METODY OBLICZENIOWE OPTYMALIZACJI

1

Arkadiusz Tomczyk

Instytut Informatyki Politechniki Łódzkiej

16 marca 2011

Wykład

- Wiadomości i pojęcia podstawowe.
- Algorytmy optymalizacji jednowymiarowej.
- Metody bezgradientowe optymalizacji bez ograniczeń.
- Metody gradientowe optymalizacji bez ograniczeń.
- Programowanie liniowe.
- Metody optymalizacji z ograniczeniami.

Wykład

Ocena końcowa dla wykładu uwzględnia dwa testowe sprawdziany w trakcie semestru.

Klucz

Rastrigin

Laboratorium

- Optymalizacja jednowymiarowa.
- Optymalizacja kierunkowa.
- Optymalizacja wilowymiarowe bez ograniczeń.
- Programowanie liniowe.
- Optymalizacja z ograniczeniami.

Narzędzia

- Matlab wraz z modułami (Toolbox).
- Scilab wraz z modułam (ATOMS).

Literatura

- Stachurski A., Wierzbicki A.: Podstawy optymalizacji, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1999
- Brdyś M., Ruszczyński A., Metody optymalizacji w zadaniach, WNT, Warszawa 1985
- Neittaanmäki P., Rudnicki M., Savini A.: Inverse Problems and Optimal Design in Electricity and Magnetism, Clarendon Press, Oxford 1996
- Venkataraman P.: Applied Optimization with Matlab Programming, John Wiley and Sons, New York 2001
- Findeisen W., Szymanowski J., Wierzbicki. A.: Metody obliczeniowe optymalizacji, Wydawnictwo Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1973
- Haftka R. T., Gurdal Z., Kamat M. P.: Elements of Structural Optimization, Kluwer Academic Publishers,, Dordrecht 1990

Problem optymalizacji

Znajdź takie $x^* \in X^*$, dla którego funkcji celu:

$$f : X \to \mathbb{R}$$

w zbiorze dopuszczalnym $X^* \subseteq X$ osiąga wartość minimalną.

Problem optymalizacji

$$x^* = \arg \min_{x \in X^*} f(x)$$

- Osiągalność minimów.
- Niepusty zbiór dopuszczalny.

Uwagi

- Programowanie.
- Obszar projektowania.
- Maksymalizacja.
- Wiele kryteriów.

Problem optymalizacji

Szczególnym przypadkiem jest przypadek, w którym $X = \mathbb{R}^n$, zaś obszar dopuszczalny zdefiniowany jest przez ograniczenia:

$$g_j(\mathbf{x}) \leqslant 0 \text{ dla } j = 1, \ldots, m$$

$$h_j(\mathbf{x}) = 0 \text{ dla } j = 1, \ldots, p$$

Problem optymalizacji

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$$

- Ograniczenia definiują obszar dopuszalny X^*.
- Ograniczenia równościowe (mogą służyć zmniejszeniu liczby parametrów).
- Ograniczenia nierównościowe (zawężają obszar dopuszczelny).

Uwagi

- Zmienne decyzyjne.
- Bez ograniczeń.
- Postać ograniczeń.
- Optimum na brzegu.
- Rozmiar przestrzeni.
- Sformułowanie problemu.
- Przykłady.

Problem optymalizacji

Kolejnym szczególnym przypadkiem jest przypadek, w którym w zarówno funkcja celu, jak i ogranicznia są funkcjami liniowymi:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$g_j(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \leqslant b_j \text{ dla } j = 1, \ldots, m$$

gdzie $c_i \in \mathbb{R}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ oraz $b_j \in \mathbb{R}$ dla $i = 1, \ldots, n$

Problem optymalizacji

- Nieujemne zmienne decyzyjne $x_i \geqslant 0$ dla $i = 1, \ldots, n$
- Ograniczenia równościowe.

Uwagi

- Programowanie liniowe.
- Postać macierzowa.
- Postać ograniczeń.
- Interpretacja.
- Przykłady.

Podział metod optymalizacji

- Ze względu na liczbę zmiennych decyzyjnych: jednowymiarowe i wielowymiarowe.
- Ze względu na rodzaj zmiannych decyzyjnych: programowanie ciągłe i dyskretne (np. całkowito liczbowe, kombinatoryczne).
- Ze względu na rodzaj funkcji celu i funkcji ograniczeń: programowanie liniowe i nieliniowe (np. kwadratowe, dowolne)
- Ze względu na rodzaj problemu optymalizacji: z ograniczeniami i bez ograniczeń.

Warunki konieczne

- Optymalizacja bezograniczeń - analiza matematyczna.
- Optymalizacja z ograniczeniami równościowymi - metoda Lagrange'a.
- Optymalizacja z ograniczeniami nierównościowymi - metoda Kuhna-Tuckera.

Uwagi

- Nie wszystkie punkty spełniające warunki konieczne muszą być ekstremami.
- Przy dodatkowych założeniach dotyczących wypukłości (wklęsłości) obszarów dopuszczalnych i wypukłości (wklęsłości) bądź liniowości odpowiednich funkcji można wskazać odpowiednie warunki wystarczające.
- Sprawdzenie powyższych warunków wymaga rozwiązywania układów równań nieliniowych. Znajdowanie wszystkich rozwiązań takich układów równań, szczególnie przy dużej wymiarowości problemu, jest bardzo uciążliwe.

Programowanie liniowe

- Metoda Simpleks.
- **Dwufazowa metoda Simpleks**.

Programowanie nieliniowe bez ograniczeń

- **Metody jednowymiarowe**.
- **Metody kierunkowe**. Funkcja jednowymiarowa w kierunku $\mathbf{d}$:

$$\phi(\lambda) = f(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{d})$$

  gdzie $\lambda \in \mathbb{R}$ oraz $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$.
- Wybór kierunku zależny od metody.
- **Wybór długości kroku**.
- Metody bezgradientowe: Hooka-Jeevesa, Rosenbrocka, **Simpleks Neldera-Meada**, Gaussa-Seidla, DSC, Powella, Zangwilla.
- Metody gradientowe: gradientu prostego, najszybszego spadku, **gradientu sprzężonego Fletchera-Reevesa**, Gaussa-Newtona, Levenberga-Marquardta, Davidona, Pearsona, Newtona-Raphosna, quasi-Newtona, **DFP**, BFGS.

Programowanie nieliniowe z ograniczeniami

- Sprowadzenie problemu do problemu bez ograniczeń przez transformację zmiennych niezależnych.
- **Sprowadzenie problemu do problemu bez ograniczeń przez wprowadzenie funkcji kary**. Metody: Smitha-Foxa, Rosenbrocka, Boxa, Carrola (CRST), SUMT, Powella.
- Modyfikacja kierunku poszukiwań. Metody: MGST, Rosena.
- Metoda **Complex** (Box).
- Metody **SLP** i SQP.

Metody heurystyczne

- Algorytmy genetyczne i strategie ewolucyjne.
- Symulowane wychładzanie.
- Tabu search.
- Algorytmy rojowe.

Uzupełnienia

- Spełnienie założeń danej metody (powtarzanie, zaburzanie).
- Koszt wyznaczania funkcji celu (minimalizacja liczby wyznaczeń).
- Wyznaczanie pochodnych (numeryczne przybliżanie).
- Szybkość zbieżności algorytmu.
- Warunki stopu.
- Metody niedeterministyczne.
- Heurystuczne przeszukiwanie.
- Rachunek wariacyjny.
- Optymalizacja wielokryterialna (problem uporządkowania).
- Standardowe funkcje.