzreihe, s.d. $\rho > 0$

$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$ ist auf $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ diff.-bar.

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot c_k (x - x_0)^{k-1} \quad \forall x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$$

Potenzreihen sind glatt

$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$ ist glatt auf $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$

$f^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^{\infty} c_k \frac{k!}{(k-j)!} (x - x_0)^{k-j}$, wobei $c_j = \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}$

Approximation glatter f durch Polynome

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $(n+1)$ -mal diff.-bar in (a, b)

$\forall a < x \leq b, \quad \exists \xi \in (a, x) :$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - a)^{n+1}$$

Taylor Approximation

$a \in \mathbb{R}$ s.d. $c < a < d, \forall x \in [c, d], \exists \xi \in (x, a) :$

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k}_{=: T_n} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - a)^{n+1}}_{=: R_n}$$

Wobei: $\forall m \geq 1 \exists n \geq 1 : f^{(m)}(x_0) = T_n^{(m)}(x_0)$

R_n wird als Fehlerabschätzung um a genutzt.

$f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $(n+1)$ mal diff.-bar in (c, d)

Taylor-Approximation bei nahen Punkten

Die Taylor-Approximation bezieht sich wirklich nur auf $x = a$. Beispiel:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \exp(-\frac{1}{x^2}) & x \neq 0 \end{cases}$$

Wenn $a = 0$ ist $T_n(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \geq 1$.

Aber $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ konvergiert sehr schnell.

6 Das Riemann Integral

$a, b \in \mathbb{R}, \quad a < b, \quad I = [a, b]$

Partition von I : $P \subsetneq [a, b], \{a, b\} \subset P, P$ endlich

Verfeinerung von P : Partition P' s.d. $P' \subset P$

Partitionenmenge von I : $\mathcal{P}(I) := \{P \mid P \text{ ist Partition von } I\}$

Für alle P_1, P_2 vom selben $I = [a, b]$ gilt:

$P_1 \cup P_2$ ist auch eine Partition von I

$\exists P' \subsetneq I: \quad P' \subset P_1 \wedge P' \subset P_2$

Ober- und Untersummen

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist beschränkt, $P \subsetneq [a, b]$ ist Partition von $[a, b]$

$M \in \mathbb{R}: \quad M \geq 0 \quad \wedge \quad |f(x)| \leq M \quad \forall x \in [a, b]$

$\delta_i := x_i - x_{i-1} \quad \text{für } P = \{x_0, \dots, x_n\}$

$s(f, P) := \sum_{i=1}^n f_i \delta_i, \quad f_i = \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$

$S(f, P) := \sum_{i=1}^n F_i \delta_i, \quad F_i = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$

Für beliebige Partitionen P_1, P_2 : $s(f, P_1) \leq S(f, P_2)$

$s(f) := \sup_{P \in \mathcal{P}(I)} s(f, P), \quad S(f) := \inf_{P \in \mathcal{P}(I)} S(f, P)$

$s(f) \leq S(f)$

6.1 Riemann-Integrierbarkeit

Riemann-Integrierbarkeit

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (beschr.) ist integrierbar $\stackrel{\text{def.}}{\iff} s(f) = S(f)$

$$\int_a^b f(x) dx := s(f) = S(f)$$

Integrierbarkeit durch Ober-/Untersummen

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (beschr.) ist integrierbar

$\iff \forall \epsilon > 0, \exists P \in \mathcal{P}(I): \quad S(f, P) - s(f, P) < \epsilon$

Integrierbarkeit als Grenzwert

Sei $\mathcal{P}_\delta(I) := \{\text{Partitionen } P \subsetneq [a, b] \mid \max_{1 \leq i \leq n} \delta_i \leq \delta\}$

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (beschr.) ist integrierbar

$\iff \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0: \forall P \in \mathcal{P}_\delta(I): \quad S(f, P) - s(f, P) < \epsilon$

Polynombrüche sind Integrierbar, ohne Nullstellen

$P, Q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sind Polynome

$\neg \exists x \in [a, b]: Q(x) = 0 \implies \frac{P}{Q}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist integr.

Stetige Funktionen sind integrierbar

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig $\implies f$ ist integrierbar.

Nicht umgekehrt: Treppenfunktionen sind integr., aber nicht stetig.

Monotone Funktionen sind integrierbar

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton $\implies f$ ist integrierbar.

Operationen erhalten Integrierbarkeit

$f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschr. und integrierbar, $\lambda \in \mathbb{R}$

$f + g, \quad \lambda \cdot f, \quad f \cdot g, \quad |f|, \quad \min(f, g), \quad \max(f, g), \quad \frac{f}{g}$

sind integrierbar. (Für $\frac{f}{g}: |g(x)| > 0$)

Konstanten und Addition

I kompakt, $f_1, f_2: I \rightarrow \mathbb{R}$ beschr. integr., $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) dx = \lambda_1 \int_a^b f_1(x) dx + \lambda_2 \int_a^b f_2(x) dx$$

Gleichmässige Stetigkeit

$D \subset \mathbb{R}, \quad f: D \rightarrow \mathbb{R}$

f in D glm. stetig $\stackrel{\text{def.}}{\iff} \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in D: |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon$

Gleichmässige Stetigkeit auf kompakten Intervallen

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

f Stetig auf kompaktem $[a, b] \implies f$ glm. stetig auf $[a, b]$

Integrale erhalten Monotonie

$f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschr. integr.

$\forall x \in [a, b]: \quad f(x) \leq g(x) \implies \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

$|\int_a^b f(x) dx| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

6.2 Wichtige Theoreme

Cauchy-Schwarz

$f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschr. integr.

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(x) dx}$$

Mittelwertsatz bei Integralen

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig

$\exists \xi \in [a, b]: \quad \int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a)$

Konsequenz des Mittelwertsatz für Integrale

$f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f$ stetig, g beschr. integr.

$\forall x \in [a, b]: \quad g(x) \geq 0$

$\implies \exists \xi \in [a, b]: \int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx$

Integration ist die Umkehrfunktion der Ableitung

$a < b, \quad f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig

$F(x): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) \mapsto \int_a^x f(t) dt,$

ist in $[a, b]$ stetig, diff.-bar und $F'(x) = f(x)$.

Stammfunktionen

$a < b, \quad f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig

$F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist Stammfunktion von f

$\stackrel{\text{def.}}{\iff} F$ stetig diff.-bar in $[a, b]$ und $F' = f$ in $[a, b]$.

Fundamentalsatz der Differentialrechnung

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig

Die Stammfunktion F von f existiert s.d.

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Bogenlänge

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

6.3 Integrationsmethoden

Bei rationalen f : Polynomdivision & Partialbruchzerlegung.

Partielle Integration

$a < b$, $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig diff.-bar

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx$$

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x) dx$$

Substitution

$a < b$, $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig diff.-bar,
 $I \subset \mathbb{R}$, $\phi([a, b]) \subset I$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\phi(t)) \cdot \phi'(t) dt$$

Umgekehrte Kettenregel

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ diff., $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ diff., $[c, d] \subseteq f([a, b])$
 $\int f'(g(x)) \cdot g'(x) dx = f(g(x))$

Umformungen

$I \subset \mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$

$a, b, c \in \mathbb{R}$ s.d. $[a + c, b + c] \subset I$

$$\implies \int_{a+c}^{b+c} f(x) dx = \int_a^b f(t+c) dt$$

$a, b, c \in \mathbb{R}$ s.d. $c \neq 0$ und $[ac, bc] \subset I$

$$\implies \int_a^b f(ct) dt = \frac{1}{c} \int_{ac}^{bc} f(x) dx$$

6.4 Uneigentliche Integrale

Definition: Uneigentliche Integrale

$f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ beschr. integr auf $[a, b]$ $\forall b > a$

Falls $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$ existiert:

$$\int_a^\infty f(x) dx := \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

Man sagt: f ist auf $[a, \infty)$ integrierbar.

Reihenkonvergenz über Integration

Sei $f : [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ mon. fallend.

$$\sum_{n=1}^\infty f(n) \text{ konv.} \iff \int_1^\infty f(x) dx \text{ konv.}$$

Integration von $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

Integrierbar, falls $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx$ existiert.

Man schreibt dann: $\int_a^b f(x) dx$.

6.5 Konvergente Reihen

Integration konvergenter Folgen

$f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Folge beschr. integr. f , glm. konv. zu $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

f ist beschr. integr. und $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$

Integration konvergenter Reihen

$f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Folge beschr. integr. $\sum_{n=0}^\infty f_n$, glm. konv. in $[a, b]$

$$\sum_{n=0}^\infty \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b (\sum_{n=0}^\infty f_n(x)) dx$$

Integration von Potenzreihen

$f(x) = \sum_{n=0}^\infty c_n x^n$ s.d. $\rho > 0$.

$\forall 0 \leq r < \rho$: f auf $[-r, r]$ integr. und

$$\forall x \in (-\rho, \rho): \int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^\infty \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}$$

6.6 Approximationsformeln

Bernoulli Polynome

Wir nutzen Polynome P_n , die erfüllen:

$$P'_k = P_{k-1}, \quad k \geq 1 \quad \text{und} \quad \int_0^1 P_k(x) dx = 0 \quad \forall k \geq 1$$

Für die Bernoulli-Polynome B_k gilt: $B_k(x) = k!P_k(x)$.

B_k ist rekursiv definiert:

$$B_0 = 1, \quad B_{k-1} = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} B_i = 0$$

B_k Explizit:

$$B_k(x) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} B_i^k x^{k-i} \quad \text{s.d.} \quad \int_0^1 B_k(x) dx = 0$$

Somit:

$$B_0(x) = 1, \quad B_1(x) = x - \frac{1}{2}, \quad B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}, \quad \dots$$

$$\tilde{B}_k(x) = \begin{cases} B_k(x) & \forall x : 0 \leq x < 1 \\ B_k(x-n) & \forall x : n \leq x < n+1 \end{cases}$$

Euler-McLaurin Summationsformel

$f : [0, n] \rightarrow \mathbb{R}$ k -mal stetig diff.-bar, $k \geq 1$

Für $k = 1$:

$$\sum_{i=1}^n f(i) = \int_0^n f(x) dx + \frac{1}{2}(f(n) - f(0)) + \int_0^n \tilde{B}_1(x) f'(x) dx$$

Für $k \geq 2$:

$$\sum_{i=1}^n f(i) = \int_0^n f(x) dx + \frac{1}{2}(f(n) - f(0)) + \sum_{j=2}^k \frac{(-1)^j B_j}{j!} (f^{(j-1)}(n) - f^{(j-1)}(0)) + \tilde{R}_k$$

$$\text{s.d.} \quad \tilde{R}_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_0^n \tilde{B}_k(x) f^{(k)}(x) dx$$

Stirling'sche Formel

Zur Approximation von $n!$

$$n! \approx \frac{\sqrt{2\pi n} \cdot n^n}{e^n} \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\frac{\sqrt{2\pi n} \cdot n^n}{e^n}} = 1$$

Via Euler-McLaurin lässt sich präziser beweisen:

$$n! = \frac{\sqrt{2\pi n} \cdot n^n}{e^n} \cdot \exp\left(\frac{1}{12n} + R_3(n)\right)$$

$$\text{s.d.} \quad |R_3(n)| \leq \frac{\sqrt{3}}{216} \cdot \frac{1}{n^2} \quad \forall n \geq 1$$

7 Spezifische Funktionen

7.1 Grundfunktionen

Potenzen

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x^n$$

stetig und glatt $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$n \equiv_2 1 \iff f \text{ str. monoton wachsend}$$

Polynome

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto a_n x^n + \dots + a_0$$

stetig und glatt.

$$\deg(f) := \max_{0 \leq i \leq n} \{i \in \mathbb{N} \mid a_i \neq 0\}$$

Für poly. $f, g \neq 0$, Nullstellen von g : x_1, \dots, x_m :

$$\frac{f}{g}: \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_m\} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)} \text{ ist stetig.}$$

Betragsfunktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto |x|$$

stetig, in $x_0 = 0$ nicht diff.-bar.

$$g \text{ stetig} \implies |g|(x) := |g(x)| \text{ stetig.}$$

Abrundungsfunktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \lceil x \rceil := \max\{m \in \mathbb{Z} \mid m \leq x\}$$

f nicht stetig in $x_0 \iff x_0 \in \mathbb{Z}$

Für $D = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ ist $\lceil x \rceil: D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Min./Max.-Funktionen

$$\max(f, g)(x) := \max(f(x), g(x))$$

$$\min(f, g)(x) := \min(f(x), g(x))$$

Sind f, g stetig, sind auch $\max(f, g), \min(f, g)$ stetig.

7.2 Beweisfunktionen

Indikatorfunktion von \mathbb{Q}

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$: nicht stetig, nicht integr. in x .

$$g(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ 1-x & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Ist nur in $x = \frac{1}{2}$ stetig, sonst nirgends.

Van der Waerden Funktion

$x \in \mathbb{R}$

Sei $g(x) = \min\{|x - m| \mid m \in \mathbb{Z}\}$.

D.h. g gibt die nächste ganze Zahl zu x aus.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g(10^n x)}{10^n}$$

Die Reihe ist glm. konv. auf ganz \mathbb{R} und f stetig.

f ist nirgendwo diff.-bar.

Glatte Funktion, ohne konv. Potenzreihe

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

f ist glatt auf \mathbb{R} s.d. $\forall k \geq 0: f^{(k)}(0) = 0$.

Da $f(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$ gibt es keine P.-Reihe mit pos. ρ .

Funktion mit nicht-stetiger Ableitung

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Wobei f' nicht stetig in $x_0 = 0$.

7.3 Exponentialfunktion

Definition: Exponentialfunktion

$\forall z \in \mathbb{C}: \exp(z)$ konvergiert.

$$\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad \exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Exponentialfunktion in \mathbb{R}

$$\exp: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$$

str. mon. wachs., stetig, surj. und glatt.

$$\exp(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\exp(x) > 1 \quad \forall x > 0$$

$$\exp(x) \geq 1 + x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\exp(x) \cdot \exp(y) = \exp(x + y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Natürlicher Logarithmus

$$\exp^{-1} := \ln: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

str. mon. wachs., stetig, bijektiv und glatt.

$$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b) \quad \forall a, b \in (0, +\infty)$$

Allgemeine Potenzen

$$x^a: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty) := \exp(a \cdot \ln(x))$$

$$x > 0, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$a > 0 \implies \text{stetig, bijektiv, str. mon. wachs.}$$

$$a < 0 \implies \text{stetig, bijektiv, str. mon. fall.}$$

Potenzgesetze

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \forall x > 0:$$

$$\ln(x^a) = a \ln(x) \quad x^a x^b = x^{a+b}$$

$$(x^a)^b = x^{ab} \quad x^0 = 1$$

7.4 Trigonometrische Funktionen

Definition: Trigonometrische Funktionen

$\forall z \in \mathbb{C} : \sin(z), \cos(z)$ konv. abs.

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$
$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots$$
$$\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)} \quad \cot(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)}$$

Trigonometrische Funktionen in \mathbb{R}
 $\sin, \cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sind stetig und glatt.

$\pi := \inf\{t > 0 \mid \sin(t) = 0\} \in (2, 4)$
 $\forall 0 \leq x \leq \sqrt{6} : \quad x \geq \sin(x) \geq x - \frac{x^3}{3!}$

Nullstellen von \sin in \mathbb{R} : $\{k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$\sin(x) > 0 \quad \forall x \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$
 $\sin(x) < 0 \quad \forall x \in ((2k+1)\pi, (2k+2)\pi)$

Nullstellen von \cos in \mathbb{R} : $\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$:

$\cos(x) > 0 \quad \forall x \in (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi)$
 $\cos(x) < 0 \quad \forall x \in (-\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi, -\frac{\pi}{2} + (2k+2)\pi)$

Hyperbelfunktionen

$\cosh(x) : \mathbb{R} \rightarrow [1, \infty] \quad := \quad \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
 $\sinh(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad := \quad \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
 $\tanh(x) : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1] \quad := \quad \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

\sinh, \cosh, \tanh sind glatt.

8 Tabellen

Credits: Einige Tabellen von D. Camenisch & J. Steinmann

8.1 Trigonometrische Identitten

Trigonometrische Identitten in \mathbb{C}

| | |
|-------------------------|---------------------------------------|
| e^{iz} | $= \cos(z) + i \sin(z)$ |
| $\cos(z)^2 + \sin(z)^2$ | $= 1$ |
| $\sin(z)$ | $= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ |
| $\cos(z)$ | $= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ |
| $\sin(z + w)$ | $= \sin(z) \cos(w) + \cos(z) \sin(w)$ |
| $\cos(z + w)$ | $= \cos(z) \cos(w) - \sin(z) \sin(w)$ |
| $\sin(2z)$ | $= 2 \sin(z) \cos(z)$ |
| $\cos(2z)$ | $= \cos(z)^2 - \sin(z)^2$ |

$e^{i\pi} = -1, \quad e^{2i\pi} = 1, \quad e^{\frac{i\pi}{2}} = i$

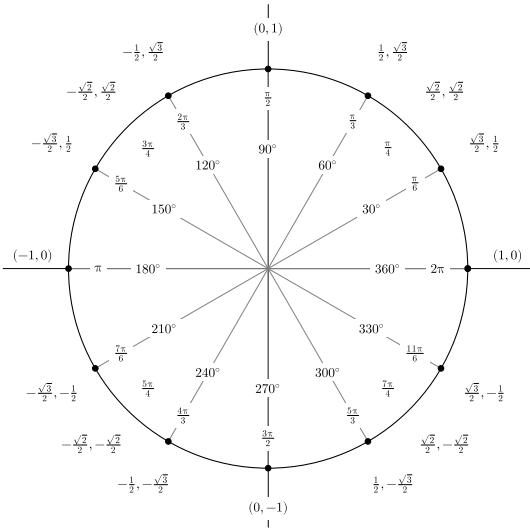
$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ kann hilfreich sein um $\sin(z)^n$ um zuschreiben.

Trigonometrische Identitten in \mathbb{R}

| | |
|---------------------------|--|
| $\sin(-x)$ | $= -\sin(x)$ |
| $\cos(-x)$ | $= \cos(x)$ |
| $\tan(-x)$ | $= -\tan(x)$ |
| $\sin(x + \frac{\pi}{2})$ | $= \cos(x)$ |
| $\cos(x + \frac{\pi}{2})$ | $= -\sin(x)$ |
| $\sin(x + \pi)$ | $= -\sin(x)$ |
| $\sin(x + 2\pi)$ | $= \sin(x)$ |
| $\sin(x)^2$ | $= \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$ |
| $\cos(x)^2$ | $= \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$ |
| $\sin(\arctan(x))$ | $= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ |
| $\cos(\arctan(x))$ | $= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ |
| $\sin(x)$ | $= \frac{\tan(x)}{\sqrt{1+\tan(x)^2}}$ |
| $\cos(x)$ | $= \frac{1}{\sqrt{1+\tan(x)^2}}$ |

8.2 Trigonometrische Funktionen: Werte

Funktionswerte am Winkelkreis



Trigonometrische Analogien

| | $-\alpha$ | $90^\circ - \alpha$ | $90^\circ + \alpha$ | $180^\circ - \alpha$ | $180^\circ + \alpha$ | $k \cdot 360^\circ - \alpha$ | $k \cdot 360^\circ + \alpha$ |
|-----|-----------|---------------------|---------------------|----------------------|----------------------|------------------------------|------------------------------|
| sin | $-\sin$ | cos | cos | sin | $-\sin$ | $-\sin$ | sin |
| cos | cos | sin | $-\sin$ | $-\cos$ | $-\cos$ | cos | cos |
| tan | $-\tan$ | cot | $-\cot$ | $-\tan$ | tan | $-\tan$ | tan |

Werte der trigonometrischen Funktionen

| α | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° | 120° | 150° | 180° | 270° |
|----------|----|------|------|------|-----|------|-------|------|------|
| | 0 | π/6 | π/4 | π/3 | π/2 | 2π/3 | 5π/6 | π | 3π/2 |
| sin | 0 | 1/2 | √2/2 | √3/2 | 1 | √3/2 | 1/2 | 0 | -1 |
| cos | 1 | √3/2 | √2/2 | 1/2 | 0 | -1/2 | -√3/2 | -1 | 0 |
| tan | 0 | √3/3 | 1 | √3 | | -√3 | -√3/3 | 0 | |

8.3 Integrale & Ableitungen

| $F(x)$ | $f(x)$ | $f'(x)$ |
|--|---------------------------------|--|
| x | c | 0 |
| $\frac{1}{a+1} \cdot x^{a+1}$ | x^a | $a \cdot x^{a-1}$ |
| $\frac{1}{a \cdot (n+1)} \cdot (ax+b)^{n+1}$ | $(ax+b)^n$ | $n \cdot (ax+b)^{n-1} \cdot a$ |
| $\ln x $ | $\frac{1}{x} = x^{-1}$ | $-\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$ |
| $\frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}}$ | $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$ |
| $\frac{n}{n+1} \cdot x^{\frac{1}{n}+1}$ | $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ | $\frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}$ |
| e^x | e^x | e^x |
| $\frac{1}{\ln(a)} \cdot a^x$ | a^x | $a^x \cdot \ln(a)$ |
| $x \cdot (\ln x - 1)$ | $\ln x $ | $\frac{1}{x} = x^{-1}$ |
| $\frac{x}{\ln(a)} \cdot (\ln x - 1)$ | $\log_a(x)$ | $\frac{1}{x \cdot \ln(a)}$ |
| $-\cos(x)$ | $\sin(x)$ | $\cos(x)$ |
| $\sin(x)$ | $\cos(x)$ | $-\sin(x)$ |
| $-\ln \cos(x) $ | $\tan(x)$ | $\frac{1}{\cos(x)^2} = 1 + \tan(x)^2$ |
| $\ln \sin(x) $ | $\cot(x)$ | $-\frac{1}{\sin(x)^2}$ |
| $x \cdot \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$ | $\arcsin(x)$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $x \cdot \arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$ | $\arccos(x)$ | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $x \cdot \arctan(x) - \frac{\ln(x^2+1)}{2}$ | $\arctan(x)$ | $\frac{1}{x^2+1}$ |
| $\sinh(x)$ | $\cosh(x)$ | $\sinh(x)$ |
| $\cosh(x)$ | $\sinh(x)$ | $\cosh(x)$ |
| $\ln \cosh(x) $ | $\tanh(x)$ | $\frac{1}{\cosh(x)^2} = 1 - \tanh(x)^2$ |
| | $\operatorname{arcsinh}(x)$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ |
| | $\operatorname{arccosh}(x)$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ |
| | $\operatorname{arctanh}()$ | $\frac{1}{1-x^2}$ |

8.4 Taylorreihen

| $f(x)$ | T_n |
|----------------|---|
| e^x | $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \mathcal{O}(x^5)$ |
| $\sin x$ | $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \mathcal{O}(x^7)$ |
| $\sinh(x)$ | $x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \mathcal{O}(x^7)$ |
| $\cos(x)$ | $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \mathcal{O}(x^8)$ |
| $\cosh(x)$ | $1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \mathcal{O}(x^8)$ |
| $\tan(x)$ | $x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \mathcal{O}(x^7)$ |
| $\tanh(x)$ | $x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \mathcal{O}(x^7)$ |
| $\log(1+x)$ | $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \mathcal{O}(x^5)$ |
| $(1+x)^\alpha$ | $1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \mathcal{O}(x^4)$ |
| $\sqrt{1+x}$ | $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \mathcal{O}(x^4)$ |

8.5 Weitere Integrale & Ableitungen

| $F(x)$ | $f(x)$ |
|--|---|
| $\frac{1}{a} \ln ax+b $ | $\frac{1}{ax+b}$ |
| $\frac{ax}{c} - \frac{ad-bc}{c^2} \ln cx+d $ | $\frac{a(cx+d)-c(ax+b)}{(cx+d)^2}$ |
| $\frac{x}{2}f(x) + \frac{a^2}{2} \ln x+f(x) $ | $\sqrt{a^2+x^2}$ |
| $\frac{x}{2}f(x) - \frac{a^2}{2} \arcsin(\frac{x}{ a })$ | $\sqrt{a^2-x^2}$ |
| $\frac{x}{2}f(x) - \frac{a^2}{2} \ln x+f(x) $ | $\sqrt{x^2-a^2}$ |
| $\ln(x+\sqrt{x^2 \pm a^2})$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$ |
| $\arcsin(\frac{x}{ a })$ | $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ |
| $\frac{1}{a} \cdot \arctan(\frac{x}{a})$ | $\frac{1}{x^2+a^2}$ |
| $-\frac{1}{a} \cos(ax+b)$ | $\sin(ax+b)$ |
| $\frac{1}{a} \sin(ax+b)$ | $\cos(ax+b)$ |
| x^x | $x^x \cdot (1 + \ln x)$ |
| $(x^x)^x$ | $(x^x)^x (x + 2x \ln x)$ |
| $x^{(x^x)}$ | $x^{(x^x)} (x^{x-1} + \ln x \cdot x^x (1 + \ln x))$ |
| $\frac{1}{2}(x - \frac{1}{2} \sin(2x))$ | $\sin(x)^2$ |
| $\frac{1}{2}(x + \frac{1}{2} \sin(2x))$ | $\cos(x)^2$ |

8.6 Grenzwerte: Folgen

| | |
|---|---|
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$ | $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0$ | $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \infty$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^m} = \infty$ | $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \infty$ | $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 1$ | $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} (1+\frac{1}{x})^b = 1$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} (1+\frac{1}{x})^b = 1$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} x^a q^x = 0, \forall 0 \leq q < 1$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$ |
| $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} (1+\frac{1}{x})^x = e$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} (1-\frac{1}{x})^x = \frac{1}{e}$ |
| $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} (1+\frac{k}{x})^{mx} = e^{km}$ | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ |
| $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(x)} = 1$ | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$ |
| $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log 1-x}{x} = -1$ | $\lim_{x \rightarrow 0} x \log x = 0$ |
| $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ |
| $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arctan x} = 1$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+k}\right)^x = e^{-k}$ | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ |
| $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a) \forall a > 0$ | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - 1}{x} = a$ |
| $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ | $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x)}{x^a} = 0$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x} = 1$ | $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{2^x} = 0$ |
| $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$ | $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$ |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ | $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$ |

8.7 Grenzwerte: Reihen

| | |
|--|---|
| $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ | $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ |
| $\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ | $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ |
| $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ | $\sum_{i=1}^{\infty} z^i = \frac{1-z^{i+1}}{1-z}$ |