

# Teoria Automatów i Języków

18 października 2012

## Spis treści

<b>1</b>	<b>Relacje</b>	<b>2</b>
1.1	Własności relacji . . . . .	2
1.2	Słowa i alfabety . . . . .	3
1.3	Relacje indukowane przez język . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Grafy</b>	<b>5</b>



Ten utwór jest dostępny na licencji Creative Commons Uznanie autorstwa-Na tych samych warunkach 3.0 Polska.

# 1 Relacje

**Definicja 1.** Niech  $X_1, X_2, \dots, X_n$  będą zbiorami. Podzbiór iloczynu kartezjańskiego  $R \subset X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$  nazywamy  $n$ -argumentową relacją.

**Definicja 2.** Niech  $X, Y$  będą zbiorami. Wtedy relacją dwuargumentową nazywamy  $\rho = X \times Y$ , a zbiory  $X, Y$  odpowiednio dziedziną i przeciwdziedziną.

**Definicja 3.** Relacją binarną nazywamy taką relację dwuargumentową, w której dziedzina i przeciwdziedzina są równe.  $\rho = X \times X$

## 1.1 Własności relacji

•zwrotna	$x\rho x$
•przeciw-zwrotna	$\neg x\rho x$
•symetryczna	$x\rho y \Rightarrow y\rho x$
$\forall x, y, z \in X$ •przeciw-symetryczna	$x\rho y \Rightarrow \neg y\rho x$
•antysymetryczna	$x\rho y \wedge y\rho x \Rightarrow x = z$
•przechodnia	$x\rho y \wedge y\rho z \Rightarrow x\rho z$
•spójna	$x\rho y \vee y\rho x$

**Definicja 4.** Relację nazywamy relacją równoważności jeśli jest jednocześnie zwrotna, symetryczna i przechodnia

**Definicja 5.** Niech  $\rho \subset X \times X$  będzie relacją binarną, a  $\mathcal{R}$  zbiorem własności relacji. Powiemy że  $\rho'$  jest domknięciem relacji  $\rho$  ze względu na  $\mathcal{R} \Leftrightarrow$

1.  $\rho \subset \rho'$
2.  $\rho'$  jest domknięta ze względu na własności z  $\mathcal{R}$
3.  $\rho'$  jest najmniejszą relacją spełniającą powyższe warunki

**Przykład 1.**  $\rho \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N} \quad m, n \in \mathbb{N} \quad m\rho n \equiv m + 1 = n$

$\rho$	0	1	2	3	4	5	6	...
0	1	1	1	1	1	1	1	...
1	0	1	1	1	1	1	1	...
2	0	0	1	1	1	1	1	...
3	0	0	0	1	1	1	1	...
4	0	0	0	0	1	1	1	...
5	0	0	0	0	0	1	1	...
...	...	...	...	...	...	...	1	...

0 oznacza brak relacji, 1 oznacza że dwa elementy są w relacji zwrotnej, przechodniej lub  $\rho$ . Cała tabel przedstawia natomiast relację  $\rho'$  taką że  $\forall m, n \in \mathbb{N} \quad m\rho'n \equiv m \leq n$ , będącą domknięciem relacji  $\rho$  ze względu na  $\mathcal{R} = \{\text{zwrotność, przechodniość}\}$

## 1.2 Słowa i alfabet

**Definicja 6.** Dowolny skończony ciąg nad danym alfabetem nazywamy słowem.  $\epsilon$  – słowo puste,  $\Sigma^*$  – zbiór wszystkich słów

**Definicja 7.** Dowolny podzbiór zbioru słów jest językiem  $L \subset \Sigma^*$

**Przykład 2.**

- $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- $\Sigma^* = \{\epsilon, 0, 1, \dots, 9, 00, 01, \dots, 09, 10, 11, \dots, 99, 100, \dots\}$
- $L = \{0, 1, 2, \dots, 9, 10, \dots, 19, 20, 21, \dots, 99, 100, \dots\}$
- $L' = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$

**Definicja 8.** Jeżeli nad zbiorem  $X$  zdefiniowano relację równoważności  $\sim$  to klasą abstrakcji elementu  $x \in X$  nazwiemy zbiór wszystkich elementów z  $X$  które są w relacji z  $x$ :  $[x]_{\sim} = \{y \in X : y \sim x\}$

**Przykład 3.**  $\Sigma = \{0, 1, \dots, 9\}$ ,  $\rho \subset \Sigma^* \times \Sigma^* \quad \forall n, m \in \Sigma^* \quad m\rho n \equiv \text{wartość } m = \text{wartość } n$ . Klasy abstrakcji:

- $A_{\epsilon} = \{\epsilon\}$
- $A_0 = \{0, 00, 000, \dots\}$
- $A_1 = \{1, 01, 001, \dots\}$
- $A_2 = \{2, 02, 002, \dots\}$

**Przykład 4.**  $\rho \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N} : m\rho n \equiv |m-n| = 3$  – nie jest zwrotna ani przechodnia ale jest symetryczna. Domknięcie zwrotne:  $m\rho n \equiv (m-n) \bmod 3 = 0 \vee m = \epsilon = n$ . Klasy tego domknięcia abstrakcji  $[\epsilon]$ ,  $[0]$ ,  $[1]$ ,  $[2]$

**Definicja 9.** Powiemy że relacja  $\rho$  jest prawostronnie niezmienna  $\Leftrightarrow$  gdy dla dowolnych dwóch słów będących w relacji, po dopisaniu tego samego słowa nadal pozostaną w niej.

$$\forall u, v \in \Sigma^* \quad u\rho v \Rightarrow \forall z \in \Sigma^* \quad uz\rho vz$$

## 1.3 Relacje indukowane przez język

**Definicja 10.** Powiemy że  $R_L$  jest relacją indukowaną przez język  $L \Leftrightarrow$

$$\forall u, v \in \Sigma^* \quad uR_L v \equiv \forall z \in \Sigma^* \quad uz \in L \equiv vz \in L$$

**Zadanie 1.** Udowodnij, że relacja indukowana przez język ( $R_L$ ) jest relacją równoważności.

**Przykład 5.** Niech  $L \subset \Sigma^*$  – język,  $R_L \subset \Sigma^* \times \Sigma^{*1}$   $R_L$  jest relacją określoną przez język  $L$  w następując sposób

$$L \equiv (\forall u, v \in \Sigma^*) \quad uR_L v \equiv [(\forall z \in \Sigma^*) \quad uz \in L \equiv vz \in L]$$

Niech alfabet będzie alfabetem binarnym ( $\Sigma = (0, 1)$ ), a język  $L$  językiem binarnym bez znaczących zer –  $L = \{0, 1, 10, 11, 100, \dots\}$ <sup>2</sup>. Wtedy relacja  $R_L$  tworzy następujące klasy abstrakcji:

1.  $A_{\epsilon} = \{\epsilon\}$  – klasa zawierająca tylko słowo puste ( $\epsilon$ )

<sup>1</sup>relacja jest nad zbiorem wszystkich słów z alfabetu, a nie nad językiem dlatego przy wyznaczaniu klas abstrakcji należy zbadać również elementy nie należące do języka

<sup>2</sup>słowo puste nie należy do języka

2.  $A_0 = \{0\}$  – klasa zawierająca tylko 0

- 0 jest w relacji z samym sobą
- nie jest w relacji z żadnym innym słowem z poza języka ponieważ:

*Dowód.* Niech  $z = \epsilon$  wówczas  $0z = 0\epsilon = 0 \in L$  oraz  $uz = u\epsilon = u \notin L$ . Zatem nie może być w relacji z żadnym słowem z poza języka  $\square$

- nie jest w relacji z żadnym słowem z języka bo:

*Dowód.* Niech  $z = 1$  wówczas  $0z = 01 \notin L$  oraz  $uz = u1 = 1 \dots 1 \in L$   $\square$

3.  $A_{10} = L - \{0\}$  – klasa zawierająca wszystkie słowa z języka poza 0

- Każdy element jest w relacji z elementem z klasy

*Dowód.* Niech  $u, v \in A_{10}$  wówczas  $u = 1 \dots$  i  $v = 1 \dots$ . Dla  $z \in \Sigma^*$   $uz = 1 \dots$  i  $vz = 1 \dots$  stąd  $uz \in L$  i  $vz \in L$   $\square$

- Każdy element nie jest w relacji z elementem nie należącym do  $A_{10}$

*Dowód.* Niech  $u \in A_{10}$  i  $v \notin A_{10}$  wówczas  $u = 1 \dots$

- jeśli  $v \neq \epsilon$  to znaczy  $v = 0 \dots$ , wówczas dla  $z = 1$   $uz \in L \wedge vz \notin L$
- jeśli  $v = \epsilon$  to dla  $z = \epsilon$   $uz \in L \wedge vz \notin L$ <sup>3</sup>

$\square$

4.  $A_{01} = \Sigma^* - (L \cup \epsilon) = \{\text{słowa z wiodącymi nieznaczącymi zerami}\}$

W przypadku alfabetu złożonego z większej liczby znaków dla tej relacji  $R_L$ , klasy abstrakcji byłyby identyczne.

**Przykład 6.**  $L =$  zbiór słów takich że kolejne trójki liczb składają się z identycznych liter  $= \{\epsilon, 000, 111, 000111, 000000, \dots\}$   
 $L \subset \{0, 1\}^*$

Klasy abstrakcji relacji indukowanej przez język  $L$

1.  $A_L = \{L\}$  – wszystkie słowa z języka
2.  $A_0 = \{u0 : u \in L\}$  – słowa z języka z dodatkowym 0 na końcu
3.  $A_1 = \{u1 : u \in L\}$  – słowa z języka z dodatkowym 1 na końcu
4.  $A_{00} = \{u00 : u \in L\}$  – słowa z języka z dodatkowym 00 na końcu
5.  $A_{11} = \{u11 : u \in L\}$  – słowa z języka z dodatkowym 11 na końcu
6.  $A_\sim$  – wszystkie pozostałe słowa

**Przykład 7.**  $L =$  zbiór słów które mają tyle samo zer i jedynek  $= \{\epsilon, 01, 10, 0011, 1010, \dots\}$   
 $L \subset \{0, 1\}^*$

Klasy abstrakcji relacji indukowanej przez język  $L$ <sup>4</sup>

1.  $A_0 = L$
2.  $A_1 = \{0, \dots\}$
3.  $A_{-1} = \{1, \dots\}$
4.  $A_2 = \{11, \dots\}$
- $\vdots$

**Zadanie 2.** Podaj klasy abstrakcji dla relacji indukowanej przez język palindromów nad alfabetem binarnym

<sup>3</sup>Można skorzystać z tego że już udowodniliśmy że  $\epsilon$  jest w innej klasie abstrakcji

<sup>4</sup>indeks dolny przy klasie abstrakcji to różnica pomiędzy liczą zer i jedynek

## 2 Grafy

**Definicja 11.** Grafem nazywamy parę  $G = (V, E)$  gdzie  $V$  to zbiór wierzchołków  $E \subset V \times V$  to zbiór krawędzi.

**Definicja 12.** Drzewo to graf spójny graf acykliczny o następujących własnościach:

1. Jednowierzchołkowy graf  $G = (\{v\}, \emptyset)$  nazywamy korzeniem drzewa
2. Jeśli  $T_1 = (v_1, E_1), T_2 = (v_2, E_2), \dots, T_k = (v_k, E_k)$  są drzewami o korzeniach  $v_{01}, v_{02}, \dots, v_{0k}$  to

$$T = \left( \underbrace{\{v_0\} \cup \bigcup_{i=1}^k v_k}_{\text{wierzchołki}}, \underbrace{\bigcup_{i=0}^k \{v_0, v_{0i}\} \cup \bigcup_{i=0}^k E_i}_{\text{krawędzie}} \right)$$

3. Dowolną konstrukcję otrzymaną przez zastosowanie reguł 1 i 2

**Definicja 13.** Jeśli wysokościami drzew  $T_1 = (v_1, E_1), T_2 = (v_2, E_2), \dots, T_k = (v_k, E_k)$  są  $h_1, h_2, \dots, h_k$  to wysokość drzewa  $T$  wynosi  $h = \max\{h_1, h_2, \dots, h_k\}$

**Definicja 14.** K-drzewo to drzewo którego dowolny wierzchołek ma k następników

**Definicja 15** (Zasada indukcji matematycznej). Niech  $W$  będzie pewną własnością liczb naturalnych taką że:

1.  $W(0)$  – własność  $W$  zachodzi dla 0
2.  $\forall k = 0, 1, \dots \quad W(k) \Rightarrow W(k+1)$

Wówczas  $\forall n \in \mathbb{N} \quad W(n)$

**Lemat 1.** Dowolne k-drzewo o wysokości  $h$  ma nie więcej niż  $k^h$  liści

*Dowód. indukcyjny*

1. dla drzewa jednowierzchołkowego liczba liści wynosi 1, a wysokość 0
2. niech  $T_1, T_2, \dots, T_l$  – k-drzewa o wysokościach  $h_1, h_2, \dots, h_l$  Niech  $T$  – drzewo zbudowane z  $T_1, T_2, \dots, T_l$  według reguły z definicji drzewa. Wysokość  $T$  jest równa  $1 + \max\{h_1, h_2, \dots, h_l\}$ . Zakładam, że liczby liści w drzewach  $T_1, \dots, T_l$  są nie większe niż  $k^{h_1}, k^{h_2}, \dots, k^{h_l}$ . Liczba liści w drzewie  $T$  jest nie większa niż

$$k^{h_1} + k^{h_2} + \dots + k^{h_l} \leq k \cdot \max\{k^{h_1}, k^{h_2}, \dots, k^{h_l}\} = k \cdot k^{\max\{h_1, h_2, \dots, h_l\}} = k^{1+\max\{h_1, h_2, \dots, h_l\}} = k^h$$

3. Na mocy spełnienia punktu 1 i 3 zasady indukcji matematycznej wnioskujemy iż lemat jest prawdziwy

□