# Teoria Automatów i Języków

19 października 2012

## Spis treści

# 1 Relacje

**Definicja 1.** Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będą zbiorami. Podzbiór iloczynu kartezjańskiego $R \subset X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ nazywamy n-argumentową relacją.

**Definicja 2.** Niech $X, Y$ będą zbiorami. Wtedy relacją dwuargumentową nazywamy $\rho = X \times Y$, a zbiory $X, Y$ odpowiednio dziedziną i przeciwdziedziną.

**Definicja 3.** Relacją binarną nazywamy taką relację dwuargumentową, w której dziedzina i przeciwdziedzina są równe. $\rho = X \times X$

## 1.1 Własności relacji

| | | |
|---|---|---|
| | •zwrotna | $x\rho x$ |
| | •przeciw-zwrotna | $\neg x\rho x$ |
| | •symetryczna | $x\rho y \Rightarrow y\rho x$ |
| $\forall x, y, z \in X$ | •przeciw-symetryczna | $x\rho y \Rightarrow \neg y\rho x$ |
| | •antysymetryczna | $x\rho y \wedge y\rho x \Rightarrow x = z$ |
| | •przechodnia | $x\rho y \wedge y\rho z \Rightarrow x\rho z$ |
| | •spójna | $x\rho y \vee y\rho x$ |

**Definicja 4.** Relację nazywamy relacją równoważności jeśli jest jednocześnie zwrotna, symetryczna i przechodnia

**Definicja 5.** Niech $\rho \subset X \times X$ będzie relacją binarną, a $\mathcal{R}$ zbiorem własności relacji. Powiemy że $\rho'$ jest domknięciem relacji $\rho$ ze względu na $\mathcal{R}$ $\quad \Leftrightarrow$

1. $\rho \subset \rho'$
2. $\rho'$ jest domknięta ze względu na własności z $\mathcal{R}$
3. $\rho'$ jest najmniejszą relacją spełniającą powyższe warunki

**Przykład 1.** $\rho \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N} \quad m, n \in \mathbb{N} \quad m\rho n \equiv m + 1 = n$

| $\rho$ | *0* | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *0* | *1* | *1* | *1* | *1* | *1* | *1* | *1* | ... |
| *1* | *0* | *1* | *1* | *1* | *1* | *1* | *1* | ... |
| *2* | *0* | *0* | *1* | *1* | *1* | *1* | *1* | ... |
| *3* | *0* | *0* | *0* | *1* | *1* | *1* | *1* | ... |
| *4* | *0* | *0* | *0* | *0* | *1* | *1* | *1* | ... |
| *5* | *0* | *0* | *0* | *0* | *0* | *1* | *1* | ... |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | *1* | ... |

*0 oznacza brak relacji, 1 oznacza że dwa elementy są w relacji zwrotnej, przechodniej lub $\rho$. Cała tabel przedstawia natomiast relację $\rho'$ taką że $\forall m, n \in \mathbb{N} \quad m\rho' n \equiv m \leqslant n$, będącą domknięciem relacji $\rho$ ze względu na $\mathcal{R} = \{$zwrotność, przechodniość$\}$*

## 1.2 Słowa i alfabety

**Definicja 6.** Dowolny skończony ciąg nad danym alfabetem nazywamy słowem. $\varepsilon$ – słowo puste, $\Sigma^\star$ – zbiór wszystkich słów

**Definicja 7.** Dowolny podzbiór zbioru słów jest językiem $L \subset \Sigma^\star$

**Przykład 2.**

- $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- $\Sigma^\star = \{\varepsilon, 0, 1, \dots, 9, 00, 01, \dots, 09, 10, 11, \dots, 99, 100, \dots\}$
- $L = \{0, 1, 2, \dots, 9, 10, \dots, 19, 20, 21, \dots, 99, 100, \dots\}$
- $L' = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$

**Definicja 8.** Jeżeli nad zbiorem $X$ zdefiniowano relację równoważności $\sim$ to klasą abstrakcji elementu $x \in X$ nazwiemy zbiór wszystkich elementów z $X$ które są w relacji z $x$: $[x]_\sim = \{y \in X : y \sim x\}$

**Przykład 3.** $\Sigma = \{0, 1, \dots, 9\}$, $\rho \subset \Sigma^\star \times \Sigma^\star \quad \forall n, m \in \Sigma^\star \quad m\rho n \equiv$ *wartość* $m =$ *wartość* $n$. *Klasy abstrakcji:*

- $A_\epsilon = \{\epsilon\}$
- $A_0 = \{0, 00, 000, \dots\}$
- $A_1 = \{1, 01, 001, \dots\}$
- $A_2 = \{2, 02, 002, \dots\}$

**Przykład 4.** $\rho \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N} : m\rho n \equiv |m - n| = 3$ – *nie jest zwrotna ani przechodnia ale jest symetryczna. Domknięcie zwrotne:* $m\rho n \equiv (m - n) mod 3 = 0 \vee m = \epsilon = n$. *Klasy tego domknięcia abstrakcji* $[\epsilon]$, $[0]$, $[1]$, $[2]$

**Definicja 9.** Powiemy że relacja $\rho$ jest prawostronnie niezmienna $\Leftrightarrow$ gdy dla dowolnych dwóch słów będących w relacji, po dopisaniu do obu tego samego słowa ze zbiru słów nadal pozostaną w relacji.

$$(\forall u, v \in \Sigma^\star) \quad [u\rho v \Rightarrow (\forall z \in \Sigma^\star) uz\rho vz]$$

## 1.3 Relacje indukowane przez język

**Definicja 10.** Powiemy że $R_L$ jest relacją indukowaną przez język $L \Leftrightarrow$

$$(\forall u, v \in \Sigma^\star) \quad \{uR_Lv \equiv [(\forall z \in \Sigma^\star) \quad uz \in L \equiv vz \in L]\}$$

**Zadanie 1.** *Udowodnij, że relacja indukowana przez język* $(R_L)$ *jest relacją równoważności.*

**Przykład 5.** *Niech* $L \subset \Sigma^\star$ *– język,* $R_L \subset \Sigma^\star \times \Sigma^\star$[1] $R_L$ *jest relacją określoną przez język* $L$ *w następując sposób*

$$L \equiv (\forall u, v \in \Sigma^\star) \quad uR_Lv \equiv [(\forall z \in \Sigma^\star) \ uz \in L \equiv vz \in L]$$

*Niech alfabet będzie alfabetem binarnym* $(\Sigma = (0, 1)$, *a język* $L$ *językiem binarnym bez znaczących zer –* $L = \{0, 1, 10, 11, 100, \dots\}$ [2]. *Wtedy relacja* $R_L$ *tworzy następujące klasy abstrakcji:*

1. $A_\epsilon = \{\epsilon\}$ *– klasa zawierająca tylko słowo puste* $(\epsilon)$

[1] relacja jest nad zbiorem wszystkich słów z alfabetu, a nie nad językiem dlatego przy wyznaczaniu klas abstrakcji należy zbadać również elementy nie należące do języka

[2] słowo puste nie należy do języka

2. $A_0 = \{0\}$ – *klasa zawierająca tylko* 0

   - 0 *jest w relacji z samym sobą*
   - *nie jest w relacji z żadnym innym słowem z poza języka ponieważ:*

     *Dowód.* Niech $z = \epsilon$ wówczas $0z = 0\epsilon = 0 \in L$ oraz $uz = u\epsilon = u \notin L$. Zatem nie może być w relacji z żadnym słowem z poza języka □

   - *nie jest w relacji z żadnym słowem z języka bo:*

     *Dowód.* Niech $z = 1$ wówczas $0z = 01 \notin L$ oraz $uz = u1 = 1\dots1 \in L$ □

3. $A_{10} = L - \{0\}$ – *klasa zawierająca wszystkie słowa z języka poza* 0

   - *Każdy element jest w relacji z elementem z klasy*

     *Dowód.* Niech $u, v \in A_{10}$ wówczas $u = 1\dots$ i $v = 1\dots$. Dla $z \in \Sigma^\star$ $uz = 1\dots$ i $vz = 1\dots$ stąd $uz \in L$ i $vz \in L$ □

   - *Każdy element nie jest w relacji z elementem nie należącym do* $A_{10}$

     *Dowód.* Niech $u \in A_{10}$ i $v \notin A_{10}$ wówczas $u = 1\dots$
     - jeśli $v \neq \epsilon$ to znaczy $v = 0\dots$, wówczas dla $z = 1$ $uz \in L \wedge vz \notin L$
     - jeśli $v = \epsilon$ to dla $z = \epsilon$ $uz \in L \wedge vz \notin L$ [3]

     □

4. $A_{01} = \Sigma^\star - (L \cup \epsilon) = \{$*słowa z wiodącymi nieznaczącymi zerami*$\}$

*W przypadku alfabetu złożonego z większej liczby znaków dla tej relacji $R_L$, klasy abstrakcji byłyby identyczne.*

**Przykład 6.** *L = zbiór słów takich że kolejne trójki liczb składają się z identycznych liter* $= \{\epsilon, 000, 111, 000111, 000000, \dots\}$
$L \subset \{0,1\}^\star$
*Klasy abstrakcji relacji indukowanej przez język L*

1. $A_L = \{L\}$ – *wszystkie słowa z języka*
2. $A_0 = \{u0 : u \in L\}$ – *słowa z języka z dodatkowym* 0 *na końcu*
3. $A_1 = \{u1 : u \in L\}$ – *słowa z języka z dodatkowym* 1 *na końcu*
4. $A_{00} = \{u00 : u \in L\}$ – *słowa z języka z dodatkowym* 00 *na końcu*
5. $A_{11} = \{u11 : u \in L\}$ – *słowa z języka z dodatkowym* 11 *na końcu*
6. $A_\sim$ – *wszystkie pozostałe słowa*

**Przykład 7.** *L = zbiór słów które mają tyle samo zer i jedynek* $= \{\epsilon, 01, 10, 0011, 1010, \dots\}$
$L \subset \{0,1\}^\star$
*Klasy abstrakcji relacji indukowanej przez język* $L$[4]

1. $A_0 = L$
2. $A_1 = \{0, \dots\}$
3. $A_-1 = \{1, \dots\}$
4. $A_2 = \{11, \dots\}$

   $\vdots$

**Zadanie 2.** *Podaj klasy abstrakcji dla relacji indukowanej przez język palindromów nad alfabetem binarnym*

[3] Można skorzystać z tego że już udowodniliśmy że $\epsilon$ jest w innej klasie abstrakcji
[4] indeks dolny przy klasie abstrakcji to różnica pomiędzy liczą zer i jedynek

# 2 Grafy

**Definicja 11.** Grafem nazywamy parę $G = (V, E)$ gdzie $V$ to zbiór wierzchołków $E \subset V \times V$ to zbiór krawędzi.

**Definicja 12.** Drzewo to graf spójny graf acykliczny o następujących własnościach:

1. Jednowierzchołkowy graf $G = (\{v\}, \emptyset)$ nazywamy korzeniem drzewa

2. Jeśli $T_1 = (v_1, E_1),\ T_2 = (v_2, E_2),\ \ldots,\ T_k = (v_k, E_k)$ są drzewami o korzeniach $v_{01}, v_{02}, \ldots, v_{0k}$ to

$$T = \Bigg(\underbrace{\{v_0\} \cup \bigcup_{i=1}^{k} V_i}_{\text{wierzchołki}}\ ,\ \underbrace{\bigcup_{i=0}^{k} \{v_0, v_{0i}\} \cup \bigcup_{i=0}^{k} E_i}_{\text{krawędzie}}\Bigg)$$

3. Dowolną konstrukcję otrzymaną przez zastosowanie reguł 1 i 2

**Definicja 13.** Jeśli wysokościami drzew $T_1 = (V_1, E_1),\ T_2 = (V_2, E_2),\ \ldots,\ T_k = (V_k, E_k)$ są $h_1, h_2, \ldots, h_k$ to wysokość drzewa $T$ wynosi $h = max\{h_1, h_2, \ldots, h_k\}$

**Definicja 14.** K-drzewo to drzewo którego dowolny wierzchołek ma k następników.

**Definicja 15** (Zasada indukcji matematycznej)**.** Niech $W$ będzie pewną własnością liczb naturalnych taką że:

1. $W(0)$ – własność $W$ zachodzi dla 0

2. $(\forall k = 0, 1, \ldots)\quad W(k) \Rightarrow W(k+1)$

Wówczas $\forall n \in \mathbb{N}\quad W(n)$ –własność $W$ zachodzi dla n

**Lemat 1.** *Dowolne k-drzewo o wysokości h ma nie więcej niż $k^h$ liści*

*Dowód.* (*indukcyjny*)

1. dla drzewa jednowierzchołkowego liczba liści wynosi 1, a wysokość 0

2. niech $T_1, T_2, \ldots, T_l$ – k-drzewa o wysokościach $h_1, h_2, \ldots, h_l$ Niech $T$ – drzewo zbudowane z $T_1, T_2, \ldots, T_l$ według reguły z definicji drzewa. Wysokość $T$ jest równa $1 + max\{h_1, h_2, \ldots, h_l\}$.
   Zakładam, że liczby liści w drzewach $T_1, \ldots, T_l$ są nie większe niż $k^{h_1}, k^{h_2}, \ldots, k^{h_l}$. Liczba liści w drzewie $T$ jest nie większa niż

   $$k^{h_1} + k^{h_2} + \cdots + k^{h_l} \leqslant k \cdot max\{k^{h_1}, k^{h_2}, \ldots, k^{h_l}\} = k \cdot k^{max\{h_1, h_2, \ldots, h_l\}} = k^{1+max\{h_1, h_2, \ldots, h_l\}} = k^h$$

3. Na mocy spełnienia punktu 1 i 2 zasady indukcji matematycznej wnioskujemy iż lemat jest prawdziwy.

□