Matematyka stosowana

Optymalizacja I

Andrzej Strojnowski
stroa@mimuw.edu.pl
http://www.mimuw.edu.pl/~stroa

Uniwersytet Warszawski, 2011

Streszczenie. Wykład zajmuje się programowaniem liniowym, w tym całkowitoliczbowym. Podamy dość dokładny opis własności wielościanów. Zajmiemy się teorią dualności.

Wersja internetowa wykładu:
http://mst.mimuw.edu.pl/lecture.php?lecture=op1

(może zawierać dodatkowe materiały)

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

Skład w systemie LaTeX, z wykorzystaniem m.in. pakietów beamer oraz listings. Szablony podręcznika i prezentacji: Piotr Krzyżanowski; koncept: Robert Dąbrowski.

Spis treści

1. Wiadomości wstępne

1.1. Wprowadzenie

Rozpoczniemy od przedstawienia kilku charakterystycznych przykładów zadań optymalizacji liniowej.

Zagadnienie diety.

Jak wymieszać pszenicę, soję i mączkę rybna by uzyskać najtańszą mieszankę zapewniającą wystarczającą zawartość węglowodanów, białka i soli mineralnych dla kurcząt.
Zapotrzebowanie, zawartość składników i ceny przedstawia następująca tabela:

	węglowodany	białko	sole mineralne	cena
pszenica	$0,8$	$0,01$	$0,15$	300 zł/t
soja	$0,3$	$0,4$	$0,1$	500 zł/t
mączka	$0,1$	$0,7$	$0,2$	800 zł/t
zapotrzebowanie	$0,3$	$0,7$	$0,1$	

Rozpoczynamy od wyznaczenia zmiennych. Niech x_i oznacza wagę i-tego składnika w mieszance.
Funkcją celu jest $min\ x_0 = 300x_1 + 500x_2 + 800x_3$ - czyli koszt mieszanki.

Ograniczenia są dwojakiego typu
a) W mieszance musi być wystarczająco każdego ze składników:

$0,8x_1 + 0,3x_2 + 0,1x_3 \geqslant 0,3$
$0,01x_1 + 0,4x_2 + 0,7x_3 \geqslant 0,7$
$0,15x_1 + 0,1x_2 + 0,2x_3 \geqslant 0,1$

b) Waga używanych składników jest nieujemna.
$x_1 \geqslant 0 \qquad x_2 \geqslant 0 \qquad x_3 \geqslant 0$

Podsumowując. Szukamy najmniejszej wartości funkcji trzech zmiennych $x_0 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ograniczonej do podzbioru $\mathbb{R}^3$ zwanego **obszarem dopuszczalnym**.
Zadanie to nazywamy liniowym, bo funkcja celu x_0 zależy liniowo od zmiennych x_1, x_2, x_3 i obszar dopuszczalny opisany jest zbiorem nierówności liniowych.

Zagadnienie transportowe:

Mamy 3 hurtownie i 5 sklepów. Koszt transportu jednostki towaru z i - tej hurtowni do j - tego sklepu przedstawia tabela.

$Koszt$	$s1$	$s2$	$s3$	$s4$	$s5$	podaż
$h1$	8	12	15	13	21	10
$h2$	0	1	8	3	4	31
$h3$	5	8	7	8	6	20
popyt	10	10	20	10	11	

Jak zorganizować transport, żeby koszt był minimalny?

Wprowadźmy zmienne x_{ij} opisujące ilość towaru przewożonego z i - tej hurtowni do j - tego sklepu.

Niech a_{ij} oznacza koszt przewiezienia jednostki towaru przewożonego z i - tej hurtowni do j - tego sklepu.

Jako funkcję celu przyjmijmy: $min\ x_0 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5} a_{ij}x_{ij}$

Rozpatrzmy przypadek gdy zadanie jest zbilansowane, czyli gdy podaż = popyt.

Wtedy warunkami ograniczającymi są:

$\sum_{j=1}^{5} x_{1j} = 10,\ \sum_{j=1}^{5} x_{2j} = 31,\ \sum_{j=1}^{5} x_{3j} = 20,$

$\sum_{i=1}^{3} x_{1i} = 10,\ \sum_{i=1}^{3} x_{2i} = 10,\ \sum_{i=1}^{3} x_{3i} = 20,$

$\sum_{i=1}^{3} x_{4i} = 10,\ \sum_{i=1}^{3} x_{5i} = 11$

Ponadto nie można przewozić ujemnej liczby towarów - a więc:

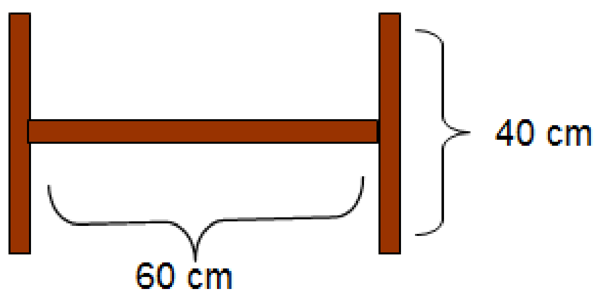
$\forall_{i,j}\ x_{ij} \geqslant 0$

Czasami towary są podzielne jak prąd czy woda, ale często dodajemy warunek, że zmienne są liczbami całkowitymi - czyli dodajemy warunki:

$\forall_{i,j}\ x_{ij} \in Z$

Dylemat stolarza

Stolarz ma zamówienie na 11 półek o kształcie jak na rysunku:



.

Rysunek 1.1.

.

Ile desek o długości 220 cm potrzebuje na wykonanie zamówienia?

Na początku ustalamy sposoby cięcia desek:

i	$60\,cm$	$40\,cm$
1	3	1
2	2	2
3	1	4
4	0	5

Wprowadzamy zmienne: x_i - liczba desek ciętych i-tym sposobem.
Teraz matematyczny model zagadnienia wygląda następująco:
$min\ x_0 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$
$3x_1 + 2x_2 + x_3 \geqslant 11$
$x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 \geqslant 22$

$\forall_i\ x_i \geqslant 0,\ x_i \in Z$

Zadania tego typu występują często w realnym życiu gdyż huty dostarczają do fabryk pręty określonej długości, które trzeba oszczędnie pociąć lub taśmę, z której trzeba wykroić detale.

Jak widzimy w zadaniach optymalizacji liniowej opisujące obszar dopuszczalny są równaniami lub nierównościami liniowymi. Do pewnego stopnia te typy warunków są wymienne.

Równość $\sum_{i=1}^{n}\ a_i x_i\ =\ b$ można zastąpić układem nierówności.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}\ a_i x_i \geqslant b \\ \sum_{i=1}^{n}\ a_i x_i \leqslant b \end{cases} \text{lub}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}\ a_i x_i & \geqslant b \\ \sum_{i=1}^{n}\ -a_i x_i & \geqslant -b \end{cases}$$

Podobnie nierówność $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \leqslant b$
można zastąpić układem:

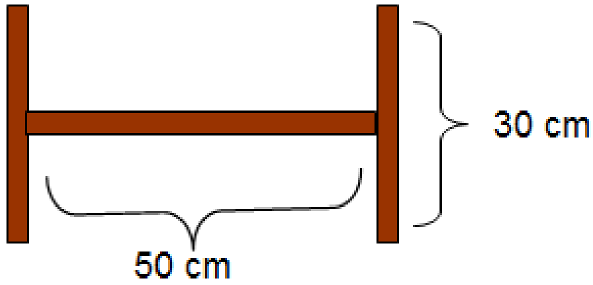
$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + x_{n+1} = b \\ x_{n+1} \geqslant 0 \end{cases}$$

Podobnie warunki minimum i maksimum w funkcji celu można stosować wymiennie gdyż:
$min\{x_0\ = f(x) \mid x \in S\} = max\{y_0 = -x_0\ = -f(x) \mid x \in S\}$

Jako uzupełniające podręczniki do wykładu polecamy [1], [2] i [12]

Ćwiczenie 1.1. Ile półek o wymiarach 30×50 można wykonać z 9 desek długości 130 cm.?
Rozwiąż zadanie graficznie.

Ćwiczenie 1.2. Przy warunkach zadania 1 wylicz ile desek potrzeba na wykonanie 11 półek.



.

Rysunek 1.2.

.

1.2. Zbiory wypukłe i zbiory domknięte

Zagadnienie optymalizacji polega na znalezieniu minimum lub maksimum funkcji $f : X \to \mathbb{R}$, gdzie X jest podzbiorem $\mathbb{R}^n$ zwanym obszarem dopuszczalnym. Od zbioru X wymagamy by był domknięty i wypukły.

Zaczniemy od opisania najważniejszych własności zbiorów wypukłych i domkniętych.

Definicja 1.1. Podzbiór $A \subset R^n$ nazywamy domkniętym jeżeli granica każdego zbieżnego ciągu punktów z A należy do zbioru A. Lub równoważnie: Jeżeli punkt p nie należy do A to istnieje $\varepsilon > 0$ taki, że kula o środku p i promieniu ε jest rozłączna z A. Symbolami zapisujemy to: $p \notin A \;\Rightarrow\; \exists_{\varepsilon>0} K(p, \varepsilon) \cap A = \emptyset$.

Będziemy też używać znanego twierdzenia o zbiorach domkniętych.

Twierdzenie 1.1. *Część wspólna zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym.*

Definicja 1.2. Domknięciem zbioru $A \subset R^n$ nazywamy zbiór
$\overline{A} = \bigcap\{B \mid A \subset B \wedge B \text{ domknięty}\}$
czyli najmniejszy zbiór domknięty zawierający A.

Jedną z najważniejszych własności obszaru dopuszczalnego jest **wypukłość**.

Definicja 1.3. Wypukłość
Podzbiór $A \subset R^n$ jest **wypukły** jeśli wraz z każdymi dwoma punktami zawiera odcinek łączący je, czyli:
$\forall_{p,q \in A}\ \overline{pq} \subset A$

Odcinek $\overline{pq}$ możemy zapisać jako
$\overline{pq} = \{p + r\overrightarrow{pq} \,|\, r \in [0, 1]\} = \{p + r(q - p) \,|\, r \in [0, 1]\} =$
$= \{p + rq - rp \,|\, r \in [0, 1]\} = \{(1 - r)p + rq \,|\, r \in [0, 1]\}$.
Ostatni zapis czytamy: $\overline{pq}$ jest zbiorem kombinacji wypukłych punktów p i q.

Definicja 1.4. **Brzegiem zbioru** $A \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy zbiór
$\partial A = \{p \in \mathbb{R}^n \,|\, \forall_{\varepsilon>0} \ \exists_{q_1,q_2} \, q_1 \in K(p,\varepsilon) \cap A, \, q_2 \in K(p,\varepsilon) \setminus A\}$.

Twierdzenie 1.2. *Podzbiór $A \subset R^n$ jest domknięty wtedy i tylko wtedy gdy zawiera swój brzeg, czyli:*
$A = \overline{A} \ \Leftrightarrow \ \partial A \subset A.$

Dowód.
$\Rightarrow$ Niech $p \notin A$. Wtedy istnieje $\varepsilon > 0$ taki, że $K(p,\varepsilon) \cap A = \emptyset$. Stąd $p \notin \partial A$.
$\Leftarrow$ Niech $p \notin A$. Ponieważ $p \notin \partial A$ więc istnieje $\varepsilon > 0$ taki, że $K(p,\varepsilon) \cap A = \emptyset$. Stąd $A = \overline{A}$.
$\square$

Definicja 1.5. **Półprzestrzenią** w R^n nazywamy zbiór rozwiązań nietrywialnej nierówności liniowej, a zatem zbiór postaci:
$H = \{(x_1, ...x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \leqslant b\}$

Twierdzenie 1.3. *Brzegiem ∂H półprzestrzeni*

$$H = \{(x_1, ...x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \leqslant b\}$$

jest hiperprzestrzeń

$$\partial H = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b\}$$

Dowód. Niech $D = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b\}$ i $p \in D$.
Ponieważ $D \subset H$ więc $\forall_{>0} \ p \in K(p,\varepsilon) \cap A$. Ponadto jeśli $p = (p_1, p_2...., p_n)$ i $a_j \neq 0$ to $\forall_{\varepsilon>0} \ p + (0, 0, ..., \frac{\varepsilon|a_j|}{2a_j}, 0, ..., 0) \in K(p,\varepsilon) \setminus A$. Zatem $D \subset \partial H$.

Niech teraz $p \notin D$. Wtedy odległość $\varrho(p,D) = \frac{|a_1p_1+a_2p_2+...+a_np_n-b|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}} > 0$,
więc dla $0 < \varepsilon < \varrho(p,D)$, $K(p,\varepsilon) \cap A = \emptyset$ gdy $p \notin H$ i $K(p,\varepsilon) \subset A$,
gdy $p \in H$. Stąd $\partial H \subset D$.
$\square$

Twierdzenie 1.4. *Półprzestrzeń jest zbiorem wypukłym i domkniętym.*

Dowód. Dowód domkniętości otrzymujemy jako wniosek z dwóch ostatnich twierdzeń.

Dowód wypukłości

Niech $p = (p_1, p_2, ...p_n)$ i $q = (q_1, q_2, ...q_n) \in H$
Niech $r \in [0, 1]$.
Pokażemy, że $rp + (1-r)q \in H$

$\sum_{i=1}^{n} a_i \ p_i \leqslant b \quad \Rightarrow \sum_{i=1}^{s} a_i \ (rp_i) \leqslant rb$
$\sum_{i=1}^{n} a_i \ q_i \leqslant \ b \quad \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i((1-r)q_i) \leqslant (1-r)b$

$\sum_{i=1}^{n} a_i\ [rp_i + (1-r)q_i] \leqslant b \Rightarrow rp + (1-r)q \in H$

□

Twierdzenie 1.5. *Część wspólna zbiorów wypukłych jest zbiorem wypukłym .*

Dowód. Niech $A = \cap_i A_i$ będzie przecięciem zbiorów wypukłych. Weźmy dwa punkty p i q ze zbioru A. Wówczas $\forall_i\, p \in A_i$ oraz $q \in A_i$. Z wypukłości wynika, że odcinek $\overline{pq} \subset A_i$. Zatem, wobec dowolności wyboru indeksu i, odcinek $\overline{pq} \subset A$ □

Przedstawimy teraz szereg faktów o rozdzielaniu zbiorów domkniętych.

Lemat 1.1. *Niech A będzie zbiorem wypukłym i domkniętym i $p \in R^n \backslash A$.*
Wtedy istnieje dokładnie jeden punkt $q \in A$ taki że odległość $\varrho(p,q) = \varrho(p,A) = \underset{q\in A}{inf}\ \varrho(p,q)$

Dowód. Weźmy dowolny punkt $x \in A$. Rozpatrujemy $A \cap K\ (p,\ \varrho(p,x)) = A'$. $\varrho(p,A) = \varrho(p,A')$ - bez zmniejszenia ogólności możemy przyjąć , że A jest zwarty.

Niech q_1, q_2,... będzie takim ciągiem punktów $\in A$ że $\underset{i\to\infty}{lim}\,\varrho(p,q_i) = \varrho(p,A)$.

Jeśli A jest zwarty to z q_n możemy wybrać podciąg q_{i_1}, q_{i_2}, ... zbieżny do pewnego punktu q. Wtedy $\varrho(p,q) = \underset{i\to\infty}{lim}\,\varrho(p,q_{i_j}) = \varrho(p,A)$. □

Twierdzenie 1.6. *Jeśli W jest zbiorem wypukłym i domkniętym zaś $p \notin W$ to istnieje półprzestrzeń H, taka że $W \subset H$ i $p \notin H$*

Dowód. Niech $q \in W$ będzie takim punktem, że $\varrho(p,W) = \varrho(p,q)$.

Przyjmijmy $H = \{x \in R^n \,|\, x \bullet (q-p) \leqslant \frac{1}{2}(q \bullet q) - \frac{1}{2}(p \bullet p)\}$. H jest półpłaszczyzną zawierającą W a jej brzeg $\partial H = \{x \in R^n \,|\, x \bullet (q-p) = \frac{1}{2}(q \bullet q) - \frac{1}{2}(p \bullet p)\}$, jak łatwo policzyć, jest symetralną odcinka $\overline{pq}$.

Przypuśćmy teraz, że istnieje punkt $q_1 \in A \setminus H$. Wtedy na odcinku $\overline{q_1 q}$ istnieje punkt $q_2 \in \partial H$. Trójkąt p, q, q_1 jest równoramienny a jego najkrótszym bokiem jest $\overline{pq}$. Zatem wysokość opuszczona z wierzchołka p ma spodek q_3 na boku $\overline{q_1 q}$. Otrzymaliśmy sprzeczność bo $q_3 \in A$ oraz $\varrho(p,q_3) < \varrho(p,q)$.

Niech $q' \in A$ będzie taki, że $\varrho(p,q') = \varrho(p,q) = \varrho(p,A)$

Jeśli $q' \neq q$ to $\varrho(p, \frac{q+q'}{2}) < \varrho(p,A)$ oraz $\frac{q+q'}{2} \in A$, bo A jest wypukły. □

Twierdzenie 1.7. *Każdy zbiór wypukły i domknięty w R^n jest częścią wspólną półprzestrzeni.*

Dowód. Niech W będzie zbiorem wypukłym i domkniętym. Z każdym punktem $p \notin W$ związujemy pewną półprzestrzeń półprzestrzeń H_p, taka że $W \subset H_p$ i $p \notin H_p$. Teraz $W = \bigcap_{p\notin W} H_p$. □

Więcej wiadomości na ten temat można znaleźć w [11].

Ćwiczenie 1.3. Niech S będzie zbiorem wypukłym w $\mathbb{R}^n$. Pokazać, że jeżeli domknięcie $\overline{S} = \mathbb{R}^n$ to i $S = \mathbb{R}^n$.

Ćwiczenie 1.4. Niech S będzie zbiorem wypukłym w $\mathbb{R}^n$.

a) Pokazać, że jego domknięcie $\overline{S}$ też jest zbiorem wypukłym.

b) Pokazać, że jego wnętrze $int\ S$ też jest zbiorem wypukłym.

Ćwiczenie 1.5. Niech S będzie zbiorem wypukłym w $\mathbb{R}^n$. Pokazać, że jeżeli domknięcie $\overline{S} = \mathbb{R}^n$ to i $S = \mathbb{R}^n$.

Ćwiczenie 1.6. Niech S będzie zbiorem wypukłym w $\mathbb{R}^n$. Pokazać, że jeżeli relatywne wnętrze $rint(S) = \emptyset$ to i $S = \emptyset$.

2. Wielościany

2.1. Przestrzenie afiniczne

Zbiorowi ciągów n elementowych o współczynnikach rzeczywistych $\mathbb{R}^n$ można nadać strukturę przestrzeni liniowej wprowadzając dodawanie ciągów (wektorów) i mnożenie przez liczby. Można też nadać strukturę przestrzeni afinicznej wprowadzając następujące działanie zwane środkiem ciężkości.

Definicja 2.1. Niech $\{p_1, p_2, \ldots, p_t\}$ będzie podzbiorem $\mathbb{R}^n$. Niech $r_1, r_2, \ldots, r_t$ będą liczbami rzeczywistymi takimi, że $\sum_{i=1}^{t} r_i = 1$. Wówczas $p = \sum_{i=1}^{t} r_i p_i$ nazywamy środkiem ciężkości punktów p_i o wagach r_i.

Branie środka ciężkości ma następujące własności:
1) $1p = p$
2) $\sum_{i=1}^{t} r_i p_i = \sum_{i=1}^{t} r_i p_i + 0q$
3) Jeżeli $p_j = \sum_{i=1}^{t} r_{i,j} q_i$ i $a = \sum_{j=1}^{k} s_j p_j$ to $a = \sum_{j=1}^{k} s_j \sum_{i=1}^{t} r_{i,j} q_i = \sum_{i=1}^{t} \left(\sum_{j=1}^{k} s_j r_{i,j} \right) q_i$.

Definicja 2.2. Podprzestrzenią afiniczną nazywamy podzbiór $\mathbb{R}^n$ zamknięty na branie środków ciężkości.

Twierdzenie 2.1. *Niech W będzie niepustym podzbiorem $\mathbb{R}^n$. Wówczas równoważne są warunki:*
1) W jest przestrzenią afiniczną.
2) W jest postaci $W = p + V$, gdzie $p \in W$ i V jest przestrzenią liniową.
3) W jest przestrzenią zbiorem rozwiązań pewnego układu równań liniowych.

Definicja 2.3. Układem bazowym przestrzeni afinicznej $W = p + V$ nazywamy ciąg $(p; \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, gdzie ciąg $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ jest bazą przestrzeni liniowej V.

Każda baza punktowa wyznacza izomorfizm afiniczny przestrzeni W na $\mathbb{R}^n$ zadany wzorem: $\varphi(p + \sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_i) = (a_1, a_2, ..., a_n)$

Definicja 2.4. Niech T będzie niepustym podzbiorem przestrzeni afinicznej R^n. Symbolem $af(T)$ oznaczać będziemy podprzestrzeń afiniczną rozpiętą przez T, czyli zbiór wszystkich środków ciężkości punktów z T.

To znaczy. Jeżeli $p_0 \in T$ to $af(T) = p_0 + lin\{\overrightarrow{p_0, p} \,|\, p \in T\} =$ $\left\{p_0 + \sum_{i=1}^{k} a_i \overrightarrow{p_0, p_i} \,|\, p \in T\right\} = \left\{\sum_{i=0}^{k} a_i p_i \,|\, p \in T, a_0 = 1 - \sum_{i=1}^{k} a_i\right\}$, gdzie ciąg $a_0, a_1, ..., a_k$ jest układem wag.

Definicja 2.5. Wymiarem zbioru T nazywamy wymiar przestrzeni $af(T)$.

Definicja 2.6. Niech T będzie niepustym podzbiorem przestrzeni afinicznej R^n. Symbolem $Conv(T)$ zbiór wszystkich środków ciężkości punktów z T o wagach nieujemnych.

To znaczy. Jeżeli $p_0 \in T$ to $af(T) \;= p_0 + lin\{\overrightarrow{p_0, p} \,|\, p \in T\} =$
$\left\{p_0 + \sum_{i=1}^{k} a_i \overrightarrow{p_0, p_i} \,|\, p \in T\right\} = \left\{\sum_{i=0}^{k} a_i p_i \,|\, p \in T, a_0 = 1 - \sum_{i=1}^{k} a_i\right\}$, gdzie ciąg $a_0, a_1, ..., a_k$ jest układem wag.

Twierdzenie 2.2. *Conv*(T) *jest najmniejszym zbiorem wypukłym zawierającym* T*.*

Dowód.

1) Wypukłość.

Niech $p = \sum_{i=0}^{k} \; a_i p_i$ oraz $q = \sum_{i=0}^{k} \; b_i p_i$ będą dwoma punktami z $Conv\ T$. Zatem $p_i \in T$, $\sum_{i=0}^{k} a_i = 1 = \sum_{i=0}^{k} b_i$ oraz $a_i \geqslant 0,\ b_i \geqslant 0$. Dowolny punkt odcinka $[p, q]$ jest postaci $(1-t)p+tq$, gdzie $t \in [0, 1]$.
Teraz $(1-t)p+tq = (1-t)\sum_{i=0}^{k} \; a_i p_i + t\sum_{i=0}^{k} \; b_i p_i = \sum_{i=0}^{k} ((1-t)a_i + tb_i)\, p_i \in Conv(T)$, gdyż $\sum_{i=0}^{k} ((1-t)a_i + tb_i) = 1$ i współczynniki są nieujemne.

2) Minimalność.

Niech X będzie zbiorem wypukłym zawierającym T. Pokażemy przez indukcję względem długości zapisu kombinacji wypukłej, że każdy punkt z $Conv(T)$ należy do X.

Niech $p = \sum_{i=0}^{k} \; a_i p_i \in Conv\ T$, gdzie $p_i \in T$, $\sum_{i=0}^{k} a_i = 1$ oraz $a_i \geqslant 0$.

1^0 $k = 0$. Wtedy $p = p_1 \in T \subset X$.

2^0 Krok indukcyjny. Zakładamy, że $k > 0$ i każda kombinacja wypukła długości $< k$ należy do X.

Punkt p przedstawiamy w postaci kombinacji wypukłej $p = \sum_{i=0}^{k} \; a_i p_i = a_1 p_1 + (1 - a_1)q$, gdzie $q = \sum_{i=1}^{k} \; \frac{a_i}{1-a_1} p_i$. Ponadto punkt $q \in X$ z założenia indukcyjnego. Gdyby $1 - a_1 = 0$ to $p = p_1$.

□

Definicja 2.7. Hiperpłaszczyzną V podpierającą zbiór wypukły $W \subset \mathbb{R}^n$ w punkcie p nazywamy taką hiperpłaszczyznę V, że $dimV = n - 1$, $p \in V$, W leży po jednej stronie V to znaczy istnieje taka półprzestrzeń H zawierająca W, że $V = \partial H$ jest brzegiem i $p \in \partial H$. Inaczej mówiąc V jest opisana równaniem

$V = \{x \,|\, \alpha \bullet x = b\}$,

gdzie $\alpha \in R^n$ i $b \in R$ są takie, że $\forall_{x \in W} \;\; \alpha \bullet x \leqslant b$ i $\alpha \bullet p = b$.

Twierdzenie 2.3. *Jeżeli* W *jest zbiorem wypukłym i domkniętym i* $p \in \partial W$ *(*p *należy do brzegu* W*) to istnieje hiperpłaszczyzną podpierającą zbiór* W *w punkcie* p*.*

Dowód. Niech $p \in \partial W$

Istnieje zatem ciąg punktów $p_1, p_2, ... \notin W$ taki że $\varrho(p_i, p) < \frac{1}{i}$.

Z każdym z tych punktów związujemy pewną hiperprzestrzeń rozdzielającą wyznaczoną przez wektory α_i oraz liczby b_i spełniające warunki:

1° $\quad p_i \bullet \alpha_i > b_i$

2° $\quad \forall_{q \in W} \quad q \bullet \alpha_i \leqslant b$

$(\{x \in \mathbb{R}^n \mid x \bullet \alpha_i \leqslant b_i\}$ jest półprzestrzenią zawierającą W, której brzeg jest hiperprzestrzenią rozdzielającą p_i oraz $W)$

3° $\quad \alpha_i \bullet \alpha_i + b_i^2 = 1$

Przyjmijmy $\overline{\alpha_i} = (\alpha_i, b) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Zbiór $\overline{\alpha_1}$, $\overline{\alpha_2}$, ... jest zwarty w kuli jednostkowej $K(0,1) \subset R^{n+1}$. Ponieważ $K(0,1)$ jest zwarta, to w ciągu $\overline{a_i}$ możemy wybrać podciąg zbieżny (ze względów redakcyjnych przyjmujemy, bez zmniejszenia ogólności, że $\overline{\alpha_i}$ jest zbieżny).

Oznacza to, że zbieżne też są ciągi α_i oraz b_i.

Przyjmijmy:

$\lim\limits_{i\to\infty} \alpha_i = \alpha$

$\lim\limits_{i\to\infty} b_i = b$

Ponadto $\lim\limits_{i\to\infty} \overline{\alpha_i} = \overline{\alpha}$ implikuje $\|\overline{\alpha}\| = 1$.

Badamy $H = \{x \mid \alpha \bullet x \leqslant b\}$.

Dla dowolnego punktu $q \in W$ $\alpha_i \bullet q \leqslant b_i$ więc $\alpha \bullet q \leqslant b$ (bo nierówności tępe zachowują się przy przejściu do granicy). Więc $W \subseteq H$.

Aby wykazać, że ∂H jest hiperprzestrzenią podpierającą W w punkcie p wystarczy pokazać $\alpha \bullet p = b$. Ponieważ $p \in W$ więc $\alpha \bullet x \leqslant b$. Ponadto $p \bullet a = \lim\limits_{i\to\infty} p \bullet a_i \geqslant \lim\limits_{i\to\infty} b_i = b$ □

2.2. Wielościany

Definicja 2.8. Wielościanem (uogólnionym) w $\mathbb{R}^n$ nazywamy część wspólną skończonej rodziny półprzestrzeni.

W szczególności $\mathbb{R}^n$ jako przecięcie pustej rodziny półprzestrzeni i $\emptyset$ są wielościanami.

Ponieważ każdy zbiór wypukły i domknięty jest przecięciem półprzestrzeni, patrz twierdzenie 1.7, więc może być aproksymowany wielościanami z dowolną dokładnością. Szukanie ekstremów funkcji tylko na wielościanach nie jest więc poważnym ograniczeniem.

Tak jak trójkąt jest trójkątem niezależnie czy traktujemy go jako podzbiór płaszczyzny, przestrzeni 3 - wymiarowej czy większej tak też następne twierdzenie pokazuje, że pojęcie wielościanu nie zależy od wymiaru przestrzeni.

Twierdzenie 2.4. *Niech W będzie niepustym podzbiorem przestrzeni afinicznych $V_1 \subset V_2$. Wówczas W jest wielościanem w V_1 wtedy i tylko wtedy gdy W jest wielościanem w V_2.*

Dowód. Przyjmijmy $V_1 \simeq \mathbb{R}^n$ i $V_2 \simeq \mathbb{R}^t$

$\Rightarrow$

Wprowadźmy układ bazowy $(p; \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ przestrzeni V_1 i rozszerzamy go do układu bazowego $(p; \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \alpha_{n+1}, ..., \alpha_t)$ przestrzeni V_2. Teraz jeżeli $W = \bigcap_{i=1}^k H_i$, gdzie $H_i \subset V_1$ są opisane nierównościami

$H_i = \{x \mid (a_{i,1}, a_{i,2}, ..., a_{i,n}) \bullet x \leqslant b_i\}$ to w przestrzeni V_2 zbiór W jest opisany układem nierówności: $(a_{i,1}, a_{i,2}, ..., a_{i,n}) \bullet x \leqslant b_i\}$ dla $1 \leqslant i \leqslant k$ oraz $x_j \leqslant 0$ i $-x_j \leqslant 0$ dla $n+1 \leqslant j \leqslant t$.

$\Leftarrow$ Niech $W = \bigcap_{i=1}^k H_i$, gdzie H_i są podprzestrzeniami V_2. Teraz $W = \bigcap_{i=1}^k (H_i \cap V_1)$ a oczywistym jest, że $H_i \cap V_1$ może być półprzestrzenią w V_1 lub całą przestrzenią V_1.

□

Definicja 2.9. **Ścianą** zbiory wypukłego W nazywamy $W \cap V$ gdzie V jest hiperprzestrzenią podpierającą.

Wymiarem ściany nazywamy liczbę $j = dim\ af(W \cap V)$.

Wierzchołkiem nazywamy taki punkt $p \in W$, że istnieje półprzestrzeń H taka, że $W \subset H$ i $\{p\} = \partial H \cap W$.

Krawędź K jest podzbiorem prostej takim, że $|K| > 1$ i istnieje półprzestrzeń H taka że $W \subset H$ i $K = \partial H \cap W$.

Uwaga 2.1. Zwykle wierzchołkiem nazywać będziemy nie tylko zbiór $\{p\}$ ale także punkt p.

Twierdzenie 2.5. *Rozpatrujemy zadanie optymalizacji liniowej:*

$Max\ x_0 = c \bullet x$, *gdzie* $x \in W$ *i* W *jest opisane układem nierówności:*

$$\begin{cases} \alpha_1 \bullet x \leqslant b_1 \\ \alpha_2 \bullet x \leqslant b_2 \\ \quad \vdots \\ \alpha_t \bullet x \leqslant b_t \end{cases}.$$

Niech $p \in W$ *będzie takim punktem, że* $\alpha_i \bullet x = b_i$, *dla* $i = 1, 2, ..., j$ *oraz* $\alpha_i \bullet x < b_i$, *dla* $i > j$. *Wówczas:*

1) Jeżeli dla pewnych liczb rzeczywistych $r_1 \geqslant 0, r_2 \geqslant 0, ..., r_j \geqslant 0$

$c = \sum_{i=1}^{j} r_i \alpha_i$ *to* p *jest punktem optymalnym tego zadania.*

2) Jeżeli p *jest punktem optymalnym tego zadania to* $\partial H = \{x \in R^n, | \, c \bullet x = c \bullet p\}$ *jest hiperprzestrzenią podpierającą* W *w punkcie* p.

Uwaga 2.2. Jednym z podstawowych twierdzeń teorii dualności jest:

p jest punktem optymalnym tego zadania wtedy i tylko wtedy gdy dla pewnych liczb rzeczywistych $r_1 \geqslant 0, r_2 \geqslant 0, ..., r_j \geqslant 0$ zachodzi $c = \sum_{i=1}^{j} r_i \alpha_i$.

Rozpoczynamy od naturalnego faktu.

Stwierdzenie 2.1. *Niech* $S = W \cap \partial H$ *będzie ścianą wielościanu* W.

Jeżeli $S \neq W$ *to* $dim\ S < dim\ W$.

Dowód. Niech $q \in W \setminus S$. Ponieważ ∂H jest przestrzenią afiniczną więc $af(S) \subset \partial H$ i $q \notin \partial H$. Zatem $af(S) \neq af(W)$ co implikuje $dim\ S < dim\ W$. □

Udowodnimy teraz lemat przygotowawczy:

Lemat 2.1. *Niech* $K \subset H$ *będzie j-wymiarową kulą o środku* p *zawartą w półprzestrzeni* H. *Jeżeli* $p \in \partial H$ *to* $K \subset \partial H$.

Dowód. Niech $q \in K \cap H \quad q \notin \partial H$. Przyjmijmy:

$H = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \alpha \bullet x \leqslant b\}$ wtedy $\alpha \bullet q < b$ i $\alpha \bullet p = b$.

Ale $p = \frac{1}{2}q + \frac{1}{2}q'$ dla pewnego $q \in K$

Dochodzimy do sprzeczności, gdyż z jednej strony

$q' \in K \subset H$ implikuje $\alpha \bullet q' \leqslant b$

zaś z drugiej strony

$\alpha \bullet q' = \alpha \bullet 2p - q = 2\alpha \bullet p - \alpha \bullet q = 2b - \alpha \bullet q > b$.

□

Definicja 2.10. Niech $H = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \alpha \bullet x \leqslant b\}$ będzie półprzestrzenią.
Półprzestrzenią dopełniającą nazywamy półprzestrzeń $H^- = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \alpha \bullet x \geqslant b\}$

Stwierdzenie 2.2. *Jeżeli H jest półprzestrzenią to $H \cup H^- = \mathbb{R}^n$ i $H \cap H^- = \partial H = \partial H^-$.*

Stwierdzenie to prowadzi bezpośrednio do wniosku.

Wniosek 2.1. *Niech $W = \bigcap_{i=1}^t H_i \subset \mathbb{R}^n$ będzie wielościanem. Wówczas, dla każdego i, $S = W \cap \partial H_i = W \cap H_i^-$ jest ścianą wielościanu W lub zbiorem pustym.*

Lemat 2.2. *Niech $W = \bigcap_{i=1}^t H_i$ zaś $S = W \cap \bigcap_{i=1}^s H_i^-$ będzie niepustym podzbiorem. Wówczas S jest ścianą W.*

Dowód. Niech $H_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_i \bullet x \leqslant b_i\}$ Definiujemy półprzestrzeń $H = \{x \in R^n \mid \sum_{i=1}^s \alpha_i \bullet x \leqslant \sum_{i=1}^s b_i\}$. Oczywiście jeżeli $q \in W$ to $\forall_i\ \alpha_i \bullet x = b_i$ implikuje $q \in H$. Ponadto $S \subset \partial H$.

Niech teraz $q \in \partial H \cap W$ wtedy warunki $\forall_{i \leqslant s}\ \alpha_i \bullet q \leqslant b_i$ oraz $\sum_{i=1}^s \alpha_i \bullet q = \sum_{i=1}^s b_i$ implikują $\alpha_i \bullet q = b_i$ dla $i \leqslant s$. Zatem $S = \partial H \cap W$.

□

3. Wierzchołki i krawędzie

3.1. Wierzchołki i krawędzie

Definicja 3.1. Niech $T \in \mathbb{R}^n$ będzie niepustym podzbiorem. **Relatywnym wnętrzem** zbioru T nazywamy podzbiór $rint(T) = \{p \in T \,|\, \exists_{\varepsilon>0}\, K(p,\varepsilon) \cap af(T) \subset T\}$.

Pojęcie relatywnego wnętrza jest praktyczniejsze przy badaniu wielościanów niż zwykłe wnętrze. Np. relatywnym wnętrzem odcinka w przestrzeni trójwymiarowej jest odcinek otwarty mimo, że cały odcinek jest brzegiem.

Stwierdzenie 3.1. *Jeżeli T jest niepustym podzbiorem wypukłym w $\mathbb{R}^n$ to $rint(T) \neq \emptyset$.*

Dowód zostawiamy czytelnikowi.
Zajmijmy się kluczowym lematem przy opisie ścian wielościanu.

Lemat 3.1. *Niech p będzie punktem wielościanu $W \subset R^n$, opisanego układem:*

$$\left\{ x \in R^n \,|\, \begin{array}{rl} \alpha_1 \bullet x & \leqslant b_1 \\ \alpha_2 \bullet x & \leqslant b_2 \\ & \vdots \\ \alpha_t \bullet x & \leqslant b_t \end{array} \right. .$$

Dodatkowo zakładamy, że równania są tak ustawione by:
$\alpha_i \bullet p = b_i$ *dla* $1 \leqslant i \leqslant s$*;*
$\alpha_i \bullet p < b_i$ *dla* $s < i \leqslant t$*;*
Oznaczmy literą j liczbę $n - rz\, A_p$ czyli wymiar przestrzeni opisanej macierzą A_p,
gdzie $A_p = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_s \end{bmatrix}$*, jest podmacierzą macierzy opisującej W złożoną z s pierwszych wierszy macierzy opisującej W.*
Wówczas:
1) $S = \bigcap_{i=1}^{t} H_i \;\cap\; \bigcap_{i\leqslant s} H_i^-$ jest ścianą wymiaru j i punkt p należy do jej relatywnego wnętrza.
2) p jest środkiem pewnej kuli j-wymiarowej kuli zawartej w W.
3) p nie jest środkiem żadnej kuli $j+1$ - wymiarowej kuli zawartej w W.

Dowód. Z lematu 2.2 wynika, że S jest ścianą.
Badamy teraz wymiar ściany S.
Niech V będzie zbiorem rozwiązań układu równań pochodzących od
s pierwszych nierówności opisujących W o macierzy A_p.
Czyli $V = \{x \in R^n \,|\, \forall_{1\leqslant i\leqslant s}\; \alpha_i \bullet x = b_i\}$. Na mocy twierdzenia Kroneckera - Capellego V jest przestrzenią afiniczną wymiaru j. Z określenia V mamy inkluzję $V \subset \partial H$. Dla punktów z W zachodzi też przeciwna inkluzja $\partial H \cap W \subset V$ czyli $S \subset V$. Rzeczywiście, niech $q \in S$. $\alpha_i \bullet q \leqslant b_i$ dla $i \leqslant s$ oraz $\sum_{i=1}^{s} \alpha_i \bullet q \leqslant \sum_{i=1}^{s} b_i$ implikuje $\alpha_i \bullet q = b_i$ dla $i \leqslant s$. Otrzymujemy stąd oszacowanie wymiaru S $dimS \leqslant dimV = j$.
Budujemy kulę.

Istnieje taki $\varepsilon > 0$, że dla każdej półprzestrzeni H_i opisującej wielościan W, jeżeli $p \notin \partial H \Rightarrow K(p\,;\varepsilon) \subset H$. Teraz $K = K(p\,;\varepsilon) \cap S$ jest kulą o środku p i zawartą w półprzestrzeniach H_i, dla $i > s$. Ponadto na mocy lematu 2.1 $K \subset \partial H$ stąd $K \subset S \subset W$. Stąd $dim K = j$.

Podsumujmy: Punkt p jest środkiem pewnej kuli j-wymiarowej kuli zawartej w $S \subset W$.

Ad 3) Niech K będzie kulą o środku p zawartą w wielościanie W. Wtedy $\forall_{i \leqslant s}\ K \subset H_i$ i $p \in \partial H_i$. Na mocy lematu 2.1 $K \subset \partial H \cap W = S$. Stąd $dim\ K \leqslant j$.

Przypuśćmy teraz, że wymiar ściany S jest większy niż j. Niech q będzie punktem wewnętrznym S. Wtedy istnieje kula K o środku w q wymiaru takiego jak ściana S. Wtedy $\forall_{i \leqslant s}\ K \subset H_i$ oraz $q \in \partial H_i$. Na mocy lematu 2.1 $K \subset \partial H \cap W = S$. Stąd $dim\ S \leqslant j$.

A zatem p jest punktem wewnętrznym j-wymiarowej ściany S.

□

Stwierdzenie 3.2. *Niech $S = W \cap \partial H$ będzie ścianą wielościanu W. Wówczas $S = W \cap af(S)$.*

Dowód. Inkluzja $S \subset W\ \cap\ af(S)$ jest oczywista.

Ponieważ $S \subset \partial H$ i ∂H jest podprzestrzenią więc $af(S) \subset \partial H$.
Stąd $W\ \cap\ af(S) \subset W \cap\ \partial H = S$. □

Lemat 3.2. *Niech S będzie ścianą wielościanu $W = \bigcap_{i=1}^{t}\ H_i$ zaś p jej punktem wewnętrznym. Wówczas $S = W\ \cap\ \bigcap_{p \in \partial H_i}\ H_i^-$.*

Dowód. Niech $S = W \cap \partial H$, dla pewnej półprzestrzeni $H \supset W$. Wówczas

$W = H \cap \bigcap_{i=1}^{t}\ H_i$ i z dowodu poprzedniego lematu

$S = W \cap \partial H\ \cap\ \bigcap_{p \in \partial H_i}\ \partial H_i\ \subset W \cap\ \bigcap_{p \in \partial H_i}\ \partial H_i = \overline{S}$. Do dowodu $S = \overline{S}$ wystarczy zauważyć, że S jest ścianą samego wymiaru co $\overline{S}$, gdyż każda kula o środku w p zawarta w $\overline{S}$ jest zawarta w S. □

Bezpośrednio z lematów 2.2 i 3.2 otrzymujemy:

Twierdzenie 3.1. *Niech $W = \bigcap_{i=1}^{t}\ H_i\ \subset \mathbb{R}^n$ będzie wielościanem zaś T podzbiorem $\{1, 2, 3, ..., t\}$. Wówczas*

1) $S = \bigcap_{i=1}^{t}\ H_i \cap \bigcap_{i \in T}\ H_i^-$ jest ścianą lub zbiorem pustym.

2) Każda ściana S wielościanu W jest postaci $S = \bigcap_{i=1}^{t}\ H_i \cap \bigcap_{\{i\,|\,p \in H_i\}}\ H_i^-$, gdzie p jest dowolnym punktem z wnętrza S.

Wniosek 3.1. *Ściana ściany wielościanu jest ścianą.*

Popatrzmy jak poprzednie lematy można zastosować do opisu wierzchołków.

Twierdzenie 3.2. *Niech p będzie punktem wielościanu $W \subset R^n$, opisanego układem*

$$\left\{ x \in R^n : \begin{array}{rl} \alpha_1 \bullet x & \leqslant b_1 \\ \alpha_2 \bullet x & \leqslant b_2 \\ \dots & \\ \alpha_t \bullet x & \leqslant b_t \end{array} \right. .$$

Dodatkowo zakładamy, że równania są tak ustawione by:
$\alpha_i \bullet p = b_i$ dla $1 \leqslant i \leqslant s$;
$\alpha_i \bullet p < b_i$ dla $s < i \leqslant t$;
Wówczas równoważne są warunki:
1) p jest wierzchołkiem wielościanu W..
2) p nie jest środkiem odcinka zawartego w W.
2a) p nie jest nietrywialną kombinacją wypukłą punktów z W.
3) rząd macierzy $A_p = n$ gdzie $A_p = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_s \end{bmatrix}$, jest podmacierzą macierzy opisującej W złożoną z pierwszych s wierszy tej macierzy.

Dowód. Implikacje 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 1) wynikają bezpośrednio z lematu 3.1.

Implikacja 2) $\Rightarrow$ 2a) jest oczywista.

Dowód 2a) $\Rightarrow$ 2). Niech $p = \sum_{i=1}^{t} r_i p_i$ będzie nietrywialną kombinacją wypukłą punktów z W. To znaczy $\forall_i\, r_i > 0$ i wszystkie punkty są różne. Wtedy $p = r_1 p_1 + (1 - r_1) \sum_{i=2}^{t} r_i p_i$ należy do wnętrza odcinka o końcach p_1 i $\sum_{i=2}^{t} r_i p_i$ a więc jest środkiem pewnego mniejszego odcinka zawartego w W. □

Wniosek 3.2. *Wielościan ma co najwyżej skończoną liczbę wierzchołków. Dokładniej: Jeżeli W jest wielościanem w R^n opisanym przez t półprzestrzeni to W zawiera co najwyżej $\binom{t}{n}$ wierzchołków.*

Algorytm szukania wierzchołków.

Z nierówności opisujących wielościan wybieramy n liniowo niezależnych. Zamieniamy je na równania i rozwiązujemy otrzymany układ n równań.

Ponieważ równania są niezależne rozwiązanie jest jednoznaczne. Jeżeli rozwiązanie spełnia pozostałe nierówności **to** otrzymaliśmy wierzchołek.

Procedurę tą możemy stosować $\binom{t}{n}$ razy.

Analogicznie możemy opisywać krawędzie.

Twierdzenie 3.3. *Niech p będzie punktem wielościanu $W \subset R^n$, opisanego układem:*

$$\begin{cases} \alpha_1 \bullet x \leqslant b_1 \\ \alpha_2 \bullet x \leqslant b_2 \\ \quad \dots \\ \alpha_t \bullet x \leqslant b_t \end{cases}.$$

Dodatkowo zakładamy, że równania są tak ustawione by:

$\alpha_i \bullet p = b_i$ *dla* $1 \leqslant i \leqslant s$;

$\alpha_i \bullet p < b_i$ *dla* $s < i \leqslant t$;

Wówczas równoważne są warunki:

1) p jest punktem wewnętrznym krawędzi wielościanu W. ($p \in rint(W)$)

2) p jest środkiem odcinka zawartego w W ale nie jest środkiem koła (kuli wymiaru 2) zawartego w W.

3) rząd macierzy $A_p = n - 1$ gdzie $A_p = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_s \end{bmatrix}$, jest podmacierzą macierzy opisującej W złożoną z pierwszych s wierszy tej macierzy.

Wniosek 3.3. *Wielościan ma co najwyżej skończoną liczbę wierzchołków. Dokładniej: Jeżeli W jest wielościanem w R^n opisanym przez t półprzestrzeni to W zawiera co najwyżej $\binom{t}{n-1}$ wierzchołków.*

Algorytm szukania krawędzi.

Z nierówności opisujących wielościan wybieramy $n-1$ liniowo niezależnych. Zamieniamy je na równania i rozwiązujemy otrzymany układ $n-1$ równań.

Ponieważ równania są niezależne rozwiązanie jest prosta, nazwijmy ją l. Aby wyliczyć krawędź zawartą w otrzymanej prostej przedstawiamy ją w postaci parametrycznej $l = q + t\alpha, t \in \mathbb{R}$. Wstawiamy równanie prostej

do pozostałych nierówności i otrzymujemy ograniczenia na t.

Procedurę tą możemy stosować $\binom{t}{n-1}$ razy.

Algorytm szukania krawędzi wychodzących z wierzchołka .

Wypisujemy wszystkie nierówności, które punkt p spełnia jako równości. Z tego zbioru n$-$1 liniowo niezależnych. i dalej jak w poprzednim algorytmie.

Twierdzenie 3.4. *Niech $W \subseteq R^n$ będzie wielościanem $\neq \emptyset$ opisanym wzorem $W= \left\{x \in R^n \mid Ax^T \leqslant b\right\}$*

Wówczas równoważne są warunki:

1) W zawiera wierzchołek

2) $rzA = n$

3) W nie zawiera prostej

Dowód. 1) $\Rightarrow$ 2) wniosek z twierdzenia 3.3.

Dowód 2) $\Rightarrow$ 3)

Przypuśćmy, że $\{p + r\alpha \mid r \in R\}$ jest prostą w W $(p, \alpha \in R^n)$

$\forall_{r\in R} \quad A(p + r\alpha) \leqslant b$

$$A = \overbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_t \end{bmatrix}}^{n} \quad b = \left.\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_t \end{bmatrix}\right\} t$$

$\forall_{1\leqslant i\leqslant s} \quad \alpha_i \bullet p + r\alpha \leqslant b_i$

$\alpha_i \bullet p + r\alpha_i \bullet \alpha \leqslant b_i$

$r(\alpha_i \bullet \alpha) \leqslant b_i - \alpha_i \bullet p$

$\forall_{1\leqslant i\leqslant s} \quad \forall_{t\in R} \quad r(\alpha_i \bullet \alpha) \leqslant b_i - \alpha_i \bullet p\,.$

Ale $\alpha_i \bullet \alpha > 0 \Rightarrow r \leqslant \frac{b_i - \alpha_i \bullet p}{\alpha_i \bullet \alpha}$

$a_i \bullet \alpha < 0 \Rightarrow r \leqslant \frac{b_i - \alpha_i \bullet p}{\alpha_i \bullet \alpha}$.

Zatem $\alpha_i \bullet \alpha = 0$

i α jest niezerowym rozwiązaniem jednorodnego układu równań liniowych $A[y] = \theta$.

Wynika stąd, że wymiar przestrzeni rozwiązań jest $\geqslant 1$. Na mocy twierdzenia Kroneckera - Capellego $rzA < n$

-sprzeczność

3) $\Rightarrow$ 1)

Każdemu punktowi $p \in W$ przyporządkowujemy najmniejszą liczbę naturalną n_p taką, że p leży na ścianie wymiaru n_p.

Niech $q \in W$ będzie punktem takim, że liczba n_q jest najmniejsza.

Bez zmniejszania ogólności można przyjąć

$$\begin{aligned} \alpha_1 \bullet q &= b_1 \\ \alpha_2 \bullet q &= b_2 \\ &\vdots \\ \alpha_k \bullet q &= b_k \\ \alpha_{k+1} \bullet q &< b_{k+1} \\ &\vdots \\ \alpha_t \bullet q &< b_t \end{aligned}$$

Oznacza to, że indeks

$$n_q = n - rz \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix}$$

Przypuśćmy, że $n_q \neq 0$ czyli $rz \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix} < n$

Wtedy układ równań $\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix}$

ma niezerowe rozwiązanie α. Zatem prosta $\{q + t\alpha \,|\, t \in R\}$ spełnia

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix} \cdot [q + t\alpha] \leqslant \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix}.$$

Prosta $q + t\alpha \not\subset W$, więc $\{t \in R \,|\, q + t\alpha \in W\}$ jest właściwym podzbiorem R. Zatem istnieje punkt graniczny t_0. Przyjmijmy,
że $\forall_{t > t_0} \quad q + t\alpha \notin W \quad q + t_0\alpha \in W$. Oznacza to, że istnieje $i > k$ taki, że $\alpha_i \bullet q + t_0\alpha = b_i$ oraz $n_q + t_0 < n_q$.

Otrzymaliśmy sprzeczność. □

Wniosek 3.4. *Niech $\emptyset \neq W_1 \subset W_2$ będą wielościanami. Jeżeli W_2 zawiera wierzchołek to W_1 też zawiera wierzchołek.*

Dowód. W_2 zawiera wierzchołek $\Rightarrow$ W_2 nie zawiera prostej $\Rightarrow$ W_1 nie zawiera prostej $\Rightarrow$ W_1 zawiera wierzchołek.

□

Wniosek 3.5. *Niech $\emptyset \neq W \subset R^n$ będzie opisane $W = \{x \in R^n \,|\, Ax = b \wedge x \geqslant 0\}$*
Wtedy W zawiera wierzchołek

Dowód. $W \subset W_2$ gdzie $W_2 = \{x \in R^n \,|\, x \geqslant 0\}$ czyli $-x \leqslant 0$

ale $rz \begin{bmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ & \vdots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{bmatrix} = n$

Stąd W_2 zawiera wierzchołek, więc W_1 też. □

Twierdzenie 3.5. *Niech $W \subset \mathbb{R}^n$ będzie wielościanem z wierzchołkiem. Niech S będzie ścianą wielościanu W. Wówczas S ma wierzchołek i każdy wierzchołek S jest wierzchołkiem W.*

Dowód. Przyjmijmy $W = \bigcap_{i=1}^{t} H_i$, $S = W \cap \partial H = \bigcap_{i=1}^{t} H_i \cap \partial H$, gdzie H_i, H są półprzestrzeniami, $W \subset H$ i ∂H jest hiperprzestrzenią podpierającą W w punkcie p; ($p \in W \cup \partial H$). Niech $H = \{x \,|\, \alpha \bullet x \leqslant b\}$.

S jest wielościanem więc na mocy poprzedniego wniosku zawiera wierzchołek. Przypuśćmy, że p jest wierzchołkiem S ale nie jest wierzchołkiem W. Zatem rząd macierzy powstałej z wektorów opisujących te półprzestrzenie H_i, że $p \in \partial H_i$ jest mniejszy niż n. Stąd $p \in \partial H$. Niech q_1, q_2 będą końcami odcinka zawartego w W, którego p jest środkiem. Przyjmijmy $q_1 \in S \subseteq W$. Wtedy $p \in H \setminus \partial H$. Stąd $\alpha \bullet q_1 < b$.

Ale $\alpha \bullet q_2 = \alpha \bullet (2p - q_1) = \alpha \bullet 2p - \alpha \bullet q_1 > b$. Otrzymaliśmy sprzeczność bo $q_2 \in W \subseteq H$. $\square$

Bezpośrednio stąd wynika.

Wniosek 3.6. *Niech $W \subset R^n$ będzie wielościanem z wierzchołkiem. Wtedy każda krawędź wielościanu W zawiera pewien wierzchołek W.*

Ćwiczenie 3.1. Niech $W = \bigcap_{i=1}^{t} H_i \subset \mathbb{R}^n$ będzie wielościanem. Jeżeli $W \neq \bigcap_{i=2}^{t} H_i$ to $W \cap \partial H_1$ jest ścianą W wymiaru $\geqslant dim W - 1$.

Ćwiczenie 3.2. Niech S będzie skończonym zbiorem punktów przestrzeni R^n. Pokazać, że zbiorem wierzchołków $Conv\, S$ jest najmniejszy podzbiór $T \subset S$, taki że $Conv\, T = Conv\, S$.

Ćwiczenie 3.3. Pokazać, że jeżeli $W \subset R^n$ jest wielościanem wymiaru k, to z każdego wierzchołka wychodzi co najmniej k krawędzi.

4. Geometryczna metoda sympleks

4.1. Twierdzenia strukturalne

Zajmiemy się teraz innym opisem wielościanów.

Twierdzenie 4.1.
1) Niech $p_1, p_2, ..., p_t$ *oraz* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ *należą do* R^n. *Ciągi* p_i *traktujemy jako punkty zaś* α_j *jako wektory. Wówczas zbiór*
$S = \left\{ \sum_{i=1}^{t} r_i p_i + \sum_{j=1}^{k} s_j \alpha_j \mid \sum_{i=1}^{t} r_i = 1 \wedge r_i \geqslant 0 \wedge s_j \geqslant 0 \right\}$.
jest wielościanem.
2) Jeżeli W *jest wielościanem to istnieją takie punkty* $p_1, p_2, ..., p_t$ *oraz wektory* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$*, że* $W = \left\{ \sum_{i=1}^{t} r_i p_i + \sum_{j=1}^{k} s_j \alpha_j \mid \sum_{i=1}^{t} r_i = 1 \wedge r_i \geqslant 0 \wedge s_j \geqslant 0 \right\}$.
3) Jeżeli W *jest wielościanem z wierzchołkiem, gdzie* $p_1, p_2, ..., p_t$ *jest zbiorem wierzchołków* W *zaś* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ *jest zbiorem wektorów krawędzi nieograniczonych to* $W = \left\{ \sum_{i=1}^{t} r_i p_i + \sum_{j=1}^{k} s_j \alpha_j \mid \sum_{i=1}^{t} r_i = 1 \wedge r_i \geqslant 0 \wedge s_j \geqslant 0 \right\}$.

Twierdzenie to ma skomplikowany dowód więc przedstawimy go dopiero po wprowadzeniu teorii dualności.

Z twierdzenia strukturalnego wynika, że każdy wielościan można przedstawić w postaci sumy algebraicznej. Gdy
$W = \left\{ \sum_{i=1}^{t} r_i p_i + \sum_{j=1}^{k} s_j \alpha_j \mid \sum_{i=1}^{t} r_i = 1 \wedge \forall_{0 \leqslant i \leqslant t}\ r_i \geqslant 0 \wedge \forall_{0 \leqslant j \leqslant k}\ s_j \geqslant 0 \right\}$ to $W = T + S$,
gdzie $T = \left\{ \sum_{i=1}^{t} r_i p_i \mid \sum_{i=1}^{t} r_i = 1 \wedge \forall_{0 \leqslant i \leqslant t}\ r_i \geqslant 0 \right\}$ jest wielościanem klasycznym
zaś $S = \left\{ p_1 + \sum_{j=1}^{k} s_j \alpha_j \mid \forall_{0 \leqslant j \leqslant k}\ s_j \geqslant 0 \right\}$ jest stożkiem.
Aby przybliżyć twierdzenie przedstawimy przykład gdy W jest sympleksem:

Przykład 4.1. Niech $p_0, p_1, \cdots, p_n$ będzie układem punktów z R^n w położeniu ogólnym takim, że $\det \begin{bmatrix} p_0 & 1 \\ p_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ p_n & 1 \end{bmatrix} > 0$. Wówczas $W = Conv\{p_0, p_1, \cdots, p_n\}$ jest wielościanem opisanym układem $n+1$ nierówności:

0) $\det \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & 1 \\ & & p_1 & & 1 \\ & & \vdots & & \vdots \\ & & p_n & & 1 \end{bmatrix} > 0$

$$1)\ \det\begin{bmatrix} & & p_0 & & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & 1 \\ & & p_2 & & \\ & & \vdots & & \vdots \\ & & p_n & & 1 \end{bmatrix} > 0$$

$$\vdots$$

$$n)\ \det\begin{bmatrix} & & p_0 & & 1 \\ & & p_1 & & 1 \\ & & \vdots & & \vdots \\ & & p_{n-1} & & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_x & 1 \end{bmatrix} > 0.$$

Ponadto zbiorem wierzchołków W jest $\{p_0, p_1, \cdots, p_n\}$ zaś krawędziami są odcinki łączące dowolne dwa wierzchołki.

Dowód. Niech $q \in \mathbb{R}^n$ będzie dowolnym punktem. Ponieważ zbiór $\{p_0, p_1, \cdots, p_n\}$ jest bazą punktową $\mathbb{R}^n$ więc istnieje taki układ wag $\{r_0, r_1, \cdots, r_n\}$, $(\sum_{i=0}^n r_i = 1)$, że $q = \sum_{i=0}^n r_i p_i$. Badamy kiedy punkt q spełnia j-tą nierówność.

$$0 \leqslant \det\begin{bmatrix} p_0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ p_{j-1} & 1 \\ q & 1 \\ p_{j+1} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ p_n & 1 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} p_0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ p_{j-1} & 1 \\ \sum_{i=0}^n r_i p_i & \sum_{i=0}^n r_i \\ p_{j+1} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ p_n & 1 \end{bmatrix} =$$

teraz dla $i \neq j$ od j-tego wiersza macierzy odejmujemy wiersz i-ty pomnożony przez r_i.

$$= \det\begin{bmatrix} p_0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ p_{j-1} & 1 \\ r_j p_j & r_j \\ p_{j+1} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ p_n & 1 \end{bmatrix} = r_j \cdot \det\begin{bmatrix} p_0 & 1 \\ p_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ p_n & 1 \end{bmatrix}.$$

Oznacza to, że punkt q spełnia j-tą nierówność wtedy i tylko wtedy gdy $r_j \geqslant 0$. Zatem punkt $q \in W$ wtedy i tylko wtedy gdy spełnia wszystkie $n+1$ nierówności.

Ponieważ dla każdego j punkt p_j spełnia wszystkie za wyjątkiem j-tej nierówności jako równania więc jest wierzchołkiem. Więcej wierzchołków nie ma gdyż n nierówności ze zbioru n+1 elementowego można wybrać na $n+1$ sposobów. Podobnie $n-1$ nierówności można wybrać na $\begin{pmatrix} n+1 \\ n-1 \end{pmatrix} = \frac{n(n+1)}{2}$ sposobów czyli tyle ile jest par wierzchołków. □

Rozpoczynamy od badania wielościanów podobnych do stożków. Wprowadźmy zatem formalną definicję.

Definicja 4.1. S-wielościanem nazywamy wielościan który ma dokładnie jeden wierzchołek.

Stwierdzenie 4.1. *Ściana s-wielościanu jest s-wielościanem.*

Dowód. Niech S będzie ścianą stożka W. Na mocy wniosku 3.5 ściana S ma wierzchołek zaś na mocy wniosku 4.1 jest to jedyny wierzchołek. □

Stwierdzenie 4.2. *Jeżeli s-wielościan W ma więcej niż jeden punkt to ma krawędź nieskończoną.*

Dowód. Niech $\{p\} = W \cap \partial H$ będzie wierzchołkiem W zaś q dowolnym innym punktem s-wielościanu. Teraz $S = W \cap (\partial H + \overrightarrow{p,q})$ jest wielościanem zawierającym q a nie zawierającym p. S ma wierzchołki na mocy wniosku 5.13. Niech q_1 będzie wierzchołkiem S. Wówczas q_1 leży na przecięciu brzegów n liniowo niezależnych półprzestrzeni opisujących S. Jednym z nich jest $\partial H + \overrightarrow{p,q}$ a pozostałe $n-1$ opisują W. Zatem q_1 należy do krawędzi W i $\overrightarrow{p,q_1}$ jest wektorem krawędzi nieskończonej. □

Lemat 4.1. *Niech p będzie punktem wielościanu W. Jeżeli wektor β spełnia warunek:*
$\forall_{r\geqslant 0}\ p + r\beta\ \in W$ *to* $\forall_{q\in W}\forall_{r\geqslant 0}\ q + r\beta\ \in W$.

Dowód. 1) Niech $W = \{x \in R^n \mid \alpha \bullet x\ \leqslant b\}$ będzie półprzestrzenią. Teraz:
$\forall_{r\geqslant 0}\ \alpha \bullet p + r\beta \leqslant b$
$\forall_{r\geqslant 0}\ \alpha \bullet p + r\alpha \bullet \beta \leqslant b$
$\forall_{r\geqslant 0}\ t\alpha \bullet \beta \leqslant b - \alpha \bullet p$
to implikuje $\alpha \bullet \beta \leqslant 0$
$\forall_{t\geqslant 0}\ \alpha \bullet q + t\beta = \alpha \bullet q + t\alpha \bullet \beta \leqslant \alpha \bullet q \leqslant b$
2) Niech $W = \bigcap_{i=1}^{t} H_i$ będzie przecięciem półprzestrzeni. Jeżeli $\forall_{r\geqslant 0}\ p + r\beta\ \in W$ to $\forall_i \forall_{r\geqslant 0}\ p + r\beta\ \in H_i$ a z kroku 1) $\forall_i \forall_{q\in H_i} \forall_{r\geqslant 0}\ q + r\beta\ \in W$. Zatem $\forall_{q\in W}\forall_{r\geqslant 0}\ q + r\beta\ \in W$. □

Uwaga. Lemat pozostaje prawdziwy gdy założenie "W jest wielościanem" zastąpimy "W jest zbiorem wypukłym i domkniętym".

Twierdzenie 4.2. *Niech $W \in \mathbb{R}^n$ będzie s-wielościanem. Wówczas $W = \left\{p + \sum_{j=1}^{k} s_j\alpha_j \mid s_j \geqslant 0\right\}$ gdzie p jest wierzchołkiem W zaś $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ jest zbiorem wektorów krawędzi nieograniczonych.*

Dowód. Dowód przez indukcję względem wymiaru W.
1^0 Jeżeli $dim\, W = 0$ to Wjest punktem i dowód jest oczywisty.
2^0 Niech p będzie wierzchołkiem $W = \bigcap_{i=1}^{t} H_i$ zaś q dowolnym innym punktem s-wielościanu. Niech α będzie wektorem krawędzi nieskończonej. Prosta $l = \{q + r\alpha\, ;\, r \in R\}$ przecięta z W daje półprostą o początku q_1. Istnieje zatem $j \leqslant t$ takie, że $q_1 \in \partial H_j$ oraz $q \notin \partial H_j$. Ściana $W \cap \partial H_j$ ma mniejszy wymiar niż W więc z założenia indukcyjnego $q_1 = p + \sum_{i=1}^{k} s_i\alpha_i$ dla pewnych $s_j \geqslant 0$ i wektorów krawędzi nieograniczonych $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$. Zatem $q = q_1 + s\alpha = p + \sum_{i=1}^{k} s_i\alpha_i + s\alpha$ ma żądane przedstawienie. □

4.2. Geometryczny algorytm metody sympleks

Definicja 4.2. Rozważmy zagadnienie PL
$Max\, \{x_0 = c \bullet x\ : x \in W\}$
Niech p będzie wierzchołkiem W, zaś α wektorem kierunkowym krawędzi wychodzącej z p
$\{p + t\alpha : t > 0\}$ lub $\{p + t\alpha : t \in [0, r]\}$ jest krawędzią.
Krawędź tą nazywamy:
poprawiającą gdy $c \bullet \alpha > 0$,

neutralną gdy $c \bullet \alpha = 0$,
pogarszającą gdy $c \bullet \alpha < 0$.

W przypadku zadania $Min\,\{x_0 = d \bullet x\ : x \in W\}$ krawędź nazywamy:
poprawiającą gdy $d \bullet \alpha < 0$,
neutralną gdy $d \bullet \alpha = 0$,
pogarszającą gdy $d \bullet \alpha > 0$.

Twierdzenie 4.3. *Jeśli z wierzchołka p wielościanu W nie wychodzi żadna krawędź poprawiająca to p jest punktem optymalnym zadania PL*

Inaczej mówiąc, dla zadań typu $Max\,\{x_0 = c \bullet x \mid x \in W\}$.

Jeżeli p jest wierzchołkiem wielościanu W i jeśli dla każdego wektora α, kierunkowego dla krawędzi wychodzącej z p iloczyn skalarny $c \bullet \alpha \leqslant 0$ to $\forall_{q \in W}\ c \bullet p \geqslant c \bullet q$

Dowód. Możemy przyjąć, że wielościan W jest opisany układem nierówności

$$\begin{cases} \alpha_1 \bullet x \leqslant b_1 \\ \alpha_2 \bullet x \leqslant b_2 \\ \quad\vdots \\ \alpha_k \bullet x \leqslant b_k \\ \quad\vdots \\ \alpha_t \bullet x \leqslant b_t \end{cases}$$

Ponadto

$$\begin{aligned} \alpha_1 \bullet p &= b_1 \\ \alpha_2 \bullet p &= b_2 \\ &\vdots \\ \alpha_k \bullet p &= b_k \\ \alpha_{k+1} \bullet p &< b_{k+1} \\ &\vdots \\ \alpha_t \bullet p &< b_t \end{aligned}$$

Zbudujmy większy wielościan U opisany pierwszymi k nierównościami:

$$\begin{cases} \alpha_1 \bullet x \leqslant b_1 \\ \quad\vdots \\ \alpha_k \bullet x \leqslant b_k \end{cases}$$

Wtedy $W \subseteq U$ i p jest jedynym wierzchołkiem U,

gdyż p jest wierzchołkiem $W \Leftrightarrow rz \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix} = n \Rightarrow p$ jest wierzchołkiem U.

Jeśli α jest wektorem krawędzi U wychodzącej z p to α jest wektorem kierunkowym krawędzi W wychodzącej z p : niech $p + \xi\alpha \in W$ ponieważ jest to punkt krawędziowy, więc rząd macierzy utworzonej przez nierówności spełnione przez $p + \xi\alpha$ jako równość, jest równy $n - 1$ dla każdego $\xi > 0$.

Przenumerowując nierówność w razie potrzeby możemy przyjąć

$$\begin{aligned} \alpha_1 \bullet p + \xi\alpha &= b_1 \\ &\dots \\ \alpha_s \bullet p + \xi\alpha &= b_s \\ \alpha_{s+1} \bullet p + \xi\alpha &\leqslant b_{s+1} \\ &\dots \\ \alpha_k \bullet p + \xi\alpha &\leqslant b_k \end{aligned}$$

Dla dostateczne małych ξ dodatkowo $\begin{aligned} \alpha_{k+1} \bullet p + \xi\alpha &\leqslant b_{k+1} \\ &\dots \\ \alpha_t \bullet p + \xi\alpha &\leqslant b_t \end{aligned}$

$rz \begin{bmatrix} a_n \\ \dots \\ a_s \end{bmatrix} = n - 1 \Rightarrow \alpha$ jest wektorem krawędziowym (jest dobry)
na mocy twierdzenia 4.2
$U = \{p + \sum_{i=1}^{m} r_i\alpha_i : r_i \geqslant 0\}$ oraz $\alpha_1, \alpha_1, ..., \alpha_1$ są wszystkimi wektorami krawędzi U

Weźmy dowolny punkt $q \in W$. Wtedy $q \in U = p + \sum_{i=1}^{m} r_i\alpha_i$.
Zatem
$x_0(q) = c \bullet q = c \bullet p + \sum_{i=1}^{m} r_i\alpha_i = c \bullet p + \sum_{i=1}^{m} r_i 0 \bullet \alpha_i \leqslant c \bullet p = x_0(p).$ □

Wniosek 4.1. *Jeśli zadanie PL ma rozwiązanie to istnieje wierzchołek obszaru dopuszczalnego, który jest punktem optymalnym.*

Wniosek 4.2. *Badając krawędzie wychodzące z wierzchołka p możemy rozstrzygnąć, czy jest to punkt optymalny.*

Geometryczny algorytm metody sympleks.

Dany wielościan opisany układem t nierówności w R^n. Dany wierzchołek p (startowy).

$x =$ zmienna (punkty)

$\alpha =$ zmienna (wektory)

0) $x := p$

1) Budujemy tablicę T złożona z kandydatów na krawędzie wychodzące z wierzchołka x

2) Dopóki $T \neq \emptyset$ wykonujemy

3) Wybieramy krawędź k z T i usuwamy

4) Jeżeli k jest krawędzią poprawiającą **to**:

5) Jeżeli k jest krawędzią nieskończoną **to** STOP: zadanie nieograniczone.

6) Jeżeli k jest wektorem krawędzią skończoną **to**:

7) Znajdujemy jej drugi koniec q

$x := q$ i wracamy **do** punktu 1)

8) $T = \emptyset$ STOP: x jest wierzchołkiem optymalnym.

Uwaga 4.1. Algorytm sympleks jest skończony, gdyż wielościan ma skończoną liczbę wierzchołków i krawędzi.

Przykład 4.2. Badamy zadanie $Max\, x_0 = 3x_1 - 2x_2$, gdzie

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leqslant 2 \\ \quad\;\; x_2 \leqslant 5 \end{cases}$$

$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0$

Jako wierzchołek startowy weźmiemy punkt $(0,0)$.
Jest on opisany układem
$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ pochodzącym z dwóch ostatnich nierówności.
Wychodzą z niego dwie krawędzie w kierunku wektora $(1,0)$ - poprawiająca i w kierunku wektora $(0,1)$ - pogarszająca.
Wybieramy krawędź $(0,0)+t(1,0)$ i szukamy ograniczenia na t podstawiając do pozostałych nierówności. $\begin{cases} t \leqslant 2 \\ 0 \leqslant 5 \\ t \geqslant 0 \end{cases}$

Więc $t \in [0,2]$ i drugim końcem krawędzi jest wierzchołek $(2,0)$ opisany układem $\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ pochodzącym z pierwszej i ostatniej nierówności. Opuszczając pierwszą równość otrzymamy krawędź, którą przyszliśmy a więc z punktu widzenia wierzchołka $(2,0)$ krawędź pogarszającą. Opuszczamy równanie $x_2 = 0$.
Równanie $x_1 - x_2 = 2$ opisuje prostą $\{(2+t,t);\ t \in R\}$.
Wstawiamy do pozostałych nierówności i otrzymujemy:

$$\begin{cases} t \leqslant 5 \\ t+2 \geqslant 0 \\ t \geqslant 0 \end{cases}.$$

Więc $t \in [0,5]$ i drugim końcem krawędzi jest wierzchołek $(7,5)$ opisany układem $\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ x_2 = 5 \end{cases}$ pochodzącym z pierwszej i drugiej nierówności. Zauważmy, że funkcja celu wzrosła z 2 do $3 \cdot 7 - 2 \cdot 5 = 11$ więc krawędź była poprawiająca.
Z wierzchołka $(7,5)$ wychodzą dwie krawędzie, pogarszająca, którą przyszliśmy i leżąca na prostej opisanej równaniem $x_2 = 5$. Wstawiając do pierwszej nierówności otrzymujemy $x_1 + 5 \leqslant 5$. Więc wektorem kierunkowym jest $(-1,0)$. Jest to krawędź pogarszająca i stąd $(7,5)$ jest wierzchołkiem optymalnym.

Ćwiczenie 4.1. Niech W będzie niepustym wielościanem zawartym w $K(\theta, 50)$ - kuli o środku w początku układu współrzędnych i promieniu 50 zawartej w R^{20}. Badamy graf G niezorientowany, którego wierzchołki są wierzchołkami W zaś krawędzie są krawędziami W.
a) Udowodnij, że G jest skończonym grafem spójnym.
b) Udowodnij, że G jest drzewem wtedy i tylko wtedy gdy W ma co najwyżej jedną krawędź.

Ćwiczenie 4.2. Niech p będzie wierzchołkiem optymalnym zadania PL o obszarze dopuszczalnym W. Wiemy, że spośród krawędzi wychodzących z p tylko jedna krawędź k jest neutralna. Udowodnij, że k jest zbiorem punktów optymalnych.

Ćwiczenie 4.3. Niech $W \in \mathbb{R}^3$ będzie wielościanem opisanym układem:

$x_1 - 2x_2 + x_3 \leqslant 3$
$2x_1 - 3x_2 - 3x_3 \leqslant 2$
$3x_1 - 5x_2 - 2x_3 \leqslant 5$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \in R$

a) Dla każdego z punktów: $A = (0,0,0)$, $B = (0,0,3)$, $C = (1,1,1)$, $D = (4,1,1)$ wylicz najmniejszy wymiar ściany W do której ów punkt należy.

b) Opisz wszystkie krawędzie W zawierające punkt $A = (0,0,0)$.

Ćwiczenie 4.4. Opisz prosty algorytm metody sympleks na przykładzie zadania:

Max $x_0 = 3x_1 + 2x_2 - 7x_3$, gdy:
$x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leqslant 3$
$2x_1 + 8x_2 - 4x_3 \leqslant 8$
$2x_1 - 3x_2 - 7x_3 \leqslant 9$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0$

5. Tablice sympleks

5.1. Tablice sympleks

Opis wierzchołków i krawędzi zadania PL w postaci kanonicznej.

Niech $W = \left\{ x \in R^n \mid Ax^T = b,\ x \geqslant 0 \right\}$będzie wielościanem. Dodatkowo zakładamy, że równania opisujące W są liniowo niezależne -
czyli $rzA = t =$ liczba równań. Niech p będzie wierzchołkiem W. Punktowi p przyporządkowujemy n nierówności spełnionych jako równości. Pierwszych t pochodzących z układu równań:

$rzA = rz[A|b]$, bo punkt p jest rozwiązaniem.

Na mocy lematu Steinitza o bazie istnieją zmienne $x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_{n-t}}$ takie, że po uzupełnieniu układu $Ax^T = b$ równaniami $x_{i_1} = 0, x_{i_2} = 0, ..., x_{i_{n-t}} = 0$ otrzymamy układ n liniowo niezależnych równań z n niewiadomymi, którego jedynym rozwiązaniem jest punkt p.

Zmienne $i_1, ..., i_{n-t}$ nazywamy niebazowymi zaś pozostałe bazowymi.

Współrzędne niebazowe wierzchołka p są równe 0.

Uwaga: Wierzchołek ma co najwyżej t niezerowych współrzędnych.

Dla ułatwienia przenumerujmy tak zmienne by $1, 2, ..., n-t$ były zmiennymi niebazowymi oraz $n-t+1, ..., n$ zmiennymi bazowymi.

Wtedy macierz równania opisującego W składa się z 3 części $A = [N|B|b]$, gdzie $[B]$ jest macierzą kwadratową.

$rz[T] = n \Rightarrow rzB = t \Rightarrow B$ jest odwracalna.

Mnożąc układ równań $Ax^T = b$ z lewej strony przez macierz B^{-1} otrzymujemy równoważny opis wielościanu W

$$[B^{-1}N|I]\, x^T \ = \ B^{-1}b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_t \end{bmatrix}$$

Zaś wierzchołek ma współrzędne $p = (0, ..., 0, b_1, b_2, ..., b_t)$.

Podsumowując, każdemu wierzchołkowi, przez wybór zmiennych bazowych przyporządkowujemy układ równań o macierzy zawierającej podmacierz jednostkową.

Definicja 5.1. **Tablicą Sympleks** nazywamy taką macierz rozszerzoną układu równań $[A|b]$, że A zawiera podmacierz jednostkową. Dokładniej, można z macierzy A tak powykreślać kolumny i poprzestawiać wiersze by uzyskać macierz jednostkową.

Tablicę sympleks nazywamy **pierwotnie dopuszczalną** gdy wszystkie wyrazy wolne są $\geqslant 0$. Co zapisujemy $b \geqslant 0$.

Tablicę sympleks nazywamy **dualnie dopuszczalną** gdy w wierszu kosztów zredukowanych (nad kreską) wszystkie wyrazy są $\geqslant 0$, dla zadania typu max lub są $\leqslant 0$, dla zadania typu Min.

Jak pokazaliśmy poprzednio każdemu wierzchołkowi odpowiada co najmniej jedna Tablica Sympleks pierwotnie dopuszczalna. Dokładniej tyle tablic ile jest możliwości wyboru zmiennych (nie)bazowych.

Stwierdzenie 5.1. *Pierwotnie dopuszczalne tablice sympleks opisują wierzchołki.*

Dowód. Niech $[A|b]$ będzie tablicą sympleks pierwotnie dopuszczalną. W macierzy wybieramy kolumny tworzące macierz jednostkową. Zmienne odpowiadające tym kolumną nazwiemy bazowymi zaś pozostałe niebazowymi. Zmiennym niebazowym przypisujemy wartość 0. Bazowe zmienne wyliczamy z układu równań po opuszczeniu zmiennych niebazowych. Tak więc zmienne bazowe przyjmują wartości wyrazów wolnych w odpowiedniej kolejności. Otrzymany punkt jest wierzchołkiem gdyż spełnia n nierówności jako równania. t z równań $Ax = b$ i $n - t$ z równań $x_i = 0$ spełnianych przez zmienne niebazowe. Dodatkowo równania te są liniowo niezależne.

□

Przykład 5.1. W Tablicy Sympleks $\left[\begin{array}{ccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & ww \\ \hline 0 & 1 & 5 & 0 & -5 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & -4 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right]$
możemy wybrać kolumny 1, 2 i 7. Niebazowymi zmiennymi są x_3, x_4, x_4, x_6 i one przyjmują wartość 0. Wykreślamy kolumny zmiennych niebazowych i zmienne bazowe wyliczamy z równania o macierzy $\left[\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_7 & ww \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$.
Więc $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ i $x_7 = 3$. Wierzchołkiem jest $p_1 = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 3)$.
Wybierzmy teraz kolumny 2, 4 i 7. Otrzymamy wierzchołek $p_2 = (0, 0, 0, 1, 0, 0, 3)$.

Algorytm szukania wierzchołków.

Niech $W = \{x \in R^n \,|\, Ax = b, x \geqslant 0\}$ będzie wielościanem. Dodatkowo zakładamy, że równania opisujące W są liniowo niezależne $-$ czyli $rzA = t =$ liczba równań.

Wybieramy maksymalne kwadratowe podmacierze B macierzy A.
Jeżeli B jest macierzą odwracalną **to** mnożymy równanie $Ax = b$ przez B^{-1} z lewej strony i otrzymujemy tablice sympleks.
Jeżeli otrzymana tablica jest pierwotnie dopuszczalna **to** opisuje wierzchołek.

Algorytm opisu krawędzi.

Niech $[A|b]$ będzie tablicą sympleks pierwotnie dopuszczalną opisującą wierzchołek p. Szukamy krawędzi wychodzących z tego wierzchołka. Zaczynamy od wybrania $n-1$ równań z tych opisujących wierzchołek. Nie możemy odrzucać równań z układu $Ax = b$ zatem dla pewnej zmiennej niebazowej zamiast $x_i = 0$ przyjmujemy $x_i \geqslant 0$.

Otrzymujemy opis prostej w której zmienna x_i jest parametrem. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy

$$A = [A|b] = \left[\begin{array}{ccc|ccccc|c} x_1 & ... & x_t & x_{t+1} & ... & x_i & ... & x_n & ww \\ \hline 1 & \dots & 0 & a_{1,t+1} & ... & a_{1,i} & ... & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & a_{j,i} & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & a_{t,t+1} & \dots & a_{t,i} & \dots & a_{t,n} & b_t \end{array}\right]$$

Teraz wyliczamy zmienne bazowe $x_j = b_j - a_{j,i}x_i$, dla $1 \leqslant j \leqslant t$. Punkty otrzymanej prostej mają postać $(b_1 - a_{1,i}x_i,\ b_2 - a_{2,i}x_i,\ ..., b_t - a_{t,i}x_i,\ 0, 0, ..., 0, x_i, 0, ..., 0) = (b_1, b_2, ..., b_t, 0, 0, ..., 0) + x_i(a_{1,i}, a_{2,i}, ..., a_{t,i}, 0, 0, ..., 0$
Jeżeli wszystkie $a_{j,i} \leqslant 0$ **to** jedynym ograniczeniem jest $x_i \geqslant 0$ i otrzymujemy krawędź nieskończoną.

W przeciwnym przypadku największą wartością x_i będzie minimum po wszystkich dodatnich $a_{j,i}$ z liczb $\frac{b_j}{a_{j,i}}$ czyli liczba $Min_j\{\frac{b_j}{a_{j,i}} \,|\, 0 \leqslant j \leqslant t,\ a_{j,i} \geqslant 0\}$.

Uwaga 5.1. Liczba $t = Min_j\{\frac{b_j}{a_{j,i}} \,|\, 0 \leqslant j \leqslant t,\ a_{j,i} \geqslant 0\}$ wyznacza długość krawędzi. Jeżeli startujemy z wierzchołka $p = (b_1, b_2, ..., b_t, 0, 0, ..., 0)$ i poruszamy się w kierunku $\alpha = (a_{1,i}, a_{2,i}, ..., a_{t,i}, 0, 0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ to $p + t\alpha$ jest kolejnym wierzchołkiem.

Uwaga 5.2. Jeżeli minimum $= 0$ to krawędź ma długość 0 (jest punktem) i nazywamy ją **krawędzią zdegenerowaną**.

Uwaga 5.3. Aby opisać wszystkie krawędzie wychodzące z wierzchołka p należy użyć wszystkich tablic sympleks opisujących p.

Przykład 5.2. Opiszmy ostrosłup $W \in \mathbf{R^3}$ o podstawie kwadratowej z wierzchołkami $p_1 = (0,0,0),\ p_2 = (1,0,0),\ p_3 = (0,1,0),\ p_4 = (1,1,0)$ i o szczycie w punkcie $p_5 = (0,0,2)$.

W jest opisane układem nierówności:

$2x_1 + x_3 \leqslant 2$
$2x_2 + x_3 \leqslant 2$
$x_1, x_2, x_3 \geqslant 0$

postać kanoniczna:
$2x_1 + x_3 + x_4 = 2$
$2x_2 + x_3 + x_5 = 2$
$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0$
Zapiszmy w postaci tablicy sympleks:

$$TS_1 = \left[\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & ww \\ \hline 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Zmiennymi bazowymi są x_4 i x_5 zaś TS_1 opisuje wierzchołek:
$\overline{p_1} = (0, 0, 0, 1, 1)$,
Poruszamy się w kierunku wierzchołka $\overline{p_5}$ krawędzią wyznaczoną przez x_3:

$$TS_1 = \left[\begin{array}{ccccc|c} & & \downarrow & & & \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & ww \\ \hline 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & (1) & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Szukamy elementu centralnego.
$Min\left\{\frac{2}{1}, \frac{2}{1}\right\} = 2$ zatem możemy wybrać dowolny element kolumny 3-ciej.

$$TS_2 = \left[\begin{array}{ccccc|c} k_1 & k_2 & & & k_3 & \\ \hline 2 & -2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$ Zmiennymi bazowymi są teraz x_3 i x_4 zaś TS_2 opisuje wierzchołek $\overline{p_5} = (0, 0, 1, 0, 0)$

Ile krawędzi wychodzi z W?

Z rysunku widać, że 4. A TS_2 opisuje tylko trzy krawędzie o wektorach kierunkowych
$k_1 \rightarrow (1, 0, 0, -2, 0)$ - krawędź zdegenerowana (długość 0) gdyż $Min\left\{\frac{0}{2}, *\right\} = 0$
$k_2 \rightarrow (0, 2, -1, 1, 0)$ w kierunku wierzchołka $\overline{p_3}$
$k_3 \rightarrow (0, 0, -1, 1, 1)$ w kierunku wierzchołka $\overline{p_1}$

TS opisuje $n - t$ krawędzi z których pewne mają długość 0 i nazywamy je zdegenerowanymi. Wędrując krawędzią zdegenerowaną nie zmieniamy wierzchołka, ale możemy znaleźć inną TS opisującą ten wierzchołek. (Jeżeli uwzględniamy wybór zmiennych bazowych to inny).

Idziemy krawędzią k_1:

Otrzymujemy $TS_3 = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ & & B & B & & \end{array}\right]$

Tablica TS_3 opisuje dalej wierzchołek $\overline{p_5}$ i krawędzie:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} & k_4 & & k_5 & k_6 & \\ \hline 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ B & & B & & & \end{array}\right]$$

$k_4 \rightarrow (1, 1, -1, 0, 0)$ w kierunku wierzchołka $\overline{p_4}$
$k_5 \rightarrow (-1, 0, 0, 1, 0)$ - zdegenerowana $k_6 = -k_1$
$k_6 \rightarrow (1, 0, -1, 0, 1)$ w kierunku wierzchołka $\overline{p_2}$

Definicja 5.2. Tablicą Sympleks opisującą zadanie programowania liniowego

$$Max\ \{\ x_0 = c \bullet x\ + b_0 \mid Ax = b, x \geqslant 0\}$$

nazywamy taką macierz, w której pierwszy wiersz reprezentuje równanie $x_0 - c \bullet x = b_0$, pozostałe wiersze równania $[A|b]$ i macierz ta zawiera podmacierz jednostkową. Zwyczajowo pierwszy wiersz - opisujący funkcję celu jest oddzielony linią poziomą. Podobnie znak równości przedstawiamy jako linię pionową.

Przykład 5.3. Tablicą sympleks dla zadania
Max $x_0 = 2x_1 + 6x_2 - 3x_3$, gdy:
$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 3$
$2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_5 = 7$
$2x_1 - 3x_2 - 7x_3 + x_6 = 8$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0$ jest

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & WW \\ 1 & -2 & -6 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & -5 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & -3 & -7 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right]$$

Funkcję celu zastąpiliśmy równaniem $x_0 - 2x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 0$ zaś podmacierz jednostkowa powstaje z kolumn odpowiadających zmiennym o indeksach 0,4,5 i 6.

Uwaga 5.4. Ponieważ w algorytmie metody sympleks kolumna odpowiadająca zmiennej x_0 nie zmienia się więc zwykle ją pomijamy.

Ćwiczenie 5.1. Poniższe dwie tablice sympleks opisują to samo zadanie PL.
wylicz zmienne od a do l .

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & -3 & 5 \\ \hline 2 & 1 & 0 & -2 & d & e \\ -3 & a & b & c & 2 & 4 \end{array}$$

oraz

$$\begin{array}{ccccc|c} 7 & g & h & 0 & -7 & -3 \\ \hline -4 & 1 & 2 & i & 5 & 14 \\ f & 0 & 1 & j & k & l \end{array}$$

Ćwiczenie 5.2. Wiedząc, że poniższe tablice sympleks dotyczą tego samego zadania programowania liniowego wyznacz nieznane współczynniki od a do k.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a & b & c & 4 & -2 & -6 \\ \hline 3 & 1 & 0 & d & 3 & e \\ 7 & 0 & 1 & 1 & 6 & f \end{array}\right] \text{ oraz } \left[\begin{array}{ccccc|c} 4 & g & 0 & 10 & 0 & -2 \\ \hline 1 & h & 0 & 3 & 1 & 2 \\ i & -2 & 1 & j & k & 3 \end{array}\right]$$

Ćwiczenie 5.3. Wiedząc, że punkt $p = (3, 0, 0, 2, 0, 0,)$ jest wierzchołkiem wielościanu
$W = \{x \,|\, Ax = b,\ x \geqslant 0\}$, gdzie

$$A = \left[\begin{array}{cccccc} 2 & 3 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -5 & -3 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right] \quad b = \left[\begin{array}{c} 8 \\ 0 \\ 7 \end{array}\right]$$

wypisz wszystkie takie macierze B, zawarte w A, że $[B^{-1}A|B^{-1}b]$
jest tablicą sympleks opisującą p.

5.2. Metoda sympleks

Test optymalności i koszty zredukowane. Rozważamy zadanie typu

$$Max\ x_0 = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + b_0 \mid Ax = b,\ x \geqslant 0$$

opisane tablicą sympleks TS. Oznacza to, że w górnym wierszu TS mamy kolejno liczby

$$1, -c_1, -c_2, ..., -c_n \mid b_0$$

. Jeżeli wszystkie współczynniki c_i odpowiadające zmiennym bazowym są równe 0 (a tak jest w tablicy sympleks) to współczynniki $-c_i$ nazywamy kosztami zredukowanymi.

Jeżeli koszt zredukowany $-c_i$ odpowiadający zmiennej niebazowej x_j jest < 0 ($c_j > 0$) to krawędź wyznaczona przez zmienną x_j jest poprawiająca. Ponieważ wędrując tą krawędzią zmieniamy tylko zmienne bazowe nie mające wpływu na funkcję celu i zwiększamy liczbę $x_0 = c_j x_j + b_0$.

Jeżeli koszt zredukowany $-c_i$ odpowiadający zmiennej niebazowej x_j jest $= 0$ ($c_j = 0$) to krawędź wyznaczona przez zmienną x_j jest neutralna.

Jeżeli koszt zredukowany $-c_i$ odpowiadający zmiennej niebazowej x_j jest > 0 ($c_j < 0$) to krawędź wyznaczona przez zmienną x_j jest pogarszająca. Ponieważ wędrując tą krawędzią zmieniamy tylko zmienne bazowe nie mające wpływu na funkcję celu i zmniejszamy liczbę

$$x_0 = c_j x_j + b_0$$

.

Twierdzenie 5.1. *Jeżeli w tablicy sympleks opisującej zadanie $Max\ x_0 = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + b_0 \mid Ax = b,\ x \geqslant 0$ wszystkie koszty zredukowane są $\geqslant 0$ to tablica ta opisuje wierzchołek optymalny zadania zaś w prawym górnym rogu tablicy otrzymujemy optymalną wartość funkcji celu.*

Jeżeli ponadto wszystkie koszty zredukowane odpowiadające zmiennym niebazowym są > 0 to tablica ta opisuje jedyny wierzchołek optymalny zadania.

Dowód. Jeżeli w tablicy sympleks wszystkie koszty zredukowane są $\geqslant 0$ to funkcja celu $x_0 = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + b_0$ może być zapisana tylko przy pomocy zmiennych niebazowych $x_0 = \sum_{x_i\ niebazowe} c_i x_i + b_0$ gdyż dla zmiennych bazowych $c_i = 0$. Funkcja celu x_0 przyjmuje w wierzchołku opisanym tablicą sympleks wartość b_0 a dla pozostałych punktów wielościanu $x_0 \leqslant b_0$.

Przyjmijmy teraz, że wszystkie koszty zredukowane odpowiadające zmiennym niebazowym są > 0. Niech $q = (q_1, q_2, ..., q_n)$ będzie takim punktem wielościanu w którym funkcja celu przyjmuje wartość b_0. Otrzymujemy równanie $x_0 = b_0 = \sum_{i=1}^{n} c_i q_i + b_0$. Stąd dla wszystkich zmiennych niebazowych $c_i > 0$, $q_i \geqslant 0$ i $\sum c_i q_i = 0$. Zatem wszystkie współrzędne q_i odpowiadające zmiennym niebazowym tablicy są $= 0$. Pozostałe współrzędne q_i jednoznacznie wyliczamy z tablicy i otrzymujemy wierzchołek opisany tablicą. □

Wędrowanie między wierzchołkami, eliminacja Gaussa - Jordana.

W zadaniu PL mamy wierzchołek p opisany tablicą sympleks. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy

$$\left[\begin{array}{c|ccc|ccccc|c} x_0 & x_1 & ... & x_t & x_{t+1} & ... & x_i & ... & x_n & ww \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -c_{t+1} & ... & -c_i & ... & -c_n & b_0 \\ \hline 0 & 1 & \ldots & 0 & a_{1,t+1} & ... & a_{1,i} & ... & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & a_{j,i} & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & a_{t,t+1} & \ldots & a_{t,i} & \ldots & a_{t,n} & b_t \end{array}\right]$$

Zakładamy, że krawędź odpowiadająca zmiennej x_i jest skończona i szukamy tablicy sympleks opisującej drugi koniec tej krawędzi.

Teraz wyliczamy minimum po wszystkich dodatnich $a_{j,i}$ z liczb $\frac{b_j}{a_{j,i}}$ czyli liczbę

$Min_j\{\frac{b_j}{a_{j,i}} \mid a_{j,i} \geqslant 0\}$. Wybieramy dowolny współczynnik $a_{j,i}$, na którym osiągane jest minimum. Nazywamy go **elementem centralnym**. Na następnej tablicy zaznaczony będzie nawiasem.

$$\left[\begin{array}{c|ccccc|ccccc|c} x_0 & x_1 & \ldots & x_j & \ldots & x_t & x_{t+1} & ... & x_i & ... & x_n & ww \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & -c_{t+1} & ... & -c_i & ... & -c_n & b_0 \\ \hline 0 & 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & a_{1,t+1} & ... & a_{1,i} & ... & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ldots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 & a_{j,t+1} & \ldots & (a_{j,i}) & \ldots & a_{j,n} & b_j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ldots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 & a_{t,t+1} & \ldots & a_{t,i} & \ldots & a_{t,n} & b_t \end{array}\right]$$

Teraz j - ty wiersz dzielimy przez $a_{j,i}$ zaś od każdego innego wiersza k odejmujemy poprawiony j-ty wiersz pomnożony przez $a_{k,i}$ - czyli zerujemy pozostałe miejsca k-tej kolumny. Otrzymujemy macierz:

$$\left[\begin{array}{c|ccccc|ccccc|c} x_0 & x_1 & \ldots & x_j & \ldots & x_t & x_{t+1} & ... & x_i & ... & x_n & ww \\ 1 & 0 & \ldots & d_0 & \ldots & 0 & -c^*_{t+1} & ... & 0 & ... & -c^*_n & b^*_0 \\ \hline 0 & 1 & \ldots & d_1 & \ldots & 0 & a_{1,t+1}* & ... & 0 & ... & a^*_{1,n} & b_1* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ldots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & d_j & \ldots & 0 & a^*_{j,t+1} & \ldots & 1 & \ldots & a^*_{j,n} & b^*_j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ldots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & d_t & \ldots & 1 & a^*_{t,t+1} & \ldots & 0 & \ldots & a^*_{t,n} & b^*_t \end{array}\right],$$

gdzie $d_0 = \frac{c_i}{a_{j,i}}, d_1 = -\frac{a_{1,i}}{a_{j,i}}, ...,$

$d_{j-1} = -\frac{a_{j-1,i}}{a_{j,i}}, d_j = \frac{1}{a_{j,i}}, d_{j+1} = -\frac{a_{j+1,i}}{a_{j,i}}, ..., d_t = -\frac{a_{t,i}}{a_{j,i}}$

Otrzymaliśmy tablicę sympleks. Z bazy wypadła zmienna x_j a doszła zmienna x_i.

Algorytm prosty metody sympleks.

Rozważamy zadanie typu $Max\, x_0 = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + b_0 \mid Ax = b$

0) Start: Dana tablica sympleks pierwotnie dopuszczalna.

1) Test optymalności i wybór kolumny głównej.

1a) Jeżeli wszystkie koszty zredukowane są nieujemne **to** STOP. Tablica opisuje wierzchołek optymalny.

1b) Jeżeli nie **to** wybieramy kolumnę i, w której koszt zredukowany jest ujemny.

2) Test nieograniczoności i wybór elementu centralnego.

2a) Jeżeli wszystkie elementy kolumny i są
niedodatnie **to** STOP. Funkcja celu jest nieograniczona.

2b) Jeżeli istnieją $a_{k,i} > 0$ **to** jako element centralny wybieramy taki $a_{j,i}$,

że $\frac{b_j}{a_{j,i}} = Min_k\{\frac{b_k}{a_{k,i}}\ ;\ a_{k,i} \geqslant 0\}$.

3) Znajdujemy tablicę sympleks opisującą drugi koniec krawędzi
metodą Gaussa – Jordana, **GOTO** 1).

Przykład 5.4. Rozwiązujemy zadanie: Max $x_0 = 2x_1 + 6x_2 - 3x_3$, gdy:

$x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leqslant 3$
$2x_1 + 5x_2 - 5x_3 \leqslant 7$
$2x_1 - 3x_2 - 7x_3 \leqslant 8$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0$

Postacią kanoniczną jest:
Max $x_0 = 2x_1 + 6x_2 - 3x_3$, gdy:
$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 3$
$2x_1 + 5x_2 - 5x_3 + x_5 = 7$
$2x_1 - 3x_2 - 7x_3 + x_6 = 8$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0$

Wierzchołkowi $p_1 = (0, 0, 0, 3, 7, 8)$ odpowiada TS

$$\left[\begin{array}{c|cccccc|c} 1 & -2 & -6 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & (1) & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & -5 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & -3 & -7 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right]$$

Idziemy krawędzią poprawiająca wyznaczoną przez x_1
Liczymy $Min\,\{\frac{3}{1},\ \frac{7}{2},\ \frac{8}{2}\} = 3$ więc jako element centralny wybieramy 1.
Po przekształceniach Gaussa - Jordana Otrzymujemy

$$\left[\begin{array}{c|cccccc|c} 1 & 0 & -2 & -3 & 2 & 0 & 0 & 6 \\ \hline 0 & 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & (1) & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & -1 & -2 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Tablica ta opisuje wierzchołek $p_2 = (3, 0, 0, 0, 1, 2,)$
Idziemy krawędzią poprawiająca wyznaczoną przez x_2
Liczymy $Min\,\{\frac{3}{2},\ \frac{1}{1},\ *\} = 1$ więc jako element centralny wybieramy 1.
Po przekształceniach Gaussa - Jordana Otrzymujemy

$$\left[\begin{array}{c|cccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -4 & 3 & 0 & 9 \\ \hline 0 & 1 & 5 & 0 & -5 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & -4 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Kolumna odpowiadająca zmiennej x_4 ma ujemny koszt zredukowany więc na krawędzi przez nią wyznaczonej

$k = \{(6 + 5x_4, 0, 1 + 2x_4, x_4, 0, 3 + 4x_4) \mid x_4 \geqslant 0\}$ funkcja celu $x_0 = -x_2 + 4x_4 - 3x_5$ rośnie w nieskończoność.

Ćwiczenie 5.4. Opisz prosty algorytm metody sympleks na przykładzie zadania:

Max $x_0 = 2x_1 + 5x_2 - 3x_3$, gdy:
$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leqslant 4$
$x_1 + 3x_2 + x_3 \leqslant 5$
$2x_1 - 3x_2 + 7x_3 \leqslant 9$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0$

Ćwiczenie 5.5. Opisz wszystkie punkty optymalne zadania:

$Max\ x_0 = -4x_1 + 2x_2 + 3x_3$
$2x_1 - x_2 + x_3 \quad \leqslant 2$
$-6x_1 + 3x_2 - 2x_3 \quad \leqslant 2$
$-7x_1 + 4x_2 - 3x_3 \quad \leqslant 2$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0$

6. Dwufazowa metoda sympleks

6.1. Szukanie wierzchołka startowego

Jeżeli zadanie PL opisane jest macierzą, która nie jest tablicą sympleks to by móc stosować metodę sympleks stosujemy chwyt genialny w swej prostocie - dopisujemy macierz jednostkową. Dokładniej:

Dwufazowa metoda sympleks

Badamy zadanie:

$Max \quad x_0 = cx$

$Ax = b$

$x \geqslant 0$

macierzą układu jest $[A|b]$

Mnożąc w razie potrzeby niektóre równania przez -1 możemy przyjąć, że $b \geqslant 0$. Aby uzyskać TS dopisujemy macierz jednostkową i otrzymujemy tablicę sympleks $TS = [A|I|b]$.

Odpowiada temu układ równań

$Ax + Iy = b$

gdzie $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_t \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{t,1} & a_{t,2} & \cdots & a_{1t,n} \end{bmatrix}$

Pierwsza faza

Rozwiązujemy zadanie $PL\,(*)\, Max\ y_0 = -y = -y_1 - y_2 - ... - y_t$

$Ax + Iy = b$

$x \geqslant 0 \quad y \geqslant 0$

zadanie $(*)$ jest ograniczone ponieważ $y \geqslant 0 \Rightarrow y_0 \leqslant 0$. Dodatkowo jeżeli p należy do obszaru dopuszczalnego zadania pierwotnego, czyli $Ap = b\ p \geqslant 0$ to

$\overline{p} = (p, 0, ..., 0)$ jest punktem optymalnym $(*)$ gdyż

$[A|I]\overline{p} = A \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} + I \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = b$

zaś $y_0(\overline{p}) = 0$

I Przypadek:

Jeżeli zadanie $(*)$ ma rozwiązanie, w którym $y_{0max} < 0$ to wielościan $W = \{x \in R^n \mid Ax = b\ x \geqslant 0\}$ jest zbiorem pustym (zadanie pierwotnie sprzeczne).

II Przypadek:

Jeżeli $y_{0max} = 0$ to TS opisująca wierzchołek optymalny zadania $(*)$ pozwala nam opisać wierzchołek zadania pierwotnego.

$T = [\overline{A}|D|\overline{b}]$

a) Jeżeli wszystkie zmienne $y_1, y_2, ..., y_t$ są niebazowe to macierz powstała po wykreśleniu kolumn z nimi związanych jest TS opisująca wierzchołek obszaru dopuszczalnego zadania pierwotnego.

Rzeczywiście. Jeżeli $(p_1, .., p_n, y_1, ..., y_t)$ jest wierzchołkiem opisanym $[\overline{A}|D|\overline{b}]$ to
$y_1 = 0, ..., y_t = 0$, $\overline{A}p = \overline{b}$

($\overline{A}$ zawiera macierz jednostkową)

$[\overline{A}|\overline{b}]$ powstała z $[A|b]$ przez operacje elementarne na wierszach, więc opisuje ten sam wielościan.

b) Niech y_i będzie zmienną bazowa. Przyjmijmy, że kolumna odpowiadająca y_i ma jedynkę w j-tym wierszu i pozostałe współrzędne = 0.

1^0 jeżeli wiersz j-ty ma tylko jeden element niezerowy (j-ty wiersz $\overline{A}$ jest zerowy) to znaczy, że $[A|b]$ i A były układem zależnym. Taki wiersz i kolumny można wykreślić (w praktyce zostaje).

2^0 Jeżeli istnieje $a_{j,r} \neq 0$ w j-tym wierszu macierzy $\overline{A}$ to wybieramy go jako element centralny i po przekształceniach elementarnych otrzymujemy TS, w której y_j jest niebazowe, zaś x_r jest dołączone do bazy.

Po wykonaniu I fazy otrzymujemy TS opisującą wierzchołek obszaru dopuszczalnego T lub informację, że zadanie było sprzeczne.

Druga faza:

Najpierw budujemy wiersz kosztów zredukowanych

$Max \quad x_0 = cx$

Koszty zredukowane to $x_0 = dx + b_0$ gdzie $d = (d_1, ..., d_n)$ to $d_j = 0$ gdy x_j - bazowa. Wektor d wyliczamy wstawiając do równania $x_0 = cx$

równania $x_j = \overline{b_j} - a_{ji}x_i$ pochodzące z TS $[A^*|b^*] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & ... & a_{1_n} & b_1^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{t,1} & a_{t,2} & ... & a_{t,n} & b_t^* \end{array}\right]$

Dalej zadanie rozwiązujemy prosta metodą sympleks.

Przykład 6.1. Badamy zadanie:

$$Max\ x_0 = 7x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4$$
$$8x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = 4$$
$$3x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 1$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0$$

I faza:

Wprowadzamy sztuczne zmienne y_1 i y_2 i funkcje celu

$Max\ y_0 = -y_1 - y_2$

$y_0 + y_1 + y_2 = 0$

$y_0 - (8x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 - 4) - (3x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - 1) = 0$

$y_0 - 11x_1 - 4x_2 + 7x_3 = -5$

baza sztuczna

x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	
-11	-4	7	0	0	0	-5
8	3	-5	1	1	0	4
3	(1)	-2	-1	0	1	1

(dla zmiennych niesztucznych suma jest równa 0)

Wybieramy kolumnę poprawiającą x_2.

$Min \left\{\frac{4}{3}, \frac{1}{1}\right\} = 1$ i element centralny zaznaczamy nawiasem

$$\begin{array}{rrrrrr|r}
1 & 0 & -1 & -4 & 0 & 4 & -1 \\
\hline
-1 & 0 & (1) & 4 & 1 & -3 & 1 \\
3 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrr|r}
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
\hline
-1 & 0 & 1 & 4 & 1 & -3 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 7 & 2 & -5 & 3
\end{array}$$

Zmienne sztuczne wypadły z bazy więc możemy je wykreślić. Pozostała tablica opisuje wierzchołek startowy $(0,3,1,0)$.

Wracamy do pierwotnej funkcji celu i liczymy koszty zredukowane:

$x_0 = 7x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 7x_1 + 2(-x_1 - 7x_4 + 3) - 3(x_1 - 4x_4 + 1) - x_4 = 2x_1 - 3x_4 + 3$

i otrzymujemy tablicę sympleks:

$$\begin{array}{rrrr|r}
-2 & 0 & 0 & 3 & 3 \\
\hline
-1 & 0 & 1 & 4 & 1 \\
(1) & 1 & 0 & 7 & 3
\end{array}$$

Pierwsza kolumna wyznacza krawędź poprawiającą. Idąc nią otrzymujemy.

$$\begin{array}{rrrr|r}
0 & 2 & 0 & 17 & 9 \\
\hline
0 & 1 & 1 & 11 & 4 \\
1 & 1 & 0 & 7 & 3
\end{array}$$

Ta tablica opisuje jedyny wierzchołek optymalny $(3,0,4,0)$,

w którym $x_{max} = 9$

Przykład 6.2. Badamy zadanie:

$$\begin{aligned}
&Max\ x_0 = 3x_1 + 8x_2 - 2x_3 - x_4 \\
&\quad 2x_1 + x_2 - x_3 + 6x_4 = 3 \\
&\quad x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 5 \\
&\qquad x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0
\end{aligned}$$

I faza:

Wprowadzamy sztuczne zmienne y_1 i y_2 i funkcje celu

$Max\ y_0 = -y_1 - y_2$

$0 = y_0 + y_1 + y_2 = y_0 - (2x_1 + x_2 - x_3 + 6x_4 - 3) - (x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 - 5)$

$y_0 - 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 5x_4 = -8$

co daje tablicę sympleks

$$\left[\begin{array}{rrrrrr|r}
-3 & -2 & 4 & -5 & 0 & 0 & -8 \\
\hline
2 & 1 & -1 & (6) & 1 & 0 & 3 \\
1 & 1 & -3 & -1 & 0 & 1 & 5
\end{array}\right]$$

stosując prosty algorytm metody sympleks otrzymujemy kolejno:

$$\left[\begin{array}{rrrrrr|r}
-\frac{4}{3} & -\frac{7}{6} & \frac{19}{6} & 0 & \frac{5}{6} & 0 & -\frac{11}{2} \\
\hline
\frac{1}{3} & \left(\frac{1}{6}\right) & -\frac{1}{6} & 1 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{2} \\
\frac{4}{3} & \frac{7}{6} & -\frac{19}{6} & 0 & \frac{1}{6} & 1 & \frac{11}{2}
\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rrrrrr|r}
1 & 0 & 2 & 7 & 2 & 0 & -2 \\
\hline
2 & 1 & -1 & 6 & 1 & 0 & 3 \\
-1 & 0 & -2 & -7 & -1 & 1 & 2
\end{array}\right]$$

Nad kreską są same liczby nieujemne a funkcja celu jest równa -2 zatem zadanie jest sprzeczne (obszar dopuszczalny jest zbiorem pustym).

6.2. Modyfikacje dwufazowej metody sympleks

Metoda częściowej bazy sztucznej

W metodzie dwufazowej wystarczy dodać tylko tyle zmiennych sztucznych, by otrzymać macierz jednostkową.

np.
$Max\ x_0 = cx$
$A_1 x \leqslant b_1$
$A_2 x = b_2$
$x \geqslant 0$

W tym przypadku mamy t_1 zmiennych bazowych i gdy $b_1 \geqslant 0$ dodajemy tylko t_2 zmiennych sztucznych.
$Max \quad x_0 = cx$
$A_1 x + I_{t_1}\overline{x} = b_1$
$A_2 x + I_{t_2} y = b_2$
$x \geqslant 0$
$\overline{x} \geqslant 0$
$y \geqslant 0$

W przypadku rzeczywistych obliczeń (na maszynach) zwykle nie stosuje się częściowej bazy sztucznej. Nie trzeba wówczas wyszukiwać w macierzy A kolumn zero - jedynkowych.

Można obie fazy rozwiązać na jednej TS. W zadaniu:
$Max \quad x_0 = cx$
$Ax = b$
$x \geqslant 0$

Rozważamy obie funkcje celu jednocześnie.
$Max \quad x_0 = cx$
$Max \quad y_0 = -y$
$Ax + Iy = b$
$x \geqslant 0 \qquad y \geqslant 0$

Budujemy tablicę sympleks mającą dwa wiersze nad kreską.

$$TS = \overline{B^{-1}} \cdot \left[\begin{array}{c|c|ccccc|ccc|c} x_0 & y_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n & & y_1 & \dots & y_t & ww \\ 1 & 0 & & & -c & & & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & & 1 & \dots & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & & & A & & & & I & & b \end{array}\right],$$

gdzie

$$\overline{B} = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0...0 \\ 0 & 1 & 1...1 \\ \hline 0 & 0 & I \end{array}\right]$$

W fazie 1 maksymalizujemy y_0 i w rezultacie otrzymujemy, że zadanie jest sprzeczne lub TS opisująca wierzchołek startowy (łącznie z kosztami zredukowanymi funkcji x_0).

Ta metoda nigdy nie prowadzi do zmniejszenia liczby operacji (np. wyszło, że zadanie jest sprzeczne, więc naliczyliśmy się zupełnie niepotrzebnie).

Przykład 6.3. Badamy zadanie:
$Max\ x_0 = 7x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4$
$8x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = 4$
$3x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 1$
$x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0$

I faza:
Wprowadzamy sztuczne zmienne y_1 i y_2 i funkcje celu
$Max\ y_0 = -y_1 - y_2$
$y_0 + y_1 + y_2 = 0$

$y_0 - (8x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 - 4) - (3x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - 1) = 0$
$y_0 - 11x_1 - 4x_2 + 7x_3 = -5$

$$\begin{array}{c} \text{baza sztuczna} \\ \left[\begin{array}{cccccc|cc|r} y_0 & x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & y_1 & y_2 & WW \\ 1 & 0 & -11 & -4 & 7 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -7 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 8 & 3 & -5 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & (1) & -2 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$ Wybieramy kolumnę poprawiającą x_2.

$Min\left\{\frac{4}{3}, \frac{1}{1}\right\} = 1$ i element centralny zaznaczamy nawiasem

$$\left[\begin{array}{cccccc|cc|r} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -4 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 & (1) & 4 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|cc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & 3 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 4 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 7 & 2 & -5 & 3 \end{array}\right]$$

Koniec fazy pierwszej. Wszystkie sztuczne zmienne są niebazowe wykreślamy wiersze i kolumny związane ze sztucznymi zmiennymi.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & (1) & 1 & 0 & 7 & 3 \end{array}\right]$$

Kolumna x_1 wyznacza krawędź poprawiającą. Idąc nią otrzymujemy.

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 17 & 9 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 11 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 7 & 3 \end{array}\right]$$

Ta tablica opisuje jedyny wierzchołek optymalny $(3, 0, 4, 0)$,
w którym $x_{max} = 9$

Metoda dużego M:
Czasami potrafimy oszacować wartość x_0 i $max \quad x_i$. Szczególnie w zagadnieniach całkowitoliczbowych np. transport ciężarówkami i gdy wśród warunków są $0 \leqslant x_i \leqslant b_i$.

Aby rozwiązać zadanie: $Max \quad x_0 = cx$
$Ax = b$
$x \geqslant 0$
wybieramy liczbę M, o której wiemy, że jest większa od funkcji celu i rozpatrujemy zadanie $Max \quad \overline{x_0} = cx - My$
$Ax + Iy = b$
$x \geqslant 0 \qquad y \geqslant 0.$
Teraz poprawione zadanie opisane jest tablicą sympleks:

$$TS = \left[\begin{array}{c|c|c} -c - dM & 0...0 & -M \cdot \sum b_i \\ \hline A & I & b \end{array}\right],$$

gdzie wektor d jest sumą wierszy macierzy A.

Rozwiązanie zawsze istnieje, ale czasami w opisie kosztów zredukowanych wierzchołka optymalnego występuje M - oznacza to, że zadanie wyjściowe jest sprzeczne. W stosunku do poprzednich metod zyskujemy to, że mamy jedną fazę i jedną funkcję celu.

Przykład 6.4. $Max \quad x_0 = x_1 - 2x_2 - 3x_4$
$x_1 - x_2 - x_3 = 1$

$-x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 1$
$x_i \geqslant 0$
Sprowadzamy do zadania:
$Max \quad \overline{x_0} = x_1 - 2x_2 - 3x_4 - My_1 - My_2$
$x_1 - x_2 - x_3 + y_1 = 1$
$-x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + y_2 = 1$
$x_i \geqslant 0,\ y \geqslant 0$

Otrzymujemy następujące tablice sympleks:

$$\left[\begin{array}{r|rrrr|rr|r} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & y_1 & y_2 & ww \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 3 & M & M & 0 \\ \hline 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{r|rrrr|rr|r} 1 & -1 & 2 & -M & 3+M & 0 & 0 & -2M \\ \hline 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & (2) & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{r|rrrr|rr|r} 1 & -1-\frac{1}{2}M & 2+\frac{1}{2}M & 0 & 3+\frac{1}{2}M & 0 & \frac{1}{2}M & -\frac{3}{2}M \\ \hline 0 & (\frac{1}{2}) & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{r|rrrr|rr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2+M & M+1 & 3 \\ \hline 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Rozwiązaniem jest wierzchołek $(3, 0, 2, 0)$, w którym funkcja celu osiąga wartość 3.

Ćwiczenie 6.1. Opisz dwufazowy algorytm metody sympleks na przykładzie zadania:
Min $x_0 = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3$, gdy:
$x_1 - 5x_2 + 2x_3 \geqslant 5$
$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leqslant 2$
$x_1 - 5x_2 + 3x_3 \geqslant 3$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0,$

Ćwiczenie 6.2. Opisz dwufazowy algorytm metody sympleks na przykładzie zadania:
Min $x_0 = 3x_1 - x_2 + 2x_3$, gdy:
$x_1 - 5x_2 + 2x_3 \geqslant 4$
$x_1 - 5x_2 + x_3 \geqslant 3$
$x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leqslant 5$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0,$

7. Własności metody sympleks

7.1. Zrewidowana metoda sympleks.

Kolejne kroki otrzymywania TS prowadzą do narastania błędów - duża liczba mnożeń i dzieleń powoduje, że wyniki są coraz mniej dokładne (algorytm metody sympleks nie jest stabilny).

Przypuśćmy, że TS startową jest

$$\left[\begin{array}{c|c|c} -c_N & 0...0 & b_0 \\ \hline A_N & I & b \end{array}\right]$$

i w m-tym kroku uzyskaliśmy tablicę zawiązana z wyborem zmiennych bazowych $x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_t}$. Oznacza to, że macierz $B = [k_{i_1}, k_{i_2}, ..., k_{i_t}]$ gdzie k_{i_j} jest i_j-tą kolumną macierzy $A = [A_n|I]$, spełnia warunek

$$\overline{B^{-1}} \cdot \left[\begin{array}{c|c|c|c} 1 & -c_N & 0...0 & b_0 \\ \hline 0 & A_N & I & b \end{array}\right]$$

jest m-tą TS,

to znaczy jej kolumny $k_{i_j}, ..., k_{i_t}$ tworzą macierz jednostkową

$$\overline{B} = \left[\begin{array}{c|c} 1 & -c_B \\ \hline 0 & B \end{array}\right] \qquad \overline{B^{-1}} = \left[\begin{array}{c|c} 1 & c_B B^{-1} \\ \hline 0 & B^{-1} \end{array}\right]$$

Co pewien czas (np. co 100 kroków) zamiast wyliczać TS metodą eliminacji GJ, wyliczamy ją bezpośrednio ze startowej TS mnożąc ją z lewej strony przez odpowiednią podmacierz $\overline{B^{-1}}$ wyznaczoną przez wybór bazy.

Kolejna TS powstaje z poprzedniej przez mnożenie z lewej strony przez macierz różniącą się od jednostkowej tylko jedną kolumna a więc postaci

$$E = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 1 & \cdots & \frac{-\alpha_{0,r}}{a_{\gamma r}} & 0 \\ 0 & ... & \frac{-\alpha_{1,r}}{a_{\gamma r}} & 0 \\ \vdots & \vdots & ... & \\ \vdots & & \frac{-1}{a_{\gamma,r}} & \vdots \\ \vdots & & ... & \vdots \\ 0 & \vdots & \frac{-\alpha_t r}{a_{\gamma,r}} & 1 \end{array}\right] = I - \frac{1}{\alpha_{\gamma r}} \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & \alpha_{0,r} & 0 \\ \vdots & \alpha_{1,r} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \alpha_{t,r} & 0 \end{array}\right] + j \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & ... & 0 \\ \vdots & \frac{1}{\alpha_{\gamma,r}} & \vdots \\ 0 & ... & 0 \end{array}\right]$$

gdzie kolumna główna macierzy poprzedniej ma postać $\left[\begin{array}{c} \alpha_{0,r} \\ \alpha_{1,r} \\ ... \\ \alpha_{j,r} \\ ... \\ \alpha_{t,r} \end{array}\right]$ i elementem centralnym jest $\alpha_{\gamma,r}$.

$$E \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{0,r} \\ \alpha_{1,r} \\ \vdots \\ \alpha_{t,r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0 r - \frac{\alpha_0 r}{\alpha_{j,r}} \cdot \alpha_{j,r} \\ \vdots \\ \alpha_t r - \frac{\alpha t r}{\alpha_{j,r}} \cdot \alpha_{j,r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow j$$

Macierze $B_t^{-1} = E_t \cdot E_{t-1} ... E_1$. Ponieważ macierze typu E są podobne do macierzy elementarnych $(I + \alpha \cdot e_{ij})$ można tak modyfikować uzyskiwanie macierzy B (dobierając kolejność mnożenia przez macierze elementarne by zminimalizować błędy) i dodatkowo jeśli macierz początkowa był a rozrzedzona, tzn. miała mało współczynników $\neq 0$, by macierz wynikowa była też rozrzedzona.

Algorytm zrewidowanej metody sympleks:

Dana jest początkowa TS (lub macierz opisująca wielościan i koszty).

W kolejnym kroku mamy dodatkowo macierz $\overline{B^{-1}}$ powstałą przez odwrócenie podmacierzy wyznaczonej przez zmienne bazowe i listę zmiennych bazowych.

$$\left[\begin{array}{c|c|c} x_0 & 1 & cB^{-1} \\ \hline x_{i_1} & 0 & \\ x_{i_2} & 0 & B^{-1} \\ \vdots & \vdots & \\ x_{i_t} & 0 & \end{array}\right]$$

1) wyliczamy wyrazy wolne $\begin{bmatrix} b'_0 \\ b'_1 \\ ... \\ b'_t \end{bmatrix} = \overline{B}^{-1} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ ... \\ b_t \end{bmatrix}$

2) wyliczamy koszty zredukowane

$z_i = -c_i + cB^{-1}k_i$

gdzie k_i jest i-ta kolumną macierzy A (początkowej)

3) test optymalności

Jeżeli $\forall_i \; z_i \geqslant 0$ to stop:

wierzchołkiem optymalnym jest $x_j = \begin{cases} 0, & j \notin \{i_1, i_2, ..., i_t\} \\ b'_i, & wpp \end{cases}$

Jeżeli nie, to wybieramy kolumnę główną taką, że $c_i < 0$

4) obliczamy kolumnę główną $k'_i = B^{-1} \cdot k_i$

5) test skończoności

Jeżeli $k_i \leqslant 0$ to stop: otrzymujemy nieskończoną krawędź poprawiajacą

6) wyznaczamy element centralny $\underset{x'_{ji}>0}{Min} \left\{ \frac{b'_j}{\alpha'_j} \right\}$

7) wyliczamy nową $\overline{B}'^{-1}$ stosując do $\overline{B^{-1}}$ przekształcenia GJ i ustalamy nową listę zmiennych bazowych.

$$\left[\begin{array}{c|c|c} -c_N & 0 & b_0 = 0 \\ \hline A_N & I & b \end{array}\right]$$

następna

$$TS \quad = \quad \left[\begin{array}{c|c|c} -c_N + c_N B^{-1} A_N & cB^{-1} & b'_0 = cB^{-1} \\ \hline \underset{\text{nie interesująca - nie wyliczamy}}{A_N B^{-1}} & B^{-1} & B^{-1} b \end{array}\right]$$

Policzmy ile działań wykonujemy w przypadku tablicy o n kolumnach i t wierszach.

Metoda		Przekształcenia Gausa Jordana	Koszty zredukowane	Razem
Sympleks	$*$ i $/$ $+$ i $-$	$(t+1)(n-t+1)$ $t(n-t+1)$		$t(n-t)+n+1$ $t(n-t+1)$
Zrewidowana	$*$ i $/$ $+$ i $-$	$(t+1)^2$ $t(t+1)$	$t(n-t)$ $t(n-t)$	$t(n-t)+(t+1)^2$ $t(n+1)$

Wniosek:
Zazwyczaj metoda zrewidowana jest droższa, ale zyskujemy dokładność.

Niestety macierzowy algorytm metody sympleks, w przeciwieństwie do geometrycznego, może się zapętlić. Sytuacja zachodzi wtedy gdy jeden wierzchołek może być przedstawiony za pomocą wielu tablic sympleks. Możemy w nieskończoność wędrować krawędziami zdegenerowanymi po jednym i tym samym wierzchołku. Aby uniknąć tej sytuacji niektóre algorytmy wykorzystują numerowanie leksykograficzne wierzchołków. Patrz [4]

Aby wierzchołek mógł być przedstawiony wieloma tablicami sympleks z prawej strony kreski muszą znajdować się zera. Algorytmy wykonujące przekształcenia Gaussa - Jordana nie są stabilne co w konsekwencji daje błąd ale i przerwanie pętli - co wykorzystują inne algorytmy.

Podamy teraz przykład zapętlenia się algorytmu sympleks pochodzący z [3].

Przykład 7.1. *Max* $x_0 = \frac{3}{4}x_4 - 20x_5 + \frac{1}{2}x_6 - 6x_7$, gdzie

$$x_1 + \tfrac{1}{4}x_4 - 8x_5 - x_6 + 9x_7 = 0$$
$$x_2 + \tfrac{1}{2}x_4 - 12x_5 - \tfrac{1}{2}x_6 + 3x_7 = 0$$
$$x_3 + x_6 = 1$$

$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0, x_4 \geqslant 0, x_5 \geqslant 0, x_6 \geqslant 0, x_7 \geqslant 0$

Ten układ równań daje następującą TS

$$\left[\begin{array}{c|cccccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 20 & -\frac{1}{2} & 6 & & 0 \\
\hline
0 & 1 & 0 & 0 & (\mathbf{\frac{1}{4}}) & -8 & -1 & 9 & & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -12 & -\frac{1}{2} & 3 & & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & & 1
\end{array}\right]$$

Otrzymujemy następujące TS:

$$\left[\begin{array}{c|ccccccc|c}
1 & 3 & 0 & 0 & 0 & -4 & -\frac{7}{2} & 33 & 0 \\
\hline
0 & 4 & 0 & 0 & 1 & -32 & -4 & 36 & 0 \\
0 & -2 & 1 & 0 & 0 & (\mathbf{4}) & \frac{3}{2} & -15 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1
\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c|ccccccc|c}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 18 & 0 \\
\hline
0 & -12 & 8 & 0 & 1 & 0 & (\mathbf{8}) & -84 & 0 \\
0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{8} & -\frac{15}{4} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1
\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c|ccccccc|c}
1 & -2 & 3 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & -3 & 0 \\
\hline
0 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 1 & -\frac{21}{2} & 0 \\
0 & \frac{1}{16} & -\frac{1}{8} & 0 & -\frac{3}{64} & 1 & 0 & (\mathbf{\frac{3}{16}}) & 0 \\
0 & \frac{3}{2} & -1 & 1 & -\frac{1}{8} & 0 & 0 & \frac{21}{2} & 1
\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c|ccccccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 16 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & (\mathbf{2}) & -6 & 0 & -\frac{5}{2} & 56 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{16}{3} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 1 & \frac{5}{2} & -56 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c|ccccccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & -\frac{7}{4} & 44 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & -3 & 0 & -\frac{5}{4} & 28 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\mathbf{\frac{1}{3}}) & 0 & \frac{1}{6} & -4 & -\frac{1}{6} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c|ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 20 & -\frac{1}{2} & 6 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -8 & -1 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -12 & -\frac{1}{2} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

I tak ostatnia siódma TS jest identyczna z pierwszą.
Wszystkie tablice opisują wierzchołek nieoptymalny $p = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$
Idąc inną drogą otrzymujemy:

$$\left[\begin{array}{c|ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 20 & -\frac{1}{2} & 6 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -8 & -1 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & (\mathbf{\frac{1}{2}}) & -12 & -\frac{1}{2} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c|ccccccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 2 & -\frac{5}{4} & \frac{21}{2} & 0 \\ \hline 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -2 & -\frac{3}{4} & \frac{15}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -24 & -1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & (\mathbf{1}) & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c|ccccccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{5}{4} & 0 & 2 & 0 & \frac{21}{2} & \frac{5}{4} \\ \hline 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 & -2 & 0 & \frac{15}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -24 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Ostatnia tablica opisuje wierzchołek optymalny $q = (\frac{3}{4}, 0, 0, 1, 0, 1, 0)$.

Rada praktyczna:
Krawędzie zdegenerowane pochodzą od tych zmiennych, które na przecięciu swojej kolumny i równania (wiersza) o wyrazie wolnym 0 mają liczbę > 0.

Badamy wiersze o zerowym wyrazie wolnym i szukamy krawędzi poprawiających, które mają w tym wierszu liczbę $\leqslant 0$.

8. Teoria dualności

8.1. Teoria dualności.

Definicja 8.1. Rozważmy zadanie PL zwane pierwotnym P.

$Max\, x_0 = c_1 x_1^T + c_2 x_2^T + c_3 x_3^T + b_0,$
gdzie $x_1 \in R^{n_1}, x_2 \in R^{n_2}, x_3 \in R^{n_3}, x = (x_1, x_2, x_3) \in R^{n_1+n_2+n_3}$

$$\lceil A_{1,1} \mid A_{1,2} \mid A_{1,3} \rceil \quad x^T = b_1^T$$

$$| A_{2,1} \mid A_{2,2} \mid A_{2,3} | \quad x^T \leqslant b_2^T$$

$$\lfloor A_{3,1} \mid A_{3,2} \mid A_{3,3} \rfloor \quad x^T \geqslant b_2^T$$

$x_1 \in R^{n_1}$, $x_2 \geqslant 0$, $x_3 \leqslant 0$.

wtedy zadaniem dualnym D nazywamy zadanie:
$Min\, y_0 = c_1 y_1^T + c_2 y_2^T + c_3 y_3^T + b_0,$
gdzie $y_1 \in R^{t_1}, y_2 \in R^{t_2}, y_3 \in R^{t_3}, y = (y_1, y_2, y_3) \in R^{t_1+t_2+t_3}$

$$\left\lceil A_{1,1}^T \mid A_{2,1}^T \mid A_{3,1}^T \right\rceil \quad y^T = c_1^T$$

$$\left| A_{1,2}^T \mid A_{2,2}^T \mid A_{3,2}^T \right| \quad y^T \leqslant c_2^T$$

$$\left\lfloor A_{1,3}^T \mid A_{2,3}^T \mid A_{3,3}^T \right\rfloor \quad y^T \geqslant c_2^T$$

$y_1 \in R^{t_1}$, $y_2 \geqslant 0$, $y_3 \leqslant 0$.

Reguły przechodzenia od zadania pierwotnego do dualnego przedstawia tabela:

Jeżeli P ma n zmiennych to D jest opisane przez n nierówności (równań). Jeżeli P jest opisane t nierównościami to D ma t zmiennych.

Pierwotne	*Dualne*
min	*max*
max	*min*
i-ta nierówność zgodna z typem	i-ta zmienna $\geqslant 0$
j-ta nierówność niezgodna z typem	j-ta zmienna $\leqslant 0$
k-ta nierówność jest równaniem	k-ta zmienna nieograniczona
i-ta zmienna $\geqslant 0$	i-ta nierówność zgodna z typem
j-ta zmienna $\leqslant 0$	j-ta nierówność niezgodna z typem
k-ta zmienna nieograniczona	k-ta nierówność jest równaniem

gdzie:

dla zadań typu Max

$a^T x \leqslant b$ - nierówność jest zgodna z typem

$a^T x \geqslant b$ - nierówność jest niezgodna z typem

dla zadań typu Min

$a^T x \geqslant b$ - nierówność jest zgodna z typem

$a^T x \leqslant b$ - nierówność jest niezgodna z typem

Przykładami par zadań wzajemnie dualnych są:

P: $max \quad cx^T$	D: $min \quad by^T$
$Ax^T \leqslant b^T$	$A^T y^T \geqslant c^T$
$x \geqslant 0$	$y \geqslant 0$

lub

P: $max \quad cx^T$	D: $min \quad by^T$
$Ax^T = b^T$	$A^T y^T \geqslant c^T$
$x \geqslant 0$	$y \in R^t$

Przykład 8.1. Jeżeli zadanie pierwotne P ma postać:

$Max \quad x_0 = 2x_1 + x_2 - x_3$

$x_1 + x_2 \geqslant -3$

$x_1 + 3x_2 + x_3 \geqslant 2$

$-x_1 + 2x_3 = 7$

$x_2 + x_3 \leqslant 5$

$x_1 \geqslant 0, \quad x_3 \leqslant 0$

$$b^T = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad c = (2, 1, -1)$$

to zadanie dualne D ma postać:

$Min\, y_0 = -3y_1 + 2y_2 + 7y_3 + 5y_4$

$y_1 + y_2 - y_3 \geqslant 2$ $\quad\leftarrow$ zgodna z typem gdyż $x_1 \geqslant 0$

$y_1 + 3y_2 + y_4 = 1$ $\quad\leftarrow$ gdyż x_2 nieograniczone

$y_1 + 2y_3 + y_4 \leqslant -1$ $\quad\leftarrow$ niezgodna z typem gdyż $x_3 \leqslant 0$

$y_1 \leqslant 0$ $\quad\leftarrow$gdyż $x_1 + 3x_2 + x_3 \geqslant 2$ niezgodna z typem

$y_2 \leqslant 0$ $\quad\leftarrow$ gdyż $-x_1 + 2x_3 = 7$ niezgodna z typem

$y_3 \in R$

$y_4 \geqslant 0$ $\quad\leftarrow$ gdyż $x_2 + x_3 \leqslant 5$ zgodna z typem.

Definicja 8.2. Zadania P_1 i P_2 nazywamy równoważnymi jeżeli można od jednego do drugiego przejść stosując następujące reguły:

1) Mnożenie nierówności (równania) przez liczbę $r \neq 0$.

1') Mnożenie zmiennej przez liczbę $r \neq 0$.

2) Zastąpienie nierówności $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leqslant b$ parą

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + x_{n+1} = b \\ x_{n+1} \geqslant 0 \end{cases}.$$

2a) Zastąpienie pary

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + x_{n+1} = b \\ x_{n+1} \geqslant 0 \end{cases}$$
nierównością $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leqslant b$.
3) Zastąpienie równania $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b$ parą
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leqslant b \\ \sum_{i=1}^{n} -a_i x_i \leqslant -b \end{cases}.$$
3a) Zastąpienie pary
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leqslant b \\ \sum_{i=1}^{n} -a_i x_i \leqslant -b \end{cases}.$$
równaniem $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b$.
4) Zastąpienie zmiennej nieograniczonej x_i parą $x_i = x_i^+ - x_i^-$, gdzie $\begin{cases} x_i^+ \geqslant 0 \\ x_i^- \geqslant 0 \end{cases}$.
5) Zastąpienie problemu $\{x_0 = cx^T \mid x \in D\}$ problemem
$\{x_0 c f(x)^T \mid f(x) \in f(D)\}$, gdzie f jest automorfizmem afinicznym.

Twierdzenie 8.1. *Zadanie dualne do dualnego jest równoważne zdaniu pierwotnemu.*

Przykład 8.2. Rozważmy zadanie pierwotne P:

$Max \quad c^T x$
$Ax \leqslant b$
$x \geqslant 0$

$\downarrow$

D $\quad Min \quad b^T y$
$A^T y \geqslant c$
$y \geqslant 0$

$\downarrow$

D' $\quad -Max(-b\prime)^T y$
$(-A^T)y \leqslant -c$
$y \geqslant 0$

$\downarrow$

D(D') $\quad -Min(-c^T z)$
$(-A^T)^T z \geqslant (-b^T)^T$
$z \geqslant 0$

$\downarrow$

P' $\quad Max \quad c^T z$
$Az \leqslant b$
$z \geqslant 0$

P'=P

Twierdzenie 8.2. *Jeżeli zadania P_1 i P_2 są równoważne to dualne do nich zadania D_1 i D_2 też są równoważne.*

Twierdzenie 8.3 (Słabe twierdzenie o dualności)**.** *Jeżeli p jest punktem dopuszczalnym zadania pierwotnego P: $Max\ \{c^T x \mid Ax^T \leqslant b^T,\ x \geqslant 0\}$ zaś q jest punktem dopuszczalnym zadania dualnego D: $Min\ \ \{b^T y \mid A^T y^T \geqslant c^T,\ y \geqslant 0\}$ to*

$x_0(p) = c^T p \leqslant b^T q = y_0(q)$

Ponadto jeżeli $c^T p = b^T q$ to p jest punktem optymalnym P, zaś q jest punktem optymalnym D.

Dowód. Niech p i q będą punktami dopuszczalnymi zadań P i Q odpowiednio. Wówczas:

$Ap \leqslant b \qquad A^T q \geqslant c$

$p \geqslant 0 \qquad q \geqslant 0$

co możemy zapisać jako:

$$(Ap - b) \leqslant \theta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (A^T q - c) \geqslant \theta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$p \geqslant 0 \qquad q \geqslant 0$

Mnożąc na krzyż otrzymujemy;

$q^T(Ap - b) \leqslant 0 \in \mathbb{R} \qquad p^T(A^T q - c) \geqslant 0 \in \mathbb{R}$

Wyliczamy

$q^T Ap \leqslant q^T b \qquad p^T A^T q \geqslant p^T c$

Co daje

$c^T p = p^T c \leqslant p^T A^T q = q^T Ap \leqslant q^T b = b^T q$

Część druga

$c^T p = b^T q$ to $\forall_x$ z obszaru dopuszczalnego $c^T x \leqslant b^T q = c^T p \Rightarrow p$ optymalny i z drugiej strony identycznie $b^T y \geqslant c^T p = b^T q \Rightarrow q$ optymalny

□

Wniosek 8.1. *Jeżeli zadanie P jest nieograniczone to D jest sprzeczne.*

Dowód. Przypuśćmy że D nie jest sprzeczne $\Rightarrow$ istnieje q w obszarze dopuszczalnym zadania D

$\forall_x$ dopuszczalnego $c^T x \leqslant b^T q \Rightarrow P$ ograniczone

□

Wniosek 8.2. *Jeżeli D jest nieograniczone to P sprzeczne.*

Niestety zadania P i D mogą być naraz sprzeczne:

Przykład 8.3. $P = max \quad x_1 + x_2$

$-x_1 + x_2 \leqslant -1$

$x_1 - x_2 \leqslant -1$

$x_1, x_2 \geqslant 0$

$\Downarrow$

$0 \leqslant -2$

$D \quad min - y_1 - y_2$

$-y_1 + y_2 \geqslant 1$

$y_1 - y_2 \geqslant 1$

$y_1, y_2 \geqslant 0$

$\Downarrow$

$0 \geqslant 2$

Lemat 8.1 (Lemat Farkas'a)**.** *Spośród układów*

1) $Ax^T = b^T \wedge x \geqslant 0$

2) $yA \geqslant 0 \wedge by^T < 0$

dokładnie jeden ma rozwiązanie.

Dowód. Przypuśćmy że 1) i 2) mają rozwiązania x_0 i y_0. Wtedy

$x_0 \geqslant 0$ i $y_0 A \geqslant \theta$ więc $y_0 A x_0^T \geqslant 0$. Ale $y_0 A x_0^T \geqslant 0 = y_0 b^T < 0$. Sprzeczność.

Przypuśćmy że 1) nie ma rozwiązania. Stosujemy pierwszą fazę z dwufazowej metody sympleks.

Rozwiązujemy zadanie opisane tablicą $\left[\begin{array}{cc|c} 0\dots0 & 1\dots1 & 0 \\ \hline A & I & b^T \end{array}\right]$,

gdzie zapisane wierszami $A = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_t \end{bmatrix}$ i $b^T = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_t \end{bmatrix}$.

Końcowa tablica ma postać $\left[\begin{array}{cc|c} d_1\dots d_n & k_1\dots k_t & b_0 \\ \hline A' & D & b'^T \end{array}\right]$, gdzie

wiersz $(d_1 \dots d_n) \geqslant 0$ i $b_0 < 0$. Ale wiersz ten jest kombinacją liniową wierszy macierzy A. Oznacza to, że istnieje ciąg $y = (y_1, y_2, \dots, y_t)$ taki, że $(d_1 \dots d_n) = \sum_{i=1}^{t} y_i w_i$ oraz $b_0 = \sum_{i=1}^{t} y_i b_i$. Otrzymaliśmy rozwiązanie 2) $yA \geqslant 0 \wedge by^T < 0$.

□

Twierdzenie 8.4. *Rozpatrujemy zadanie optymalizacji liniowej:*

Max $x_0 = c \bullet x$*, gdzie* $x \in W$ *i* W *jest opisane układem nierówności:*

$$\begin{cases} w_1 \bullet x \leqslant b_1 \\ w_2 \bullet x \leqslant b_2 \\ \qquad \vdots \\ w_t \bullet x \leqslant b_t \end{cases}.$$

Niech $p \in W$ *będzie takim punktem, że* $w_i \bullet p = b_i$*, dla* $i = 1, 2, ..., j$ *oraz* $w_i \bullet x < b_i$*, dla* $i > j$*. Wówczas:*

p jest punktem optymalnym tego zadania wtedy i tylko wtedy gdy dla pewnych liczb rzeczywistych $r_1 \geqslant 0, r_2 \geqslant 0, ..., r_j \geqslant 0$ *zachodzi* $c = \sum_{i=1}^{j} r_i w_i$*.*

Dowód. Niech $B = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_j \end{bmatrix}$ będzie macierzą pochodzącą od pierwszych j nierówności. Wówczas p nie jest punktem optymalnym wtedy i tylko wtedy gdy kiedy istnieje wektor α taki, że $p+\alpha \in W$ i $x_0(p+\alpha) > x_0(p)$. Ponieważ długość wektora α nie gra roli to tylko j pierwszych nierówności opisujących W ma znaczenie. Przekształćmy warunki:

$$\begin{cases} w_1 \bullet (p+\alpha) \leqslant b_1 = w_1 \bullet p \\ w_2 \bullet (p+\alpha) \leqslant b_2 = w_2 \bullet p \\ \qquad\qquad \vdots \\ w_j \bullet (p+\alpha) \leqslant b_j = w_j \bullet p \end{cases}$$

$c \bullet (p+\alpha) > c \bullet p$ do:
$B\alpha^T \leqslant 0$ i $c\alpha^T > 0$.
Przyjmując oznaczenia $A = B^T$ i $y = -\alpha$ otrzymujemy:
$yA \geqslant 0 \wedge cy^T < 0$ czyli drugi układ z lematu Farkasa.
A zatem układ $Ax^T = c^T \wedge x \geqslant 0$ nie ma rozwiązań. Oznacza to, że nie istnieje ciąg liczb nieujemnych $r_1 \geqslant 0, r_2 \geqslant 0, ..., r_j \geqslant 0$ taki, że dla $x = (r_1, r_2, ..., r_j)$ $xB = c$ czyli $c \neq \sum_{i=1}^{j} r_i w_i$. □

Twierdzenie 8.5 (Silne twierdzenie o dualności)**.** *Jeżeli jedno z zadań P lub D ma rozwiązanie to drugie też ma rozwiązanie i wartość funkcji celu są równe.*

Dowód. Przyjmijmy, że zadanie pierwotne P:
$\{Max \quad x_0 = cx^T \mid Ax^T \leqslant b^T\}$ ma punkt optymalny p taki, że $w_i \bullet p = b_i$, dla $i = 1, 2, ..., j$ oraz $w_i \bullet x < b_i$, dla $i > j$, gdzie $A = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n_t$.

Wówczas na mocy poprzedniego twierdzenia istnieje ciąg liczb nieujemnych $r_1 \geqslant 0, r_2 \geqslant 0, ..., r_j \geqslant 0$ taki, że $c = \sum_{i=1}^{j} r_i w_i$.
Zadaniem dualnym jest D: $\{Min \quad y_0 = bx^T \mid A^T y^T = c^t,\ y \geqslant 0\}$.
Niech $q = (r_1, r_2, ..., r_j, 0, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^t$. Wówczas $q \geqslant 0$
i $qA = (r_1, r_2, ..., r_j, 0, 0, ..., 0) \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_t \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{j} r_i w_i = c.$
Więc $A^T y^T = c^t$ co oznacza, że q jest punktem dopuszczalnym zadania D.
Ale $y_0(q) = bq^T = \sum_{i=1}^{t} b_i r_i = \sum_{i=1}^{j} b_i r_i = \sum_{i=1}^{j} (w_i p^T) r_i =$
$= \sum_{i=1}^{j} (r_i w_i) p^T = cp^T = x_0(p)$.
Teraz ze słabego twierdzenia o dualności wynika optymalność punktu q. □

Twierdzenie 8.6 (Twierdzenie o równowadze (Kuhn, Tucker))**.** *Punkt dopuszczalny p zadania P ($Max \quad x_0 = cx^T \mid Ax^T \leqslant b^T, x \geqslant 0$) jest punktem optymalnym wtedy i tylko wtedy gdy istnieje punkt dopuszczalny q zadania D*
($Min\ y_0 = by^T \mid A^T y^T \geqslant c^T, y \geqslant 0$) taki, że:
1) $q(Ap^T - b^T) = 0$
2) $(qA - c)p^T = 0$
Warunek 2) możemy równoważnie zapisać jako:
2a) $p(A^T q^T - c^T) = 0$

Przykład 8.4.

P: $Max \quad x_1 + 5x_2 - 2x_3$

$2x_1 + 3x_2 - x_3 \leqslant 5$	$=$	
$3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 7$	$=$	
$x_1 + 2x_3 \geqslant 6$	$>$	$\Rightarrow y_3 = 0$
$x_i \geqslant 0$		

Sprawdzamy czy $p = (0, 3, 4)$ jest optymalny?

Szukamy w tym celu punktu $q = (y_1, y_2, y_3)$ spełniającego oba warunki równowagi a potem sprawdzimy czy któryś ze znalezionych punktów jest dualnie dopuszczalny. Aby sprawdzić pierwszy warunek podstawiamy punkt p do nierówności. Ponieważ trzecia nierówność spełniona jest na ostro to trzecia współrzędna punktu q musi być zerowa.

$$Ap - b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ > 0 \end{bmatrix}$$

Budujemy zadanie dualne.

$$\begin{array}{lll} D: & Min & 5y_1 + 7y_2 + 6y_3 \\ & & 2y_1 + 3y_2 + y_3 \geqslant 1 & \text{cokolwiek} \\ & & 3y_1 + 5y_2 \geqslant 5 & = \\ & & -y_1 - 2y_2 + 2y_3 \geqslant -2 & = \\ & & y_1 \geqslant 0,\ y_2 \in R,\ y_3 \leqslant 0 \end{array}$$

Aby punkt q spełniał drugi warunek równowagi to ponieważ punkt p ma drugą i trzecią współrzędną niezerową to punkt q musi spełniać drugą i trzecią nierówność zadania dualnego jak równość. Po opuszczeniu trzeciej, zerowej współrzędnej otrzymujemy:

$$\begin{cases} 3y_1 + 5y_2 = 5 \\ -y_1 - 2y_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 1 \end{cases}$$

Zatem $q = (0, 1, 0)$ lub nie istnieje.

Ponieważ $q = (0, 1, 0)$ jest dopuszczalny dla zadania dualnego, więc p jest optymalny.

Ponadto q jest optymalny dla D.

Dowód. (twierdzenia o równowadze)

Niech p będzie punktem optymalnym zadania P. Wówczas na mocy silnego twierdzenia o dualności, twierdzenia 8.5, istnieje rozwiązanie q optymalne dla zadania D. Podobnie jak w dowodzie słabego twierdzenia o dualności, twierdzenia 8.3, uzyskujemy podwójną równość.

$qb^T = qAp^T = cp^T$.

Z pierwszej wyciągając q przed nawias otrzymujemy $q(Ap^T - b^T) = 0$,

zaś z drugiej wyciągając p^T przed nawias otrzymujemy $(qA - c)p^T = 0$.

Przypuśćmy, że zachodzą warunki 1) i 2)

wtedy z 1) otrzymujemy $q^T Ap = b^T q$

2) otrzymujemy $c^T p = q^T Ap$. Zatem

$\Rightarrow b^T q = c^T p$ i na mocy słabego twierdzenia o dualności p i q optymalne. □

Uwaga 8.1. Nierówność

$cp^T \leqslant qAp^T \leqslant bq^T$ jest spełniona w każdym przypadku gdyż:

$(q^T A - c^T)p \geqslant 0$

P - max $\quad$ p - punkt dopuszczalny P

D - min $\quad$ q - punkt dopuszczalny D

D porównuje $A^T q$ z c. Jeżeli w P $x_i \geqslant 0$ to i-ta równość jest zgodna.

$A = [k_1, k_2, ..., k_n] \quad k_i^T q \geqslant c_i$

$$A^T = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \cdots \\ k_n \end{bmatrix} \qquad (\underbrace{k_i^T q - c}_{\geqslant 0})\underbrace{p_i}_{\geqslant 0} \geqslant 0$$

Jeżeli $x_j \leqslant 0$ to j-ta nierówność jest niezgodna z typem $k_j^T q \leqslant c_j$

$\underset{\leqslant 0}{(k_j^T q - c_j)} \underset{\leqslant 0}{p_j} \geqslant 0$
Jeżeli $x_i = 0 \Leftrightarrow p_i = 0$
$(k_j^T q - c_i) p_i = 0$
$\forall_i \quad (k_j^T q - c_i) p_i \geqslant 0$
$\left(A^T q - c^T\right) p \geqslant 0$

Ćwiczenie 8.1. Rozważmy zagadnienie programowania liniowego:
Max $x_0 = 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - x_4$, gdy
$2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 \geqslant 4$
$x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = -8$
$6x_1 - 3x_2 - 5x_3 + 5x_4 \leqslant 1$
$x_1 \leqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \in R,\ x_4 \leqslant 0$
a) Zbadaj, czy $(0, 3, -2, 0)$ jest wierzchołkiem obszaru dopuszczalnego.
b) Opisz jedną z krawędzi przechodzi przez punkt $(0, 3, -2, 0)$.
c) Napisz zadanie dualne.
d) Stosując warunki równowagi sprawdź czy $(0, 3, -2, 0)$ jest punktem optymalnym?
e) Opisz wszystkie punkty optymalne zadania dualnego.
f) Zbadaj jaki wymiar ma zbiór punktów optymalnych zadania pierwotnego.

Ćwiczenie 8.2. Rozważmy zagadnienie programowania liniowego:
Max $x_0 = x_1 - 7x_2 - 3x_3 + x_4$, gdy
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geqslant 2$
$2x_1 - 5x_2 - 6x_3 + 2x_4 \leqslant 6$
$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 3$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \leqslant 0,\ x_3 \geqslant 0,\ x_4 \in R$
a) Napisz zadanie dualne.
b) Sprawdź czy $(1, 0, 0, 2)$ jest wierzchołkiem obszaru dopuszczalnego.
c) Zbadaj ile krawędzi zawiera w sobie punkt $(1, 0, 0, 2)$.
d) Stosując warunki równowagi sprawdź czy $(1, 0, 0, 2)$ jest punktem optymalnym zadania.
e) Opisz wszystkie punkty optymalne zadania pierwotnego.
f) Opisz wszystkie punkty optymalne zadania dualnego.

Ćwiczenie 8.3. Rozważmy zagadnienie programowania liniowego:
Max $x_0 = 3x_1 - 3x_2 - 7x_3 + x_4$, gdy
$x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 \leqslant 10$
$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 \geqslant -5$
$2x_1 + 3x_2 - 6x_3 - 2x_4 = 10$
$x_1 \in R,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \leqslant 0\ ,\ x_4 \geqslant 0$.
a) Napisz zadanie dualne.
b) Stosując warunki równowagi sprawdź czy $(2, 0, -1, 0)$ jest punktem optymalnym zadania.
c) Napisz taką funkcję celu by zbiorem punktów optymalnych była krawędź zawierająca punkt $(2, 0, -1, 0)$.

Ćwiczenie 8.4. Rozważmy zagadnienie programowania liniowego:
Max $x_0 = 3x_1 - x_2 - 6x_3$, gdy
$2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 \geqslant 6$
$-3x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -9$
$-x_1 + 6x_2 + 4x_3 \leqslant -3$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \leqslant 0,\ x_3 \in R \leqslant 0x_4 \leqslant 0$
a) Napisz zadanie dualne.

b) Sprawdź czy $(2,0,-1,0)$ jest wierzchołkiem obszaru dopuszczalnego.
c) Opisz dowolną krawędź zawierającą z punkt $(2,0,-1,0)$.
d) Stosując warunki równowagi sprawdź czy $(2,0,-1,0)$ jest punktem optymalnym zadania.
e) Znajdź oszacowanie z dołu na funkcję celu zadania dualnego.

9. Dualna metoda sympleks

9.1. Dualna metoda sympleks.

Badamy zadanie:

$P \qquad Max \quad x_0 = c^T x$

$Ax = b$

$x \geqslant 0$

$$TS = \left[\begin{array}{c|c} -c_N & 0 \\ \hline A & b \end{array}\right]$$

przypomnijmy definicję 5.1. TS jest pierwotnie dopuszczalna (przedstawia wierzchołek obszaru dopuszczalnego) $\Leftrightarrow b \geqslant 0$

TS jest dualnie dopuszczalna (przedstawia wierzchołek zadania dualnego) $\Leftrightarrow c \leqslant 0 \quad (-c_N \geqslant 0)$

TS przedstawia wierzchołek optymalny jest pierwotnie i dualnie dopuszczalna.

Przykład 9.1. $P \qquad Min \quad x_0 = 2x_1 + 3x_2$

$x_1 + x_2 \geqslant 2$

$3x_1 + 2x_2 \geqslant 7$

$2x_1 + x_2 \geqslant 4$

$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0$

(typowy przykład zagadnienia diety)

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	ww
1	−2	−3	0	0	0	0
0	1	1	−1	0	0	2
0	3	2	0	−1	0	7
0	2	1	0	0	−1	4

$$TS \quad \begin{array}{ccccc|c} -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ -3 & -2 & 0 & 1 & 0 & -7 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}$$

jest dualnie dopuszczalna.

Rozpatrzmy teraz zadanie dualne:

$D \qquad Max \quad y_0 = 2y_1 + 7y_2 + 4y_3$

$y_1 + 3y_2 + 2y_3 \leqslant 2$

$y_1 + 2y_2 + y_3 \leqslant 3$

$y_1 \geqslant 0,\ y_2 \geqslant 0,\ y_3 \geqslant 0.$

I równoważne mu:

$D^* \qquad Min - y_0 = -2y_1 - 7y_2 - 4y_3$

$$TS^* \quad \begin{array}{ccccc|c} 2 & 7 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}$$

Jeżeli wykreślimy kolumny związane ze zmiennymi bazowymi to $-TS^T = TS^*$

Prześledźmy metodę sympleks na tych dwóch tablicach równocześnie.

Dualne

$$\begin{array}{cccccc|c} 2 & 7 & 4 & 0 & 0 & & 0 \\ \hline (1) & 3 & 2 & 1 & 0 & & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & -4 \\ \hline 1 & (3) & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc|c} -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & -4\frac{2}{3} \\ \hline \frac{1}{3} & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 & \frac{5}{3} \end{array}$$

Pierwotne

$$\begin{array}{ccccc|c} -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline (-1) & -1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ -3 & -2 & 0 & 1 & 0 & -7 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc|c} 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 4 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & (-3) & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc|c} 0 & -\frac{5}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & 4\frac{2}{3} \\ \hline 1 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{7}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & 1 & \frac{2}{3} \end{array}$$

Otrzymaliśmy rozwiązania

$q = (0, \frac{2}{3}, 0, 0, \frac{5}{3})$ dla zadania dualnego i $p = (\frac{7}{3}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3})$ dla zadania pierwotnego. Ale wartości funkcji celu są równe

$-y_0 = -4\frac{2}{3}$

$y_0 = 4\frac{2}{3} = x_0$

Algorytm dualnej metody sympleks

Na starcie mamy TS dualnie dopuszczalną (tzn. $-c_N \geqslant 0$)

$TS = \begin{array}{c|c} -c_N & b_0 \\ \hline \mathbf{A} & b \end{array}$ gdzie elementy macierzy A oznaczamy:

$a_{i,j}, 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant t$ zaś kolumny b oznaczamy $b_i, 1 \leqslant j \leqslant t$.

1° Test optymalności. Jeżeli $b \geqslant 0$ **to** stop (tablica przedstawia wierzchołek optymalny)

2° Wybieramy wiersz główny i, taki, że $b_i < 0$

3° Test sprzeczności: jeżeli w i−tym wierszu wszystkie wyrazy są $\geqslant 0$ **to** stop (zadanie sprzeczne)

Ponieważ i−ty wiersz reprezentuje równanie

$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = b_i$, w którym
$a_{i,j} \geqslant 0 \quad x_j \geqslant 0$ oraz $b_i < 0$

4° Wybór elementu centralnego:

Liczymy minimum $Min\{\left|\frac{c_j}{a_{i,j}}\right| : 1 \leqslant j \leqslant t,\ a_{i,j} < 0\}$.

Jako element centralny wybieramy dowolne $a_{i,j}$ na którym osiągalne jest minimum.

5° Eliminacja Gaussa–Jordana

6° Wracamy **do** 1°

Rzeczywiście 5° daje TS dualnie dopuszczalną:

nad kreską otrzymujemy $W_0 - \frac{d_j}{a_{i,j}} W_i$,

gdzie $W_0 = (d_1, d_2, ..., d_n)$ zatem w k–tej kolumnie otrzymujemy

$d_k - \frac{d_j}{a_{i,j}} \cdot a_{ik}$

Jeżeli $a_{i,k} \geqslant 0$ **to** $\frac{d_j}{a_{ij}} \cdot a_{ik} \leqslant 0$ bo $a_{i,j} \leqslant 0$ i $d_k - \frac{d_j}{a_{i,j}} \cdot a_{i,k} \geqslant 0$.

Jeżeli $a_{i,k} < 0$ **to** $\left|\frac{d_j}{a_{ik}}\right| \geqslant \left|\frac{d_j}{a_{ij}}\right|$

$\frac{d_j}{a_{i,k}} \leqslant \frac{d_j}{a_{i,j}}$ więc
$d_k \geqslant \frac{d_j}{a_{i,j}} \cdot a_{i,k}$

Porównanie metody sympleks prostej i dualnej

1) zadanie opisane TS dualnie dopuszczalną może mieć rozwiązanie lub być sprzeczne, ale nie może być nieograniczone.

1') zadanie opisane TS pierwotnie dopuszczalną może mieć rozwiązanie lub być nieograniczone ale nie może być sprzeczne (TS opisuje wierzchołek dopuszczalny)

2) Dualna metoda sympleks daje rozwiązanie (algorytm się kończy) ponieważ ma tyle kroków ile prosta metoda sympleks na zadaniu dualnym.

3) Przy zadaniu Max

W dualnej metodzie sympleks wartość funkcji celu maleje, (w pierwotnej rośnie).

Dualna metoda sympleks jest używana tylko jako narzędzie pomocnicze, ponieważ niedokończone obliczenia nie dają przybliżonego rozwiązania, a tylko oszacowanie funkcji celu.

Ćwiczenie 9.1. Opisz dualny algorytm metody sympleks na przykładzie zadania:
Min $x_0 = 5x_1 + x_2 + 11x_3$, gdy:
$x_1 + 2x_3 \geqslant 5$
$x_1 + x_2 + 3x_3 \leqslant 6$
$6x_1 + 2x_2 + 15x_3 \geqslant 40$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0$

Ćwiczenie 9.2. Opisz dualny algorytm metody sympleks na przykładzie zadania:
Min $x_0 = 2x_1 + 4x_2 + 7x_3$, gdy:
$2x_1 - 5x_2 - 2x_3 \geqslant 5$
$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leqslant 6$
$x_1 - 5x_2 + x_3 \geqslant 2$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0.$

10. Twierdzenia strukturalne 2

10.1. Twierdzenia strukturalne 2

Na zakończenie wykładu pokażemy zastosowanie teorii dualności do opisu wielościanów. Zacznijmy od dualnego opisu stożków.

Lemat 10.1. *Niech $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_t$ będą wektorami. Wówczas zbiór $S = \{\sum_{i=1}^{t} r_i\alpha_i \mid r_i \geqslant 0\}$ jest wielościanem.*

Dowód. Niech $dim\, S = n$. Dzięki twierdzeniu 2.4 bez zmniejszenia ogólności możemy przyjąć, że $S \subset \mathbb{R}^n$.

Wybieramy wszystkie wektory $\gamma \in \mathbb{R}^n$ spełniające warunki:

1) $\forall_{1 \leqslant i \leqslant t} \quad \alpha_i \bullet \gamma \leqslant 0$.

2) Istnieje $n-1$ liniowo niezależnych wektorów $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_{n-1}}$ w zbiorze $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_t\}$, takich że $\forall_{1 \leqslant j < n} \quad \alpha_{i_j} \bullet \gamma = 0$.

3) $\gamma \bullet \gamma = 1$

Warunki 2) i 3) wymuszają skończoną liczbę wektorów γ.

Niech $W = \bigcap_{\gamma} H_\gamma$, gdzie $H_\gamma = \{x \in R^n \mid x \bullet \gamma \leqslant 0\}$. Pokażemy teraz, że $S = W$.

Z warunku 1) wynika inkluzja $S \subset W$.

Niech $b \notin S$. Badamy zadanie

$Max\ x_0 = b \bullet x$

$\forall_{1 \leqslant i \leqslant t} \quad \alpha_i \bullet x \leqslant 0.$

Ponieważ wektory α_i rozpinają przestrzeń $\mathbb{R}^n$ więc obszar dopuszczalny jest wielościanem o jedynym wierzchołku $p = \theta$. Warunek $b \notin S$ oznacza, na mocy twierdzenia o dualności, twierdzenie 8.4, że p nie jest punktem optymalnym tego zadania. Zatem istnieje krawędź poprawiająca. Niech γ będzie unormowanym wektorem kierunkowym tej krawędzi. Wówczas:

1) $\gamma \in W$ implikuje $\forall_{1 \leqslant i \leqslant t}\ \alpha_i \bullet \gamma \leqslant 0$.

2) γ jest wektorem krawędzi więc istnieje $n-1$ liniowo niezależnych półprzestrzeni opisujących - wektorów $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_{n-1}}$ w zbiorze $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_t\}$, takich że $\forall_{1 \leqslant j < n} \quad \alpha_{i_j} \bullet \gamma = 0$.

3) $\gamma \bullet \gamma = 1$.

Dodatkowo $\gamma \bullet b \geqslant 0$ więc $b \notin H_\gamma$ a zatem również $b \notin W$.

Wykazaliśmy, że $S = W$ jest wielościanem. □

Lemat ten można sformułować jako: "Każdy wypukły i skończenie generowany stożek jest wielościanem".

Pewna odmiana powyższego lematu jest nazywana "Fundamentalnym twierdzeniem o nierównościach liniowych" i pochodzi z prac Farkasa [1894, 1898], Minkowskiego [1896], Karatheodoryego [1911] i Weyla [1935].

Twierdzenie 10.1 (Fundamentalne twierdzeniem o nierównościach liniowych)**.** *Niech* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_t$ *i* β *będą wektorami z przestrzeni* $\mathbb{R}^n$*. Wówczas albo:*

I) β *jest nieujemną kombinacją liniową liniowo niezależnych wektorów z* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_t$*.*

albo

II) Istnieje hiperprzestrzeń $V = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \gamma \bullet x = 0\}$*, zawierająca* $m - 1$ *liniowo niezależnych wektorów z* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_t$ *takich,*

że $\gamma \bullet \beta < 0$ *i* $\gamma \bullet \alpha_1 \geqslant 0, \gamma \bullet \alpha_2 \geqslant 0, ..., \gamma \bullet \alpha_t \geqslant 0$*,*

gdzie $m = dim\, lin\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_t, \beta\}$*.*

Dowód. Algorytm szukania hiperprzestrzeni.

Krok 1. Jeżeli $\beta \notin lin\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_t\}$ to jako V można wziąć dowolną hiperprzestrzeń zawierającą $lin\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_t\}$ i nie zawierającą β.

Krok 2. Przyjmijmy, że $\mathbb{R}^n = lin\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_t\}$. Wybieramy dowolny liniowo niezależny podzbiór $D = \{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_n}\}$ z wektorów $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_t$.

Następnie wykonujemy następującą iterację:

i) Zapisujemy $\beta = \sum_{j=1}^{n} a_{i_j}\alpha_{i_j}$. Jeżeli $a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_n} \geqslant 0$ to stop jesteśmy w przypadku I).

ii) W przeciwnym przypadku wybieramy najmniejszy indeks h spośród $i_1, i_2, ..., i_n$ taki, że $a_h < 0$. Następnie budujemy hiperprzestrzeń $H = \{x \mid \gamma \bullet x = 0\} = lin(D \setminus \{\alpha_h\})$, gdzie γ tak normalizujemy by $\gamma \bullet \alpha_h = 1$. (Wtedy $\gamma \bullet \beta = a_h < 0$).

iii) Jeżeli $\gamma \bullet \alpha_1 \geqslant 0, \gamma \bullet \alpha_2 \geqslant 0, ..., \gamma \bullet \alpha_t \geqslant 0$ jesteśmy w przypadku II).

iv) W przeciwnym przypadku wybieramy najmniejszy indeks s taki, że $\gamma \bullet \alpha_s < 0$.
Teraz zamieniamy zbiór D na $(D \setminus \{\alpha_h\}) \cup \{\alpha_s\}$ i powtarzamy iterację.

Dowód poprawności i skończoności algorytmu.
Przyjmijmy oznaczenia:
D_i zbiór wektorów używanych w i-tej iteracji.
Jeżeli proces nie kończy się to, wobec skończoności zbioru wektorów α, dla pewnych $k < l$ otrzymamy $D_k = D_l$.
Niech r będzie największym indeksem, takim, że wektor α_r jest dodawany przy pewnej iteracji D_q a wyrzucany przy iteracji D_p. ($k \leqslant q \leqslant l$, $k \leqslant p \leqslant l$). Niech $D_p = \{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, ..., \alpha_{i_n}\}$ i $\beta = \sum_{j=1}^{n} a_{i_j}\alpha_{i_j}$.

Zaczynamy q-tą iterację:
ii) Ponieważ nie jesteśmy w przypadku I) wybieramy najmniejszy indeks h spośród $i_1, i_2, ..., i_n$ taki, że $a_h < 0$. Następnie budujemy hiperprzestrzeń $H = \{x \mid \gamma \bullet x = 0\} = lin(D \setminus \{\alpha_h\})$, gdzie γ tak normalizujemy by $\gamma \bullet \alpha_h = 1$. Ponieważ α_h jest kiedyś dodawany więc $h < r$. Otrzymujemy $\gamma \bullet \beta = a_h < 0$.
iv) Teraz r jest najmniejszym indeksem takim, że $\gamma \bullet \alpha_r < 0$. Czyli $i < r \Rightarrow \gamma \bullet \alpha_i \geqslant 0$
Reasumując $0 > \gamma \bullet \beta = \gamma \bullet \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i_j}\alpha_{i_j}\right) = \sum_{j=1}^{n} a_{i_j}\gamma \bullet \alpha_{i_j} \geqslant 0$ gdyż:
$i_j < r \Rightarrow \gamma \bullet \alpha_{i_j} \geqslant 0$ oraz $a_{i_j} \geqslant 0$,
$a_r < 0$ i $\gamma \bullet a_r < 0$,

$i_j > r \Rightarrow \gamma \bullet \alpha_{i_j} = 0$ bo $\alpha_{i_j} \in D_p \cap D_q$ z wyboru r.
Otrzymaliśmy sprzeczność.

□

Powyższy dowód poprawności i skończoności algorytmu można znaleźć w [12] Twierdzenie 7.1.

Z fundamentalnego twierdzenia można łatwo wyprowadzić lemat Farkasa, twierdzenia o dualności i twierdzenia strukturalne.

Twierdzenie 10.2. *Każdy podzbiór R^n postaci*
$S = \{\ \sum_{i=1}^{t}\ r_i p_i + \sum_{j=1}^{k}\ s_j \alpha_j \mid \sum_{i=1}^{t}\ r_i = 1,\ r_i \geqslant 0,\ s_j \geqslant 0\}$ *jest wielościanem.*

Dowód. Bez zmniejszenia ogólności możemy przyjąć, że $dim\ S = n$. Niech $\overline{p_i} = (1, p_i) \in R^{n+1}$ oraz $\overline{\alpha_j} = (0, \alpha_j) \in R^{n+1}$. Tworzymy stożek $\overline{S} = \{\theta + \sum_{i=1}^{t}\ r_i\overline{p_i} + \sum_{j=1}^{k}\ s_j\overline{\alpha_j}\ ;\ \ r_i \geqslant 0,\ s_j \geqslant 0\}$. Niech $H = \{(x_0, x_1, ..., x_n) \in R^{n+1}\ ;\ x_0 = 1\}$. Wtedy $S \approx \overline{S} \cap H$. Ponadto $dim\ \overline{S} = dim\ S + 1 = n + 1$. Na mocy poprzedniego lematu stożek $\overline{S}$ jest wielościanem więc S też jest wielościanem.

□

Twierdzenie 10.3. *Niech $W \subset R^n$ będzie wielościanem z wierzchołkiem. Niech $p_1, p_2, ..., p_t$ będzie zbiorem wszystkich wierzchołków W, oraz $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ będzie zbiorem wszystkich krawędzi nieskończonych W*

$S = \left\{\sum_{i=1}^{t} r_i p_i + \sum_{j=1}^{k} s_j \alpha_j \mid \ \sum_{i=1}^{t} r_i = 1, r_i \geqslant 0, s_j \geqslant 0\right\}$
Wtedy $S = W$

Dowód. 1) $S \subset W$
Niech $p = \sum_{i=1}^{t} r_i p_i$ wtedy $p \in W$, bo W jest wypukły.
Ponieważ każda krawędź zawiera wierzchołek więc $\forall_j \exists_i \quad \forall_t \quad p_i + t\alpha_j \in W$.
Zatem $\forall_t \quad \forall_{p_i} \quad p_i + t_\beta \in W$
Na mocy poprzedniego lematu
$\beta = \sum_{j=1}^{k} s_j \alpha_j$ jest wektorem takim, że $\forall_t \quad p + t\beta \in W$ Co daje tezę.

2) $W \subset S$:
Przypuśćmy, że $W \neq S$ i będziemy dochodzić sprzeczności.
Niech $q \in W \setminus S$.
S jako wielościan jest zbiorem wypukłym i domkniętym.
Istnieje taka półprzestrzeń H, że $q \in H$ i $S \cap H \neq \emptyset$.
$W \cap H$ jest wielościanem zawartym w W, zatem istnieje wierzchołek p wielościanu $H \cap W$. p nie jest wierzchołkiem W, bo S zawierał wszystkie wierzchołki (a nawet krawędzie). p leży na brzegach n liniowo niezależnych półprzestrzeni opisujących $W \cap H$, więc leży na brzegach $n-1$ półprzestrzeni opisujących W. Stąd p leży na krawędzi W
- sprzeczność.

□

Twierdzenie 10.4. *Jeżeli W jest wielościanem, różnym od zbioru pustego, to istnieją takie punkty $p_1, p_2, ..., p_t$ oraz wektory $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$,*
że $W = \left\{\sum_{i=1}^{t} r_i p_i + \sum_{j=1}^{k} s_j \alpha_j \mid \sum_{i=1}^{t} r_i = 1 \wedge r_i \geqslant 0 \wedge s_j \geqslant 0\right\}$.

Dowód. Niech p będzie punktem wielościanu W. Definiujemy zbiór wektorów

$$V = \{\alpha \in \mathbb{R}^n \mid \forall_{r \in \mathbb{R}}\ p + r\alpha \in W\}$$

.

Zauważmy, że V jest przestrzenią liniową. Wprost z definicji wynika własność $\alpha \in V \Rightarrow r\alpha \in V$. Dodatkowo z własności wielościanów mamy

$$\alpha \in V \Rightarrow \forall_{q \in W}\ q + \alpha \in W$$

A więc dla $\alpha, \beta \in V$ zachodzi $p + (\alpha + \beta) = (p + \alpha) + \beta \in W$.
Podsumowując

$$\forall_{\alpha \in V} \forall_{q \in W}\ q + \alpha \in W.$$

Niech $S = W \cap \left(p + V^{\perp}\right)$ będzie wielościanem powstałym z przecięcia W z podprzestrzenią prostopadłą do V. Zbiór S jest niepusty bo zawiera punkt p ale nie zawiera prostej. Zatem S ma wierzchołek i na mocy poprzedniego twierdzenia istnieją takie punkty $p_1, p_2, ..., p_t$ oraz wektory $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$,
że $S = \left\{\sum_{i=1}^{t} r_i p_i + \sum_{j=1}^{k} s_j \alpha_j \mid \sum_{i=1}^{t} r_i = 1 \wedge r_i \geqslant 0 \wedge s_j \geqslant 0\right\}$.
A stąd $W = \left\{\sum_{i=1}^{t} r_i p_i + \sum_{j=1}^{k} s_j \alpha_j\ + \sum_{z=1}^{m} a_z \beta_z\ + \sum_{z=1}^{m} b_z(-\beta_z)\ \right\}$,
gdzie $\sum_{i=1}^{t} r_i = 1 \wedge r_i \geqslant 0 \wedge s_j \geqslant 0, \wedge a_z \geqslant 0, \wedge b_z \geqslant 0$, oraz wektory $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m$ tworzą bazę przestrzeni V. □

Definicja 10.1. Niech $\{p_1, p_2, ..., p_t\}$ będzie zbiorem punktów z przestrzeni R^n. Wielościanem klasycznym w R^n nazywamy zbiór:
$S = Conv\ \{p_1, p_2, ..., p_t\} = \left\{\sum_{i=1}^{t} r_i p_i \mid \sum_{i=1}^{t} r_i = 1 \wedge r_i \geqslant 0\right\}$

Twierdzenie 10.5. *Niech $\emptyset \neq W$ będzie wielościanem w R^n z wierzchołkiem. Wtedy równoważne są warunki:*
1) *W jest wielościanem klasycznym.*
2) *W jest ograniczony (tzn. $\exists_p \quad \exists_r \quad K(p, r) \supset W$).*
3) *W nie ma krawędzi nieskończonych.*

Dowód. 3) $\Rightarrow$ 1) - wynika z poprzedniego twierdzenia
1) $\Rightarrow$ 2) - oczywiste
2) $\Rightarrow$ 3) - oczywiste. □

Metody dowodu i część idei pochodzi z następujących twierdzeń Karatheodory'ego (oryginalnie po grecku - $K\alpha\rho\alpha\theta\epsilon\delta\omega\rho\eta$, po angielsku - Carathéodory)

Twierdzenie 10.6. *Niech q będzie punktem n- wymiarowego stożka*
$S = \left\{ p + \sum_{j=1}^{k} s_j \alpha_j \mid s_j \geqslant 0 \right\}$
wówczas można przedstawić jako sumę punktu p i co najwyżej n wektorów.

Twierdzenie 10.7. *Niech q będzie nieujemnym rozwiązaniem układu t równań liniowych o n zmiennych $AX = b$. Wówczas z macierzy A można wybrać takie liniowo niezależne kolumny $[k_{i_1}, k_{i_2}, ..., k_{i_t}]$, że układ $[k_{i_1}, k_{i_2}, ..., k_{i_t}]X = b$ też ma nieujemne rozwiązanie. (istnieje niezerowe rozwiązanie bazowe układu $AX = b$.)*

Twierdzenie 10.8. *Niech q będzie punktem n- wymiarowego wielościanu*
$W = \left\{ \sum_{i=1}^{t} r_i p_i + \sum_{j=1}^{k} s_j \alpha_j \mid \sum_{i=1}^{t} r_i = 1, r_i \geqslant 0, s_j \geqslant 0 \right\}.$
Wówczas q jest kombinacją wypukłą co najwyżej $n+1$ punktów i wektorów rozpinających ten wielościan.

Ćwiczenie 10.1. Niech $X = \{(2,5), (-2,3), (1,3), (3,7), (1,2)\}$. Wiedząc, że punkt $(1,4) \in Conv\,X$, $(1,4) = \frac{1}{5}(2,5) + \frac{1}{5}(-2,3) + \frac{1}{5}(1,3) + \frac{1}{5}(3,7) + \frac{1}{5}(1,2)$. Przedstaw $(1,4)$ punkt jako kombinację wypukłą trzech punktów ze zbioru X.

Ćwiczenie 10.2. Niech $X = \{(1,3), (3,5), (5,4)\}$ zaś $Y = \{(1,1), (2,1)\}$ Wiedząc, że punkt $(1,4) = \frac{1}{3}(1,3) + \frac{1}{3}(3,5) + \frac{1}{3}(5,4) + (1,2) + (1,1) \in Conv\,X + St\,Y$, przedstaw $(1,4)$ punkt jako kombinację wypukłą trzech elementów ze zbioru $X \cup Y$. ($St\,Y = \{a(1,2) + b(1,1) \mid a, b \geqslant 0\}$).

Ćwiczenie 10.3. Wiedząc, że punkt $p = (1,1,1,1,1)$ jest dopuszczalnym rozwiązaniem układu $Ax = b$, gdzie $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & -6 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ i $b = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ znajdź wszystkie bazowe rozwiązania dopuszczalne.

Uzasadnij, że otrzymane punkty leżą na jednej płaszczyźnie ale nie są współliniowe -(są wierzchołkami czworokąta).

Przedstaw $p = (1,1,1,1,1)$ jako kombinację wypukłą trzech z otrzymanych punktów.

11. Zagadnienia całkowitoliczbowe

11.1. Zagadnienia całkowitoliczbowe

Definicja 11.1. Zagadnieniem całkowitoliczbowym nazywać będziemy zadanie optymalizacji liniowej w którym od zmiennych lub części zmiennych wymagamy by były liczbami całkowitymi. Na przykład zadanie typu: $Max\ \{ x_0 = x \bullet c \mid x \in W \subset \mathbb{R}^n, \forall_{1 \leqslant i \leqslant t}\ x_i \in \mathbb{Z}\}$.

Idea rozwiązania.

Skupmy się na zadaniu w którym wszystkie zmienne mają być całkowite a wielościan W jest ograniczony. Jako W_1 bierzemy uwypuklenie zbioru wszystkich punktów z wielościanu W o współrzędnych całkowitych. Zbiór W_1 jest rozpięty na skończonej liczbie punktów. Na mocy twierdzenia strukturalnego W_1 jest wielościanem i to takim, którego wszystkie wierzchołki mają współrzędne całkowite. Zatem zadania $P:\ \ Max\ \{x_0 = x \bullet c \mid x \in W, \forall_{1 \leqslant i \leqslant t}\ x_i \in \mathbb{Z}\}$ i $P_1:\ Max\ \{x_0 = x \bullet c \mid x \in W_1 \subset \mathbb{R}^n\}$ mają te same wierzchołki optymalne. Metoda rozwiązania polega na przecinaniu wielościanu W takimi półprzestrzeniami by uzyskać wielościan W_1.

Rozpoczniemy od prezentacji metody zwanej "Odcięciem Gomoryego" [7], [8], [9]. Metoda opiera się na relaksacji problemu i jej kolejnych zacieśnianiach zwanych odcięciami Gomoryego.

Definicja 11.2. Relaksacją problemu P nazywamy problem
RP: $Max\ \{ f(x) \mid x \in Q(RP)\}$,
gdzie obszar dopuszczalny $Q(RP)$ jest większy niż $Q(P)$.

Zwykle relaksacja jest opuszczeniem najmniej wygodnych warunków opisujących obszar dopuszczalny, np. że współrzędne są całkowite.

Definicja 11.3. Zacieśnieniem relaksacji RP problemu P nazywamy taką relaksację problemu P której obszar dopuszczalny jest mniejszy niż obszar $Q(RP)$.

Odcięciem nazywamy zacieśnienie relaksacji w którym nowy obszar dopuszczalny jest przecięciem półprzestrzeni i $Q(RP)$.

Odcięcie Gomoryego wykorzystuje proste własności części całkowitej liczby:
$\lfloor a+b \rfloor \geqslant \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor$
i jeżeli x jest liczbą naturalną to $\lfloor xa \rfloor \geqslant x \lfloor a \rfloor$

Stąd jeżeli obszar dopuszczalny jest (między innymi) opisany równaniem $\sum_{i=1}^n a_i x_i = b$ to każdy punkt tego obszaru o współrzędnych całkowitych spełnia też nierówność
$\lfloor b \rfloor = \lfloor \sum_{i=1}^n a_i x_i \rfloor \geqslant \sum_{i=1}^n \lfloor a_i \rfloor x_i$.

Odcięciem Gomoryego nazywamy więc ograniczenie obszaru dopuszczalnego półprzestrzenią $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n \lfloor a_i \rfloor x_i \leqslant \lfloor b \rfloor\}$.

Algorytm rozwiązywania zadań całkowitoliczbowych metodą odcięć Gomoryego:

0) Dane zagadnienie $P:\ \ Max\ \{x_0 = x \bullet c \mid Ax^T = b, \forall_{1 \leqslant i \leqslant n}\ x_i \geqslant 0,\ \forall_{1 \leqslant i \leqslant n}\ x_i \in \mathbb{Z}\}$.

1) Rozwiązujemy relaksację $RP:\ \ Max\ \{x_0 = x \bullet c \mid Ax^T = b, \forall_{1 \leqslant i \leqslant n}\ x_i \geqslant 0\}$ polegającą na pominięciu warunków $\forall_{1 \leqslant i \leqslant t}$

2) Jeżeli znaleziony punkt optymalny $p = (p_1, p_2, ..., p_n)$ ma współrzędne całkowite **to** STOP znaleźliśmy rozwiązanie.

3) Wybieramy niecałkowitą współrzędną p_j. Odpowiadające jej równanie (wiersz macierzy sympleks) ma postać $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i =$

Dodajemy nierówność $\sum_{i=1}^{n} \lfloor a_i \rfloor x_i \leqslant \lfloor p_j \rfloor$.

4) Budujemy nową tablicę sympleks z dodatkową kolumną na nową zmienną (tu x_{n+1}) i dodatkowym wierszem opisującym

5) Rozwiązujemy relaksację zadaną tą tablicą i **GOTO** 2.

Prześledźmy algorytm na przykładzie:

Przykład 11.1. Rozwiązujemy zadanie P.

Max $x_0 = -3x_1 - x_2$, gdy
$\frac{1}{2}x_1 + 2x_2 + x_3 + \frac{3}{2}x_5 = \frac{7}{2}$
$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_4 + 3x_5 = \frac{9}{2}$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0,\ x_4 \geqslant 0, x_5 \geqslant 0,\ x_i \in Z.$

Zaczynamy od budowy tablicy sympleks pierwszej relaksacji. Jest nią:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{2} & 2 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 3 & \frac{9}{2} \end{array}\right]$$

Otrzymaliśmy tablicę sympleks pierwotnie i dualnie dopuszczalną opisującą wierzchołek optymalny $p_1 = (0, 0, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, 0)$. Ponieważ punkt nie ma współrzędnych całkowitych wybieramy zmienną x_3. Odpowiada jej pierwszy wiersz pod kreską i równanie $\frac{1}{2}x_1 + 2x_2 + x + 3 + \frac{3}{2}x_5 = \frac{7}{2}$. Półprzestrzeń odcinająca opisana jest nierównością ($\lfloor\frac{1}{2}\rfloor x_1 + 2x_2 + x + 3 + \lfloor\frac{3}{2}\rfloor x_5 \leqslant \lfloor\frac{7}{2}\rfloor$) czyli $2x_2 + x + 3 + x_5 \leqslant 3$. Teraz od równania $2x_2 + x + 3 + x_5 + x_6 = 3$ odejmujemy wyjściowe $\frac{1}{2}x_1 + 2x_2 + x + 3 + \frac{3}{2}x_5 = \frac{7}{2}$ i otrzymane równanie $-\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_5 + x_6 = -\frac{1}{2}$ dopisujemy do tablicy sympleks. Otrzymujemy dualnie dopuszczalną tablicę sympleks:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{2} & 2 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 3 & 0 & \frac{9}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & (-\frac{1}{2}) & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Stosujemy teraz dualną metodę sympleks. Wybieramy wiersz 3-ci i element centralny w piątej kolumnie. ($0/\frac{1}{2} < 3\frac{1}{2}$). Po redukcji Gaussa - Jordana otrzymujemy:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & 6 & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

Teraz wierzchołkiem optymalnym jest $p_2 = (0, 0, 2, \frac{3}{2}, 1|0)$. Poprawiamy zmienną x_4. Do tablicy dopisujemy różnicę równań $\lfloor -\frac{5}{2}\rfloor x_1 + \lfloor\frac{1}{2}\rfloor x_2 + x_4 + 6x_6 + x_7 = \lfloor\frac{3}{2}\rfloor$ i $-\frac{5}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_4 + 6x_6 + x_7 = \frac{3}{2}$. Otrzymujemy:

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & 6 & 0 & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & (-\frac{1}{2}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Teraz element centralny wybieramy w 4-tym wierszu i 2-giej kolumnie. Po redukcji Gaussa - Jordana otrzymujemy:

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ \hline -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

Wyznaczony przez tę tablicę punkt $p_3 = (0, 1, 3, 1, 1, |0, 0)$ ma współrzędne całkowite więc jest rozwiązaniem zadania.

Uwaga 11.1. Odcięcie Gomoryego zawsze wyrzuca badany punkt po za obszar dopuszczalny nowej relaksacji. Rzeczywiście, jeżeli punkt $p = (p_1, p_2, ..., p_n)$ ma niecałkowitą współrzędną p_j i odpowiadające jej równanie ma postać $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = p_j$ to $a_j = 1$ i x_j jest zmienną bazową zaś dla $i \neq j \quad a_i = 0$ lub $p_i = 0$. Zatem $\sum_{i=1}^{n} \lfloor a_i \rfloor p_i = p_j > \lfloor p_j \rfloor$. Więc p nie spełnia nierówności $\sum_{i=1}^{n} \lfloor a_i \rfloor x_i \leqslant \lfloor p_j \rfloor$.

Uwaga 11.2. Dodawane zmienne są całkowitoliczbowe gdyż $x_{n+1} = \lfloor p_j \rfloor - \sum_{i=1}^{n} \lfloor a_i \rfloor x_i \in \mathbb{Z}$.

Uwaga 11.3. W przypadku gdy obszar dopuszczalny jest niepusty i ograniczony lub niepusty i współczynniki wyjściowej tablicy sympleks są wymierne to algorytm odcięcia Gomoryego kończy się po skończonej liczbie kroków, zależnej od liczby zmiennych, ograniczenia i postaci współczynników. Niestety jest to algorytm zużywający dużo czasu i pamięci. Patrz [12] Twierdzenie 23.2.

Uwaga 11.4. Jeżeli obszar dopuszczalny jest zbiorem pustym algorytm odcięcia Gomoryego może nie działać.

Przykład 11.2. Badamy zadanie P.
Max $x_0 = x_2$, gdy
$x_1 - x_2 = \frac{7}{2}$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0, x_i \in Z$.

Obszar dopuszczalny jest zbiorem pustym zaś algorytm urywa się na pierwszym kroku gdyż relaksacja jest zadaniem nieograniczonym.

Przykład 11.3. Badamy zadanie P.
Max $x_0 = x_2$, gdy
$x_1 + a x_2 = a$
$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0, x_i \in Z$.

Jeżeli a i b są liczbami algebraicznie niezależnymi > 1 to obszar dopuszczalny jest zbiorem pustym zaś algorytm nigdy się nie kończy mimo, że obszar dopuszczalny relaksacji jest ograniczony.

Ćwiczenie 11.1. Rozwiąż w liczbach całkowitych zadanie:

$Min\ x_0 = 2x_3 + 3x_4 + 6x_5$

$x_1 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 3$

$5x_2 + 2x_3 - 3x_4 - x_5 = 12$

$\forall_{1 \leqslant i \leqslant 5}\ x_1 \geqslant 0, x_i \in \mathbb{Z}$

Ćwiczenie 11.2. Stosując odcięcie Gomory'ego rozwiąż w liczbach całkowitych zadanie:

Min $x_0 = 4x_1 + 3x_2 + 5x_3$, gdy

$3x_1 - x_3 \leqslant 9$

$3x_1 + x_2 \geqslant 2$

$x_1 + 3x_3 \leqslant 8$

$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0,\ x_i \in Z.$

12. Metoda podziału i ograniczeń

12.1. Metoda podziału i ograniczeń

Badamy problem optymalizacji

P: $Max\ \{ f(x) \mid x \in Q(P)\}$

W przypadku gdy obszar dopuszczalny $Q(P)$ niewygodnie opisany, np. wymagamy by niektóre współrzędne punktów były liczbami całkowitymi, jedną z głównych metod rozwiązywania jest metoda podziału i ograniczeń zwana też metodą rozgałęzień i zamykania. Używać będziemy też skróconej nazwy angielskiej "$B\&B$" (Branch and Bound). Nawet tak proste programy jak Solver w arkuszu kalkulacyjnym Excel są reklamowane jako używające tej metody. Podstawowymi pojęciami są:

Definicja 12.1. Podziałem problemu P nazywamy ciąg podproblemów $P_1, P_2, ..., P_t$, postaci $P_i:\ Max\ \{ f(x) \mid x \in Q(P_i)\}$, gdzie obszar dopuszczalny $Q(P)$ jest rozłączną sumą obszarów $Q(P_i)$.

Podsumowując, zamiast problemu $P:\ Max\ \{ f(x) \mid x \in Q\}$ rozwiązujemy ciąg problemów $P_1, P_2, ..., P_t$, postaci $P_i:\ Max\ \{ f(x) \mid x \in Q(P_i)\}$, gdzie obszar dopuszczalny

$Q(P) \subset \bigcup_{i=1}^{t}\ Q(P_i)$.

Rozwiązanie problemu polega na rozwiązaniu wszystkich podproblemów. Operacje te nazywamy zamykaniem podproblemu. Posługujemy się następującymi kryteriami:

Kryteria zamykania podproblemów.

KZ1 Jeżeli pewna relaksacja RP_i problemu P_i jest sprzeczna, $Q(RP_i) = \emptyset$, to problem P_i uznajemy za zamknięty.

KZ2 Jeżeli pewna relaksacja RP_i problemu P_i ma rozwiązanie dopuszczalne p, $p \in Q(P)$, to problem P_i uznajemy za zamknięty.

KZ3 Jeżeli znamy oszacowanie dolne $w*$ zadania P, np. jest wartością funkcji celu w pewnym punkcie dopuszczalnym i pewna relaksacja RP_i problemu P_i ma rozwiązanie o mniejszej wartości funkcji celu, to problem P_i uznajemy za zamknięty.

Algorytm metody B&B.

Dana jest lista kandydacka L zawierająca wszystkie niezamknięte problemy. (L może np. zawierać tylko jeden problem początkowy).

Lista L będzie się rozszerzać przy dokonywaniu podziału i skracać przy zamykaniu problemu. Celem jest osiągniecie $L = \emptyset$.

Dodatkowo mamy sukcesor $\widehat{x}$. Jest nim zbiór zawierający element ze zbioru dopuszczalnego i wartość funkcji na tym elemencie. W chwili początkowej sukcesor może być pusty.

$\widehat{x} = \{(w, f(w))\}$ lub
$\widehat{x} = \emptyset$

1)Test stopu:

Jeżeli $L = \emptyset$ **to** stop,

jeśli $\widehat{x} = \{(w, f(w))\} \neq \emptyset$ **to** w jest punktem optymalnym, a $f(w)$ jest rozwiązaniem,

jeśli $\widehat{x} = \emptyset$ **to** zadanie jest sprzeczne.

2) Wybór kandydata z listy:

Wybieramy i usuwamy z listy L podproblem P_k.
Ustalamy jego relaksację RPk.

3) Rozwiązujemy RPk i testujemy kryteria zamykania:

a) Jeżeli jest spełnione kryterium KZ2 i nie jest spełnione
KZ3 **to** zmieniamy sukcesor $w : w_k$, $f : f_k$ GO **TO** 1)

b) Jeżeli spełnione kryteria KZ1 lub KZ3 GO **TO** 1)

4) Jeżeli żadne kryterium zamykania nie jest spełnione **to** decydujemy, czy zacieśniamy relaksację
czy dokonujemy podziału:

Jeżeli zacieśniamy relaksację **to** GO **TO** 3)

Jeżeli dokonujemy podziału **to** powstałe podproblemy dodajemy **do** listy kandydackiej L i GO **TO** 2).

Zobaczmy to na następującym przykładzie. Stosować w nim będziemy tak zwane podziały Dakina [5]. W sytuacji gdy otrzymaliśmy niedopuszczalne rozwiązanie p relaksacji RP, w którym i-ta współrzędna p równa p_i nie jest liczbą całkowitą to problem dzielimy na dwa. Tak zwany "lewy" przez dodanie ograniczenia $x_i \leqslant \lfloor p_i \rfloor$ i tak zwany "prawy" przez dodanie ograniczenia $x_i \geqslant \lceil p_i \rceil = \lfloor p_i \rfloor + 1$.

Przykład 12.1. Rozwiązujemy zadanie P.

$$\begin{array}{ll} Max & x_0 = -9x_1 - 6x_2 - 2x_3 \\ & -\frac{5}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + x_4 = \frac{5}{2} \\ & 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_5 = 3 \\ & \quad -2x_3 + x_6 = 4 \\ & \forall_i \ x_i \geqslant 0, \ x_i \in Z \end{array}$$

Jest to zadanie typu:
$P: \quad Max \quad x_0 = c \bullet x$
$x \in Q(P)$.
1) Lista L zawiera tylko problem początkowy P. Sukcesor jest pusty.
2) Budujemy pierwszą relaksację RP opuszczając warunki $\forall_i \ x_i \in Z$.
Teraz zbiór dopuszczalny pierwszej relaksacji jest wielościanem.
3) Rozwiązujemy RP metodą sympleks.

$$\left[\begin{array}{c|cccccc|c} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & ww \\ 1 & 9 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

Otrzymana macierz jest tablicą sympleks pierwotnie i dualnie dopuszczalną więc opisuje wierzchołek optymalny relaksacji $w_1 = (0, 0, 0, \frac{5}{2}, 3, 4)$. Nie jest on dopuszczalny dla zadania P zatem dokonujemy podziału względem zmiennej x_4.

4) Wydzielamy ze zbioru $Q(RP)$ 2 podzbiory, tak zwany "lewy" i "prawy" przez dodanie ograniczeń:

$x_4 \leqslant \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor = 2$ lub $x_4 \geqslant \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor + 1 = 3$ odpowiednio

Oczywiście $Q(P) \subset Q(RP_L) \cup Q(RP_P)$ gdyż wyrzuciliśmy tylko punkty u o współrzędnej x_3 z przedziału otwartego $(2, 3)$. Idziemy do 1).

1) Lista L zawiera podproblemy "lewy" i "prawy". Sukcesor jest pusty.

2) Wybieramy problem "lewy" i ustalamy relaksację przez odrzucenie warunków $\forall_i\ x_i \in Z$.

3) Rozwiązujemy relaksację problemu "lewego".

RP_L Dodajemy ograniczenie $x_4 \leqslant 2 \Leftrightarrow x_4 + x_7 = 2$

Warunek $x_4 + x_7 = 2$ zastępujemy $\frac{5}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 - \frac{5}{2}x_3 + x_7 = -\frac{1}{2}$, który powstaje przez odjęcie pierwszego równania. Zatem "lewa" relaksacja ma postać:

$$
\begin{aligned}
&Max \qquad x_0 = -9x_1 - 6x_2 - 2x_3 \\
&\quad -\tfrac{5}{2}x_1 - \tfrac{3}{2}x_2 + \tfrac{1}{2}x_3 + x_4 = \tfrac{5}{2} \\
&\quad 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_5 = 3 \\
&\quad -2x_3 + x_6 = 4 \\
&\quad \tfrac{5}{2}x_1 + \tfrac{3}{2}x_2 - \tfrac{5}{2}x_3 + x_7 = -\tfrac{1}{2} \\
&\forall_i x_i \geqslant 0
\end{aligned}
$$

Budujemy tablicę sympleks. Jest ona dualnie dopuszczalna więc stosujemy dualną metodę sympleks.

$$
\left[\begin{array}{ccccccc|c}
9 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
-\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \\
4 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\
0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\
\frac{5}{2} & \frac{3}{2} & (-\frac{1}{2}) & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2}
\end{array}\right]
$$

Jedynym elementem nadającym się na centralny jest $-\frac{1}{2}$.

Po przekształceniach Gaussa - Jordana otrzymujemy:

$$
\left[\begin{array}{ccccccc|c}
19 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -2 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\
14 & 9 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 1 \\
-10 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 \\
-5 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1
\end{array}\right]
$$

RP_L ma rozwiązanie dopuszczalne $p_1 = (0, 0, 1, 2, 1, 6, 0)$ $x_0 = -2$. Zapamiętujemy to rozwiązanie w sukcesorze.

Zamknęliśmy problem "lewy" stosując kryterium KZ2.

1) Nasza lista kandydacka zawiera tylko problem "prawy". Sukcesor zawiera punkt p_1 i wartość $x_0 = -2$.

2) wybieramy problem "prawy" RP_P i ustalamy relaksację przez odrzucenie warunków $\forall_i\ x_i \in Z$.

3) Rozwiązujemy relaksację problemu "prawego". .

Dodajemy ograniczenie $\quad x_4 \geqslant \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor + 1 = 3$

$$x_4 - x_7 = 3 \Leftrightarrow -x_4 + x_7 = -3$$

Teraz po dodaniu do pierwszego równania dodanego ograniczenia otrzymujemy nowe:

$-\frac{5}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2 + \frac{5}{2}x_3 + x_7 = -\frac{1}{2}$

Zadanie "prawe" zapisujemy w postaci tablicy sympleks:

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} 9 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ (-\frac{5}{2}) & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

i rozwiązujemy dualną metodą sympleks. Liczymy $Min\left\{9/\frac{5}{2}; 5/\frac{3}{2}\right\} = \frac{18}{5}$ więc elementem centralnym jest $-\frac{5}{2}$.

Po przekształceniach Gaussa - Jordana otrzymujemy:

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} 0 & \frac{3}{5} & \frac{19}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{18}{5} & -\frac{9}{5} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{14}{5} & 0 & 1 & 0 & \frac{8}{5} & \frac{11}{5} \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right]$$

Otrzymany wierzchołek optymalny $p_2 = (\frac{1}{5}, 0, 0, 3, \frac{11}{5}, 4, 0)$ nie jest dopuszczalny więc problem dzielimy na nowe podproblemy względem zmiennej x_5 i idziemy do 1).

1) Lista L zawiera podproblemy "prawy,lewy"- P_{PL} i "prawy,prawy"'- P_{PP}. Sukcesor zawiera punkt p_1 i wartość $x_0 = -2$.

2) Wybieramy problem P_{PL} i ustalamy relaksację przez odrzucenie warunków $\forall_i\ x_i \in Z$.

3) Rozwiązujemy relaksację problemu P_{PL}.

RP_L Dodajemy ograniczenie $x_5 \leqslant \left\lfloor \frac{11}{5} \right\rfloor = 2 \Leftrightarrow x_4 + x_8 = 2$.

Otrzymujemy zadanie opisane tablicą:

$$\left[\begin{array}{cccccccc|c} 0 & \frac{3}{5} & \frac{19}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{18}{5} & 0 & -\frac{9}{5} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{14}{5} & 0 & 1 & 0 & \frac{8}{5} & 0 & \frac{11}{5} \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & (-\frac{3}{5}) & -\frac{14}{5} & 0 & 0 & 0 & -\frac{8}{5} & 1 & -\frac{1}{5} \end{array}\right]$$

i rozwiązujemy dualną metodą sympleks. Liczymy $Min\left\{\frac{3}{5}/\frac{3}{5}; \frac{19}{5}/\frac{14}{5}; \frac{18}{5}/\frac{8}{5}\right\} = \frac{3}{5}/\frac{3}{5} = 1$ więc elementem centralnym jest $-\frac{3}{5}$.

Po przekształceniach Gaussa - Jordana otrzymujemy:

$$\left[\begin{array}{cccccccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{14}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{8}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

Otrzymany wierzchołek optymalny $p_3 = (0, \frac{1}{3}, 0, 3, 2, 4, 0, 0)$ nie jest dopuszczalny. Wartość funkcji celu w tym punkcie jest taka sama jak w sukcesorze. Ponadto nad kreską nie ma "niebazowych" zer więc jest to jedyny punkt optymalny relaksacji. Oznacza to, że każdy punkt zadania P_{PL} ma wartość mniejszą niż sukcesor. Stosując kryterium KZ3 zamykamy problem. Idziemy do 1).

1) Lista L zawiera podproblem "prawy,prawy"'- P_{PP}. Sukcesor zawiera punkt p_1 i wartość $x_0 = -2$.

2) Wybieramy problem P_{PP} i ustalamy relaksację przez odrzucenie warunków $\forall_i\ x_i \in Z$.

3) Rozwiązujemy relaksację problemu P_{PP}.

RP_L Dodajemy ograniczenie $x_5 \geqslant \left\lfloor \frac{11}{5} \right\rfloor + 1 = 3 \Leftrightarrow x_4 - x_8 = 3$.

Otrzymujemy zadanie opisane tablicą:

$$\left[\begin{array}{cccccccc|c} 0 & \frac{3}{5} & \frac{19}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{18}{5} & 0 & -\frac{9}{5} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{14}{5} & 0 & 1 & 0 & \frac{8}{5} & 0 & \frac{11}{5} \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{14}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{8}{5} & 1 & -\frac{4}{5} \end{array}\right]$$

Otrzymaliśmy sprzeczność bo ostanie równanie nie ma dodatnich rozwiązań. Zamykamy problem stosując kryterium KZ1. Idziemy do 1).

1) Lista L pusta. Sukcesor zawiera punkt p_1 i wartość $x_0 = -2$. Rozwiązanie jest zawarte w sukcesorze.

Uwaga 12.1. Metoda podziału Dakina w przypadku gdy po usunięciu warunków całkowitoliczbowych otrzymujemy ograniczony obszar dopuszczalny.

Uwaga 12.2. Metoda podziału Dakina jest skuteczna gdy tylko część zmiennych jest całkowitoliczbowa.

Metodą $B\&B$ można rozwiązywać zadanie programowania liniowego z parametrem (pewne współczynniki nie są określone), na przykład zadania w których obszar dopuszczalny jest wielościanem ale funkcja celu jest wymierna.

np. $Max \quad x_0 = \frac{a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n}{b_1x_1+b_2x_2+...+b_nx_n}$

$x \in Q$

$TS = \left[\begin{array}{c|c|c} -c_N & 0 & b_0 \\ \hline N & I & b \end{array}\right]$

Niech t=$\sum_{i=1}^{n} b_ix_i$ i rozwiązujemy zadanie dopisując równanie t do tablicy.

$\circ \quad TS = \left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{c|c} -c_N & 0 \\ \hline N & I \end{array} & \begin{array}{c} b_0 \\ \hline b \end{array} \\ b_1x_1 + b_2x_2 + ... + b_nx_n & t \end{array}\right]$

przekształcenia polegają na wyborze elementu centralnego $\underset{i,\alpha_{ij}>0}{Min} \left\{ \frac{t_i}{\alpha_{ij}}, \frac{t}{b_j} \right\} = min$

i dzielimy na dwa podproblemy

1) $\frac{t}{b_j} < min \rightarrow b_j$ - element centralny

2) $\frac{t}{b_j} \geqslant min \rightarrow$ element centralny - jakiś z kolumny j

$\widehat{x} = \left\{ \left(\frac{f(w)}{t}, w \right) \right\}$

Przykład 12.2. Rozwiązujemy zadanie P.

$Max\ M = \frac{-2x_1+x_2+3}{2x_1+3x_2+x_3+2}$

$3x_1 + x_2 + x_4 = 4$

$x_1 + 2x_2 + x_5 = 3$

$\forall_i\ x_i \geqslant 0$

Ustalmy parametr $t = 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2$ i rozwiązujmy zadanie

$$
\begin{aligned}
Max\ x_0 &= -2x_1 + x_2 + 3 \\
&3x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\
&x_1 + 2x_2 + x_5 = 3 \\
&2x_1 + 3x_2 + x_3 = t - 2 \\
&\forall_i\ x_i \geqslant 0
\end{aligned}
$$

Wtedy maksymalna wartość M jest równa maksymalnej wartości $\frac{x_0}{t}$ i punkty optymalne obu zadań pokrywają się.

Budujemy więc tablicę sympleks i zadanie dzielimy na podproblemy w zależności od parametru t.

$$
\left[\begin{array}{ccccc|c}
2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\
\hline
3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\
1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 3 \\
2 & 3 & 1 & 0 & 0 & t-2
\end{array}\right]
$$

P_1 Jeżeli $t < 2$ to zadanie jest sprzeczne.

P_2 Jeżeli $2 \leqslant t \leqslant \frac{13}{2}$ to element centralny leży w ostatnim wierszu.

$$
\left[\begin{array}{ccccc|c}
2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\
\hline
3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\
1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 3 \\
2 & (3) & 1 & 0 & 0 & t-2
\end{array}\right]
$$

i po przekształceniach Gaussa - Jordana otrzymujemy:

$$
\left[\begin{array}{ccccc|c}
\frac{8}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{7}{3} + \frac{1}{3}t \\
\hline
\frac{7}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 1 & 0 & \frac{14}{3} - \frac{1}{3}t \\
-\frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & 1 & \frac{13}{3} - \frac{2}{3}t \\
\frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3}t - \frac{2}{3}
\end{array}\right]
$$

Punktem optymalnym jest $p = (0, \frac{1}{3}t - \frac{2}{3}, 0, \frac{14}{3} - \frac{1}{3}t, \frac{13}{3} - \frac{2}{3}t)$, maksymalną wartością x_0 jest $\frac{7}{3} + \frac{1}{3}t$. Zatem M przyjmuje wartość $M = \frac{x_0}{t} = \frac{7}{3t} + \frac{1}{3}$. Wartość M rośnie ze wzrostem T i przyjmuje maksymalną wartość dla $t = \frac{13}{2}$ wynoszącą $M_m = \frac{7}{3} + \frac{1}{3}\frac{13}{2} = \frac{9}{2}$

P_3

$t > \frac{13}{2}$ Tym razem elementem centralnym jest 2.

$$
\left[\begin{array}{ccccc|c}
2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\
\hline
3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\
1 & (2) & 0 & 0 & 1 & 3 \\
2 & 3 & 1 & 0 & 0 & t-2
\end{array}\right]
$$

i po przekształceniach Gaussa - Jordana otrzymujemy:

$$
\left[\begin{array}{ccccc|c}
\frac{5}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\
\hline
\frac{5}{2} & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\
\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\
\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{13}{2} + t
\end{array}\right]
$$

Punktem optymalnym jest $p = (0, \frac{3}{2}, -\frac{13}{2} + t, \frac{5}{2}, 0)$, maksymalną wartością x_0 jest $\frac{9}{2}$. Zatem M przyjmuje wartość $M = \frac{x_0}{t} = \frac{9}{2t}$. Wartość M maleje ze wzrostem T i zawsze jest mniejsza niż $\frac{9}{2}$.

Rozwiązanie zadania $p = (0, \frac{3}{2}, 0, \frac{5}{2}, 0)$, $M = \frac{9}{2}$ otrzymaliśmy w podproblemie P_2.

Jako literaturę uzupełniającą do tego tematu polecamy książki [13] i [12]

Ćwiczenie 12.1. Stosując podział Dekina rozwiąż w liczbach całkowitych zadanie:
Min $x_0 = x_3 + x_4 + 3x_5$, gdy
$x_1 + \frac{1}{2}x_3 + 2x_4 + \frac{3}{2}x_5 = \frac{7}{2}$
$x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 + 3x_5 = \frac{9}{2}$
$\forall_i \ x_i \geqslant 0, \ x_i \in Z.$

Ćwiczenie 12.2. Stosując podział Dekina rozwiąż w liczbach całkowitych zadanie:
$Max \ x_0 = x_1 - 2x_2$
$-x_1 + x_2 \leqslant 0$
$4x_1 - 2x_2 \leqslant 9$
$x_1 \leqslant 3$
$\forall_i x_i \geqslant 0 \qquad x_i \in Z$

13. Grafy

13.1. Grafy

Definicja 13.1.

1) Grafem skierowanym nazywamy strukturę $G = \{W, S; k, p\}$, gdzie W jest zbiorem, nazywanym zbiorem wierzchołków, S jest zbiorem, nazywanym zbiorem krawędzi (strzałek) zaś k i p są funkcjami $k, p : S \to W$ zwanymi początkiem i końcem krawędzi.

2) $H = \{W', S'; k', p'\}$ nazywamy podgrafem grafu $G = \{W, S; k, p\}$ gdy W' i S' są podzbiorami W i S odpowiednio zaś k' i p' są obcięciami funkcji k i p do S'.

3) Graf $G = \{W, S; k, p\}$ nazywamy skończonym gdy jego zbiory wierzchołków W i krawędzi S są skończone.

4) Graf G nazywamy ukorzenionym gdy jest wyróżniony jeden z wierzchołków.

Na tym wykładzie będziemy ukorzeniać grafy przez wyprowadzenie z wyróżnionego wierzchołka krawędzi bez końca.

Definicja 13.2. Niech G będzie grafem skierowanym.

1) Drogą długości n od wierzchołka A do B nazywamy taki ciąg krawędzi $s_1, s_2, ..., s_n$, że istnieje ciąg wierzchołków $A = w_0, w_1, w_2, ..., w_n = B$ spełniający warunki:
$\forall_{1 \leqslant i \leqslant n}\ \{p(s_i), k(s_i)\} = \{w_{i-1}, w_i\}$, $A \in \{p(s_1), k(s_1)\}$ i $B \in \{p(s_n), k(s_n)\}$.

2) Drogę nazywamy prostą gdy w ciągu $A = w_0, w_1, w_2, ..., w_n = B$
wierzchołki $A = w_0, w_1, w_2, ..., w_{n-1}$ są różne.

3) Cyklem nazywamy drogę od A do tego samego wierzchołka A.

Definicja 13.3. Niech G będzie grafem skierowanym.

1) Graf G nazywamy spójnym gdy istnieje droga między dowolnymi dwoma wierzchołkami.

2) Graf G nazywamy drzewem gdy jest spójny i nie ma cykli.

3) Podgraf $H = \{W', S'; k', p'\}$ grafu $G = \{W, S; k, p\}$ nazywamy drzewem spinającym, gdy W' =W i H jest drzewem.

4) Liściem nazywamy wierzchołek drzewa z którego wychodzi jedna krawędź.
Dokładniej $A \in W$ jest liściem $G = \{W, S; k, p\}$ gdy $\exists!_{s \in S}\ A \in \{p(s), k(s)\}$.

Lemat 13.1. *Jeżeli istnieje droga między wierzchołkami A i B to istnieje droga prosta między tymi wierzchołkami.*

Dowód. Niech $s_1, s_2, ..., s_n$ będzie drogą pomiędzy wierzchołkami $A = w_0, w_1, w_2, ..., w_n = B$ o minimalnej długości. Jeżeli nie jest ona prosta to istnieją wierzchołki $w_i = w_j$ dla $0 \leqslant i < j < n$. Wtedy droga $s_1, s_2, ..., s_i, s_{j+1}, ..., s_n$ pomiędzy wierzchołkami
$A = w_0, w_1, w_2, ..., w_j, w_{j+1}, ..., w_n = B$ jest krótsza wbrew założeniu. □

Twierdzenie 13.1. *Skończony spójny graf zawiera poddrzewo spinające.*

Dowód. Niech $T = \{W', S'; k, p\}$ będzie maksymalnym poddrzewem grafu $G = \{W, S; k, p\}$. Aby wystarczy pokazać, że każdy wierzchołek G należy do T. Przypuśćmy, że $A \in W \setminus W'$.

Ze spójności G wynika istnienie drogi $s_1, s_2, ..., s_n$ pomiędzy wierzchołkami

$A = w_0, w_1, w_2, ..., w_n = B$ kończącej się w T. Niech j będzie największym indeksem, dla którego $w_j \notin W'$. Wówczas podgraf $T'' = \{W' \cup \{w_j\}, S' \cup \{s_{j+1}\}; k, p\}$ jest większym poddrzewem. □

Lemat 13.2. *Jeżeli drzewo G ma przynajmniej dwa wierzchołki to ma co najmniej dwa liście.*

Dowód. Rozważmy drogę prostą $s_1, s_2, ..., s_n$, między wierzchołkami

$A = w_0, w_1, w_2, ..., w_n = B$, o maksymalnej długości. Drzewo nie ma cykli więc $A \neq B$. Ponieważ nie da się tej drogi przedłużyć to jej końce są liściami. □

Lemat 13.3. *Niech $G = \{W, S; k, p\}$ będzie spójnym grafem spójnym zaś $w \in W$ jego liściem. Jeżeli $G' = \{W', S'; k, p\}$ jest podgrafem G powstałym przez wyrzucenie liścia w i krawędzi s związanej z nim to G' jest grafem spójnym.*

Dowód. Niech $s_1, s_2, ..., s_n$ będzie drogą prostą w grafie G między wierzchołkami

$A = w_0, w_1, w_2, ..., w_n = B$, gdzie $A, B \in W'$. Jeżeli $w_j = w$ jest liściem to $s_j = s = s_{j+1}$ a stąd $w_{j-1} = w_{j+1}$ więc droga nie jest prosta. □

Ponieważ podgraf drzewa nie zawiera cykli więc bezpośrednio otrzymujemy:

Wniosek 13.1. *Niech $T = \{W, S; k, p\}$ będzie drzewem zaś $w \in W$ jego liściem.*

Jeżeli $G' = \{W', S'; k, p\}$ jest podgrafem T powstałym przez wyrzucenie liścia w i krawędzi s związanej z nim to G' jest drzewem.

Twierdzenie 13.2. *Niech $G = \{W, S; k, p\}$ będzie grafem skończonym.*

Wówczas równoważne są warunki:

a) G jest drzewem.

b) $|W| = |S| + 1$ i G jest grafem spójnym.

c) $|W| = |S| + 1$ i G nie ma cykli.

Dowód. *a)* $\Rightarrow$ *b)*

Drzewo jest grafem spójnym, więc wystarczy pokazać przez indukcję względem $|W|$,

że $|W| = |S| + 1$.

1^0 Jeżeli $|W| = 1$ to $S = \emptyset$ bo G nie zawiera pętli.

2^0 Niech $|W| = n \geqslant 2$ i przyjmijmy, że każde mniejsze drzewo ma o jedną krawędź mniej niż wierzchołków. Na mocy lematu * graf posiada liść w. Po usunięciu go wraz ze związaną z nim krawędzią otrzymujemy mniejsze drzewo $G' = \{W', S'; k, p\}$. Zatem na mocy założenia indukcyjnego $|W'| = |S'| + 1$ a stąd $|W| = |W'| + 1 = |S'| + 2 = |S| + 1$.

b) $\Rightarrow$ *c)*

Ponieważ G jest spójny więc zawiera poddrzewo spinające $G' = \{W, S'; k, p\}$, gdzie $S' \subset S$. Na mocy poprzedniej implikacji $|W| = |S'| + 1$. Stąd $|S| = |S'|$ a zatem $S = S'$ i $G = G'$ jest drzewem i nie ma cykli.

c) $\Rightarrow$ *a)*

G jest sumą spójnych składowych

$G_1 = \{W_1, S_1; k, p\}$, $G_1 = \{W_2, S_2; k, p\}, ..., G_1 = \{W_n, S_n; k, p\}$,

które są drzewami. Na mocy pierwszej implikacji $\forall_{1 \leqslant j \leqslant n}\ |W_j| = |S_j| + 1$.

Teraz $|S| + 1 = |W| = \sum_{j=1}^{n} |W_j| = \sum_{j=1}^{n} (|S_j| + 1) = |S| + n$. Stąd $n = 1$ i G jest drzewem. □

Lemat 13.4. *Niech* $T = \{W, S; k, p\}$ *będzie drzewem skończonym, zaś graf* $G = \{W, S \cup \{s\}; k, p\}$ *powstaje z* T *przez dodanie jednej krawędzi. Wówczas* G *zawiera dokładnie jeden cykl prosty.*

Dowód. Algorytm szukania cyklu.

Z grafu G kolejno wyrzucamy liście wraz ze związanymi z nimi krawędziami. Otrzymany podgraf $G' = \{W', S'; k, p\}$ jest cyklem.

Rzeczywiście G' jest spójny, nie ma liści i $|S'| = |W'|$ ponieważ $|S| = |W|$. Warunki te implikują, że z każdego wierzchołka wychodzą dokładnie dwie krawędzie. Zatem G' jest spójnym zbiorem cykli a więc cyklem. □

14. Przepływy w sieciach

14.1. Przepływy w sieciach.

Siecią nazywać będziemy skończony graf $G = \{W, S; k, p\}$ wraz z dwiema funkcjami $V : W \to \mathbb{R}$ przypisującą każdemu wierzchołkowi liczbę rzeczywistą $V(w)$ zwaną potencjałem i $C : S \to \mathbb{R}$ przypisującą każdej krawędzi koszt przepływu. Ponieważ zawiera wierzchołki i krawędzie więc, dla uniknięcia nieporozumień, wierzchołki sieci będziemy nazywać węzłami zaś zorientowane krawędzie strzałkami.

Zagadnienie przepływy w sieciach (o nieograniczonej przepustowości) polega na znalezieniu schematu przepływu o minimalnych kosztach, wyrównującego potencjały.

Modelem matematycznym takiego zagadnienia będzie:

Jako zmienne wybieramy zbiór $\{x_s \mid s \in S\}$ indeksowany strzałkami grafu.

$Min\ x_0 = \sum_{s \in S} C(s) x_s$ na obszarze opisanym nierównościami:

$\forall_{w \in W} \sum_{\{s \in S \,|\, p(s) = w\}} x_s - \sum_{\{s \in S \,|\, k(s) = w\}} x_s = V(w)$

$\forall_{s \in S}\ x_s \geqslant 0.$

Zauważmy, macierz opisująca powyższe równania ma wiersze indeksowane węzłami a kolumny, z prawej strony kreski, indeksowane strzałkami s (lub zmiennymi x_s). Ponadto kolumna odpowiadająca strzałce s ma zera, jedną 1 w wierszu o indeksie $p(s)$ i jedną -1 w wierszu o indeksie $k(s)$. W przypadku grafu ukorzenionego strzałką s_1, dochodzi kolumna o indeksie s_1, która ma zera i jedną 1 w wierszu o indeksie $p(s_1)$

Jak zsumujemy wszystkie równania, dla grafu nieukorzenionego, lewa strona zredukuje się do 0 i otrzymamy:

$0 = \sum_{w \in W} V(w)$

A zatem ten układ równań jest zależny i jeżeli suma potencjałów jest niezerowa to jest sprzeczny. Zagadnienie gdy $\sum_{w \in W} V(w) = 0$ nazywamy zrównoważonym.

Zajmijmy się teraz zrównoważonym zadaniem przepływu w sieci, która jest grafem spójnym. Okazuje się, że w takim przypadku po ukorzenieniu grafu w dowolnym wierzchołku równania stają się liniowo niezależne a każdy układ bazowy jest wyznaczony przez pewne drzewo spinające. Dokładniej.

Twierdzenie 14.1. *Niech $G = \{W, S; k, p\}$ będzie spójnym grafem ukorzenionym w węźle w_1 wraz z funkcjami potencjału $V : W \to \mathbb{R}$ i kosztów $C : S \to \mathbb{R}$ takimi, że $\sum_{w \in W} V(w) = 0$. Wówczas:*

a) Zbiór równań $\forall_{w \in W} \sum_{\{s \in S \,|\, p(s) = w\}} x_s - \sum_{\{s \in S \,|\, k(s) = w\}} x_s = V(w)$ jest liniowo niezależny.

b) Jeżeli kolumny o indeksach $s_1, s_2, ..., s_n$ są liniowo niezależne i $n = |W|$ to podgraf $G = \{W, S'; k, p\}$, gdzie $S' = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$ jest ukorzenionym drzewem spinającym.

Twierdzenie 14.1 w dalszej części będziemy używać poprzez następujący wniosek.

Wniosek 14.1. *Niech TS będzie tablicą sympleks opisującą zagadnienie przepływu w sieci spójnej. Wówczas graf powstały przez odrzucenie strzałki indeksujących zmienne niebazowe jest drzewem spinającym.*

Do dowodu części b) twierdzenia 14.1 użyjemy następującego lematu.

Lemat 14.1. *Niech $c = (s_1, s_2, ..., s_n)$ przebiegający między wierzchołkami $w_0, w_1, w_2, ..., w_n = w_0$ będzie cyklem prostym w sieci G. Wówczas kolumny $k_1, k_2, ..., k_n$ tablicy sympleks indeksowane tymi krawędziami są liniowo zależne.*

Dowód. Dowód lematu. Wprowadźmy orientację na cyklu c zgodną z kolejnością węzłów s_1. To znaczy: Niech strzałka przebiega między węzłami w_{i-1} i w_i, definiujemy $\varepsilon_i = \begin{cases} 1 & ,p(s_i) = w_{i-1} \\ -1 & ,p(s_i) = w_i \end{cases}$

Badamy kolumnę $K = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i k_i$.

W j - tym wierszu kolumny k_i (w wierszu indeksowanym węzłem w_j) występuje element

$$e_{i,j} = \begin{cases} 1 & ,p(s_i) = w_j \\ -1 & ,k(s_i) = w_j \\ 0 & ,p(s_i) \neq w_j \neq k(s_i) \end{cases} = \begin{cases} 1 & ,p(s_i) = w_j \\ -1 & ,p(s_i) = w_{j-1} \\ 0 & ,p(s_i) \neq w_j \neq k(s_i) \end{cases}$$

$$e_{i,j} = \begin{cases} -\varepsilon_i & ,i = j \\ \varepsilon_i & ,i = j+1 \\ 0 & ,j \neq i \neq j+1 \end{cases}$$

Zatem w j - tym wierszu kolumny K występuje 0 lub $\varepsilon_{i-1}^2 - \varepsilon_i^2 = 0$. □

Dowód. Dowód twierdzenia.

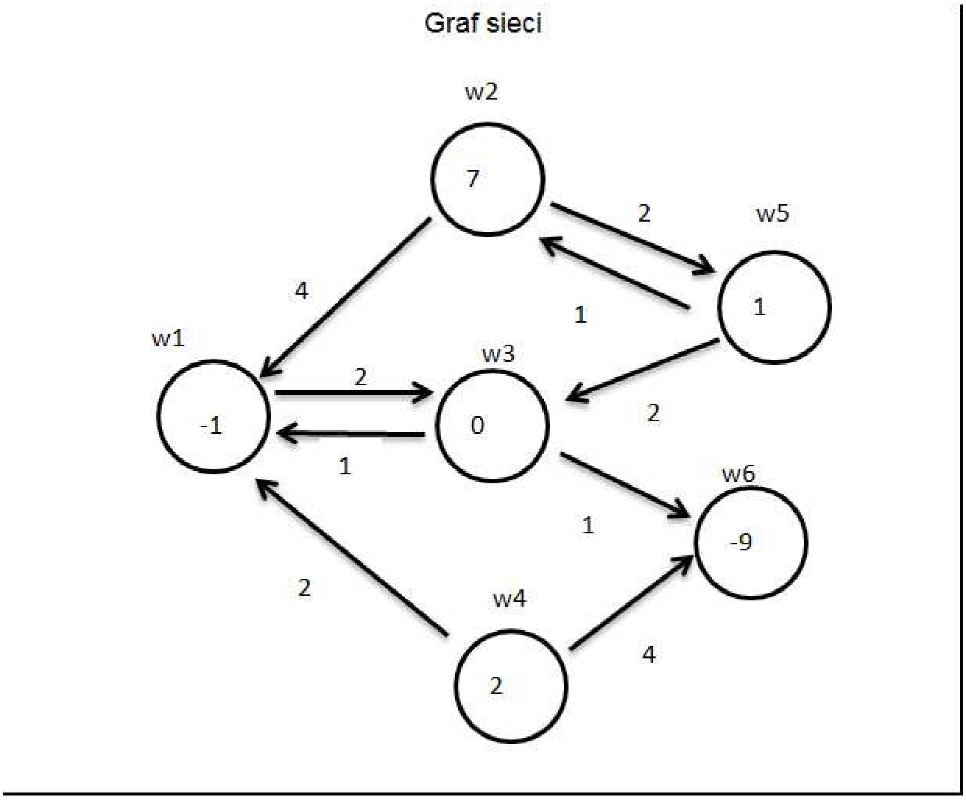
a) Wybieramy dowolne drzewo spinające T, ukorzenione. Macierz układu równań opisujących obszar dopuszczalny zadany drzewem jest podmacierzą wyjściowego układu więc do wykazania liniowej niezależności możemy przyjąć, że graf jest drzewem spinającym. Dowód przeprowadzimy przez indukcję względem liczby węzłów.

1^0 Sieć ma 1 wierzchołek i 1 krawędź wychodzącą z niego. Zatem macierzą układu jest $M = [1]$ o maksymalnym rzędzie.

2^0 Jeżeli sieć ma co najmniej dwa węzły to ma liść w_j, który nie jest korzeniem. Usuwamy liść w_j i strzałkę s z nim związaną. Zobaczmy jak zmienia się macierz M układu równań. Wiersz indeksowany liściem w_j ma tylko jedno miejsce różne od 0 -$\pm$ w kolumnie o indeksie s. Zatem po usunięciu tego wiersza i kolumny rząd macierzy maleje o 1.

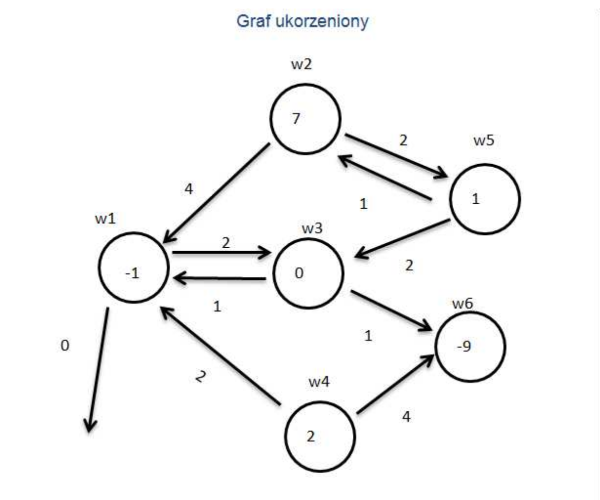
ad b) Po odrzuceniu korzenia otrzymujemy podsieć T o n węzłach i $n-1$ strzałkach, nie mający cykli. A taka sieć jest drzewem. □

Algorytm sympleks w sieciach.
Algorytm ten będziemy ilustrować przykładem.
Dane zadanie opisane grafem



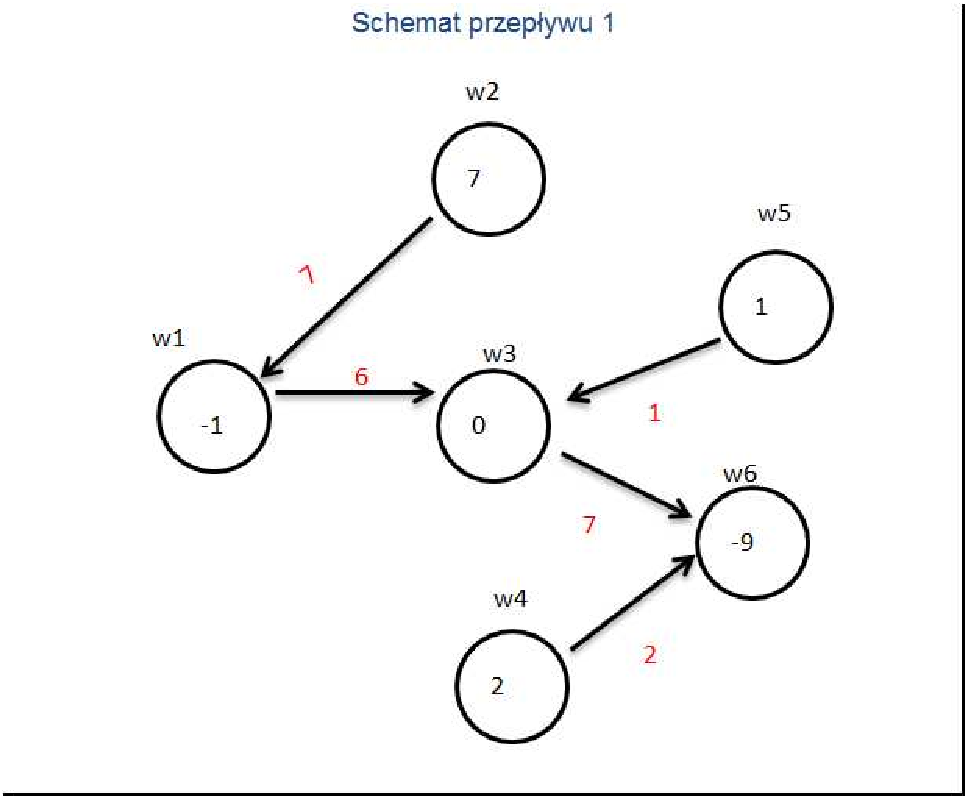
Rysunek 14.1. sieć.

Liczby w węzłach opisują potencjały zaś na strzałkach koszty.
Jak widać suma potencjałów jest zerowa więc zadanie jest zbilansowane.
Ukorzeniamy graf w węźle w_1.



Rysunek 14.2. Graf ukorzeniony.

Do rozpoczęcia algorytmu potrzebujemy wierzchołek startowy. Niech będzie nim następujące drzewo spinające:



Rysunek 14.3. Schemat przepływu 1.

Czerwone liczby oznaczają wartości zmiennych czyli liczba towaru przepływająca przez strzałkę.

Krok 1 TEST OPTYMALNOŚCI

Budujemy pomocnicze drzewo kosztów. Koszty podróży po strzałkach są te same a liczby w węzłach obrazują koszt spływu jednostki towaru przez korzeń. W przypadku podróży pod prąd koszt strzałki liczymy ze znakiem minus.

Teraz wyliczamy koszty zredukowane.

Liczymy koszty zredukowane zgodnie z zasadą: Na węźle w_i umieszczamy liczbę d_i z drzewa kosztów. Następnie koszt każdej strzałki wychodzącej z w_i zmniejszamy o d_i zaś koszt każdej strzałki przychodzącej do w_i zwiększamy o d_i. Wartość funkcji celu zmieni się przy tej ope4racji o stałą $d_i \cdot V(w_i)$. Metoda obliczania wartości węzłów w drzewie kosztów wymusza zerowe koszty strzałek użytych w schemacie przepływu (zerowe koszty zmiennych bazowych).

Koszt zredukowany strzałki $s_{i,j}$ między węzłami w_i aw_j wynosi $c'_{i,j} = c_{i,j} - d_i + d_j$.

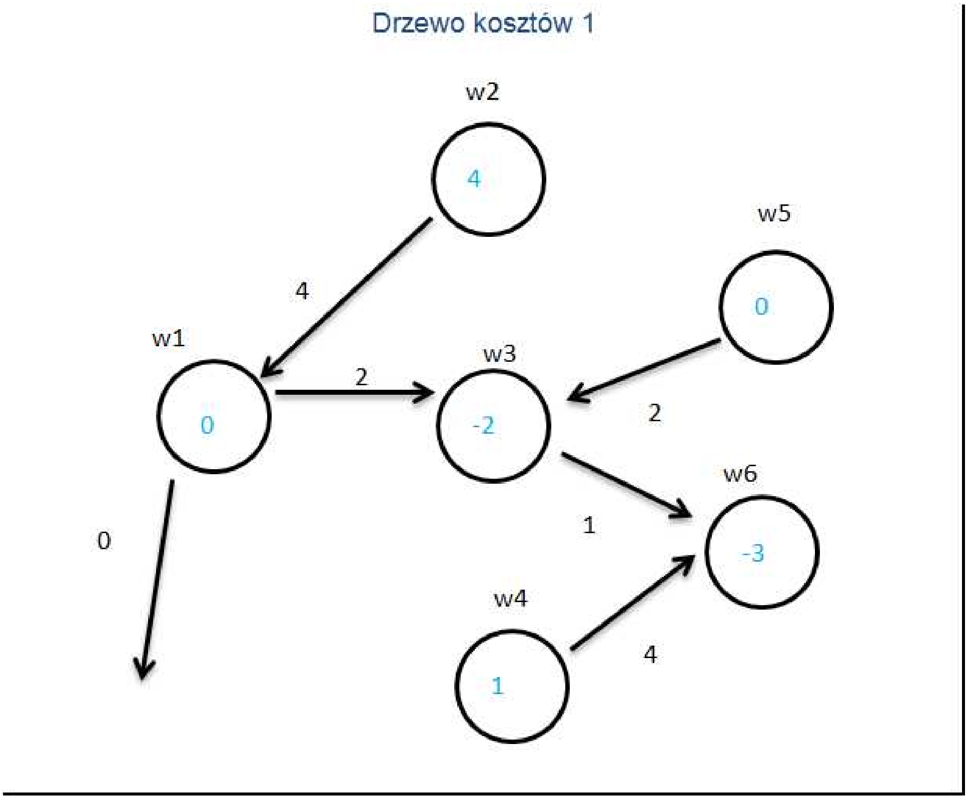
Jeżeli wszystkie strzałki mają koszt nieujemny to STOP badany schemat jest optymalny.

Krok 2. WYBÓR KOLUMNY POPRAWIAJĄCEJ

Wybieramy teraz strzałkę o ujemnym koszcie i dołączamy ją do drzewa. W naszym przykładzie jest to strzałka zaznaczona linią przerywaną z w_2 do w_5.

Krok 3. WYBÓR ELEMENTU CENTRALNEGO

Pojawia się cykl po którym staramy się przepchnąć jak najwięcej towaru. Dołączoną strzałką podróżuje Δ jednostek a pozostałymi strzałkami o Δ mniej lub więcej w zależności od ich zwrotu.



Rysunek 14.4. Drzewo kosztów 1.

Ponieważ zmienne są nieujemne jako Δ wybieramy minimum z kosztów strzałek przeciwnie zorientowanych niż dodana. W naszym przykładzie $\Delta = min\{6, 7\} = 6$.

Teraz z grafu wyrzucamy jedną ze strzałek po której nie płynie towar. W naszym przykładzie jest to strzałka z w_1 do w_3. W ten sposób otrzymaliśmy nowy schemat przewozu, który jest drzewem a więc wierzchołkiem obszaru dopuszczalnego. Funkcję celu poprawiliśmy o Δ pomnożone przez koszt dołączonej strzałki. W naszym przykładzie wyrzucamy strzałkę z w_1 do w_3.

GO TO krok 1

Budujemy drugie drzewo kosztów.

i wyliczamy koszty zredukowane drugiego schematu przepływu.

Tym razem ujemny koszt ma strzałka z w_4 do w_1. Dołączamy ją i otrzymujemy cykl:

W naszym przykładzie $\Delta = min\{1, 2\} = 1$ więc wyrzucamy strzałkę z w_2 do w_1. Otrzymujemy trzeci schemat przepływu.

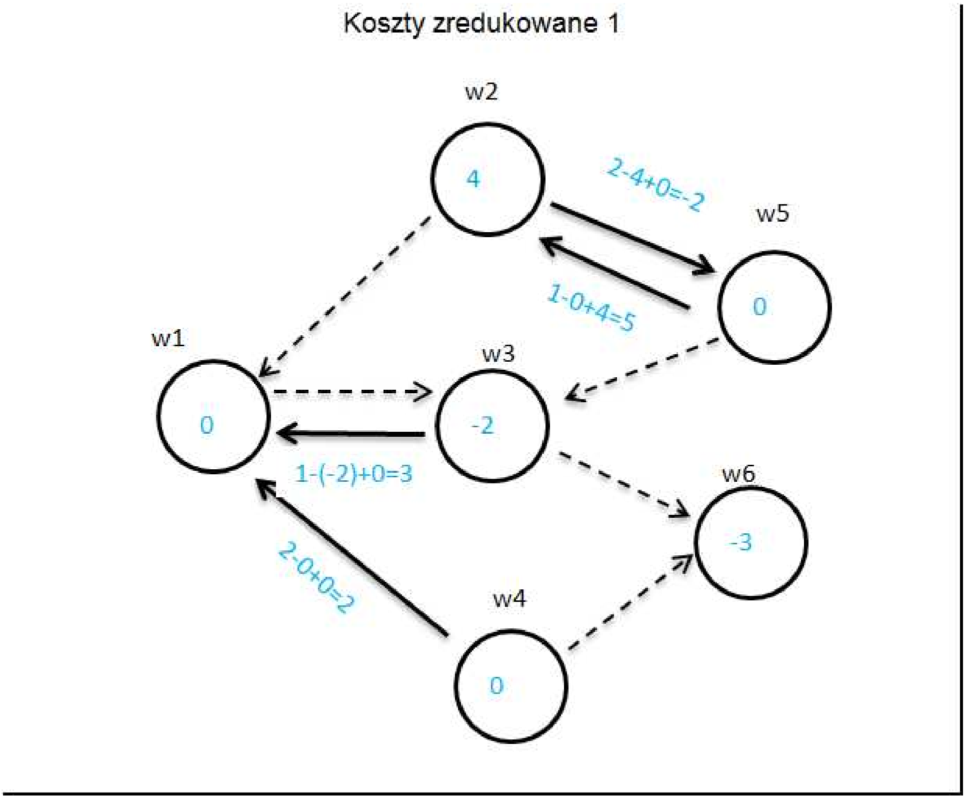
Znowu liczymy koszty zredukowane.

[0.5]KZ3Koszty zredukowane 3

Są one nieujemne więc schemat trzeci jest optymalny.

Dwufazowa metod sympleks.

Dana jest sieć $G = \{W, S; k, p\}$ wraz z potencjałem V. Wprowadzamy dodatkowy (sztuczny) węzeł o potencjale 0 i strzałki łączące sztuczny węzeł ze wszystkimi pozostałymi tak skierowane by potencjały mogły się wyrównać. Następnie wprowadzamy sztuczną funkcję celu nadając starym strzałkom koszt 0 a sztucznym koszt 1. Dalej stosujemy prosty algorytm sympleks. Jeżeli nie uda się uzyskać przepływu o koszcie 0 to znaczy, że wyjściowe zadanie jest sprzeczne. W przeciwnym przypadku uzyskamy przepływ będący wierzchołkiem obszaru dopuszczalnego.



Rysunek 14.5. Koszty zredukowane 1.

Przypadek niezbilansowany.

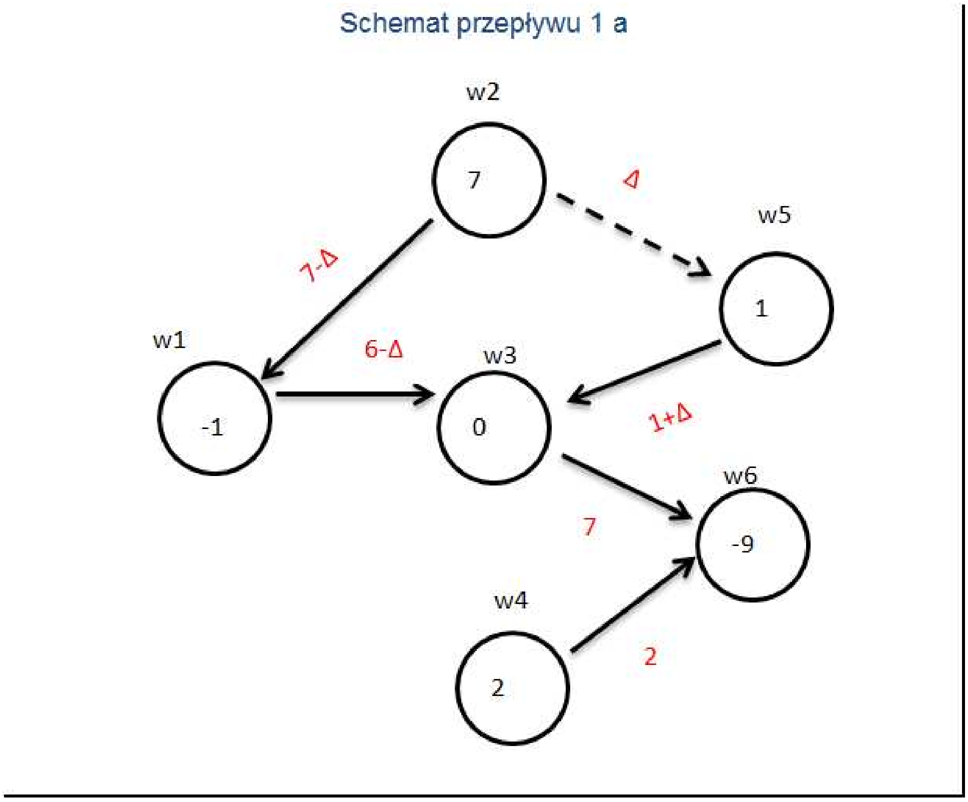
Przypadek niezbilansowany sprowadzamy do zbilansowanego wprowadzając sztuczny węzeł o potencjale przeciwnym do sumy pozostałych potencjałów i strzałki łączące sztuczny węzeł ze wszystkimi pozostałymi. Jeżeli sztuczny węzeł ma potencjał dodatni to wszystkie sztuczne strzałki z niego wychodzą. Jeżeli ujemny to wszystkie sztuczne strzałki mają w nim swój koniec. Dalej stosujemy prosty algorytm sympleks.

Ćwiczenie 14.1. W sieci o strzałkach z nieograniczonymi przepustowościami aktualnie realizowany jest następujący schemat przepływów:

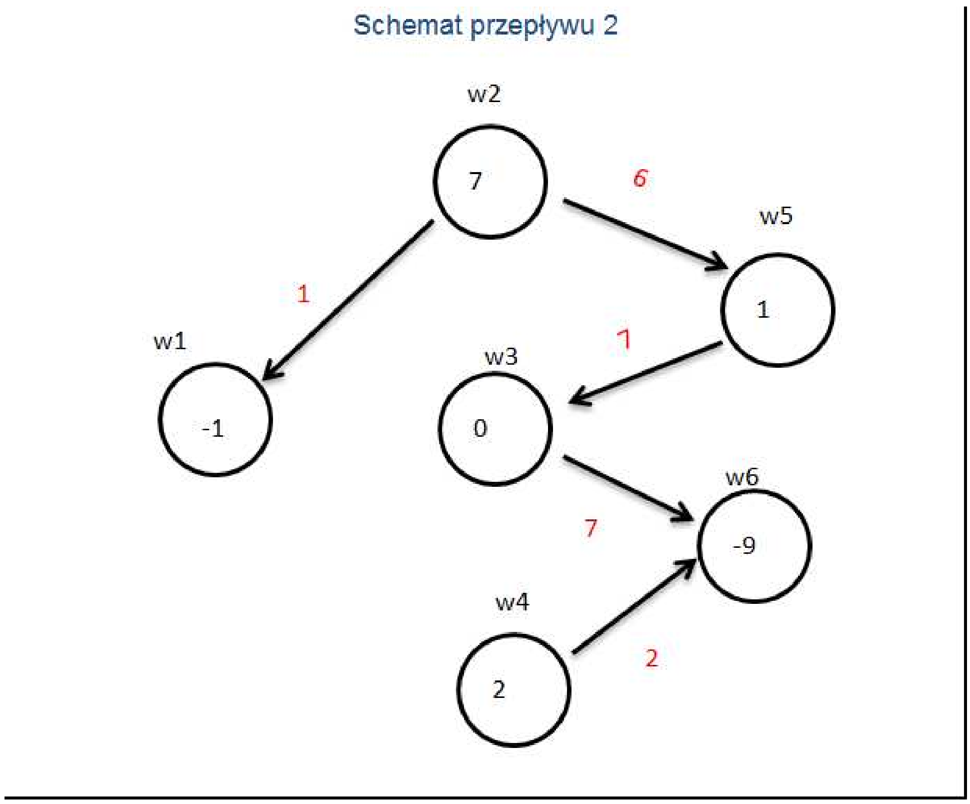
[0.5]ZadPSchemat przepływu

Wyznacz przepływ o minimalnym koszcie za pomocą algorytmu sympleks.

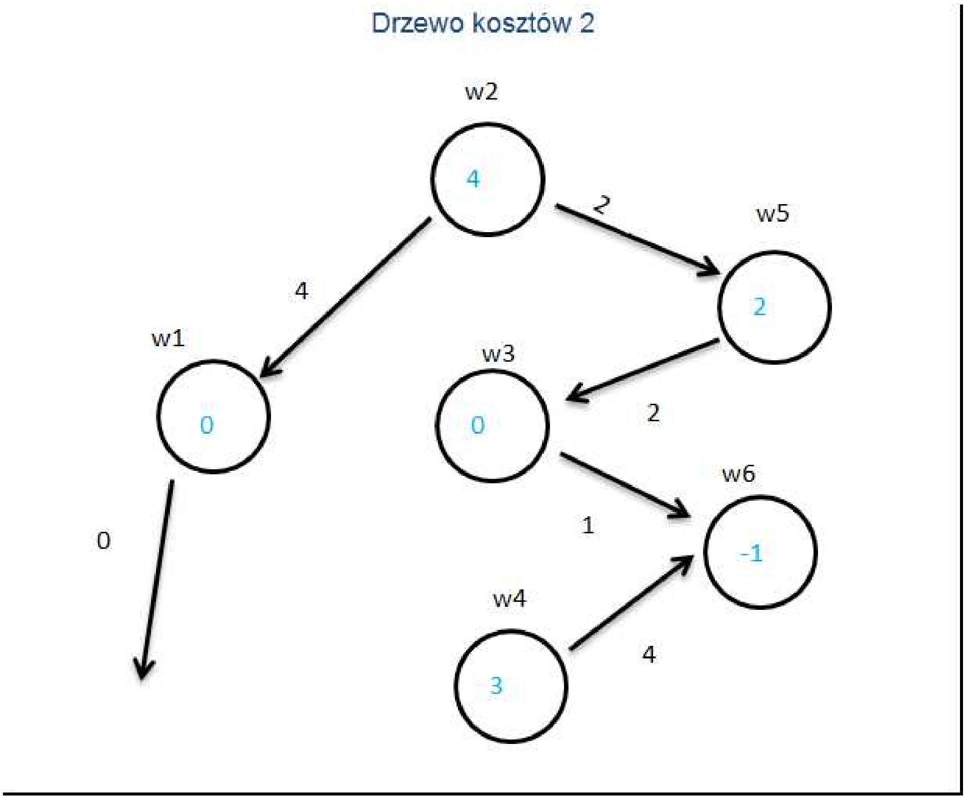
Przykład i zadanie w tym wykładzie pochodzą z egzaminów prof. W. Ogryczaka.



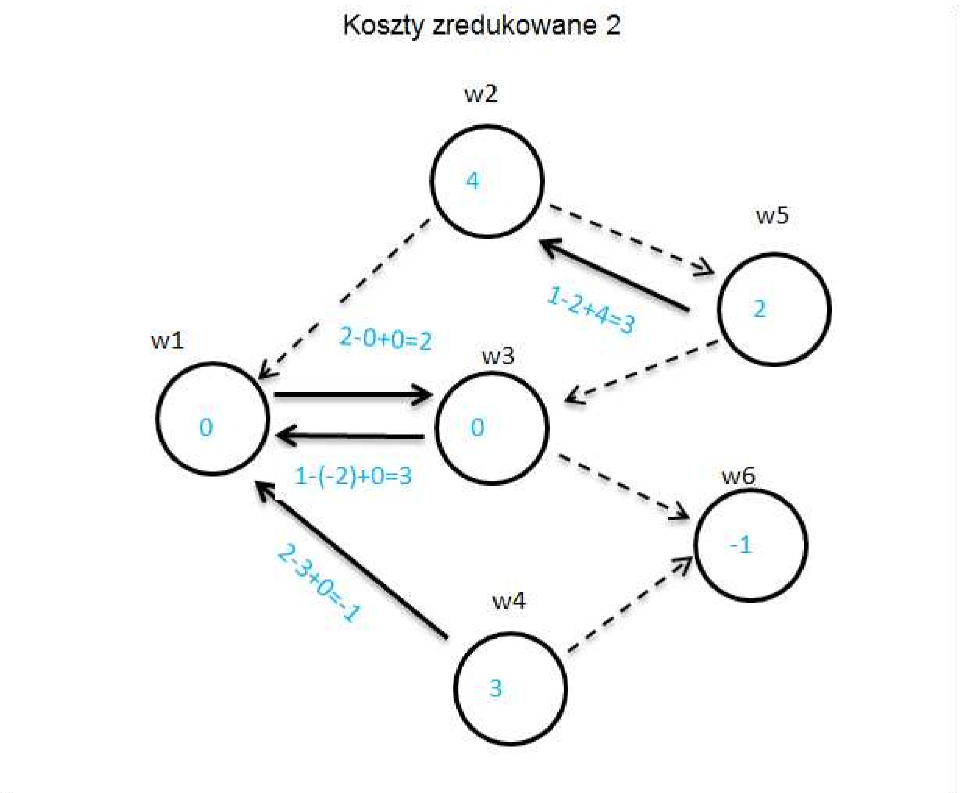
Rysunek 14.6. Schemat przepływu 1 uzupełniony.



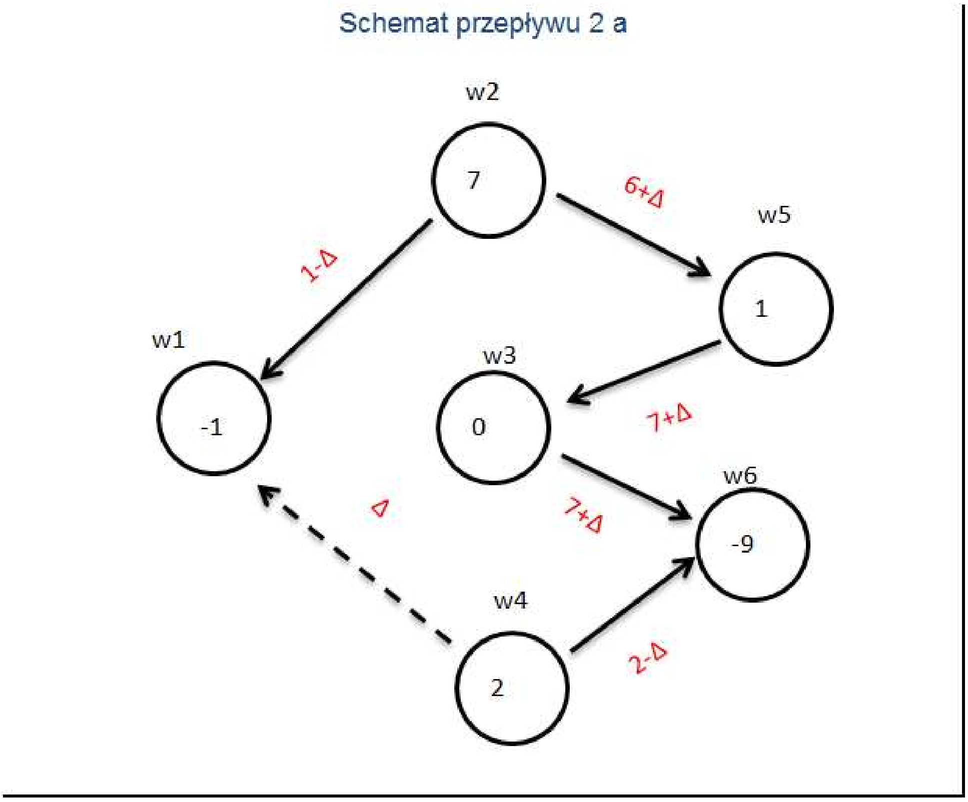
Rysunek 14.7. Schemat przepływu 2.



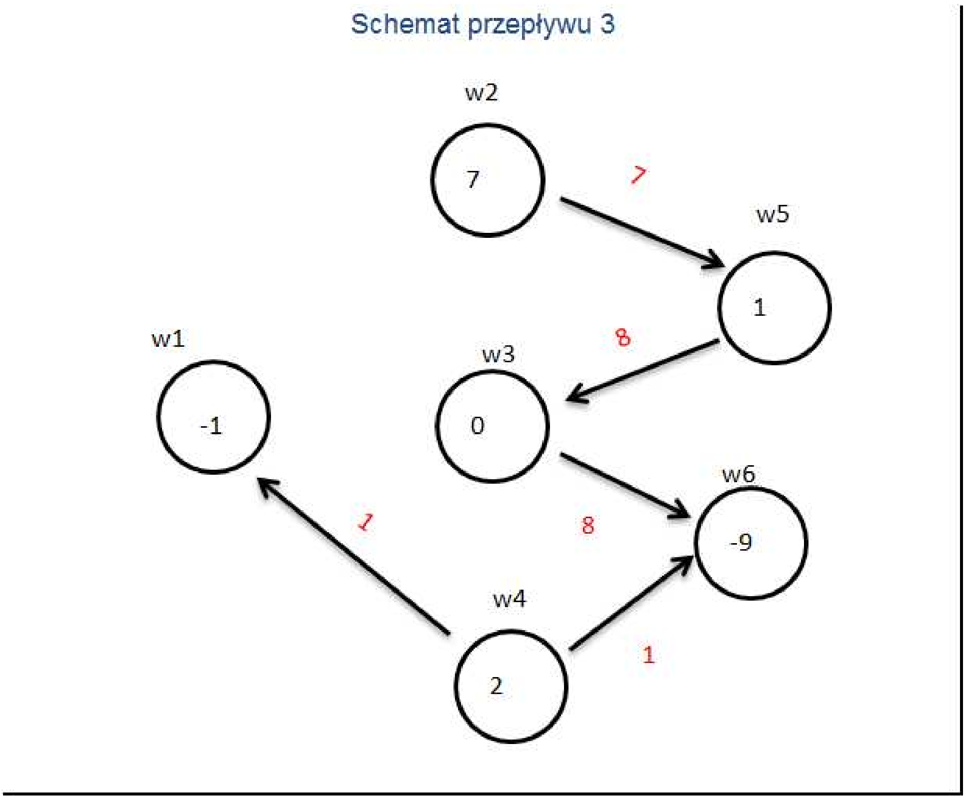
Rysunek 14.8. Drzewo kosztów 2.



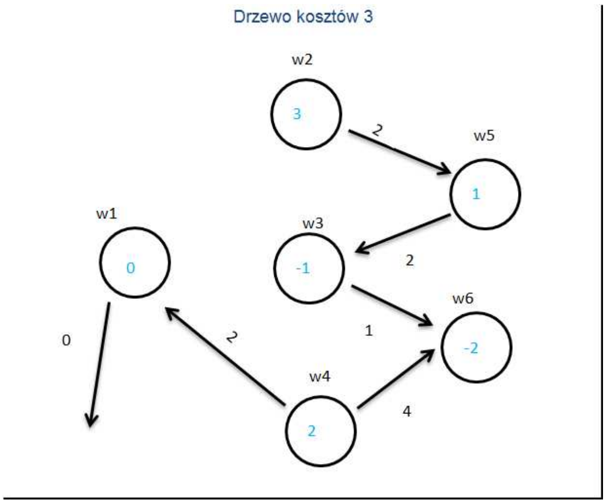
Rysunek 14.9. Koszty zredukowane 2.



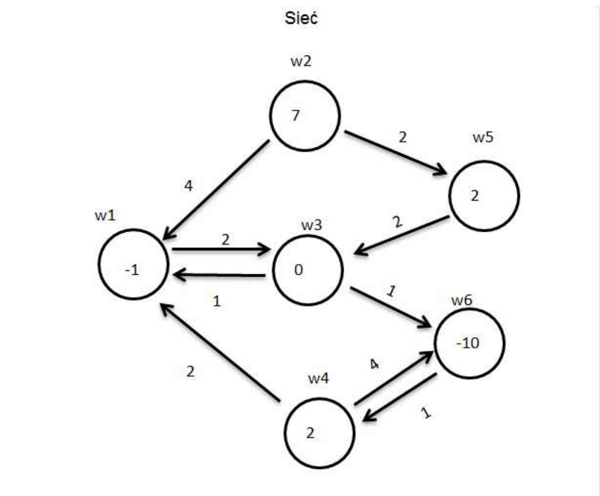
Rysunek 14.10. Schemat przepływu 2 uzupełniony.



Rysunek 14.11. Schemat przepływu 3.



Rysunek 14.12. Drzewo kosztów 3.



Rysunek 14.13. Sieć.

15. Zagadnienie transportowe

15.1. Zagadnienie transportowe

Mamy n punktów wysyłających towar i t punktów odbierających. Istnieje droga od każdego dostawcy do każdego odbiorcy i znany jest koszt transportu jednostki towaru.

Jak zorganizować transport, żeby koszt był minimalny?

Zapiszmy dane w postaci tabeli:

	O_1	O_2	$\cdots$	$\cdots$	O_t	podaż
D_1	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$\cdots$	$\cdots$	$a_{1,t}$	b_1
D_2	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$\cdots$	$\cdots$	$a_{2,t}$	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$		$\vdots$	$\vdots$
D_n	$a_{n,1}$	$a_{n,2}$	$\cdots$	$\cdots$	$a_{n,t}$	b_n
popyt	c_1	c_2	$\cdots$	$\cdots$	c_t	

Wprowadźmy zmienne $x_{i,j}$ opisujące ilość towaru przewożonego od i - tego dostawcy do j - tego odbiorcy.

Niech a_{ij} oznacza koszt przewiezienia jednostki towaru.

Jako funkcję celu przyjmijmy: $min\ x_0 \ = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{t} a_{i,j} x_{i,j}$

Zadanie transportowe nazywamy **zbilansowanym** gdy podaż = popyt,

czyli $\sum_{i=1}^{n} \ b_i \ = \ \sum_{j=1}^{t} \ c_j$.

W przypadku zbilansowanym obszar dopuszczalny opisany jest następującym układem równań i nierówności:

$\sum_{j=1}^{t} x_{1,j} = b_1$, - pierwszy dostawca wysyła cały towar,
$\sum_{j=1}^{t} x_{2,j} = b_2$, - drugi dostawca wysyła cały towar,
$\vdots$
$\sum_{j=1}^{t} x_{1,j} = b_n$, - n-ty dostawca wysyła cały towar,

$\sum_{i=n}^{t} x_{1,j} = c_1$, - pierwszy odbiorca dostaje cały towar,
$\sum_{i=n}^{t} x_{2,j} = c_2$, - drugi odbiorca dostaje cały towar,
$\vdots$
$\sum_{i=n}^{t} x_{1,j} = c_t$, - t-ty odbiorca dostaje cały towar,

Ponadto nie można przewozić ujemnej liczby towarów - a więc:

$$\forall_{1 \leqslant i \leqslant n} \forall_{1 \leqslant j \leqslant t} \ \ x_{i,j} \geqslant 0$$

.

Czasami towary są podzielne jak prąd czy woda, ale zwykle dodajemy warunki:

$\forall_{i,j}\ x_{i,j} \in Z$

Jeśli dodamy do siebie równania opisujące popyt otrzymamy

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{t} x_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} b_i$

Analogicznie jeśli dodamy do siebie równania opisujące podaż otrzymamy

$\sum_{j=1}^{t}\sum_{i=1}^{n} x_{i,j} = \sum_{j=1}^{t} c_i$.

Zatem dla zadania niezbilansowanego układ równań opisujący obszar dopuszczalny jest sprzeczny zaś dla zadania zbilansowanego układ równań opisujący obszar dopuszczalny jest zależny. Można pokazać, że rząd macierzy układu jest równy $n + t - 1$ a więc tyle musi być zmiennych bazowych.

Zakładamy, że zagadnienie jest zbilansowane.

Zadanie opisują dwie tablice mające tyle wierszy ilu jest dostawców i tyle kolumn ilu jest odbiorców plus wiersze i kolumny nagłówków.

W pierwszej zapisujemy koszty lub koszty zredukowane - czyli to co jest nad kreską w tablicy sympleks.

Druga tablica opisuje przewozy - dla zmiennej bazowej $x_{i,j}$ wstawiamy ilość towaru przewożonego od i - tego dostawcy do j - tego odbiorcy zaś dla zmiennych niebazowych krzyżyk x. Ta tablica opisuje to co jest w tablicy sympleks z prawej strony kreski i umiejscowienie zmiennych bazowych jak w zrewidowanej metodzie sympleks.

Szukanie wierzchołka startowego.

a) Metoda wierzchołka północno − zachodniego

1) Jeżeli mamy tylko jednego dostawcę lub tylko jednego odbiorcę **to** wszystkie zmienne są bazowe.

W tablicę przewozów wpisujemy popyty lub podaże odpowiednio.

2) Wybieramy wierzchołek północno − zachodni czyli miejsce w lewym górnym rogu.

2a) Jeżeli $b_1 \geqslant c_1$ **to** w **to** miejsce tablicy wpisujemy c_1 zaś w pozostałe miejsca pierwszej kolumny krzyżyki.

($x_{1,1} = c_1$). Teraz zamiast b_1 wpisujemy $b_1 - c_1$ i usuwamy pierwszego odbiorcę.

2b) Jeżeli $b_1 < c_1$ **to** w **to** miejsce tablicy wpisujemy b_1 zaś w pozostałe miejsca pierwszego wiersza krzyżyki.

($x_{1,1} = b_1$). Teraz zamiast c_1 wpisujemy $c_1 - b_1$ i usuwamy pierwszego dostawcę.

GO **TO** 1.

Przykład 15.1. Dane jest zagadnienie transportowe opisane tabelą:

$Min\{6, 15\} = 6$

Przewozy	O_1	O_2	O_3	O_4	**Podaże**
D_1	6				$\cancel{15}$ 9
D_2	X				5
D_3	X				10
D_4	X				5
Popyty	$\cancel{6}$	4	10	15	

$Min\{4, 9\} = 4$

Przewozy	O_1	O_2	O_3	O_4	**Podaże**
D_1	6	4			~~15~~ ~~9~~ 5
D_2	X	X			5
D_3	X	X			10
D_4	X	X			5
Popyty	~~6~~	~~4~~	10	15	

$Min\{10, 5\} = 5$

Przewozy	O_1	O_2	O_3	O_4	**Podaże**
D_1	6	4	5	X	~~15~~ ~~9~~ ~~5~~
D_2	X	X			5
D_3	X	X			10
D_4	X	X			5
Popyty	~~6~~	~~4~~	~~10~~ 5	15	

$Min\{5, 5\} = 5$

Przewozy	O_1	O_2	O_3	O_4	**Podaże**
D_1	6	4	5	X	~~15~~ ~~9~~ ~~5~~
D_2	X	X	5		~~5~~ 0
D_3	X	X	X		10
D_4	X	X	X		5
Popyty	~~6~~	~~4~~	~~10~~ ~~5~~	15	

Mamy teraz jedną linię.

Przewozy	O_1	O_2	O_3	O_4	**Podaże**
D_1	6	4	5	X	~~15~~ ~~9~~ ~~5~~
D_2	X	X	5	0	~~5~~ ~~0~~
D_3	X	X	X	10	~~10~~
D_4	X	X	X	5	~~5~~
Popyty	~~6~~	~~4~~	~~10~~ ~~5~~	~~15~~	

b) Metoda minimalnych kosztów.

Ta metoda różni się od poprzedniej tym, że zamiast wierzchołka północno - zachodniego wybieramy miejsce tabeli o minimalnym koszcie.

Metoda sympleks.

0) dana jest tablica kosztów K i tablica przewozów P opisująca wierzchołek startowy.

1) Test optymalności.

1a) W tablicy kosztów zaznaczamy miejsca odpowiadające zmiennym bazowym.

1b) Za tablicą w prawym górnym rogu wpisujemy 0.

1c) Uzupełniamy miejsca pod tabelą i z prawej strony takimi liczbami by w przypadku

zaznaczonych komórek – zmiennych bazowych,

suma liczby w tablicy, liczby dopisanej w wierszu i liczby dopisanej w kolumnie dawała 0.

1c) Wyliczamy tablicę kosztów zredukowanych dodając **do** każdego wiersza liczbę dopisaną z prawej strony

i dodając **do** każdej kolumny liczbę dopisaną poniżej.

2) Jeżeli nie ma liczb ujemnych w tablicy kosztów **to** STOP. Ostatni schemat przewozów jest optymalny.

Przykład 15.2. W zadaniu z poprzedniego przykładu koszty opisane są tabelą:

Zaznaczamy komórki zmiennych bazowych * i dopisujemy 0 w pierwszym wierszu.

Koszty	O_1	O_2	O_3	O_4	
D_1	1*	3*	7*	9	0
D_2	5	7	5*	10*	
D_3	6	2	4	8*	
D_4	6	0	2	10*	

Wymusza to liczby -1,-3 i -7 w pierwszych kolumnach.

Koszty	O_1	O_2	O_3	O_4	
D_1	1*	3*	7*	9	0
D_2	5	7	5*	10*	
D_3	6	2	4	8*	
D_4	6	0	2	10*	
	-1	-3	-7		

Wymusza to 2 w drugim wierszu.

Koszty	O_1	O_2	O_3	O_4	
D_1	1*	3*	7*	9	0
D_2	5	7	5*	10*	2
D_3	6	2	4	8*	
D_4	6	0	2	10*	
	-1	-3	-7		

Wymusza to -12 w czwartej kolumnie.

Koszty	O_1	O_2	O_3	O_4	
D_1	1*	3*	7*	9	0
D_2	5	7	5*	10*	2
D_3	6	2	4	8*	
D_4	6	0	2	10*	
	-1	-3	-7	-12	

Wymusza to 4 i 2 w ostatnich wierszach.

Koszty	O_1	O_2	O_3	O_4	
D_1	1*	3*	7*	9	0
D_2	5	7	5*	10*	2
D_3	6	2	4	8*	4
D_4	6	0	2	10*	2
	-1	-3	-7	-12	2

Obliczając koszty zredukowane otrzymujemy.

Koszty$_1$	O_1	O_2	O_3	O_4	
D_1	0	0	0	-3	
D_2	6	6	0	0	
D_3	9	3	1	0	
D_4	7	-1	-3	0	

3) Wędrowanie między wierzchołkami.

3a) Wybieramy drogę o ujemnym koszcie - w przykładzie drogę wyznaczoną zmienną $x_{4,2}$ i w tablicy przewozy do X dopisujemy $+\Delta$.

3b) Wpisując przy odpowiednich zmiennych bazowych $\pm\Delta$ budujemy cykl tak by popyt i podaż z uwzględnieniem Δ nie zmieniła się.

3c) Wybieramy maksymalną $\Delta = min\{x_{i,j} \, |\Delta$ występuje ze znakiem -$\}$

4) Podstawiamy wyliczoną wartość Δ i usuwamy z bazy jedną ze zmiennych na której ilość przewożonego towaru zmniejszyliśmy do 0.

Przykład 15.3.

Przewozy	O_1	O_2	O_3	O_4
D_1	6	4	5	X
D_2	X	X	5	0
D_3	X	X	X	10
D_4	X	X+Δ	X	5

Budujemy cykl:

Przewozy	O_1	O_2	O_3	O_4
D_1	6	$4-\Delta$	$5+\Delta$	X
D_2	X	X	$5-\Delta$	$0+\Delta$
D_3	X	X	X	10
D_4	X	X+Δ	X	$5-\Delta$

$\Delta = min\{4, 5, 5\} = 4$ i nowym schematem przewozów jest:

Przewozy	O_1	O_2	O_3	O_4
D_1	6	X	9	X
D_2	X	X	1	4
D_3	X	X	X	10
D_4	X	4	X	1

Transport niezbilansowany

W przypadku gdy podaż przewyższa popyt zadanie można doprowadzić do zbilansowanego wprowadzając sztucznego odbiorcę o popycie równoważącym różnicę i kosztach przewozów 0. Po wyliczeniu optymalnego przewozu mówimy, że towary wysłane do sztucznego odbiorcy zostają u dostawców.

W przypadku gdy popyt przewyższa podaż, analogicznie, zadanie można doprowadzić do zbilansowanego wprowadzając sztucznego dostawcę o podaży równoważącym różnicę i kosztach przewozów 0.

Jako literaturę uzupełniającą do tego tematu polecamy książki [10] i [6].

Ćwiczenie 15.1. Dane jest zagadnienie transportowe opisane tabelą:

Koszty	O_1	O_2	O_3	O_4	**Podaże**
D_1	1	3	7	9	15
D_2	5	7	5	10	5
D_3	6	2	4	8	10
D_4	6	0	2	10	5
Popyty	7	8	10	10	

Znajdź wierzchołek startowy stosując algorytm:

a) Wierzchołka północno - zachodniego.

b) Minimalnych kosztów.

Ćwiczenie 15.2. W zagadnieniu transportowym opisanym tabelą:

Koszty	O_1	O_2	O_3	O_4	**Podaże**
D_1	1	3	7	9	9
D_2	6	9	5	10	13
D_3	6	4	4	10	21
Popyty	10	7	9	17	

aktualnie realizowany jest następujący schemat przewozów P_1.

Przewozy	O_1	O_2	O_3	O_4	**Podaże**
D_1	x	x	x	9	
D_2	x	x	5	8	
D_3	10	7	4	x	
Popyty					

Stosując metodę sympleks popraw ten schemat przewozów do optymalnego i znajdź wszystkie optymalne schematy przewozów.

Ćwiczenie 15.3. Znajdź wszystkie optymalne schematy przewozów dla zadania transportowego:

Koszty	H_1	H_2	H_3	H_4	**Popyty**
S_1	9	2	1	10	8
S_2	3	3	0	6	5
S_3	9	5	6	15	11
Podaże	5	5	10	4	

Zalecaną jest metoda minimalnych kosztów.

Literatura

[1] Mokhtar S. Bazaraa, John J. Jarvis. *Linear programming and network flows.* John Wiley & Sons, New York-London-Sydney, 1977.

[2] Mokhtar S. Bazaraa, John J. Jarvis, Hanif D. Sherali. *Linear programming and network flows.* John Wiley & Sons Inc., Hoboken, NJ, wydanie fourth, 2010.

[3] E. M. L. Beale. Cycling in the dual simplex algorithm. *Naval Res. Logist. Quart.*, 2:269–275 (1956), 1955.

[4] Robert G. Bland. New finite pivoting rules for the simplex method. *Math. Oper. Res.*, 2(2):103–107, 1977.

[5] R. J. Dakin. A tree-search algorithm for mixed integer programming problems. *Comput. J.*, 8:250–255, 1965.

[6] Saul I. Gass. *Linear programming.* Dover Publications Inc., Mineola, NY, wydanie fifth, 2003. Methods and applications.

[7] Ralph E. Gomory. Outline of an algorithm for integer solutions to linear programs. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 64:275–278, 1958.

[8] Ralph E. Gomory. Solving linear programming problems in integers. *Proc. Sympos. Appl. Math., Vol. 10*, strony 211–215. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1960.

[9] Ralph E. Gomory. An algorithm for integer solutions to linear programs. *Recent advances in mathematical programming*, strony 269–302. McGraw-Hill, New York, 1963.

[10] K. Manteuffel, E. Seiffart. *Wstęp do algebry liniowej i programowania liniowego.* BNI Biblioteka Naukowa Inżyniera. Państwowe Wydaw. Naukowe, Warszawa, 1975.

[11] R. Tyrrell Rockafellar. *Convex analysis.* Princeton Mathematical Series, No. 28. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.

[12] Alexander Schrijver. *Theory of linear and integer programming.* Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1986. A Wiley-Interscience Publication.

[13] Krystian Zorychta, Włodzimierz Ogryczak. *Programowanie liniowe i całkowitoliczbowe.* Biblioteka Inżynierii Oprogramowania. [Library for Programmers]. Zakład Narodowy im. Ossolińskich—Wydawnictwo Polskiej Akademii Nauk (Ossolineum), Wrocław, 1981. Metoda podziału i ograniczeń. [Branch and bound method], With English and Russian summaries.