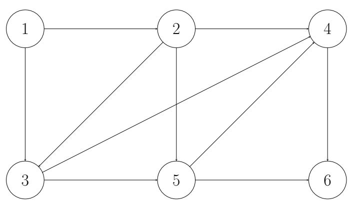
# Graphes

BUT informatique, Semestre 2



# Table des matières





IUT d'Orsay
Département d'informatique

# 1 Préliminaires sur les relations

On rappelle la définition de relation vue en mathématiques discrètes.

**Définition.** — *Une* **relation binaire** $\mathcal{R}$ *de* $E$ *dans* $F$ *est un triplet* $(E, F, G_{\mathcal{R}})$ *où* $G_{\mathcal{R}}$ *est une partie de* $E \times F$.
— $E$ *s'appelle l'***ensemble de départ** *de* $\mathcal{R}$, $F$ *l'***ensemble d'arrivée** *de* $\mathcal{R}$ *et* $G_{\mathcal{R}}$ *le* **graphe** *de* $\mathcal{R}$. $(x, y) \in G_{\mathcal{R}}$ *est noté* $x\mathcal{R}y$, *on dit que* $x$ **est en relation** *avec* $y$.

Ici, on ne considère que des relations binaires sur $E$, c'est-à-dire des relations de $E$ dans $E$.

**Définition.** *Une relation binaire* $\mathcal{R}$ *sur* $E$ *sera dite :*
— **réflexive** *si* $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$.
— **symétrique** *si* $\forall x, y \in E, x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$.
— **transitive** *si* $\forall x, y, z \in E, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$.

**Définition.** *Une relation d'équivalence* $\mathcal{R}$ *sur un ensemble* $E$ *est une relation binaire sur* $E$ *réflexive, symétrique et transitive.*

*Étant donné* $x \in E$, *l'ensemble*

$$\overline{x} = \{y \in E \mid x\mathcal{R}y\}$$

*s'appelle classe d'équivalence de* $x$ *modulo* $\mathcal{R}$. *On note* $E/\mathcal{R}$ *l'ensemble des classes d'équivalence de* $E$ *modulo* $\mathcal{R}$. *Cet ensemble est appelé ensemble quotient.*

**Exemple** :

**Proposition.** *Soit* $\mathcal{R}$ *une relation d'équivalence sur un ensemble* $E$.

1. *L'ensemble des classes d'équivalence modulo* $\mathcal{R}$ *forme une partition de* $E$.
2. *Réciproquement, si* $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ *est une partition de* $E$, *on définit une relation d'équivalence sur* $E$ *par*

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (\exists i \in \{1, \ldots, n\} \text{ tel que } x \in E_i \text{ et } y \in E_i)$$

Preuve :

# 2 Généralités sur les graphes

## 2.1 Graphes orientés

### Définitions

**Définition.** — *Un* **graphe orienté** $G = (S, A)$ *est la donnée d'un couple d'ensembles vérifiant* $A \subset S^2$.

- *Les éléments de* $S$ *sont appelés* **sommets** *du graphe, ceux de* $A$ *sont appelés les* **arcs** *du graphe.*
- *Étant donné* $(x, y)$ *un arc du graphe aussi noté* $x \to y$
  - $x$ *et* $y$ *sont appelés les* **extrémités** *de l'arc* $x \to y$.
  - $x$ *est appelé l'***origine** *de l'arc* $x \to y$
  - $y$ *est appelé l'***extrémité (finale)** *de l'arc* $x \to y$
- *Une* **boucle** *est un arc dont l'extrémité et l'origine coïncident.*

— *Si $x \to y$ est un arc du graphe, on dit que $y$ est un* **successeur** *de $x$ et que $x$ est un* **prédécesseur** *ou* **antécédent** *de $y$.*

*L'ensemble des prédécesseurs d'un sommet $y$ est noté*

$$G_{-1}(y) = \{z \in S \mid (z, y) \in A\}$$

*L'ensemble des successeurs d'un sommet $x$ est noté*

$$G(x) = \{z \in S \mid (x, z) \in A\}$$

— *Un graphe est dit* **fini** *si l'ensemble de ses sommets est fini*

**Remarque.** *Étant donné un graphe $G = (S, A)$, il y a par définition au plus un arc d'origine $x$ et d'extrémité $y$.*

**Représentations**

— Représentation sagittale : il s'agit de représenter graphiquement les arcs par des flèches reliant les sommets

**Exemple** :

— Le dictionnaire : il consiste en la donnée de l'ensemble des sommets du graphe et de l'ensemble des successeurs de chaque sommet.

**Exemple** :

— On peut décrire un graphe en donnant des propriétés caractérisant l'ensemble des arcs ou des sommets.

**Exemple** :

— Matrice d'adjacence

**Définition.** *Soit* $G = (S, A)$ *un graphe orienté dont les sommets sont supposés être numérotés de 1 à* $n$*. On appelle* **matrice d'adjacence** *de* $G$ *la matrice à* $n$ *lignes et* $n$ *colonnes* $(m_{i,j})_{i,j}$ *définie par :*

$$\forall (i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2, \quad m_{i,j} = \begin{cases} 1 & si\ (i,j)\ est\ un\ arc\ de\ G \\ 0 & sinon \end{cases}$$

**Exemple** :

— Matrice d'incidence

**Définition.** *Soit* $G = (S, A)$ *un graphe orienté* <u>*sans boucle*</u> *possédant* $n$ *sommets numérotés de* 1 *à* $n$ *et* $m$ *arcs numérotés de 1 à* $m$*. On appelle* **matrice d'incidence** *de* $G$ *la matrice à* $n$ *lignes et* $m$ *colonnes* $(q_{i,a})$ *telle que*

$$\forall (i,a) \in \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,m\}, \quad q_{i,a} = \begin{cases} 1 & si\ i\ est\ l'origine\ de\ a \\ -1 & si\ i\ est\ l'extrémité\ finale\ de\ a \\ 0 & sinon \end{cases}$$

**Exemple** :

— Tableau d'adjacence

**Définition.** *Soit* $G$ *un graphe orienté dont les sommets sont supposés être numérotés de* 1 *à* $n$*. Le* **tableau des listes d'adjacence** *de* $G$ *est un tableau* $T$ *dont les éléments sont des pointeurs :* $T(i)$ *est la tête de la liste des successeurs du sommet* $i$

**Exemple** :

**Remarque.** — *Ces représentations sont plus ou moins appropriées pour une utilisation machine, selon la taille des graphes.*

— *Les représentations matricielles sont couteuses en mémoire : il y a $n^2$ ou $n \times m$ données à stocker alors que seules $2m$ sont intéressantes.*

— *Le tableau des listes d'adjacence est peu couteux en mémoire mais peut être plus couteux en temps : pour savoir s'il y a un arc du sommet $i$ au sommet $j$, on doit parcourir la liste des successeurs de $i$ jusqu'à ce qu'on trouve $j$ alors que dans la matrice d'adjacence il suffit de regarder le coefficient $(i, j)$. De même, si on désire trouver tous les prédécesseurs du sommet $j$, il suffit de regarder la colonne $j$ de la matrice d'adjacence, avec le tableau des listes d'adjacence, il faut parcourir toutes les chaines.*

— *Dans le cas où on a besoin des prédécesseurs, on pourra utiliser un double chainage.*

— *Deux représentations sagittales en apparence différentes peuvent représenter le même graphe.*

**Exemple** *:*

— *Les propriétés d'un graphe ne dépendent pas de la manière dont on a numéroté les sommets.*

**Exemple** *:*

## 2.2 Graphes non orientés

**Définition.** — *Un* **graphe non orienté** $G = (S, A)$ *est la donnée d'un couple d'ensembles tels que les éléments de* $A$ *soient des parties à un ou deux éléments de* $S$.

- *Les éléments de* $S$ *sont appelés les* **sommets** *du graphe, les éléments de* $A$ *sont appelés les arêtes du graphe.*
- *Le ou les sommets d'une arête sont appelés les* **extrémités** *de cette arête.*
- *Les arêtes qui n'ont qu'une extrémité sont appelées les* **boucles**
- *Si* $\{x, y\}$ *est une arête de* $G$*, on dit que* $x$ *et* $y$ *sont* **voisins**.

**Représentation des graphes non orientés**

- Représentation sagittale : les arêtes sont représentées par des traits à la place des flèches dans le cas des graphes orientés.
- Dictionnaire : on donne pour chaque sommet l'ensemble de ses voisins au lieu de donner ses successeurs comme dans le cas des graphes orientés.
- Matrice d'adjacence : si $\{i, j\}$ est une arête alors $m_{i,j} = m_{j,i} = 1$. La matrice est symétrique.
- Matrice d'incidence : toujours pour un graphe sans boucle, comme il n'y a plus d'origine et d'extrémité finale, on prend $q_{i,a} = 1$ si $i$ est une extrémité de $a$.
- Tableau des listes d'adjacence : la liste chainée n'est plus composée des successeurs de $i$ mais des voisins de $i$.

**Définition.** *On appelle* **graphe non orienté associé** *au graphe orienté* $G = (S, A)$ *le graphe* $G' = (S, A')$ *qui a le même ensemble de sommets et dont l'ensemble des arêtes est ainsi défini :*

$$\{x, y\} \in A' \Leftrightarrow (x, y) \in A \text{ ou } (y, x) \in A$$

**Exemple** :

**Remarque.** — *Par définition, un graphe non orienté $G'$ peut posséder au plus une arête reliant deux sommets distincts $x$ et $y$ alors qu'il peut y avoir jusqu'à deux arcs d'extrémités $x$ et $y$. Ainsi les graphes :*

$$1 \rightarrow 2 \qquad 1 \leftarrow 2 \qquad 1 \rightleftarrows 2$$

*ont le même graphe non orienté associé*

$$1 - 2$$

— *Toute notion n'utilisant pas l'orientation (cf. connexité plus tard) s'appliquera aux graphes orientés en raisonnant sur les graphes non orientés associés.*

## 2.3 Graphes valués

**Définition.** *Un graphe $G = (S, A)$ (orienté ou non) est* **valué** *s'il est muni d'une application :*

$$\begin{array}{rccc} v: & A & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & v(x, y) \end{array}$$

*$v$ s'appelle* **valuation**

Dans la pratique, les valuations seront des longueurs, des coûts, des durées...

**Représentation**

— Représentation sagittale : on indique la valuation le long de l'arc/arête.
— dictionnaire/tableau des listes d'adjacence : au lieu de donner l'ensemble/liste des successeurs/voisins, on donne un couple (successeur/voisin,valuation de l'arc/arête).
— matrice d'adjacence/incidence : les 1 sont remplacés par la valuation de l'arc/arête, les -1 sont remplacés par - la valuation de l'arc. Comme la valuation peut être nulle, pour éviter les confusions, on remplace les 0 par des $-\infty$.

## 2.4 Sous-Graphes

**Définition.** — *On appelle* **sous-graphe** *d'un graphe $G = (S, A)$ (orienté ou non) tout graphe $G' = (S', A')$ tel que $S' \subset S$ et $A' \subset A$.*
— *On dit que $G'$ est un* **sous-graphe induit** *de $G$ si $A'$ est formé de tous les arcs (ou arêtes) de $G$ ayant deux extrémités dans $S'$ c'est-à-dire $A' = S'^2 \cap A$.*
— *$G'$ est un* **sous-graphe couvrant** *si $S = S'$.*

**Exemple** :

## 2.5 Degrés, chemins, chaines, connexité et forte connexité

### 2.5.1 Degrés

**Définition.**
- *Un sommet $x$ d'un graphe $G = (S, A)$ est* **incident** *à un arc (ou une arête) $a$ si $x$ est une extrémité de $a$. On dit également que $a$ est incident(e) à $x$.*
- *Le* **degré** *$d(x)$ d'un sommet de $G$ est le nombre d'arcs (ou d'arêtes) incidents à $x$, en comptant deux fois la boucle d'extrémité $x$ si elle existe.*
- *Si le graphe $G$ est orienté, on appelle* **degré entrant**, *noté $d_-(x)$ le nombre d'arcs dont l'extrémité finale est $x$, c'est-à-dire le nombre de prédécesseurs de $x$ : $d_-(x) = |G_{-1}(x)|$. On appelle* **degré sortant** *de $x$, noté $d_+(x)$, le nombre d'arcs dont l'origine est $x$, c'est-à-dire le nombre de successeurs de $x$ : $d_+(x) = |G(x)|$. Le degré d'un sommet est alors la somme du degré sortant et du degré entrant.*

**Exemple** :

### 2.5.2 Chemins et chaines

**Définition.** *Un* **chemin** *$C$ d'un graphe orienté $G = (S, A)$ est une suite $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ de sommets de $G$ dans laquelle deux sommets consécutifs quelconques $x_i$ et $x_{i+1}$ sont respectivement l'origine et l'extrémité d'un arc de $G$. On dit que le chemin $C$ est d'***origine** *$x_0$ et d'***extrémité** *$x_n$. Il comporte $n + 1$ sommets et $n$ arcs mis "bout à bout". On dit que $n$ est la* **longueur** *du chemin $C$.*

**Remarque.** *Un chemin peut passer plusieurs fois par le même arc ou le même sommet. Il peut aussi être de longueur 0 et ne comporter qu'un seul sommet.*

**Exemple** :

**Définition.** — *Un chemin sera dit* **simple** *si tous ses arcs sont distincts,* **élémentaire** *si tous ses sommets sont distincts,* **eulérien** *s'il passe une et une seule fois par chaque arc du graphe,* **hamiltonien** *s'il passe une et une seule fois par chaque sommet du graphe.*
— *Un* **circuit** *est un chemin dont l'origine et l'extrémité sont confondues. En particulier une boucle est un circuit de longueur 1.*

**Exemple** :

**Définition.** — *Une* **chaine** *$C$ d'un graphe non orienté $G = (S, A)$ est une suite $(x_0, \ldots, x_n)$ de sommets de $G$ dans laquelle deux sommets consécutifs quelconques $x_i$ et $x_{i+1}$ sont les extrémités d'une arête de $G$.*
— *$x_0$ et $x_n$ sont appelés les* **extrémités** *de la chaine $C$, la chaine $C$ comporte $n + 1$ sommets et $n$ arêtes, on dit qu'elle est de* **longueur** *$n$.*
— *Une chaine dont les extrémités coïncident s'appelle un* **cycle**.
— *Les notions de chaine* **simple**, **élémentaire**, **eulérienne** *et* **hamiltonienne** *s'adaptent directement de la définition pour les chemins*

Dans le tableau suivant, on trouve la correspondance de vocabulaire pour les graphes orientés et non orientés :

| **Graphe orienté** | **Graphe non orienté** |
|---|---|
| arc | arête |
| chemin | chaine |
| circuit | cycle |

### 2.5.3 Connexité, forte connexité

**Proposition-Définition.** *Étant donné $G = (S, A)$ un graphe non orienté, la relation $\mathcal{R}$ définie sur l'ensemble des sommets $S$ par*

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow il\ existe\ une\ chaine\ de\ x\ à\ y$$

*est une relation d'équivalence.*

*Ses classes d'équivalence sont appelées les* **composantes connexes** *du graphe $G$. Les composantes connexes d'un graphe non orienté $G$ sont les ensembles maximaux $C$ de sommets de $G$ tels que deux sommets puissent toujours être reliés par une chaine.*

<u>Preuve</u> :

**Définition.** *Les* **composantes connexes** *d'un graphe orienté sont les composantes connexes du graphe non orienté associé.*

**Exemple** :

**Définition.** *On dit qu'un graphe (orienté ou non) est* **connexe** *s'il n'a qu'une composante connexe.*

**Proposition-Définition.** *Étant donné un graphe orienté $G = (S, A)$, la relation $\mathcal{R}'$ définie sur l'ensemble $S$ des sommets du graphe par*

$$x\mathcal{R}'y \Leftrightarrow Il\ existe\ un\ chemin\ de\ x\ à\ y\ et\ un\ chemin\ de\ y\ à\ x$$

*est une relation d'équivalence.*

*Ses classes d'équivalence sont appelées les* **composantes fortement connexes** *de $G$. Une composante fortement connexe d'un graphe orienté est un sous-ensemble maximal de sommets tel que deux sommets $x$ et $y$ soient reliés par un chemin allant de $x$ à $y$ et un chemin de $y$ à $x$.*

<u>Preuve</u> :

**Définition.** *Un graphe orienté est* **fortement connexe** *s'il n'a qu'une composante fortement connexe.*

**Proposition.** *Tout graphe fortement connexe est connexe*

Preuve :

**Proposition.** *Un graphe orienté $G = (S, A)$ est fortement connexe si et seulement si quels que soient les deux sommets distincts $x$ et $y$, il existe un circuit passant par $x$ et $y$.*

Preuve :

**Corollaire.** *Un graphe orienté $G = (S, A)$ fini est fortement connexe si et seulement si il existe un circuit qui passe par tous les sommets du graphe.*

Preuve :

**Exemple** :

# 3 Parcours de graphe

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté (resp. non orienté).

## 3.1 Parcours en profondeur

Le parcours en profondeur consiste à choisir un sommet $s$ de départ, à suivre un chemin (resp. une chaine) issu de $s$ aussi loin que possible et en fin de chemin à revenir au dernier choix fait et prendre une autre direction.

On parcourt ainsi tout le graphe à partir de sommets non visités, en suivant des chemins de sommets non visités en $O(n + m)$ opérations où $n$ est le nombre de sommets et $m$ est le nombre d'arcs (resp. arêtes).

**Exemple** :

## 3.2 Parcours en largeur

Le parcours en largeur consiste à partir d'un sommet $s$ à visiter tous ses successeurs (resp. voisins) avant de visiter les successeurs (resp. voisins) des successeurs (resp. voisins) de $s$.

On parcourt ainsi tout le graphe en utilisant le parcours en largeur à partir de sommets non visités et en ne visitant que ses successeurs (voisins) non visités en $O(n + m)$ opérations où $n$ est le nombre de sommets et $m$ le nombre d'arcs (resp.arêtes) de $G$.

**Exemple** :

## 3.3 Applications

### 3.3.1 Composantes connexes

**Proposition.** *Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté. Soit $s$ un sommet de $G$. Alors $x$ un sommet de $G$ est dans la composante connexe de $s$ si et seulement si on peut atteindre $x$ en parcourant le graphe à partir de $s$.*

Pour déterminer les composantes connexes d'un graphe, on parcourt tout le graphe en marquant les sommets du numéro de leur composante connexe. On change de numéro à chaque fois qu'on doit choisir un nouveau sommet.

**Exemple** :

### 3.3.2 Composantes fortement connexes

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté.

**Définition.** — *On appelle* **fermeture transitive directe** *d'un sommet $s$ et on note $\overline{G_+}(s)$ l'ensemble des sommets que l'on peut atteindre avec un chemin issu de $s$. On dira aussi que c'est l'ensemble des descendants de $s$.*
— *On appelle* **fermeture transitive inverse** *d'un sommet $s$ et on note $\overline{G_-}(s)$ l'ensemble des sommets $x$ tels qu'il existe un chemin de $x$ à $s$. On dira aussi que c'est l'ensemble des ascendants de $s$.*

**Remarque.** — *En prenant un chemin de longueur 0 issu de $s$, $s \in \overline{G_+}(s) \cap \overline{G_-}(s)$.*
— *On peut déterminer $\overline{G_+}(s)$ en parcourant le graphe à partir de $s$.*
— *On peut déterminer $\overline{G_-}(s)$ en parcourant à partir de $s$ le graphe obtenu en changeant le sens de tous les arcs de $G$.*

**Exemple** :

**Proposition.** *La composante fortement connexe d'un sommet $s$ est égale à $\overline{G_+}(s) \cap \overline{G_-}(s)$*

Preuve :

**Définition.** *On appelle* **graphe réduit** *de $G$ le graphe $G_r = (\widetilde{S}, \widetilde{A})$ défini par :*
— *$\widetilde{S}$ est l'ensemble des composantes fortement connexes de $G$.*
— *Étant données $C_i$ et $C_j$ deux composantes fortement connexes distinctes de $G$,*
*$(C_i, C_j) \in \widetilde{A} \Longleftrightarrow (\exists s \in C_i, \exists s' \in C_j \text{ tels que } (s, s') \in A)$.*

**Exemple** :

**Proposition.** *Soient* $G = (S, A)$ *un graphe orienté et* $G_r = (\widetilde{S}, \widetilde{A})$ *son graphe réduit. Si* $(\overline{s}_1, \ldots, \overline{s}_n)$ *est un chemin de* $G_r$ *et* $s_1 \in \overline{s}_1$ *et* $s_n \in \overline{s}_n$ *alors il existe un chemin de* $s_1$ *à* $s_n$ *dans* $G$*.*

Preuve :

**Corollaire.** *Soient* $G = (S, A)$ *un graphe orienté et* $G_r = (\widetilde{S}, \widetilde{A})$ *son graphe réduit. Si en ajoutant les arcs* $(\overline{s}_1, \overline{s}'_1)$, $(\overline{s}_2, \overline{s}'_2)$,...,$(\overline{s}_k, \overline{s}'_k)$ *au graphe réduit on le rend fortement connexe alors* $\forall s_i \in \overline{s_i}$, $s'_i \in \overline{s}'_i$, *on rend le graphe* $G$ *fortement connexe en ajoutant les arcs* $(s_1, s'_1)$, $(s_2, s'_2)$,..., $(s_k, s'_k)$.

**Exemple** :

### 3.3.3 Plus court chemin d'un graphe non valué

La distance pour aller d'un sommet à un autre dans un graphe non valué est le plus petit nombre d'arcs qu'il faut parcourir pour aller d'un sommet à un autre. Un plus court chemin entre deux sommets $x$ et $y$ dans un graphe non valué est un chemin de $x$ à $y$ de longueur la distance de $x$ à $y$.

Soient $G = (S, A)$ un graphe et $x_0$ un sommet de ce graphe. On note $S_i$ l'ensemble des sommets à distance $i$ du sommet $x_0$. On peut définir de manière récursive les ensembles $S_i$ de la façon suivante :

— $S_0 = \{x_0\}$
— Pour tout $i \geq 0$, $S_{i+1}$ est l'ensemble des successeurs des sommets de $S_i$ n'appartenant pas à $\bigcup_{k=1}^{i} S_k$

Le parcours en largeur permet de déterminer le plus petit nombre d'arêtes à parcourir pour aller d'un sommet à un autre.

**Exemple** :

## 4 Problèmes de plus court chemin sur un graphe valué

### 4.1 Description du problème

**Définition.** *Soit $G = (S, A, v)$ un graphe valué.*

— *La valuation d'un chemin est la somme des valuations de ses arcs.*

— *Étant donnés deux sommets $x$ et $y$ de $G$, on appelle* **distance** *de $x$ à $y$ et on note $d(x, y)$ le minimum des valuations des chemins de $x$ à $y$. On appelle* **plus court chemin** *de $x$ à $y$ tout chemin $\delta$ de $x$ à $y$ dont la valuation $v(\delta) = d(x, y)$.*

Pour deux sommets $x$ et $y$ d'un graphe valué, il se présente trois cas :
— Il n'y a pas de chemin de $x$ à $y$.
— Il y a un ou plusieurs plus courts chemins de $x$ à $y$.
— Il y a des chemins de $x$ à $y$ mais pas de plus court chemin

**Exemple** :

**Proposition.** *Tout sous-chemin d'un plus court chemin est un plus court chemin*

Preuve :

**Graphe sans circuit**
Si le graphe $G$ est fini et ne comporte pas de circuit, il n'existe qu'un nombre fini de chemins d'un point à un autre. Sous ces hypothèses, s'il y a un chemin de $x$ à $y$, il y a au moins un plus court chemin.

**Graphe avec circuit**

**Définition.** *Un circuit absorbant est un circuit de valuation strictement négative.*

**Proposition.** *Étant donnés un graphe fini orienté valué n'ayant pas de circuit absorbant et deux sommets $x$ et $y$ du graphe, s'il y a un chemin de $x$ à $y$, la distance de $x$ à $y$ est définie et il y a au moins un plus court chemin de $x$ à $y$.*

Preuve :

**Différentes formes de problèmes de plus court chemin**
En général les problèmes se présentent sous l'une des trois formes suivantes :

1. Étant donnés deux sommets $x$ et $y$, trouver un plus court chemin de $x$ à $y$.
2. Étant donné un sommet $x$, trouver pour chaque sommet $y$ un plus court chemin de $x$ à $y$
3. Pour chaque couple de sommets $(x, y)$, trouver un plus court chemin de $x$ à $y$.

Dans la pratique, on connait des algorithmes pour résoudre 2. Pour un problème 1, le plus simple est d'utiliser un algorithme pour résoudre 2 et on s'arrête quand on tombe sur $y$. Pour résoudre 3, on peut appliquer un algorithme de résolution de 2 à tous les sommets du graphe. Il existe également des algorithmes spécifiques comme Floyd et Dantzig.

## 4.2 Algorithme de Ford

Soit $G = (S, A, v)$ un graphe orienté valué sans circuit absorbant. On cherche à calculer la distance minimale d'un sommet $s_0$ à n'importe quel sommet $s$ du graphe.

**Principe**
On procède par approximations successives. À un stade donné de l'algorithme, on dispose d'une distance à $s_0$ provisoire pour chaque sommet $s$ : $d(s)$. Alors pour chaque sommet $s$, on compare la distance actuelle de $s_0$ à $s$ ($d(s)$) à celle obtenue en passant par $x$ où $x$ est un prédécesseur de $s$ ($d(x) + v(x, s)$). Si la distance en passant par $x$ est strictement plus petite, elle devient la nouvelle distance $d(s)$. On répète cette opération jusqu'à ce que les distances soient stabilisées.

**L'algorithme**
L'algorithme suivant à l'avantage de permettre de détecter les circuits absorbants.

$d(s_0) = 0$
$NP(s_0) = 0$
$precedent(s_0) = Null$
Pour tout $s \neq s_0$
    $d(s) = +\infty$
    $NP(s) = -1$
    $precedent(s) = Null$
fin pour.

Pour $i = 1$ à $|S| - 1$
    stable=vrai
    Pour chaque sommet $x$ tel que $NP(x) = i - 1$
        Pour chaque arc $(x, s)$
            si $d(s) > d(x) + v(x, s)$ alors
                $d(s) = d(x) + v(x, s)$
                $precedent(s) = x$
                $NP(s) = i$
                stable =faux
            fin si
        fin pour
    fin pour
    Si stable=vrai alors sortir de la boucle fin si
fin pour

Pour chaque arc $(x, s)$
    si $d(s) > d(x) + v(x, s)$ alors rendre "il y a un circuit absorbant" fin si
fin pour

**Exemple** :

## 4.3 Algorithme de Dijkstra

**Problème**
Étant donnés un graphe orienté valué $G = (S, A, v)$ à valuation positive et un sommet $s_0 \in S$, trouver pour chaque sommet $s$ la distance minimale et un plus court chemin de $s_0$ à $s$.

**Principe**
On construit par étapes successives un ensemble $M$ de sommets $s$ pour lesquels :

- la distance minimale de $s_0$ à $s$ est connue
- on a repéré un plus court chemin de $s_0$ à $s$ dont les sommets sont dans $M$

Au départ, $M = \{s_0\}$ et on adjoint un nouveau sommet $s$ à $M$ à chaque étape jusqu'à ce que $S = M$ ou pour tout sommet qui n'est pas dans $M$ il n'y a pas de chemin de $s_0$ à ce sommet.

**Vocabulaire**

- $M$-**chemin** : pour tout $y \in S$, un $M$-chemin de $s_0$ à $y$ $(s_0, s_1, \ldots, s_k, y)$ est un chemin tel que pour tout $i$, $s_i \in M$ et $(s_0, s_1, \ldots, s_k)$ est un plus court chemin de $s_0$ à $s_k$.
- **Père de** $y$ : c'est un prédécesseur du sommet $y$ dans un $M$-chemin.
- $M$-**distance** : la $M$-distance de $s_0$ à $y$ sera la valuation minimale de tous les $M$-chemins de $s_0$ à $y$, on la note $DM(y)$. S'il n'y a pas de $M$-chemin de $s_0$ à $y$, $DM(y) = +\infty$.

**Exemple** :

**Algorithme**
Les sommets de l'ensemble $M$ seront dits **marqués**.

- $DM$ : tableau des $M$-distances de $s_0$ à tous les sommets ;
- $Mdist$ : minimum des $M$-distances de $s_0$ à tous les sommets non marqués ;
- $Pere$ : tableau des prédécesseurs des sommets dans le $M$-chemin minimal que l'on a repéré.

$$\left.\begin{array}{l} DM(s_0) \leftarrow 0, Mdist \leftarrow 0, M \leftarrow Null \\ Pour\ tout\ s \neq s_0\ sommet\ faire \\ \qquad DM(s) \leftarrow +\infty \\ \qquad Pere(s) \leftarrow Null \\ fin\ pour \end{array}\right\} \textbf{Initialisation}$$

Tant que $Mdist \neq +\infty$ faire

Chercher $s$ sommet non marqué tel que $DM(s) = Mdist$
$M \leftarrow add(M, s)$
Pour tout successeur $y$ non marqué de $s$ faire
si $(DM(s) + v(s, y)) < DM(y)$ alors
$DM(y) \leftarrow (DM(s) + v(s, y))$
$Pere(y) \leftarrow s$
fin si
fin pour
$Mdist \leftarrow \min\{DM(y) \mid y\ non\ marqué\}$

fin tant que.

**Exemple** :

Preuve :

# 5 Problèmes d'ordonnancement

## 5.1 Description du problème

Un projet constitué de tâches multiples imbriquées dans le temps et dépendantes les unes des autres nécessite une bonne coordination des moyens et matériels à mettre en oeuvre tout au long de l'exécution.

Les *méthodes d'ordonnancement* consistent à déterminer pour un tel projet un déroulement optimum dans le temps :

- le projet est découpé en un nombre de *tâches* plus ou moins grand suivant la finesse de l'analyse ;
- l'exécution de ces tâches est soumise à des *contraintes* de plusieurs types :

  1. *contraintes d'antériorité* : la tâche $I$ doit être terminée avant le début de la tâche $J$ ;
  2. *contraintes de calendrier* : la tâche $J$ ne peut commencer que $k$ jours après le début de la tâche $I$, ou $k$ jours après la fin de $I$, etc...
  3. *contraintes disjonctives* : deux tâches ne peuvent être réalisées en même temps (par exemple fabrication de deux pièces par une même machine).
  4. *contraintes cumulatives* : elles sont liées à l'évolution dans le temps des moyens en personnel ou en matériel disponibles pour le projet.

- le but d'une méthode d'ordonnancement est alors de *définir la date de début de chaque tâche (avec éventuellement certaines marges) de façon que le projet ait une durée minimale compte tenu des contraintes*.

Dans la suite nous ne considérerons que des contraintes de types 1 et 2, les autres étant plus difficiles à gérer.

Citons deux grandes méthodes d'ordonnancement qui utilisent les graphes : la méthode P.E.R.T. (Programme Evaluation and Research Task) et la méthode des Potentiels (celle que nous étudierons dans ce cours)

## 5.2 Tri topologique

### 5.2.1 Fonction ordinale d'un graphe

**Définition.** *Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté. On définit une famille de sous-ensembles $(C_k)$ de $S$ de la manière suivante :*

- *$C_1$ est l'ensemble des sommets de $G$ sans antécédent ($d_- = 0$).*
- *Pour $k > 0$, $C_{k+1}$ est l'ensemble des sommets de $G$ n'appartenant pas à $C(k) = \bigcup_{i=1}^{k} C_i$ et dont tous les antécédents sont dans $C(k)$.*

*Ces ensembles sont appelés les* **classes topologiques** *de $G$. On parle aussi de* **décomposition en niveau** *de $G$.*

**Remarque.**
- *$C_1$ peut être vide.*
- *Si $C_k$ est vide alors $\forall i \geq k$, $C_i$ vide.*
- *Le nombre de classes non vides est plus petit que $|S|$.*
- *Si $s \in C_k$ alors il a au moins un antécédent dans $C_{k-1}$.*

Dans la suite, on ne considèrera que les classes non vides.

**Définition.** *Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté. Si les classes topologiques non vides de $G$ forment une partition de $S$, on définit la* **fonction ordinale** *$f$ du graphe $G$ en associant à chaque sommet $s$ l'indice $k$ de la classe à laquelle il appartient.*

$$\begin{array}{rccll} f: & S & \to & \mathbb{N} & \\ & s & \mapsto & k & \quad \text{où } s \in C_k \end{array}$$

**Exemple** :

Lorsqu'on a déterminé la fonction ordinale d'un graphe, on peut adopter un disposition plus claire des sommets par niveau.

**Exemple** :

**Théorème.** *Un graphe orienté fini admet une fonction ordinale si et seulement si il est sans circuit.*

Preuve :

### 5.2.2 Algorithme de tri topologique

Le tri topologique est la détermination algorithmique des classes topologiques d'un graphe.
Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté.

**Principe** :

$C_1$ est l'ensemble des sommets de degré entrant nul.

$C_{k+1}$ est l'ensemble des sommets de degré entrant nul du sous-graphe induit par $S_k = S \setminus C(k)$ en utilisant les notations précédentes.

On s'arrête soit quand on ne peut pas trouver de sommet de degré 0 (il y a un circuit) soit quand il n'y a plus de sommet (les $C_k$ forment un partition de $S$).

**Exemple** :

## 5.3 Méthode des potentiels

### 5.3.1 Représentation des données par un graphe

Après un choix convenable des tâches, les contraintes de calendrier et d'antériorité peuvent se ramener à des contraintes de la forme suivante :

« la tâche $J$ débute au moins $k$ unités de temps après le début de la tâche $I$ ».

Pour une telle contrainte le nombre $k$ sera appelé *durée incompressible* séparant le début de $I$ du début de $J$ et sera noté $M(I, J)$.

Un problème d'ordonnancement sera donc décrit par :

1. la liste des tâches numérotées de 1 à $N$ et de leurs durées ; $D(I)$ désignera la durée de la tâche I ;
2. la liste des durées incompressibles $M(I, J)$ entre le début de la tâche $I$ et celui de la tâche $J$.

Ces données peuvent être représentées par un graphe orienté valué dont les sommets sont les tâches et les arcs représentent les relations d'antériorité (il y a un arc $(I, J)$ si la tâche $I$ doit être commencée avant la tâche $J$), les valuations des arcs sont les durées incompressibles

On ajoutera deux sommets si ils ne sont pas déjà définis de la façon suivante :

— Une tâche début (numérotée 0) de durée 0 telle que pour tout sommet $I$ du graphe, il existe un arc $(0, I)$ de valuation $M(0, I) = 0$.

— une tâche Fin (numérotée $N + 1$) de durée 0 tel que pour tout sommet $J$ du graphe il existe un arc de valuation $M(J, N + 1) = D(J)$.

**Remarque.** *Pour que le projet soit réalisable, un tel graphe ne peut donc pas comporter de circuit, il admet donc une fonction ordinale.*

On représentera ce graphe sous la forme d'un tableau tel que les lignes soient numérotées de 0 à $N$ et les colonnes de 1 à $N + 1$. Le coefficient $(I, J)$ du tableau vaut $M(I, J)$ si $(I, J)$ est un arc du graphe et -1 sinon.

**Exemple** :

### 5.3.2 Dates au plus tôt et dates au plus tard

On prend pour origine des temps le début du projet. On notera $d(I)$ la date du début de la tâche $I$.

**Dates au plus tôt**
Le but ici est de déterminer quand une tâche pourra commencer au plus tôt.

Puisque le graphe est sans circuit, le graphe admet une fonction ordinale, on note $C_1, C_2, \ldots, C_k$ les classes topologiques non vides du graphe.

On considère l'algorithme ci-dessous :

$\underline{d}(Début) = 0$
Pour $i$ de 2 à $k$ faire
    Pour $s$ sommet de $C_i$ faire
        $\underline{d}(s) = \max(\underline{d}(J) + M(J, s) \mid J \text{ prédécesseur de } s)$
    Fin pour
Fin pour
Retourner $\underline{d}(s)$ pour tout sommet $s$ du graphe

**Proposition-Définition.** *Cet algorithme donne un résultat pour tous les graphes représentant un problème d'ordonnancement tels que définis précédemment et pour tout sommet $s$, $\underline{d}(s)$ est la date à laquelle la tâche $s$ pourra commencer au plus tôt ; $\underline{d}(s)$ s'appelle la date de début au plus tôt de la tâche $s$.*

Preuve :

**Remarque.** — *La date de fin au plus tôt de la tâche I est* $\underline{f}(I) = \underline{d}(I) + D(I)$
— *La durée minimale du projet est* $\underline{f}(Fin)$*. Comme la durée de la tâche Fin est nulle,* $\underline{f}(Fin) = \underline{d}(Fin)$

### Date au plus tard

Le but ici est de déterminer la date de début de chaque tâche au plus tard pour que le projet ne prenne pas de retard, c'est-à-dire pour que le projet dure $\underline{d}(Fin)$

On définit une famille d'ensembles $(C'_k)_k$ de sommets de la manière suivante :

— $C'_1$ est l'ensemble des sommets du graphe sans successeur ($d_+ = 0$).

— Pour $k > 0$, $C'_{k+1}$ est l'ensemble des sommets du graphe n'appartenant pas à $C'(k) = \bigcup_{i=1}^{k} C'_i$ et dont tous les successeurs sont dans $C'(k)$.

**Remarque.** *On peut calculer les ensembles* $(C'_k)_k$ *en faisant un tri topologique sur le graphe obtenu en inversant le sens de tous les arcs du graphe modélisant le projet.*

Puisque le graphe modélisant le projet est sans circuit, chaque sommet du graphe est dans un des ensembles $(C'_k)_k$. On note $C'_1, C'_2, \ldots, C'_n$ les ensembles définis ci-dessus pour le graphe modélisant le projet.

On considère l'algorithme ci-dessous :

$\overline{d}(Fin) = \underline{d}(Fin)$
Pour $i$ de 2 à $n$ faire
    Pour $s$ sommet de $C'_i$ faire
        $\overline{d}(s) = \min(\overline{d}(J) - M(s, J) \mid J \text{ successeur de } s)$
    Fin pour

Fin pour
Retourner $\overline{d}(s)$ pour tout sommet $s$ du graphe

**Proposition-Définition.** *Cet algorithme donne un résultat pour tous les graphes représentant un problème d'ordonnancement tels que définis précédemment et pour tout sommet $s$, $\overline{d}(s)$ est la date à la quelle la tâche $s$ devra commencer au plus tard pour que le projet ne prenne pas de retard ; $\overline{d}(s)$ s'appelle la date de début au plus tard de la tâche $s$.*

Preuve :

**Remarque.** *La date de fin au plus tard de la tâche $I$ est $\overline{f}(I) = \overline{d}(I) + D(I)$.*

**Représentation** On représentera le graphe d'un problème d'ordonnancement sous la forme d'une représentation sagittale du graphe valué où les sommets sont des tableaux $2 \times 2$ contenant le nom de la tâche, sa durée, sa date début au plus tôt et sa date de début au plus tard.

| $I$ | $D(I)$ |
|---|---|
| $\underline{d}(I)$ | $\overline{d}(I)$ |

Pour plus de lisibilité, on pourra faire un tri topologique du graphe et disposer les tâches par niveau. De plus, on ne représentera que les arcs issu de Début dont l'extrémité est un sommet de la classe topologique $C_2$ et que les arcs d'extrémités Fin dont l'origine est un sommet de l'avant dernière classe topologique non vide.

**Remarque.** *Attention cependant à ne pas oublier les autres arcs d'extrémité Fin pour le calcul de la date au plus tôt de Fin et de la date au plus tard de toutes les tâches.*

**Exemple** :

### 5.3.3 Marges

**Définition.** — *La marge totale d'une tâche $I$, notée $MT(I)$, est le délai pouvant être accordé au commencement de cette tâche sans augmenter la durée totale du projet :*

$$MT(I) = \overline{d}(I) - \underline{d}(I)$$

— *La marge libre d'une tâche $I$, notée $ML(I)$ est le délai pouvant être accorder au commencement de cette tâche sans changer la date de début au plus tôt des autres tâches :*

$$ML(I) = \min(\underline{d}(J) - M(I, J) \mid J \ successeur \ de \ I) - \underline{d}(I)$$

**Exemple** :

### 5.3.4 Taches critiques et chemins critiques

**Définition.** *On appelle tâche critique une tâche dont on ne peut pas différer le début sans rallonger la durée du projet. Autrement dit, une tâche critique I vérifie*

$$\underline{d}(I) = \overline{d}(I)$$

**Remarque.** *Fin est une tâche critique*

**Définition.** — *On appelle arc critique tout arc $(I, J)$ tel que*
- *$I$ et $J$ sont des tâches critiques*
- *$\underline{d}(J) = \underline{d}(I) + M(I, J)$*

— *On appelle chemin critique tout chemin composé uniquement d'arcs critiques.*

**Théorème.** *Il existe un chemin critique de Début à Fin*

Preuve :

**Remarque.** *On vient de montrer que Début est une tâche critique.*

**Proposition.** *Pour tout chemin C de Début à Fin, on a*

$$C\ chemin\ critique \Longleftrightarrow v(C) = \underline{d}(Fin)$$

Preuve :

**Remarque.** *Les chemins critiques de Début à Fin permettent de déterminer la durée minimale du projet.*

**Exemple** :

# 6 Flot sur un réseau de transport

Un « **graphe muni d'une source et d'un puits** » est un graphe dont deux sommets $s$ et $p$ vérifient :

— $s$ est le seul sommet qui n'a pas de prédécesseur (on dit que $s$ est une **source**) ;

— $p$ est le seul sommet qui n'a pas de successeur (on dit que $p$ est un **puits**).

**Exemple** :

Dans toute la suite de cette section , on considère un graphe $G = (S, A)$ qui est un graphe muni d'une source et d'un puits

## 6.1 Flot

### 6.1.1 Définition

**Définition.** *Un* **flot** *sur un graphe muni d'une source et d'un puits* $G = (S, A)$ *est une application* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *qui à chaque arc* $(x, y)$ *associe un nombre réel* $f(x, y)$ *appelé son* **flux** *de façon à ce que, pour tout sommet* $x$ *autre que* $s$ *et* $p$*,*

$$\sum_{z \in G_{-1}(x)} f(z, x) = \sum_{y \in G(x)} f(x, y)$$

*(***loi de Kirschoff** *ou* **loi de conservation du flux***)*

La loi de Kirschoff indique que en chaque sommet autre que $s$ et $p$, le flux entrant (somme de gauche) est égal au flux sortant (somme de droite).

**Exemple** :

**Proposition-Définition.** *Si $f$ est un flot sur un graphe $G$ muni d'une source et d'un puits, on a en notant $s$ la source et $p$ le puits :*

$$\sum_{y \in G(s)} f(s, y) = \sum_{z \in G_{-1}(p)} f(z, p) \tag{1}$$

*Ce nombre est appelé* **valeur du flot** *et noté $\phi(f)$.*

Preuve :

le flot est la « quantité de flux qui passe à travers le graphe depuis $s$ jusqu'à $p$ ».

On rajoute parfois un arc fictif $p \to s$ dit **arc de retour** et on lui attribue la valeur $\phi(f)$. Avec cette convention, la loi de Kirschoff est vérifiée en tout sommet de $G$ (y compris $s$ et $p$).

**Convention**
Désormais, pour alléger l'écriture, nous attribuerons la valeur 0 à $f(x, y)$ si l'arc $x \to y$ n'existe pas.

Le flux sortant en $x$ s'écrira $\sum_{y \in S} f(x, y)$

Le flux entrant en $x$ s'écrira $\sum_{y \in S} f(y, x)$

### 6.1.2 Règle de conservation des flux

**Proposition** (Règle de conservation des flux)**.** *Si l'on ajoute au graphe l'arc fictif $p \to s$ affecté du flux $\phi(f)$, alors pour toute partie $X \subset S$ de sommets de $G$ :*

$$\sum_{x \in X} \sum_{y \in S \setminus X} f(x, y) = \sum_{x \in X} \sum_{y \in S \setminus X} f(y, x)$$

*Le flux entrant dans $X$ est égal au flux sortant de $X$. Cette propriété est appelée* **règle de conservation du flux**.

Preuve :

### 6.1.3 Graphes comportant des circuits

**Exemple** :

On ne change pas la valeur du flot si l'on augmente (ou diminue) le flux de chacun des arcs du circuit de la même quantité arbitraire.

## 6.2 Flot maximal sur un réseau de transport

### 6.2.1 Flots réalisables

**Définition.** — *Un* **réseau de transport** *est un graphe fini orienté valué $G = (S, A, C)$, à valuation positive ou nulle et muni d'une source $s$ et d'un puits $p$. Pour chaque arc $(x, y)$, la valuation $C(x, y)$ est appelée* **capacité de l'arc**.

— *Un flot $f$ défini sur un réseau de transport est* **réalisable** *si pour tout arc $(x, y)$ le flux $f(x, y)$ vérifie*

$$0 \leq f(x, y) \leq C(x, y)$$

— *Un arc $(x, y)$ est dit* **saturé** *si $f(x, y) = C(x, y)$.*

### 6.2.2 Problème du flot maximum

Soit $G$ un réseau de transport, la valeur d'un flot réalisable sur $G$ est majorée car

$$\phi(f) = \sum_{y \in S} f(s, y) \leq \sum_{y \in S} C(s, y)$$

De même

$$\phi(f) = \sum_{x \in S} f(x, p) \leq \sum_{x \in S} C(x, p)$$

La valeur d'un flot réalisable admet un maximum et il existe un flot réalisant cette valeur. Le **problème du flot maximum** consiste à trouver cette valeur maximum et un flot maximal.

**Définition.** *Un flot réalisable est* **complet** *lorsque tout chemin de la source au puits comporte au moins un arc saturé.*

**Remarque.** — *Un flot qui n'est pas complet ne peut pas être maximal*

— *Un flot complet n'est pas forcément maximal*

**Exemple** :

## 6.3 Coupes

### 6.3.1 Coupes et capacités

**Définition.** *Une* **coupe** *sur un réseau de transport $G = (S, A, C)$ est une partition $(X, S-X)$ de l'ensemble des sommets $S$ telle que $s \in X$ et $p \in S - X$. On parlera de la coupe $(X, S \setminus X)$ ou simplement de la coupe $X$.*

**Exemple** :

**Définition.** *On appelle* **capacité** *de la coupe $X$ le nombre*

$$C(X) = \sum_{x \in X} \sum_{y \in S-X} C(x,y)$$

*C'est la somme des capacités des arcs « sortants » de la coupe.*

**Exemple** :

### 6.3.2 Coupes minimales

Sur un réseau de transport, il n'y a qu'un nombre fini de coupes possibles ($2^{n-2}$ si $n$ sommets).

Il y a donc un nombre fini de valeurs pour leurs capacités et une valeur minimale pour ces capacités.

**Définition.** *On appelle* **coupe minimale** *sur un réseau de transport toute coupe dont la capacité est minimale.*

### 6.3.3 Coupes et Flots

**Théorème.** *Soit $G = (S, A, C)$ un réseau de transport. Quels que soient le flot réalisable $f$ et la coupe $X$, la valeur du flot est inférieure ou égale à la capacité de la coupe. Plus précisément, on a les relations :*

$$\phi(f) = \sum_{\substack{x \in X \\ y \in S-X}} f(x,y) - \sum_{\substack{x \in S-X \\ y \in X}} f(x,y) \leq C(X)$$

Preuve :

## 6.4 Chaines augmentantes

### 6.4.1 Construction d'un flot réalisable complet

Une façon simple de construire un flot réalisable de valeur assez importante consiste :

1. à choisir un chemin de $s$ à $p$ et à augmenter le flux de chaque arc du chemin de la même quantité de telle sorte que la capacité de chaque arc ne soit jamais dépassée mais au moins un arc du chemin devienne saturé
2. puis à recommencer sur un autre chemin en tenant compte du flot qui a déjà été mis sur les arcs utilisés lors d'une opération précédente, de manière à ce que la somme des flux ne dépasse jamais les capacités. On recommence jusqu'à obtenir un flot réalisable complet.

Le flot ainsi construit est bien un flot réalisable complet :
— la loi de Kirschoff est respectée.
— les flux sont inférieurs aux capacités.
— tout chemin de $s$ à $p$ a au moins un arc saturé.

**Définition.** *Étant donné un flot $f$ réalisable sur le réseau de transport, on appelle* **capacité résiduelle** *de l'arc $(x, y)$ la différence*

$$CR(x, y) = C(x, y) - f(x, y)$$

**Remarque.** *Un arc saturé est donc un arc de capacité résiduelle nulle.*

**Représentation pratique**
Lorsqu'on travaille « à la main », on s'efforce de représenter sur un seul graphe les différentes étapes de la construction du flot. On utilise pour chaque arc un tableau à deux colonnes :

— Dans la première colonne, on note les valeurs successives de la capacité résiduelle qui au départ est la capacité de l'arc.
— Dans la deuxième colonne, on note les valeurs successives du flux qui au départ est nul.

**Exemple** :

### 6.4.2 Chaines augmentantes

**Exemple** :

**Règles**

— Si lors du parcours de la chaine de $s$ à $p$ l'arc $x \to y$ est parcouru dans le bon sens, son flux peut être augmenté d'au plus sa capacité résiduelle.

— s'il est parcouru dans le mauvais sens, son flux peut être diminué d'au plus le flux déjà passé.

**Définition.** *Étant donné un flot réalisable $f$ sur un réseau de transport, une* **chaîne augmentante** *est une chaîne reliant la source $s$ au puits $p$ dans le graphe non orienté associé telle que, en la parcourant de $s$ vers $p$,*

— *tout arc du réseau parcouru dans le bon sens a une capacité résiduelle non nulle ;*

— *tout arc parcouru en sens inverse a un flux non nul.*

**Proposition.** *Une chaîne augmentante permet d'augmenter le flot $f$ d'une quantité au plus égale à $m = \min(cm, fm)$ où*

— *$cm$ est la plus petite capacité résiduelle sur les arcs parcourus dans le bon sens ;*

— *$fm$ est le plus petit des flux sur les arcs parcourus en sens inverse.*

*Cette augmentation de flot se fait en ajoutant $m$ au flux des arcs parcourus dans le bon sens et en retranchant $m$ à celui des arcs parcourus en sens inverse.*

**Exemple** :

**Remarque.** — *Lorsqu'on utilise au maximum les possibilités d'une chaîne augmentante, soit on sature (au moins) un arc parcouru dans le bon sens, soit on annule le flux sur un arc parcouru en sens inverse.*

— *Cette opération peut amener aussi à « dé-saturer » un arc pour augmenter le flot.*

## 6.5 Algorithme de Ford-Fulkerson

### 6.5.1 Théorème de Ford

**Théorème.** *Soit $f$ un flot réalisable sur un réseau de transport, ce flot est maximal si et seulement si il n'existe pas de chaîne augmentante de la source au puits.*

Autrement dit, toute augmentation de flot sur un réseau peut se faire au moyen d'une chaîne augmentante (qui peut être un chemin augmentant !).

Ce théorème découle du lemme suivant :

**Lemme.** *Soit $f$ un flot réalisable sur un réseau de transport de source $s$ et de puits $p$. Supposons qu'il n'existe pas de chaine augmentante de $s$ à $p$. Alors, si*

$$X = \{x \in S \mid il\ existe\ une\ chaine\ augmentante\ de\ s\ à\ x\},$$

- *$X$ est une coupe*
- *tout arc sortant de $X$ a une capacité résiduelle nulle,*
- *tout arc entrant dans $X$ a un flux nul*

Preuve :

Preuve :

**Remarque.** *On vient de montrer que si $f$ est un flot maximal et $X$ est une coupe minimale alors $\phi(f) = C(X)$. De plus, le lemme donne une méthode pour trouver une coupe minimale. Cela nous permet de vérifier si le flot qu'on a trouvé est bien maximal (et qu'on n'a pas oublié de chaine augmentante).*

**Exemple** :

### 6.5.2 Algorithme de Ford-Fulkerson

L'algorithme se déroule en deux phases :

1. Chercher un chemin augmentant.
   Si un tel chemin est trouvé, augmenter le flot de la quantité maximum autorisée sur ce chemin.
   Revenir en 1
   Sinon passer à l'étape 2
2. Chercher une chaine augmentante
   Si une telle chaine est trouvée, augmenter le flot de la quantité maximum autorisée par la chaine.
   Revenir en 2
   Sinon fin de l'algorithme

**Remarque.** — *L'étape 1 de l'algorithme permet de construire un flot réalisable complet.*
- *L'étape 1 assure qu'il n'y a plus de chemin augmentant à l'étape 2.*
- *A la fin de l'algorithme, pour vérifier que le flot est maximal on vérifie qu'il est bien égal à la capacité de la coupe $X$ décrite dans le lemme précédent.*

# A Exercices

## A.1 Relations d'équivalence

### Traités en cours

1. On définit sur $\mathbb{Z}$ la relation $\mathcal{R}$ de la façon suivante

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2 \quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x + y \ est\ pair.$$

   Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et calculer $\overline{0}$ et $\overline{1}$.

### À corriger en TD

**Exercice 1.**

Soit $f$ une application de $\mathbb{R}$ dans lui-même. Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur l'ensemble des réels par :

$$a\mathcal{R}x \iff f(a) = f(x)$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des réels.
2. Calculer la classe d'équivalence de 3 puis celle d'un réel $a$ quelconque dans le cas où l'application $f$ est définie par : $f(x) = x^2 - x$.
3. Déterminer la classe de $a$ si f est injective.

**Exercice 2.**

On considère la relation suivante sur $\mathbb{Z}$ :

$$x\mathcal{R}y \iff 3 \ divise\ x - y.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. déterminer la classe de 0, la classe de 1 et la classe de 2
3. Donner toutes les classes d'équivalence de cette relation.

**Exercice 3.**

Soit $E = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $A = \{a, b\}$, $B = \{c\}$, $C = \{d, e, h\}$ et $D = \{f, g\}$.

1. Montrer que $A$, $B$, $C$, $D$ forment une partition de $E$.
2. Donner le graphe de la relation d'équivalence dont les classes d'équivalence sont $A$, $B$, $C$, $D$.

### Exercices supplémentaires

#### Exercice 4. (*)

Montrer que la relation $\mathcal{R}$ définie sur l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ par :

$$(x, y)\mathcal{R}(x', y') \iff x + 2y = x' + 2y'$$

est une relation d'équivalence. Déterminer toutes ses classes d'équivalence.

#### Exercice 5. (***)

On considère $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{R}$ par

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \cos^2(x) + \sin^2(y) = 1$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence (on rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$).

## A.2 Généralités sur les graphes

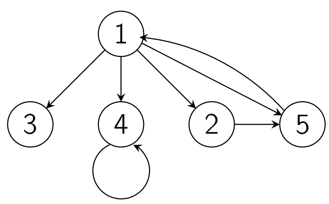
### Traités en cours

1. Soit $G = (S, A)$ un graphe tel que $S = \{1, 2, 3, 4\}$ et $A = \{(1, 2), (1, 4), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (4, 3)\}$.
   (a) Donner une représentation sagittale de $G$.
   (b) Donner son dictionnaire.
   (c) Donner sa matrice d'adjacence.
   (d) Donner sa matrice d'incidence.
   (e) Donner son tableau des listes d'adjacence.
2. Donner une représentation sagittale du graphe $G = (S, A)$ où $S = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ et

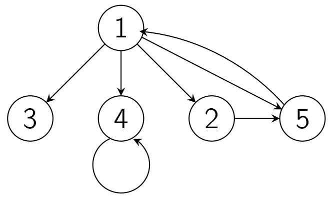
$$\forall (x, y) \in S^2, \quad (x, y) \in A \Leftrightarrow x \textit{ divise } y$$

.

3. Donner le graphe non orienté associé à

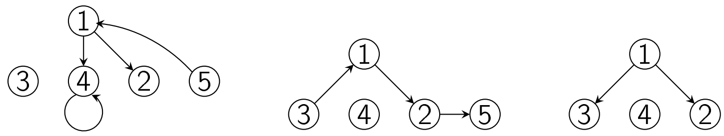



4. On considère le graphe

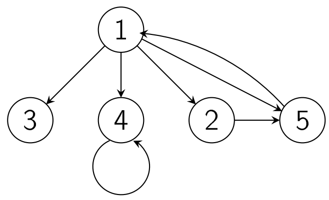



(a) Donner le sous-graphe induit de sommets $\{1, 4, 5\}$ de ce graphe.

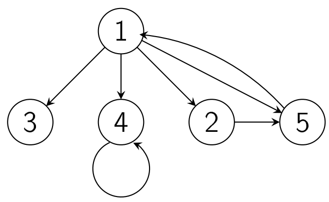
(b) Les graphes suivants sont-ils des sous-graphes de ce graphe ? Si oui, sont-ils couvrants ?




5. Donner le degré entrant, sortant et total de chacun des sommets du graphe

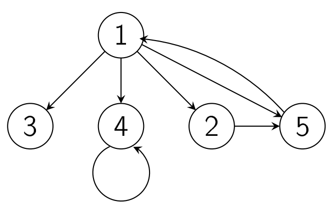



6. Parmi les n-uplets ci-dessous lesquels sont des chemins du graphe



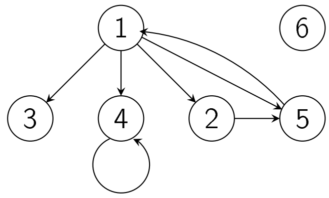

— (1,3,2)
— (1,2,5)
— (1,5,2)
— (1,2,5,1,5)
— (1,2,5,1,5,1)
— (4,4,4,4,4,4)

7. Parmi les chemins du graphe, lesquels sont simples ? élémentaires ? des circuits ?

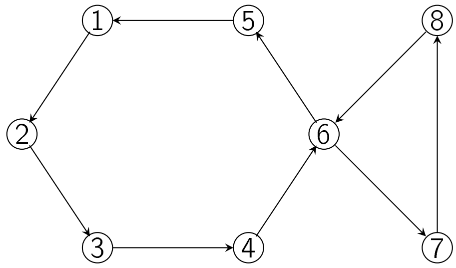



— (1,2,5)
— (1,2,5,1,5)
— (1,2,5,1,5,1)
— (4,4,4,4,4,4)

8. Donner les composantes connexes du graphe suivant :




9. Le graphe ci-dessous est-il fortement connexe ?




**À corriger en TD**

**Exercice 1.**

On définit $G = (S, A)$ de la façon suivante :

$$S = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

et $A$ est tel que

$$\forall (x, y) \in S^2,\ (x, y) \in A \text{ si et seulement si } x \text{ divise } y \text{ et } x \neq y.$$

Donner une représentation sagittale, le dictionnaire, la matrice d'adjacence et la matrice d'incidence de ce graphe.

**Exercice 2.**
On définit $G$ un graphe orienté par sa matrice d'adjacence :

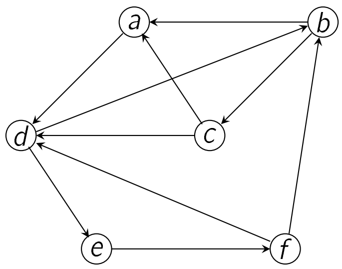
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. $G$ a-t-il des boucles ? Si oui, lesquelles ?
2. Donner le dictionnaire de $G$.
3. Donner l'ensemble des prédécesseurs de chaque sommet de $G$.
4. Donner une représentation sagittale de $G$.

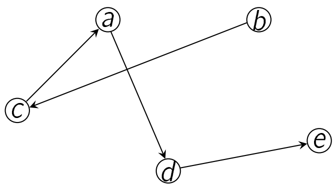
**Exercice 3.**
Donner une représentation sagittale et la matrice d'adjacence du graphe non orienté associé au graphe orienté défini à l'exercice 2.

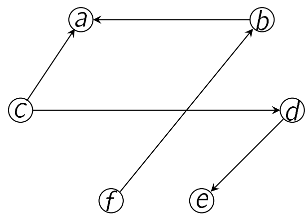
**Exercice 4.**

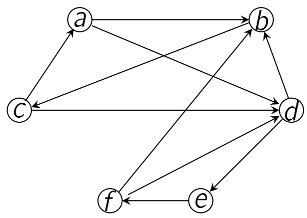
On définit un graphe $G$ orienté par une représentation sagittale :



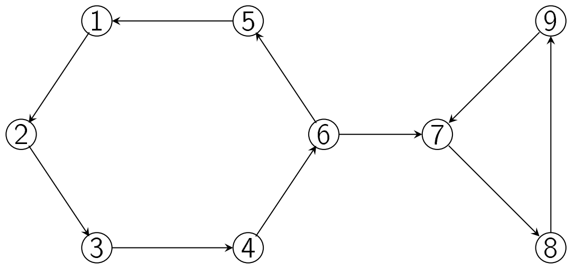

1. Donner le sous-graphe induit de ce graphe de sommets $\{a, b, c, d\}$.
2. Les graphes ci-dessous sont-ils des sous-graphes de ce graphe ? Si oui, sont-ils couvrants ?




**Exercice 5.**
Le graphe donné par la représentation sagittale ci-dessous est-il connexe ? fortement connexe ? Si la réponse est non, que doit-on ajouter pour obtenir la propriété ?




**Exercice 6.**

Dans cet exercice, on considère le graphe donné à l'exercice 4.

1. Donner le degré entrant, le degré sortant et le degré total de chaque sommet.
2. Quels sont les chemins simples reliant $a$ à $b$ ?
3. Quels sont les chemins élémentaires reliant $a$ à $b$ ?

**Exercice 7.**

1. Donner le degré entrant, le degré sortant et le degré total de chaque sommet du graphe défini par la matrice d'incidence suivante :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Donner le degré de chaque sommet du graphe non orienté défini par la matrice d'adjacence suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 8.**

1. Montrer que dans un graphe orienté $G = (S, A)$, on a la relation :

$$\sum_{s \in S} d_+(s) = \sum_{s \in S} d_-(s) = |A|$$

2. Un tournoi de football intercommunal réunit 7 équipes. Chaque équipe rencontre chacune des autres équipes, soit à domicile, soit dans le stade de la commune adverse. Le stade de la commune $A$ étant inondé, l'équipe $A$ ne jouera aucun match à domicile. On voudrait que les autres équipes jouent exactement la moitié des matchs à domicile. Est-ce possible ?
3. Montrer que dans un graphe non orienté $G = (S, A)$, on a la relation :

$$\sum_{s \in S} d(s) = 2|A|$$

4. Dans un groupe de 20 enfants, est-il possible que 7 d'entre eux aient chacun exactement 3 amis, 9 d'entre eux en aient exactement 4 et 4 d'entre eux exactement 5 ?

**Exercice 9.**

1. On rappelle qu'on a la relation suivante dans un graphe $G = (S, A)$

$$\sum_{x \in S} d_+(x) = \sum_{x \in S} d_-(x)$$

Si $G$ est sans boucle, montrer que

$$\forall x \in S \qquad d_+(x) < |S| \quad \text{et} \quad d_-(x) < |S|$$

Dans la suite de l'exercice, on supposera que tous les graphes sont sans boucle.

2. Peut-on construire un graphe sans boucle $G_1$ ayant les demis-degrés suivants (Justifier)

$$d_+ = (2, 0, 2, 1) \qquad\qquad d_- = (3, 1, 0, 2)$$

3. Peut-on construire des graphes sans boucle $G_2$ et $G_3$ ayant les demis-degrés suivants (Justifier)

| | | |
|---|---|---|
| pour $G_2$ : | $d_+ = (1, 4, 3, 2, 1, 2)$ | $d_- = (1, 2, 0, 6, 4, 0)$ |
| pour $G_3$ : | $d_+ = (1, 3, 2, 0, 1)$ | $d_- = (0, 2, 2, 0, 3)$ |

4. Construire un graphe sans boucle $G_4$ ayant les demis-degrés suivants :

$$d_+ = (2, 1, 0, 1, 1) \qquad\qquad d_- = (1, 0, 3, 0, 1)$$

5. Peut-on construire un graphe sans boucle $G_5$ ayant les demis-degrés suivants :

$$d_+ = (3, 1, 0, 1, 3) \qquad\qquad d_- = (1, 3, 1, 0, 3)$$

**Exercices supplémentaires**

**Exercice 10. (**)**

Donner une représentation sagittale des graphes non orientés suivants :

— Le graphe $G_1$ dont les sommets sont les faces d'un cube et les arêtes relient les sommets correspondant à des faces du cube ayant une arête commune.

— Le graphe $G_2$ dont les sommets sont les parties à deux éléments de $\{1, 2, 3, 4\}$ et les arêtes relient deux sommets dont l'intersection est non vide.

**Exercice 11. (**)**

Un tournoi d'échecs oppose 6 personnes. Chaque joueur doit affronter tous les autres.

1. Construisez un graphe représentant toutes les parties possibles.
2. Si chaque joueur ne joue qu'un match par jour, combien de jours faudra-t-il pour terminer le tournoi ? Aidez-vous du graphe pour proposer un calendrier des matchs.

**Exercice 12. (**)**

Sur un échiquier $3 \times 3$, deux cavaliers noirs sont placés sur les cases a1 et c1, deux cavaliers blancs occupent les cases a3 et c3. Aidez-vous d'un graphe pour déterminer les mouvements alternés des blancs et des noirs qui permettront aux cavaliers blancs de prendre les places des cavaliers noirs, et vice versa sans que deux cavaliers se retrouvent sur la même case. Les blancs commencent.

**Exercice 13. (***)**

*Un jour, Sherlock Holmes reçoit la visite de son ami Watson que l'on avait chargé d'enquêter sur un assassinat mystérieux datant de plus de trois ans.*

*À l'époque, le Duc de Densmore avait été tué par l'explosion d'une bombe, qui avait entièrement détruit le château de Densmore où il s'était retiré. Les journaux d'alors relataient que le testament, détruit lui aussi dans l'explosion, avait tout pour déplaire à l'une de ses sept ex-épouses. Or, avant de mourir, le Duc les avait toutes invitées à passer quelques jours dans sa retraite écossaise.*

*- Holmes : Je me souviens de cette affaire ; ce qui est étrange, c'est que la bombe avait été fabriquée spécialement pour être cachée dans l'armure de la chambre à coucher, ce qui suppose que l'assassin a nécessairement effectué plusieurs visites au château !*

*- Watson : Certes, et pour cette raison, j'ai interrogé chacune des femmes : Ann, Betty, Charlotte, Edith, Félicia, Georgia et Helen. Elles ont toutes juré qu'elles n'avaient été au château de Densmore qu'une seule fois dans leur vie.*

*- Holmes : Hum ! Leur avez-vous demandé à quelle période elles ont eu leur séjour respectif ?*

*- Watson : Hélas ! Aucune ne se rappelait les dates exactes, après plus de trois ans ! Néanmoins, je leur ai demandé qui elles avaient rencontré :*

- *Ann a rencontré Betty, Charlotte, Félicia et Georgia.*
- *Betty a rencontré Ann, Charlotte, Edith, Félicia et Helen.*
- *Charlotte a rencontré Ann, Betty et Edith.*
- *Edith a rencontré Betty, Charlotte et Félicia.*
- *Félicia a rencontré Ann, Betty, Edith et Helen.*
- *Georgia a rencontré Ann et Helen.*
- *Helen a rencontré Betty, Félicia et Georgia.*

*Vous voyez, mon cher Holmes, les réponses sont concordantes !*

*C'est alors que Holmes prit un crayon et dessina un étrange petit dessin, avec des points marqués A, B, C, E, F, G, H et des lignes reliant certains de ces points. Puis, en moins de trente secondes, Holmes déclara :*

*- Tiens, tiens ! Ce que vous venez de me dire détermine de façon unique l'assassin.*

Qui est l'assassin ?

**Exercice 14. (**)**

Un passeur doit faire traverser une rivière à un loup, une chèvre et un chou dans une barque où il ne peut emporter que l'un d'eux à chaque voyage. Il ne peut laisser le loup et la chèvre seuls sur une rive non plus que la chèvre et le chou.

Formaliser ce problème en termes de graphe puis donner une solution au transbordement des trois passagers.

**Exercice 15. (**)**

On souhaite prélever 4 litres de liquide dans un tonneau. Pour cela, nous avons à notre disposition deux récipients (non gradués !), l'un de 5 litres, l'autre de 3 litres... Comment doit-on faire ?

**Exercice 16. (**)**

Trois maris jaloux et leurs épouses souhaitent traverser une rivière. Ils disposent d'une barque qui ne peut pas transporter plus de deux personnes à la fois. Comment doivent-ils procéder, sachant qu'aucune femme ne doit rester en compagnie d'un ou deux hommes sans que son mari soit présent ?

**Exercice 17. (***)**

1. Quel est le nombre maximum d'arcs que l'on peut obtenir sur un graphe orienté à $n$ sommets sans boucle ? avec boucles ?
2. Quel est le nombre maximum d'arêtes que l'on peut obtenir sur un graphe non orienté à $n$ sommets sans boucle ? avec boucles ?

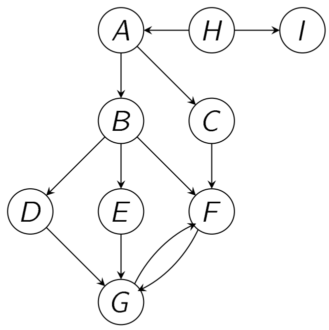
**Exercice 18. (***)**

Formulez l'énoncé suivant en terme de graphes : "Dans un groupe d'au moins 2 personnes, il existe toujours au moins deux personnes ayant le même nombre d'amis dans le groupe. " Démontrez cette propriété.

## A.3 Parcours de graphes

### Traités en cours

1. On considère le graphe




   (a) Faire un parcours en profondeur du graphe ci-dessus. On indiquera l'ordre de visite des sommets.
   (b) Faire un parcours en largeur du graphe ci-dessus. On indiquera l'ordre de visite des sommets.

2. Donner les composantes connexes du graphe non orienté donné par son dictionnaire :

   $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ et

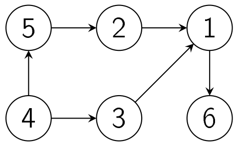
   $G(1) = \{2, 3, 4, 5\}$ $\quad G(2) = \{1, 5\}$ $\quad G(3) = \{1\}$
   $G(4) = \{1, 4\}$ $\quad G(5) = \{1, 2\}$ $\quad G(6) = \emptyset$
   $G(7) = \{8, 9, 10\}$ $\quad G(8) = \{7, 9, 10\}$ $\quad G(9) = \{7, 8, 10\}$
   $G(10) = \{7, 8, 9\}$

3. On considère le graphe $G$ donné par son dictionnaire : $S = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K\}$

$$\begin{array}{llll} G(A) = \{C, H, K\} & G(B) = \{C\} & G(C) = \{K\} & G(D) = \{I, J\} \\ G(E) = \{G\} & G(F) = \{J\} & G(G) = \{F, J\} & G(H) = \{A, D\} \\ G(I) = \{D\} & G(J) = \{E\} & G(K) = \{B\} & \end{array}$$

   (a) Calculer $\overline{G_+}(A)$ et $\overline{G_-}(A)$.
   (b) Donner son graphe réduit.
   (c) Ajouter un minimum d'arcs pour rendre ce graphe fortement connexe.

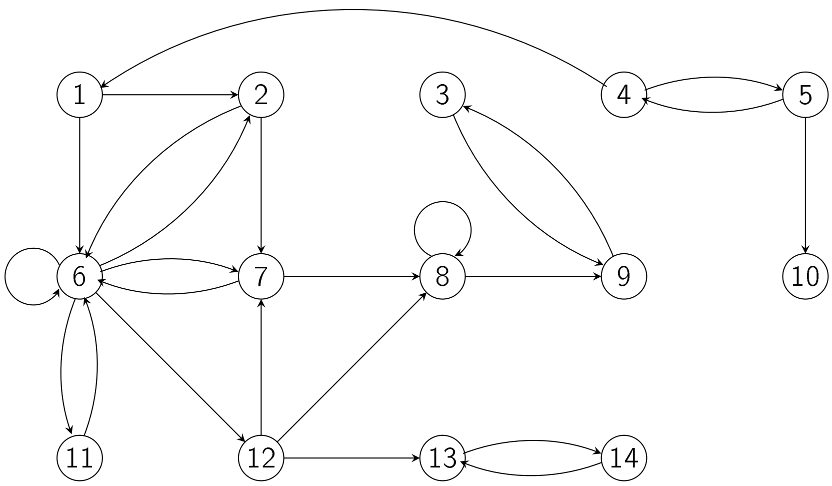
4. Donner pour tout $i$ l'ensemble $S_i$ des sommets à distance $i$ du sommet 4 pour le graphe suivant. En déduire un plus court chemin en nombre d'arcs de 4 à 6




**À corriger en TD**

**Exercice 1.**

On considère le graphe suivant :




Appliquer l'algorithme de parcours en profondeur au graphe ci-dessus. Indiquer l'ordre de visite des sommets.

**Exercice 2.**

1. On considère le graphe défini par son dictionnaire : $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$G(1) = \{2, 4\} \quad G(2) = \{1, 3\} \quad G(3) = \{5\} \quad G(4) = \{2\} \quad G(5) = \{2\}$$

   Ce graphe est-il orienté ? Si oui, donner le dictionnaire du graphe non orienté associé.

2. Déterminer les composantes connexes du graphe $G = (S, A)$ où $G$ est donné par son dictionnaire :
   (a) $S = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$

$$\begin{array}{llll} G(a) = \{g, h\} & G(b) = \{f\} & G(c) = \{a, e\} & G(d) = \{d\} \\ G(e) = \emptyset & G(f) = \{b, i\} & G(g) = \{c, g\} & G(h) = \{a, g, h\} \\ G(i) = \{b, i\} & G(j) = \{i, j\} & & \end{array}$$

   (b) $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

$$\begin{array}{llll} G(1) = \{7\} & G(2) = \{5, 8\} & G(3) = \{4, 10\} & G(4) = \{3, 10, 11\} \\ G(5) = \{6, 8\} & G(6) = \{2, 8\} & G(7) = \{1\} & G(8) = \{5\} \\ G(9) = \{12\} & G(10) = \{2\} & G(11) = \{3, 4\} & G(12) = \{9\} \end{array}$$

**Exercice 3.**
On considère le graphe $G = (S, A)$ orienté défini par le dictionnaire ci-dessous :

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ et

$$\begin{array}{llll} G(1) = \{3\} & G(2) = \{3, 4\} & G(3) = \{1, 5\} & G(4) = \{2, 10\} \\ G(5) = \{6, 7\} & G(6) = \{3, 10\} & G(7) = \{8\} & G(8) = \{9\} \\ G(9) = \{7, 8\} & G(10) = \{10\} & & \end{array}$$

1. Donner la fermeture transitive directe et la fermeture transitive inverse de 3. Le graphe $G$ est-il fortement connexe ?
2. Donner les composantes fortement connexes du graphe $G$.
3. Donner le graphe réduit du graphe $G$.
4. Combien d'arcs au minimum faut-il ajouter pour rendre le graphe $G$ fortement connexe ? Donner des arcs qui rendent le graphe fortement connexe.

**Exercices supplémentaires**

**Exercice 4. (**)**

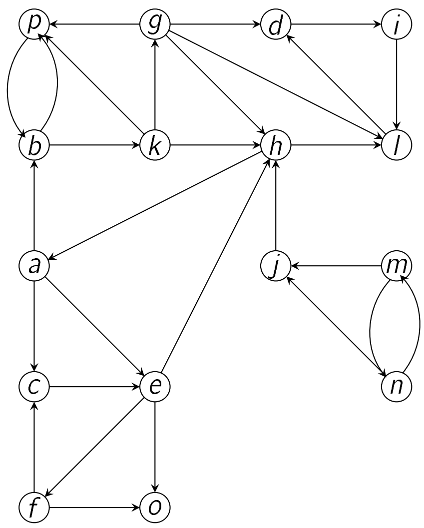
Soit le graphe $G = (S, A)$ défini par son dictionnaire :
$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$$\begin{array}{llll} G(1) = \{4, 5, 6\} & G(2) = \{3, 8\} & G(3) = \{9, 10\} & G(4) = \{1, 2, 5\} \\ G(5) = \{1, 2, 8\} & G(6) = \{2, 4\} & G(7) = \emptyset & G(8) = \{3, 5, 7\} \\ G(9) = \{7\} & G(10) = \emptyset & & \end{array}$$

1. Donner les ensembles $(S_i)$ des sommets à distance $i$ de 1 pour le graphe $G$.
2. En utilisant les ensembles $S_i$, trouver les plus courts chemins de 1 à 10.

**Exercice 5. (*)**

1. Faire un parcours en profondeur sur le graphe ci-dessous. On indiquera l'ordre de parcours des sommets.
2. Faire un parcours en largeur sur le graphe ci-dessous. On indiquera l'ordre de parcours des sommets




**Exercice 6. (*)**

Pour chacun des graphes ci-dessous, donner les composantes connexes.

1. Le graphe de l'exercice 3.
2. $G = (S, A)$ tel que
$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$$
et
$$\begin{array}{ccccc} G(1) = \{2, 6\} & G(2) = \{3, 4, 5\} & G(3) = \{1\} & G(4) = \{3, 5\} & G(5) = \{1\} \\ G(6) = \{7, 11\} & G(7) = \{5, 8, 9\} & G(8) = \{5\} & G(9) = \{8\} & G(10) = \{11\} \\ G(11) = \emptyset & G(12) = \{10, 11\} & G(13) = \{9, 11, 15\} & G(14) = \{13\} & G(15) = \{14\} \end{array}$$

**Exercice 7. (*)**

Pour chacun des graphes suivants, donner les composantes fortement connexes, le graphe réduit et rendre le graphe fortement connexe s'il ne l'est pas déjà en ajoutant un minimum d'arcs.

1. Le graphe $G = (S, A)$ définit par le dictionnaire :

$S = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$

$$\begin{array}{cccc} G(a) = \{d, f, i\} & G(b) = \{d, h, i, j\} & G(c) = \{f\} & G(d) = \{g\} \\ G(e) = \{g\} & G(f) = \{a, d\} & G(g) = \{g, k\} & G(h) = \{h, i, k\} \\ G(i) = \{g\} & G(j) = \{b, k\} & G(k) = \{i\} & \end{array}$$

2. Les deux graphes de l'exercice 2.
3. Le graphe de la question 2 de l'exercice 6.
4. Le graphe de l'exercice 4.

**Exercice 8. (**)**

Un office de tourisme souhaite organiser des circuits touristiques en bus ou à pied dans une ville. Il souhaite faire passer les touristes par 11 sites. Cependant, toute la ville est en sens unique pour la circulation motorisée. Dans le tableau suivant sont donnés les sites et les routes qui les relient :

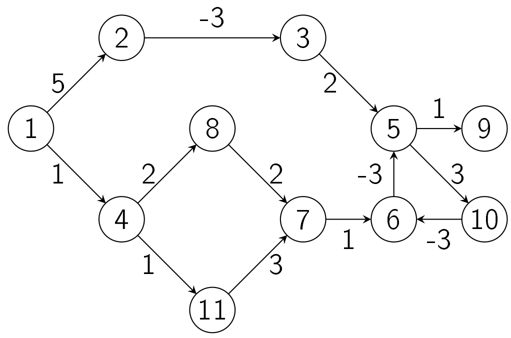
| De | on peut aller à |
|---|---|
| Arc de Triomphe | Hôtel de ville, Château, Kiosque à musique |
| Bibliothèque | Château |
| Château | Kiosque à musique |
| Dôme des sports | Ile aux oiseaux, Jardin botanique |
| Église | Galerie d'art |
| Fontaine aux souhaits | Jardin botanique |
| Galerie d'art | Fontaine aux souhaits, Jardin botanique |
| Hôtel de ville | Arc de Triomphe, Dôme des sports |
| Ile aux oiseaux | Dôme des sports |
| Jardin botanique | Église |
| Kiosque à musique | Bibliothèque |

1. Donner le dictionnaire du graphe qui modélise ce problème. Le graphe est-il orienté ?
2. Pour chacun des problèmes suivants, le traduire en terme de graphes et répondre à la question posée.
   (a) Est-il possible de créer un circuit en bus qui passe par tous les monuments et ramène les touristes à leur point de départ ? Même question à pied ?
   (b) Combien de circuits en bus (avec retour au point de départ) qui passe par le plus de monuments possibles peut-on créer ?
   (c) Combien au minimum de voies de circulation pour bus faut-il ouvrir pour qu'on puisse faire le tour de tous les monuments en bus (en revenant au point de départ) ?

## A.4 Problèmes de plus court chemin

### Traités en cours

1. On considère le graphe

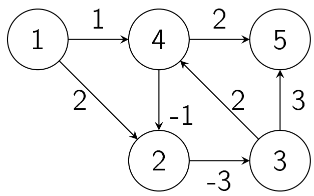



(a) Soient les chemins $\mu_1 = (1, 2, 3, 5)$, $\mu_2 = (5, 9)$ et le circuit $C = (5, 10, 6, 5)$.

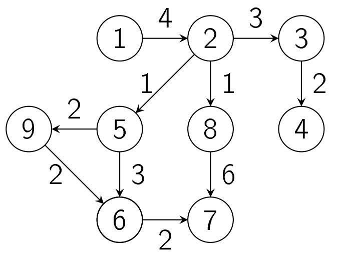
Donner la valuation du chemin $\delta_n$ obtenu en mettant bout à bout, $\mu_1$, $n$ tours de circuit $C$ puis $\mu_2$. Que constatez-vous ?

(b) Y-a-t-il un plus court chemin de 2 à 4 ? de 4 à 7 ? de 1 à 9 ?

2. Appliquer l'algorithme de Ford au graphe suivant à partir du sommet 1




3. On considère le graphe



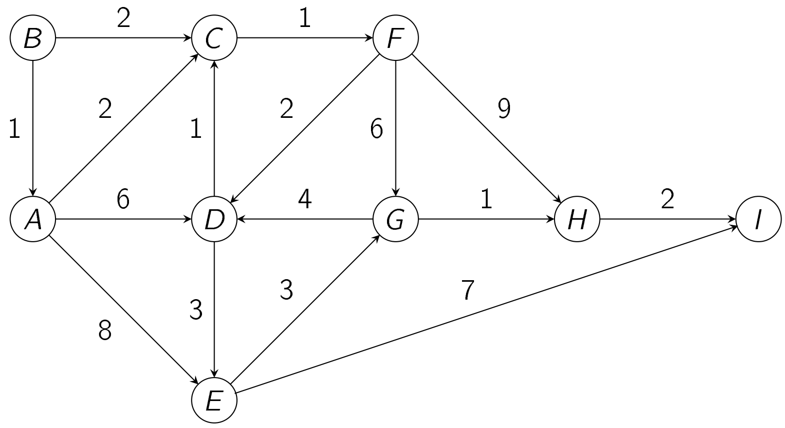

(a) Appliquer l'algorithme de Ford à ce graphe à partir du sommet 2.

(b) Appliquer l'algorithme de Dijkstra à ce graphe à partir du sommet 2.

## À corriger en TD

### Exercice 1.

Donner quand c'est possible un plus court chemin de $A$ à $S$ pour tout $S$ sommet du graphe valué suivant :




**Exercice 2.**
Le papa de la petite Chloé l'emmène au zoo. Le plan du zoo indique les temps de parcours suivants pour aller d'un endroit à un autre du zoo :

| Allée | Temps de parcours (en minutes) |
|---|---|
| Accueil-Babouin | 4 |
| Accueil-Chameau | 3 |
| Accueil-Dromadaire | 5 |
| Babouin-Éléphant | 3 |
| Chameau-Éléphant | 5 |
| Chameau-Fennec | 7 |
| Dromadaire-Fennec | 6 |
| Éléphant-Fennec | 2 |
| Éléphant-Girafe | 10 |
| Fennec-Hippopotame | 8 |
| Fennec-Iguane | 4 |
| Girafe-Hippopotame | 2 |
| Girafe-Jaguar | 5 |
| Hippopotame-Jaguar | 4 |
| Iguane-Hippopotame | 5 |
| Iguane-Jaguar | 7 |

La petite Chloé est très impatiente de voir les jaguars. Combien de temps au minimum va-t-il falloir pour l'emmener jusque là ? Par quels animaux va-t-elle passer ?

**Exercices supplémentaires**

**Exercice 3. (*)**

Un prince est parti à la recherche d'un trésor ; il peut accomplir les actions suivantes :
— Aller à la ville du marché, en contournant la rivière par un gué : 4 jours.

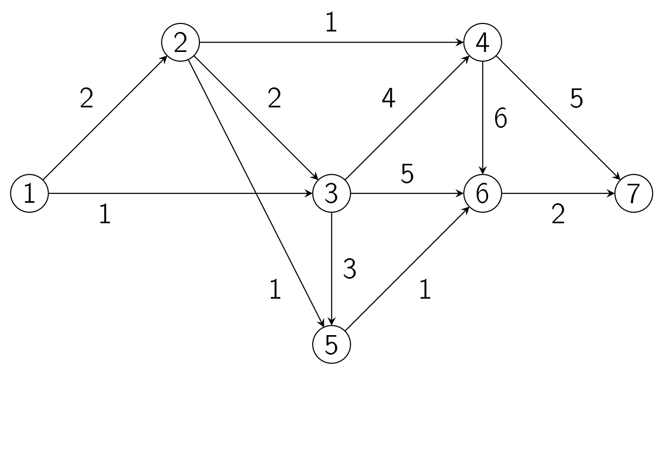
- Traverser la forêt : 1 jour.
- Depuis la forêt, abattre des arbres pour traverser la rivière, et se rendre à la ville du marché : 2 jours.
- Depuis la forêt, se rendre à la capitale provinciale en traversant les marais : 7 jours.
- S'équiper chaudement au marché, et partir pour le col du nord : 5 jours.
- Trouver un cheval au marché, et se rendre à la capitale provinciale par la route : 3 jours.
- Depuis le col du nord, se rendre au refuge du devin : 3 jours.
- Depuis la capitale provinciale, se rendre au refuge du devin : 4 jours.
- Se rendre de la capitale provinciale au palais du roi, en étant retardé par des contrôles : 10 jours.
- Au sortir du devin, partir directement chercher l'épée, et la trouver après s'être perdu par manque de carte : 20 jours.
- Au sortir de chez le devin, au mépris de ses avis, se rendre directement à la grotte et tuer le dragon avec un canif : 32 jours (il faut du temps pour le tuer avec un canif).
- Bien conseillé par le devin, prendre un raccourci pour le palais du roi : 5 jours.
- Une fois arrivé au palais du roi, séduire la bibliothécaire, puis trouver les cartes qui expliquent l'emplacement de l'épée et du trésor : 6 jours.
- En utilisant les cartes trouvées dans la bibliothèque, faire tout le tour de la montagne, et traverser un labyrinthe qui mène directement au trésor : 30 jours.
- En utilisant les cartes, aller chercher l'épée pour combattre le dragon : 7 jours.
- S'entraîner à l'épée, puis tuer le dragon : 8 jours.
- Une fois l'épée trouvée, au lieu d'affronter le dragon, utiliser l'épée pour creuser un tunnel par dessous, et déboucher directement dans la cachette du trésor : 18 jours.
- Une fois le dragon tué, résoudre l'énigme qui ouvre la cachette du trésor : 9 jours.

Comment doit-il faire pour récupérer le trésor le plus vite possible ? Quel temps mettra-t-il ?

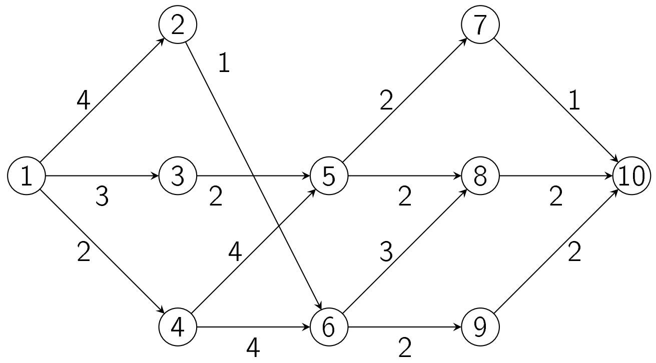
**Exercice 4. (**)**

Pour chacun des graphes suivants, quand c'est possible donner la distance de 1 à tout sommet *i* ainsi qu'un plus court chemin.

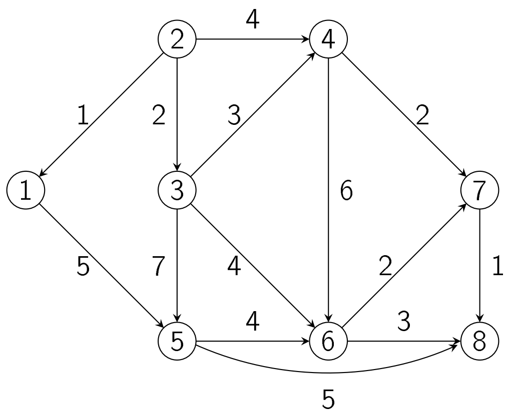
1.



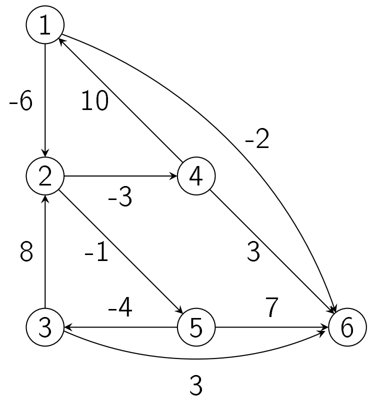

2.




3.




4.




## Exercice 5. (*)

Un voyageur veut se rendre à Berlin. Pour cela, il dispose d'un réseau de bus passant par les villes d'Amsterdam, Berlin, Copenhague, Dresde, Essen, Francfort, Göttingen, Hambourg et Iéna. Les liaisons en bus sont récapitulées dans le tableau ci-dessous avec les durées (en heures) et les coûts (en euros) de chaque trajet (les villes sont désignées par leur initiale, un trajet de $A$ vers $B$ est représenté sous la forme $A - B$).

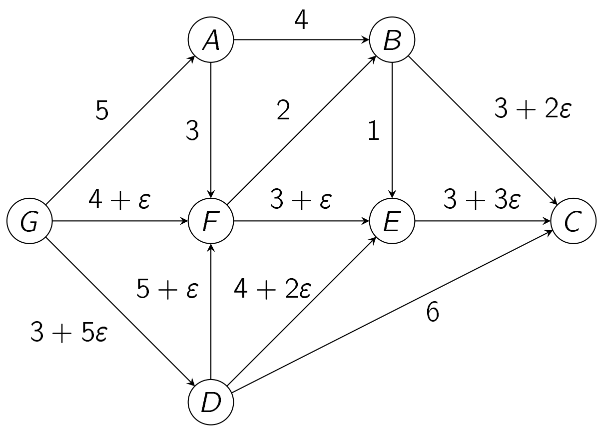
| liaison | durée | cout | liaison | durée | coût | liaison | durée | coût |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A-E$ | 7 | 12 | $A-F$ | 4 | 15 | $A-H$ | 3 | 10 |
| $C-B$ | 6 | 25 | $C-I$ | 2 | 20 | $D-B$ | 4 | 6 |
| $E-D$ | 3 | 14 | $E-G$ | 2 | 8 | $E-I$ | 8 | 13 |
| $F-D$ | 2 | 18 | $F-E$ | 1 | 11 | $G-C$ | 2 | 16 |
| $G-I$ | 3 | 9 | $H-C$ | 2 | 30 | $H-E$ | 3 | 7 |
| $H-G$ | 1 | 5 | $I-B$ | 2 | 9 | $I-D$ | 7 | 2 |

Dans chacun des cas suivants, traduire en terme de graphes le problème posé puis le résoudre.

1. Le voyageur veut passer le moins de temps possible en bus pour aller de Amsterdam à Berlin.
2. Le voyageur veut que son voyage lui coute le moins possible pour aller de Amsterdam à Berlin.
3. Le voyageur veut utiliser le moins de bus possibles pour aller de Amsterdam à Berlin.

**Exercice 6. (***)**

On considère le graphe valué suivant où $\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ :

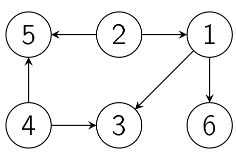



Discuter suivant la valeur de $\varepsilon$ du plus court chemin de $G$ à $C$.

## A.5 Problèmes d'ordonnancement

### Traités en cours

1. On considère le graphe suivant




   (a) Le graphe admet-il une fonction ordinale ? Si oui, la donner
   (b) Appliquer l'algorithme de tri topologique à ce graphe

2. On considère le projet dont les tâches et les contraintes sont données dans le tableau ci-dessous (les durées sont indiquées en jours)

| Tâche | Durée | Contraintes ($d(I)$ = début de $I$, $f(I)$ = fin de $I$) |
|---|---|---|
| A | 10 | Début du projet + 2 |
| B | 3 | - |
| C | 4 | Début de projet + 4 |
| D | 4 | d(A) + 7, f(B) + 6 |
| E | 5 | f(B) + 10 |
| F | 16 | d(B) + 5, f(C) |
| G | 8 | f(C) + 3 |
| H | 10 | d(D) + 11, f(E) +1 |
| I | 3 | f(E) + 3, F avancée au 3/4 |
| J | 7 | E avancée au 4/5 |
| K | 5 | d(H) + 4, f(I), d(J) + 8 |
| L | 2 | f(J), f(G) + 2 |
| M | 1 | K avancée au 3/5, d(L) + 4 |
| N | 2 | f(L) |

(a) Donner le tableau correspondant à ce projet

(b) Donner une représentation sagittale du graphe associé au problème d'ordonnancement en indiquant les dates au plus tôt et au plus tard de chaque tâche.

(c) Calculer la marge totale et la marge libre de chacune des tâches

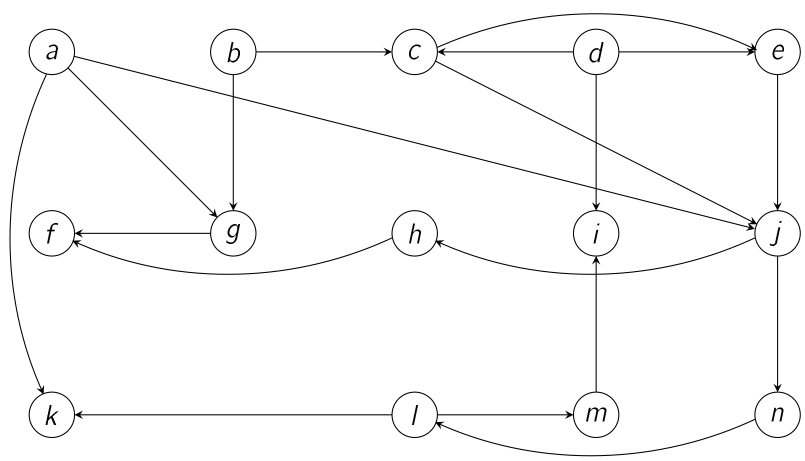
(d) La tâche $F$ peut-elle prendre un retard de 2 jours sans rallonger la durée du projet ? sans modifier la date de début au plus tôt des autres tâches ? Si non, donner les tâches qui vont être retardées et de combien.

(e) Donner les chemins critiques de Début à Fin. Quelle est leur valuation ?

## À corriger en TD

### Exercice 1.

Le graphe suivant admet-il une fonction ordinale ? Si oui, la donner.



**Exercice 2.**

1. Le graphe $G$ orienté dont les sommets sont numérotés de 1 à 7 défini par la matrice d'adjacence ci-dessous admet-il une fonction ordinale ? Si oui, la donner.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. On ajoute des nouveaux arcs dans le graphe $G$. Indiquer dans chacun des cas si le nouveau graphe possède une fonction ordinale :
   (a) On ajoute $\{(4, 3), (7, 5)\}$ ;
   (b) On ajoute $\{(3, 4), (7, 1), (7, 5)\}$ ;

**Exercice 3.**
On considère un projet dont les tâches et les contraintes sont données dans le tableau ci-dessous (les durées sont en jours) :

| Tâche | Durée | Contraintes |
|---|---|---|
| $A$ | 4 | - |
| $B$ | 3 | - |
| $C$ | 10 | $A$ terminée |
| $D$ | 6 | $A$ et $B$ terminées |
| $E$ | 6 | $B$ terminée |
| $F$ | 10 | $D$ terminée et 5 jours après la fin de $A$ |
| $G$ | 7 | $D$ et $E$ terminées |
| $H$ | 11 | $E$ terminée et 5 jours après le début de $D$ |
| $I$ | 3 | 5 jours après le début de $G$ et 7 jours après le début de $H$ |
| $J$ | 2 | $C$ terminée, 5 jours après le début de $G$ et $F$ effectuée à moitié |

1. Donner le tableau représentant les données du projet
2. Donner les dates de début au plus tôt et de début au plus tard de chaque tâche. On les indiquera dans une représentation sagittale du graphe. Quelle est la durée minimale du projet ?
3. Donner la marge totale et la marge libre de chaque tâche.
4. Donner les chemins critiques de ce graphe. Quelle est leur valuation ?

**Exercice 4.**
Un projet de construction de maison individuelle est composé des tâches suivantes (les durées sont en semaines) :

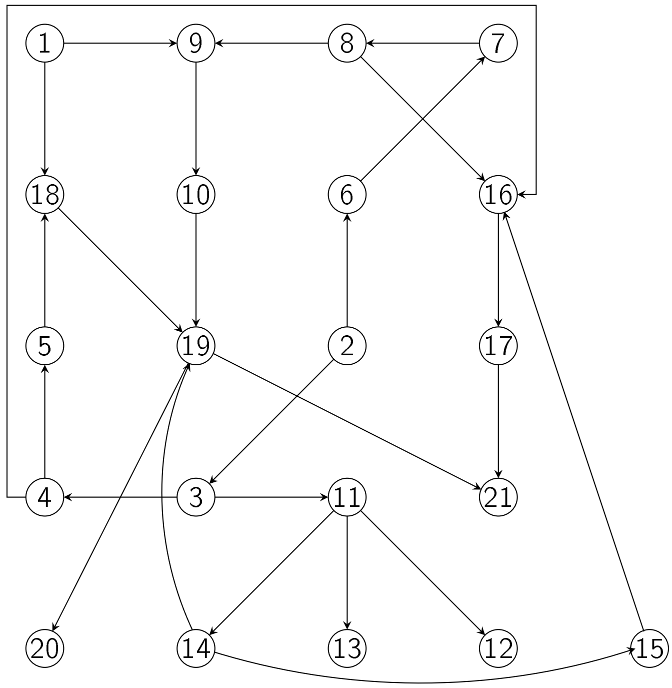
| Tâche | Désignation | Contraintes | Durée |
|---|---|---|---|
| $A$ | Signature du marché | Précède toutes les autres | 0 |
| $B$ | Excavation fondations | | 5 |
| $C$ | Plomberie extérieure | Fondations terminées | 3 |
| $D$ | Construction des murs | Fondations terminées | 8 |
| $E$ | Charpente | Murs terminés | 3 |
| $F$ | Couverture | Charpente terminée | 4 |
| $G$ | Maçonnerie intérieure | Murs terminés | 8 |
| $H$ | Plomberie intérieure | $C$, $D$, $E$ terminées | 7 |
| $I$ | Électricité | $D$, $E$ terminées et 4 semaines après la fin de $G$ | 4 |
| $J$ | Finitions | Toutes les tâches précédentes terminées | 6 |
| $K$ | Livraison | Toutes les tâches terminées | 0 |

1. Donner le tableau représentant les données du projet
2. Donner les dates de début au plus tôt et les dates de début au plus tard du projet. On les indiquera dans une représentation sagittale du graphe. Quelle est la durée minimale du projet ?
3. Donner la marge totale et la marge libre de chaque tâche.
4. À cause d'un retard dans la livraison du matériel électrique, la tâche $I$ ne peut commencer que 28 semaines après la signature du marché. La durée minimale du projet est-elle modifiée ?
5. On prévoit un retard pour la livraison du matériel de plomberie : la tâche $C$ ne pourra commencer que $N$ semaines après la signature du marché. Pour chaque valeur possible $N = 10, 15, 19, 20$
   (a) La durée minimale du projet est-elle modifiée ?
   (b) Le retard entraîne t-il un retard pour d'autres tâches ?
6. Donner tous les chemins critiques du graphe.

**Exercices supplémentaires**

**Exercice 5. (*)**

Le graphe ci-dessous a-t-il une fonction ordinale ? Si oui, la donner.




**Exercice 6. (**)**

On considère le graphe $G = (S, A)$ défini par son dictionnaire :
$S = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $G(a) = \{c, d, f\}$ | $G(b) = \{d, g, k\}$ | $G(c) = \{f, g\}$ | $G(d) = \{f, h\}$ |
| $G(e) = \emptyset$ | $G(f) = \emptyset$ | $G(g) = \{h, i\}$ | $G(h) = \emptyset$ |
| $G(i) = \emptyset$ | $G(j) = \{e, i\}$ | $G(k) = \{e, i, j\}$ | |

1. En déroulant un algorithme, donner les classes topologiques $C_1, C_2, \ldots, C_k$
2. On ajoute des nouveaux arcs dans le graphe $G$. Indiquer dans chacun des cas si le nouveau graphe possède une fonction ordinale :
   (a) On ajoute $\{(f, k), (j, g), (h, f)\}$ ;
   (b) On ajoute $\{(k, f), (j, g), (e, i)\}$ ;
   (c) On ajoute $\{(f, j), (h, f)\}$ ;

**Exercice 7. (**)**

On considère le graphe $G = (S, A)$ défini par :
— $S = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
— étant donnés deux sommets $s_1$, $s_2$, $(s_1, s_2) \in A$ si et seulement si $s_1$ divise $s_2$ et $s_1 \neq s_2$.

1. Donner le dictionnaire de $G$.
2. Le graphe $G$ a-t-il une fonction ordinale ? Si oui, la donner.

**Exercice 8. (*)**
On considère un projet dont les tâches et les contraintes sont données dans le tableau ci-dessous (les durées sont en jours) :

| Tâche | Durée | Contraintes |
|---|---|---|
| $A$ | 7 | - |
| $B$ | 5 | - |
| $C$ | 6 | $A$ terminée |
| $D$ | 8 | $B$ terminée |
| $E$ | 3 | $A$ et $B$ terminées |
| $F$ | 5 | 4 jours après le début de $A$ |
| $G$ | 6 | $C$ et $E$ terminées, 7 jours après le début de $D$ |
| $H$ | 5 | 5 jours après la fin de $B$ |
| $I$ | 4 | $F$ et $H$ terminées, 2 jours après la fin de $D$ |

1. Donner le tableau représentant les données du projet
2. Donner les dates de début au plus tôt et de début au plus tard de chaque tâche. On les indiquera dans une représentation sagittale du graphe. Quelle est la durée minimale du projet ?
3. Donner la marge totale et la marge libre de chaque tâche.
4. Donner les chemins critiques de ce graphe. Quelle est leur valuation ?

**Exercice 9. (*)**

Un producteur de cinéma est confronté au problème de planning de son prochain film selon les tâches suivantes :

| Tâche | Description | Durée (jours) | Contraintes |
|---|---|---|---|
| $A$ | écriture du scénario | 30 | - |
| $B$ | choix et recrutement des comédiens | 12 | 15 jours après le début de $A$ |
| $C$ | choix du lieu de tournage | 8 | 20 jours après le début de $A$ |
| $D$ | découpage technique | 4 | $A$ et $C$ terminées |
| $E$ | préparation des décors | 7 | $C$ et $D$ terminées |
| $F$ | tournage des extérieurs | 10 | $A$, $B$, $C$, $D$ terminées |
| $G$ | tournage des intérieurs | 12 | $D$, $E$, $F$ terminées |
| $H$ | synchronisation | 3 | $F$, $G$ terminées |
| $I$ | montage | 14 | $H$ terminée |
| $J$ | accompagnement sonore | 7 | après la fin de $H$ et 3 jours après le début de $I$ |
| $K$ | mixage | 6 | $I$ et $J$ terminées |
| $L$ | tirage de la copie 0 | 1 | 2 jours après la fin de $K$ |

1. Donner le tableau modélisant les données.
2. Donner les dates de début au plus tôt et de début au plus tard pour chaque tâche du projet. On les indiquera sur une représentation sagittale du graphe. Quelle est la durée minimale du projet ?
3. Donner la marge totale et la marge libre de chaque tâche.

4. Donner tous les chemins critiques. Quelle est leur valuation ?

**Exercice 10. (**)**

Vous êtes chargé de l'organisation d'un colloque par votre chef. Comme vous êtes novice en la matière, un de vos collègues sympathique et plus expérimenté vous a laissé la note ci-dessous sur votre bureau pour vous aider dans l'organisation.

> Note :
>
> Pour tout l'aspect logistique (lieu, repas...), tu dois t'entourer d'une équipe appelée le comité d'organisation. Choisir cette équipe devrait prendre 1 semaine.
> Ensuite la première chose à faire est de trouver le site de la conférence. Par exemple un hôtel qui pourra héberger les participants et qui possède des salles de conférence. Il faut compter 3 semaines pour le trouver. Le comité d'organisation devra se mettre d'accord avec l'hôtel pour les menus et les prix des repas pendant la conférence. Pour cela compte 1 semaine une fois que l'hôtel est choisi.
> Il te faut aussi choisir le comité de programme. Ce sera l'équipe chargée de l'aspect scientifique du colloque. Compte 3 semaines pour ce choix. Ce comité de programme devra se réunir deux fois avant la conférence. Une première fois, avant l'appel à communications, pour fixer les grandes lignes du programme qui seront indiquées dans cet appel et une seconde fois, après la sélection finale des articles, et au moins 3 semaines avant le colloque, pour fixer en détail le programme final.
> Le temps que les articles soient écrits et envoyés, il faut laisser aux auteurs un délai de 8 semaines entre l'appel à communication et le début de la sélection. Il faut aussi laisser 8 semaines au jury entre la réception des articles et la sélection finale des articles.
> Tu dois aussi te mettre d'accord avec un imprimeur pour l'édition des articles qui seront sélectionnés. En général, il faut compter 6 semaines pour l'impression à condition que tous les articles aient été mis en forme selon les conventions de l'imprimeur. Pour cela, accorde 4 semaines après la sélection finale aux différents auteurs pour qu'ils fassent cette mise en forme.
> Il faut que tu aies reçu les livres imprimés au moins 1 semaine avant le colloque.
> Prévoie aussi un programme "social" pour occuper les conférenciers en dehors du temps de conférences. Le temps fort sera un banquet lors d'une soirée. Ton comité d'organisation devrait pouvoir choisir le lieu de ce banquet en 2 semaines.
> Une fois le lieu du banquet et les prix de l'hôtel connus, laisse encore 1 semaine au comité d'organisation pour fixer le prix que devront payer les conférenciers. Ce prix et le programme social devront figurer dans l'appel à communications.
> De plus, comme on profite de sponsors généreux, tu devrais profiter des deux réunions du comité de programme pour tester l'hôtel et le lieu du banquet. Donc programme la première réunion du comité de programme dans l'hôtel et prévoie un diner sur le lieu du banquet le soir de la seconde réunion.
> Voilà je pense que je n'ai rien oublié

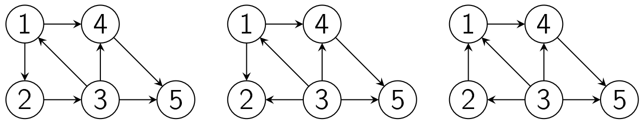
Le colloque doit commencer le 17 décembre. Quand devez-vous commencer à l'organiser au plus tard pour que tout soit prêt à temps.

Avec les emplois du temps chargés des membres du comité de programme, il n'est pas facile de trouver une date où tout le monde est disponible. Quelle marge avez vous pour l'organisation des deux réunions.

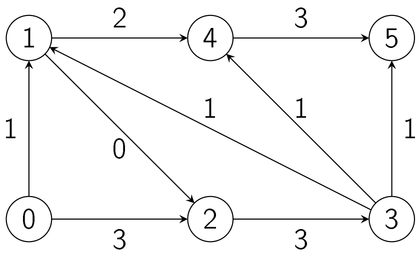
## A.6 Flot sur un réseau de transport

### Traités en cours

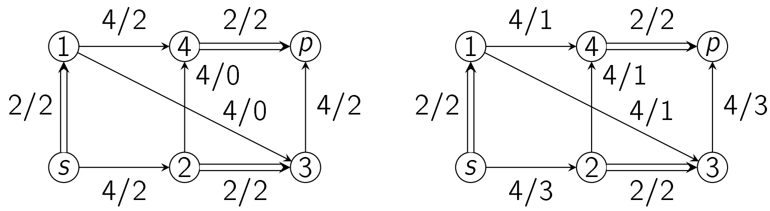
1. Les graphes suivants sont-ils des graphes munis d'une source et d'un puits ?



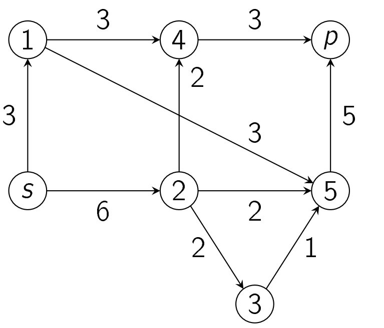
2. A-t-on toujours un flot si on ajoute 3 de flux sur les arcs (1,2), (2,3) et (3,1) dans le graphe ci-dessous ? Si, oui quelle est la valeur du flot ?




3. Pour chacun des deux flots représentés sur les graphes ci-dessous (sur chaque arc les capacités sont indiquées à gauche et les flux à droite), dire si ils sont réalisables, complets et donner la valeur du flot.




4. On considère le réseau de transport suivant :

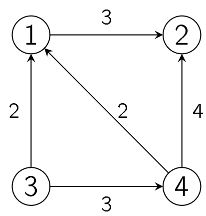



   (a) Donner la capacité des coupes $X_1 = \{s\}$, $X_2 = S - \{p\}$, $X_3 = \{s, 1, 2, 5\}$ et $X_4 = \{s, 3, 4, 5\}$.
   (b) Donner un flot réalisable complet sur ce réseau de transport
   (c) Peut-on augmenter le flot obtenu précédemment ?
   (d) Augmenter le flot précédent à l'aide de chaines augmentantes. Le flot obtenu est-il maximal ?
   (e) Donner la coupe décrite dans le lemme dans le cas de notre flot maximal trouvé précédemment.

## À corriger en TD

### Exercice 1.

On considère le graphe valué suivant :

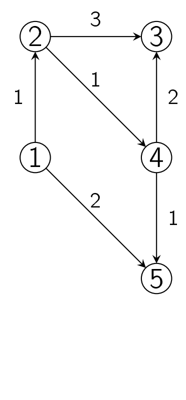


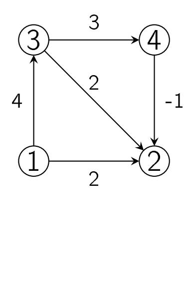
1. Vérifier que ce graphe est un réseau de transport. Préciser la source et le puits.
2. Dans chacun des cas suivants, préciser si $f_i$ est un flot. Si oui, est-il réalisable ? complet ?

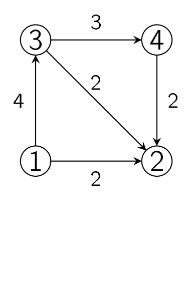
| $(x,y)$ | (1,2) | (3,1) | (3,4) | (4,1) | (4,2) |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_1(x,y)$ | 3 | 2 | 3 | 1 | 2 |
| $f_2(x,y)$ | 4 | 2 | 3 | 2 | 1 |
| $f_3(x,y)$ | 2 | 2 | 2 | 0 | 2 |
| $f_4(x,y)$ | 3 | 1 | 3 | 2 | 2 |

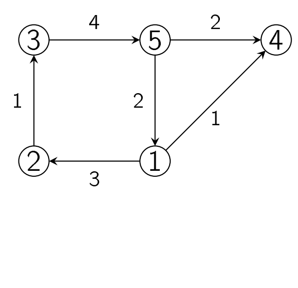
### Exercice 2.

1. Parmi les graphes valués $G_1$, $G_2$, $G_3$ et $G_4$ ci-dessous, quels sont ceux qui représentent un réseau de transport (les valuations indiquées sur les arcs sont les capacités) ?
2. Dans l'affirmative, donner successivement un flot non réalisable, un flot réalisable non complet et un flot réalisable complet sur le réseau correspondant (justifier en indiquant les arcs saturés).



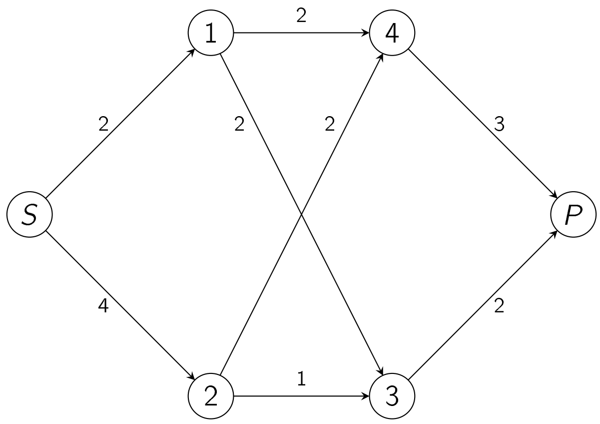






### Exercice 3.

On considère le réseau de transport suivant (les capacités sont indiquées sur les arcs) :




1. On définit $f$ par

| $(x, y)$ | $(S, 1)$ | $(S, 2)$ | (1,3) | (1,4) | (2,3) | (2,4) | $(3, P)$ | $(4, P)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x, y)$ | 2 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 1 | 2 |

Les valeurs ainsi attribuées aux flux correspondent-elles à un flot sur ce réseau. Si oui, quelle est sa valeur ?

2. Ce flot est-il réalisable ? Si oui, donner les capacités résiduelles sur chaque arc. Est-il complet ? S'il n'est pas complet, ajouter des flux de manière à le rendre complet et donner la valeur du flot obtenu.

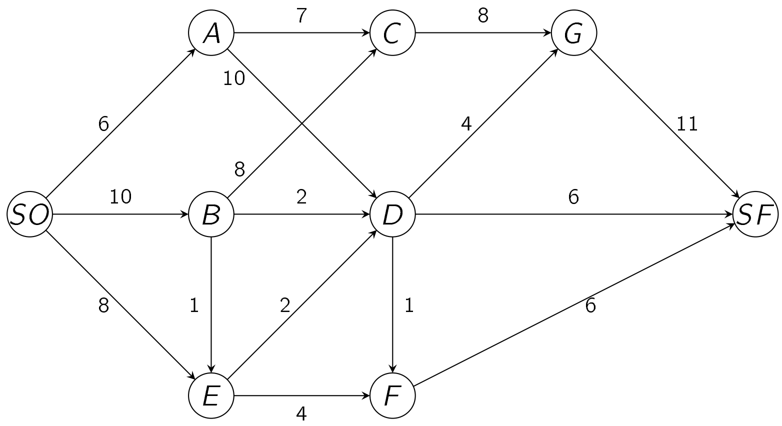
3. Combien y a t-il de coupes dans ce réseau ? Quelles sont leurs capacités ? En déduire la valeur d'un flot maximal sur ce réseau.

4. Le flot complet obtenu à la question 2 est-il maximal ? Si non, donner une chaine augmentante et le flux qu'elle peut faire passer. Ce nouveau flot est-il maximal ? Si non, augmentez-le de manière à obtenir un flot maximal. Une fois le flot maximal, faire apparaitre une coupe minimale.

**Exercice 4.**

Avant d'établir un plan de travaux routiers, on désire étudier la capacité du réseau existant. Ce dernier est modélisé par le graphe ci-après reliant la ville SO à la ville SF.

Pour cela, on a évalué pour chaque partie d'itinéraire le nombre maximal de véhicules qu'elle peut écouler par heure compte tenu des parties accidentées, des ralentissements aux traversées des villes et villages, etc... Les évaluations obtenues sont indiquées en centaines de véhicules par heure sur les arcs du graphe.




1. Le conseil municipal de la ville SO estime le débit total maximal susceptible de s'écouler entre les villes SO et SF à 2400 véhicules par heure. Est-ce bien réaliste dans l'état actuel du réseau ?
2. En appliquant l'algorithme de Ford-Fulkerson, déterminer un flot maximal sur le réseau (on commencera par la partie supérieure du graphe).
3. Donnez une coupe minimale associée à ce flot.
4. Le budget prévu pour l'amélioration du réseau routier ne permet d'améliorer qu'un des arcs du réseau. Lequel conseillez-vous ?

**Exercice 5.**

Une compagnie de fret ferroviaire dessert 7 entrepôts $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ $G$. On trouve dans le tableau ci-dessous, les voies dont dispose la compagnie ainsi que le nombre maximum de tonnes que l'on peut transporter par chaque voie.

| voie | tonnage max | voie | tonnage max |
|---|---|---|---|
| $A-B$ | 23 | $A-C$ | 37 |
| $B-D$ | 16 | $B-E$ | 13 |
| $C-D$ | 14 | $C-E$ | 10 |
| $C-F$ | 15 | $D-G$ | 22 |
| $E-G$ | 30 | $F-G$ | 10 |

L'entrepôt $G$ a un besoin urgent de 62 tonnes de bois. L'entrepôt $A$ accepte de le dépanner. L'entrepôt $G$ va-t-il pouvoir recevoir 62 tonnes de bois ? Si non, donner la quantité maximale de bois que va pouvoir recevoir l'entrepôt $G$. (On donnera les détails de la méthode utilisée pour répondre à cette question). Vérifier vos résultats en donnant une coupe minimale et sa capacité.

**Exercices supplémentaires**

**Exercice 6. (*)**

Une société de vente par correspondance gère un réseau commercial et logistique composé de 3 centres de commandes ($C_1$, $C_2$, $C_3$), deux centres de production ($P_1$, $P_2$) et deux centres de distribution ($D_1$, $D_2$). Ce réseau a les caractéristiques suivantes :

— $C_1$, $C_2$ et $C_3$ peuvent enregistrer respectivement 20, 30 et 10 milliers de commandes par mois.

— Les centres $P_1$ et $P_2$ peuvent produire des commandes issues de n'importe quel centre de commandes mais un centre $C_i$ ne peut pas transférer plus de 20 milliers de commandes à un centre de production $P_j$ par mois.

— $D_1$ ne distribue que les commandes produites par $P_1$ et $D_2$ ne distribue que les commandes produites par $P_2$.

— $P_1$ et $P_2$ peuvent produire respectivement 10 et 60 milliers de commandes par mois.

— $D_1$ et $D_2$ peuvent livrer respectivement 30 et 50 milliers de commandes par mois.

1. Donner le réseau de transport modélisant ce problème.
2. Justifier que l'on ne peut pas distribuer 80 milliers de commandes par mois.
3. Donner un flot réalisable complet (marquer les arcs saturés à l'aide d'une double flèche).
4. Combien de commandes au maximum peuvent être traitées par cette société (expliquer la méthode utilisée).
5. Donner une coupe minimale de ce réseau de transport.

## Exercice 7. (*)

Une ville est alimentée en électricité par une centrale électrique. Le réseau électrique est composé de 8 relais $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, $G$, $H$ reliés par des câbles haute tension pouvant transporter au maximum les quantités d'électricité suivantes :

| liaison | capacité ($\times 10^2 kW/h$) | liaison | capacité ($\times 10^2 kW/h$) |
|---|---|---|---|
| $Centrale \to A$ | 3 | $D \to F$ | 2 |
| $Centrale \to B$ | 3 | $D \to H$ | 2 |
| $Centrale \to C$ | 3 | $E \to G$ | 3 |
| $A \to E$ | 2 | $E \to H$ | 2 |
| $B \to D$ | 3 | $F \to Ville$ | 3 |
| $C \to D$ | 2 | $G \to Ville$ | 3 |
| $C \to E$ | 2 | $H \to Ville$ | 3 |

La ville a besoin de $9 \times 10^2 kW/h$ pour pouvoir fonctionner sans coupure électrique ? Y aura-t-il des coupures électriques dans la ville ? (On précisera la quantité maximale d'électricité qui peut être fournie à la ville et la méthode utilisée pour déterminer cette quantité).

## Exercice 8. (*)

Une compagnie de transports maritimes organise l'acheminement du café de 4 ports mexicains vers 4 ports français.

Les stocks disponibles au Mexique sont de 100 tonnes dans chacun des ports $A$ (Campêche) et $B$ (Tampico) et de 120 tonnes à Tuxpan (port $C$) et à Vera Cruz (port $D$). En France, les capacités de réception sont de 150, 80, 90 et 100 tonnes respectivement dans les ports $E$ (Bordeaux), $F$ (Dunkerque), $G$ (Saint-Nazaire), $H$ (Le Havre).

Les lignes existantes ont les capacités données dans le tableau ci-dessous :

| | $E$ | $F$ | $G$ | $H$ |
|---|---|---|---|---|
| $A$ | 80 | 20 | 40 | 0 |
| $B$ | 80 | 20 | 40 | 0 |
| $C$ | 0 | 40 | 10 | 50 |
| $D$ | 0 | 30 | 20 | 30 |

(les valeurs nulles indiquent qu'il n'y a pas de liaison entre les 2 ports)

Combien de café au maximum on peut acheminer vers la France ?