

V402

Die Dispersion am Glasprisma

Jan Philipp Jäkel
jan.jaekel@tu-dortmund.de

Piet Hoffmann
piet.hoffmann@tu-dortmund.de

Durchführung: 15.5.2018

Abgabe: 22.5.2018

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	3
1.1	Erklärung der Brechung nach dem Huygenschen Prinzip	3
1.2	Ableitung der Dispersionsgleichung	3
2	Durchführung	5
2.1	Bestimmung der Richtungsänderung des Strahls	6
2.2	Bestimmung des Brechungswinkels	7
3	Auswertung	8
4	Diskussion	12
	Literatur	12

1 Theorie

Licht kann als elektromagnetisch Welle verstanden werden. Dringt eine Lichtwelle in Materie ein, so wechsel wirkt diese mit dem E-Feld der Elektronen. Daraus resultiert eine Geschwindigkeitsänderung. Die Geschwindigkeit des Lichts ist, aufgrund dieses Vorgangs, im Medium geringer als die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit. Licht, welches schräg von einem Medium ins andere übergeht, erfährt an der Grenzfläche durch den beschriebenen Vorgang eine Richtungsänderung. Dieses Phänomen wird als Brechung bezeichnet. Der Brechungsindex n ist als das Verhältnis der beiden Geschwindigkeiten definiert:

$$n = \frac{c_1}{c_2} \quad (1)$$

Die Lichtgeschwindigkeit im Medium ist auch von der Frequenz abhängig. Der Brechungsindex ist demnach auch von der Frequenz des Lichts beziehungsweise der Wellenlänge λ abhängig. Diese Abhängigkeit wird Dispersion genannt. In diesem Experiment ist die Dispersionskurve

$$n = f(\lambda) \quad (2)$$

von Interesse.

1.1 Erklärung der Brechung nach dem Huygenschen Prinzip

Licht erfährt bei dem Übergang in ein optisch dichteres oder dünneres Medium eine Richtungsänderung, diese kann durch Winkel ausgedrückt werden. Trifft ein Lichtstrahl unter dem Winkel α auf eine Grenzfläche erfährt dieser eine Richtungsänderung und breitet sich unter dem Winkel β in dem neuen Medium aus. Nach dem Huygenschen Prinzip kann jeder Punkt einer bestehenden Wellenfläche als Zentrum einer kugelförmigen Elementarwelle verstanden werden. Aus der Einhüllenden der Elementarwellen bildet sich dann die neue Wellenfront. Berücksichtigt man die erwähnten Winkelabhängigkeiten, dann kann der Brechungsindex in der Form

$$n = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} \quad (3)$$

hergeleitet werden. Die Gleichung (3) wird als Snellius-Brechungsgesetz bezeichnet.

1.2 Ableitung der Dispersionsgleichung

Nach Maxwells Theorie kann die Feldstärke einer elektromagnetischen Welle durch

$$E = E_0 \exp(i\omega t) \quad (4)$$

beschrieben werden. Damit lässt sich folgende Differentialgleichung der Bewegung formulieren:

$$m_h \frac{d^2 x_h}{dt^2} + f_h \frac{dx_h}{dt} + a_h x_h = q_h E_0 \exp(i\omega t) \quad (5)$$

Die Differentialgleichung kann umgeschrieben werden indem x_h durch die Polarisation ausgedrückt wird:

$$\frac{d^2 P_h}{dt^2} + \frac{f_h}{m_h} \frac{dP_h}{dt} + \frac{a_h}{m_h} P_h = \frac{N_q q_h^2}{m_h} E_0 \exp(i\omega t) \quad (6)$$

Die Gleichung (6) ist die Differentialgleichung einer erzwungenen Schwingung. Diese hat die Lösung

$$P_h = \frac{1}{\omega_h^2 - \omega^2 + i \frac{f_h}{m_h} \omega} \frac{N_q q_h^2}{m_h} E_0 \exp(i\omega t). \quad (7)$$

Die Gesamte Polarisation beträgt

$$P = \sum_h \frac{1}{\omega_h^2 - \omega^2 + i \frac{f_h}{m_h} \omega} \frac{N_q q_h^2}{m_h} E_0 \exp(i\omega t). \quad (8)$$

Die Polarisation ist gleich der dielektrischen Verschiebung in Materie vermindert um die dielektrische Verschiebung im Vakuum. Damit kann Gleichung (8) umgeschrieben werden zu

$$(\tilde{\varepsilon} - 1)\varepsilon_0 = \sum_h \frac{1}{\omega_h^2 - \omega^2 + i \frac{f_h}{m_h} \omega} \frac{N_q q_h^2}{m_h}. \quad (9)$$

Durch die abgeleitete Maxwellsche Relation

$$\tilde{n} = \varepsilon \quad (10)$$

kann der Zusammenhang zwischen Brechungsindex und Lichtfrequenz hergestellt werden. Es folgt:

$$\tilde{n} = 1 + \sum_h \frac{1}{\omega_h^2 - \omega^2 + i \frac{f_h}{m_h} \omega} \frac{N_q q_h^2}{m_h \varepsilon_0} \quad (11)$$

Dabei ist \tilde{n} eine komplexe Größe der Form

$$\tilde{n} = n(1 - ik), \quad (12)$$

wobei k die Absorptionskonstante von Licht in Materie darstellt. Der Verlauf der Dispersionskurve wird für

$$n^2 k \approx 0 \quad (13)$$

betrachtet. Die Gleichung (11) geht dann über in

$$n^2(\omega) = 1 + \sum_h \frac{N_h q_h^2}{\varepsilon_0 m_h} \frac{1}{\omega^2 - \omega_h^2}. \quad (14)$$

Aufgrund der Messbarkeit wird ω durch λ ersetzt. Damit folgt:

$$n^2(\lambda) = 1 + \sum_h \frac{N_h q_h^2}{4\pi^2 c^2 \varepsilon_0 m_h} \frac{\lambda^2 \lambda_h^2}{\lambda^2 - \lambda_h^2} \quad (15)$$

Wenn die betrachtete Materie nur die Absorptionsstelle λ_1 aufweist, dann gilt für $\lambda \ll \lambda_1$

$$n(\lambda) = 1 + \frac{N_1 q_1^2 \lambda_1^2}{4\pi^2 c^2 \varepsilon_0 m_1} \left(1 + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda} \right)^2 + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda} \right)^4 + \dots \right) \quad (16)$$

oder auch

$$n(\lambda) = A_0 + \frac{A_2}{\lambda^2} + \frac{A_4}{\lambda^4} + \dots \quad (17)$$

und für $\lambda \gg \lambda_1$

$$n(\lambda) = 1 - \frac{N_1 q_1^2}{4\pi^2 c^2 \varepsilon_0 m_1} \left(\lambda^2 + \frac{\lambda^4}{\lambda_1^2} + \frac{\lambda^6}{\lambda_1^4} + \dots \right) \quad (18)$$

oder auch

$$n(\lambda) = 1 - A_2' \lambda^2 - A_4' \lambda^4 + \dots \quad (19)$$

Damit entstehen die beiden Dispersionskurven in Abbildung 1.

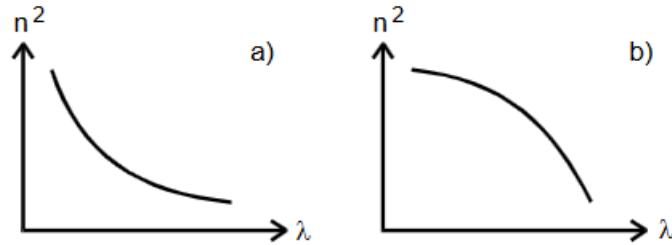


Abbildung 1: Gestalt der Dispersionskurven a) nach Gleichung(17) und b) nach Gleichung(19)[3].

Die dargestellten Kurven beschreiben die normale Dispersion. Nimmt n mit wachsender Wellenlänge λ zu, dann liegt abnormale Dispersion vor.

2 Durchführung

Der Aufbau ist in Abbildung 2 dargestellt.

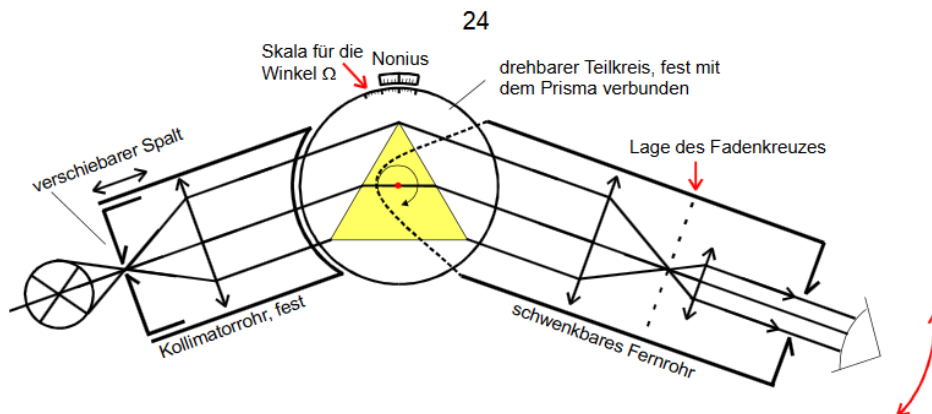


Abbildung 2: Schematische Darstellung eines Prismen-Spektralapparats[3].

Am Ende des Kollimatorrohrs befindet sich eine HgCd-Spektrallampe. Das Licht, welches von dieser ausgeht, fällt durch einen Spalt und eine Sammellinse auf ein Glasprisma und wird dort gebrochen. Das verwendete Prisma ist aus Schwerflint. Nach seiner Brechung gelangt das Licht in ein Fernrohr. Die Objektivlinse entwirft ein reelles Spaltbild in ihrer Brennebene. Zur genauen Lokalisierung des Spaltbildes ist dort ein Fadenkreuz aufgetragen. Durch Schwenken um die Goniometerachse kann dann das Fadenkreuz mit dem Spaltbild zur Deckung gebracht werden.

2.1 Bestimmung der Richtungsänderung des Strahls

Der η -Winkel beschreibt die Richtungsänderung des einfallenden Strahls. Der Strahlengang von dem gebrochenen und dem reflektierten Strahl sollen parallel verlaufen. Dies kann realisiert werden, wenn das Prisma gleichschenkelig ist und der Strahlengang symmetrisch ist. Damit ein symmetrischer Strahlengang gefunden werden kann, wird das Prisma so lange um die Goniometerachse geschwenkt, bis das reflektierte Spaltbild mit dem gebrochenen übereinstimmt. Mit dem reflektierten Spaltbild werden so die Spektrallinien der Lichtquelle abgefahren. Dabei wird die Winkelstellung des Fernrohrs, als auch die Farbe der Spektrallinie notiert. Danach wird die Messung bei spiegelsymmetrischer Stellung des Prismas wiederholt. Die erforderliche Prismenstellung ist in Abbildung 3 schematisch dargestellt.

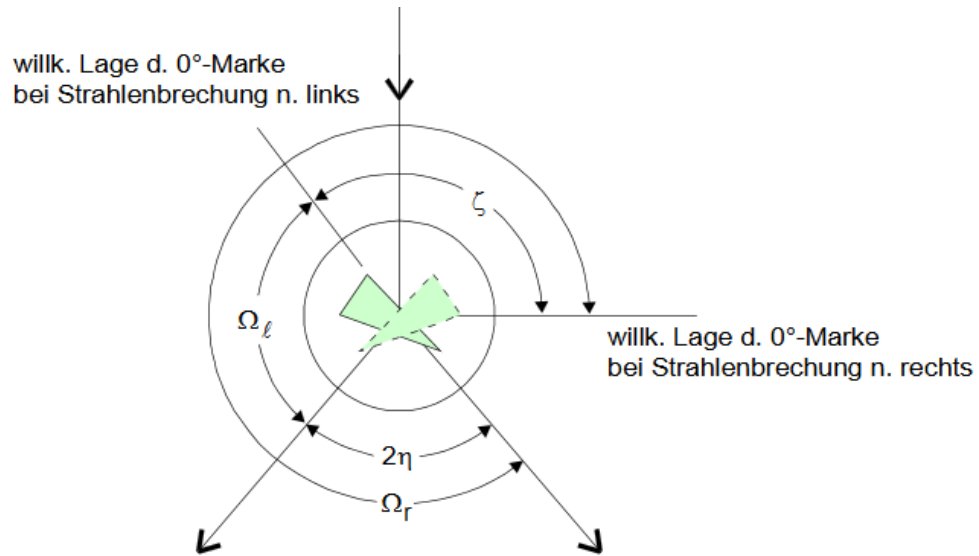


Abbildung 3: Darstellung der Messgrößen Ω_l und Ω_r in Abhängigkeit der Prismenstellungen[3].

Der Winkel η kann dann mit

$$\eta = 180 - (\Omega_r - \Omega_l) \quad (20)$$

bestimmt werden.

2.2 Bestimmung des Brechungswinkels

Das Prisma wird mit seinen brechenden Kanten auf das Kollimatorrohr ausgerichtet. Das Licht wird an der Prismenoberfläche reflektiert. Die Reflektionswinkel, dargestellt in Abbildung 4, werden mit dem Fernrohr bestimmt.

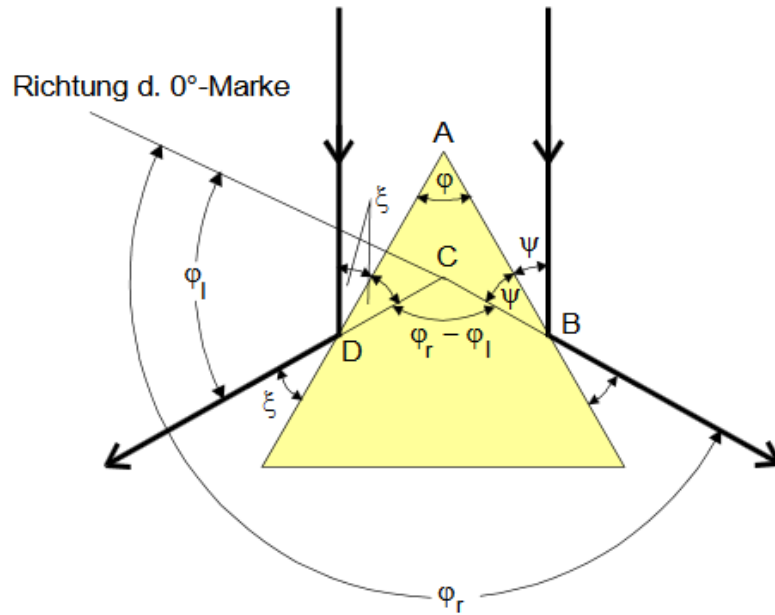


Abbildung 4: Skizze zur Bestimmung des Winkels ϕ zwischen den brechenden Oberflächen[3].

Die Messung wird für sechs verschiedene Prismenstellungen wiederholt. Der Brechungswinkel ϕ kann dann wie folgt berechnet werden:

$$\phi = \frac{1}{2}(\phi_r - \phi_l). \quad (21)$$

3 Auswertung

Die Messwerte für den Winkel ϕ des Prismas sind in Tabelle 1 aufgetragen.

Tabelle 1: Messwerte der ϕ -Messung.

$\phi_r/^\circ$	$\phi_l/^\circ$	$\phi/^\circ$
139,3	259,4	60,05
142,4	262,4	60,0
136,6	256,4	59,9
143,4	263,3	59,95
138,6	258,5	59,95
146,0	266,0	60,0
140,6	260,4	59,9

Es ergibt sich somit ein mittlerer Winkel von:

$$\bar{\phi} = (59,96 \pm 0,02)^\circ \quad (22)$$

Die Messwerte der η -Messung sind in Tabelle 2 aufgetragen. Zusätzlich sind die Wellenlängen der beobachteten Spektrallinien[1][2] aufgetragen.

Tabelle 2: Messwerte der η -Messung.

$\Omega_r/^\circ$	$\Omega_l/^\circ$	λ/nm	$\eta/^\circ$
207,4	89,6	644	62,2
206,7	90,1	577	63,4
206,4	90,5	546	64,1
205,9	91,0	509	65,1
205,4	91,4	480	66,0
205,1	91,7	468	66,6
204,3	92,5	436	68,2
203,3	93,4	405	70,1

Der Winkel η berechnet sich gemäß Gleichung (20). Die Gleichung (3) kann auf die folgende Form gebracht werden:

$$n = \frac{\sin \frac{\eta + \phi}{2}}{\sin \frac{\phi}{2}} \quad (23)$$

Es ergeben sich folgende Wertepaare (n_i, λ_i) :

Tabelle 3: Messwerte der η -Messung.

n	λ/nm
$1,7516 \pm 0,0004$	644
$1,7616 \pm 0,0004$	577
$1,7674 \pm 0,0004$	546
$1,7755 \pm 0,0004$	509
$1,7827 \pm 0,0004$	480
$1,7874 \pm 0,0004$	468
$1,7998 \pm 0,0004$	436
$1,8141 \pm 0,0004$	405

Diese Wertepaare können nun auf zwei verschiedene Möglichkeiten genähert werden, wie in Gleichung (17) oder so wie in Gleichung (19). Für beide Funktionen werden die Parameter mittels Python/SciPy optimiert und im Diagramm 5 aufgetragen.

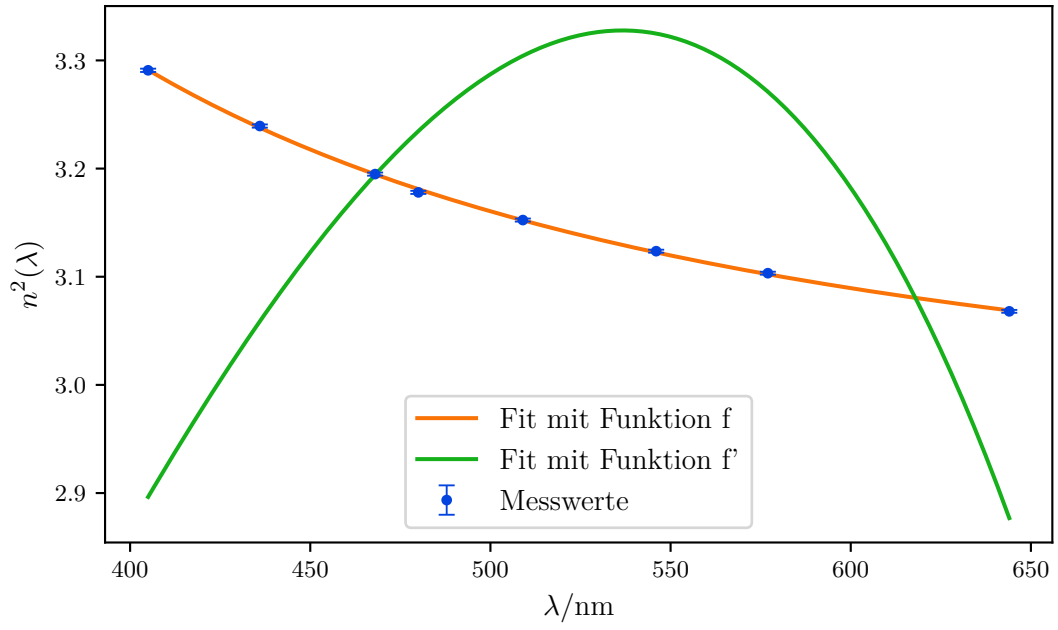


Abbildung 5: Dispersionskurven aus den zwei verschiedenen Ansätzen (17) und (19).

Die Parameter ergeben sich zu:

$$A_0 = 2,94 \pm 0,01 \quad (24)$$

$$A_2 = (4,97 \pm 0,33) \cdot 10^4 \frac{1}{\text{nm}^2} \quad (25)$$

$$A_2 = (1,25 \pm 0,39) \cdot 10^9 \frac{1}{\text{nm}^4} \quad (26)$$

$$A'_2 = (-1,62 \pm 0,00) \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{nm}^2} \quad (27)$$

$$A'_4 = (2,81 \pm 0,01) \cdot 10^{-11} \frac{1}{\text{nm}^4} \quad (28)$$

Die Summe der Abweichungsquadrate wird gemäß

$$s^2 = \frac{1}{N-2} \sum_i^N (n^2(\lambda_i) - f(\lambda_i))^2 \quad (29)$$

bestimmt. Es ergeben sich folgende Werte:

$$s^2 = (2,417 \pm 0,014) \cdot 10^{-6} \quad (30)$$

$$s'^2 = (5,327 \pm 0,011) \cdot 10^{-2} \quad (31)$$

Im Folgenden wird deshalb nur die Vorschrift aus Gleichung (17) verwendet. Aus der Herleitung von Gleichung (17) erkennt man, dass

$$A_0 = \alpha + 1 \quad (32)$$

$$A_2 = \alpha \lambda_1^2 \quad (33)$$

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{A_2}{A_0 - 1}} \quad (34)$$

gelten muss und außerdem

$$A_2 = \alpha \lambda_1^2 \quad (35)$$

$$A_4 = \alpha \lambda_1^4 \quad (36)$$

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{A_4}{A_2}}, \quad (37)$$

wobei die unphysikalischen Lösungen $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_1 < 0$ außer Acht gelassen werden. Aus den Ansätzen ergibt sich jeweils ein Wert von:

$$\lambda_1 = (160 \pm 5) \text{ nm} \quad (38)$$

$$\lambda_1 = (159 \pm 25) \text{ nm} \quad (39)$$

Die Abbesche Zahl, ein Maß für die Farbzerstreuung, berechnet sich wie folgt:

$$\nu = \frac{n(589 \text{ nm}) - 1}{n(486 \text{ nm}) - n(656 \text{ nm})} \quad (40)$$

Mit der zuvor bestimmten Dispersionsfunktion ergibt sich ein Wert von:

$$\nu = 19,0 \pm 1,3 \quad (41)$$

Das Auflösungsvermögen gibt an, wie nah zwei Wellenlängen sein dürfen, damit sie immernoch unterscheidbar sind. Es ist definiert durch

$$A := \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = b \frac{dn}{d\lambda}, \quad (42)$$

wobei $b = 3 \text{ cm}$ [3] die Basislänge des Prismas darstellt. Es ergeben sich beispielhaft Werte für A von:

$$A(656 \text{ nm}) = (-1,18 \pm 0,08) \cdot 10^4 \quad (43)$$

$$A(486 \text{ nm}) = (-3,15 \pm 0,24) \cdot 10^4 \quad (44)$$

4 Diskussion

Wie an der Unsicherheit von ϕ , welche unter 0,04 % liegt, zu sehen ist, kann mittels eines Goniometers ein Winkel sehr genau bestimmt werden. Somit können auch die Brechungsindices sehr genau bestimmt werden und der Unsicherheit liegt im Bereich von 0,01 %. Anhand der Graphen der optimierten Näherungsfunktionen, lässt sich bereits klar sagen, dass Gleichung (19) nicht geeignet ist, um die Dispersion zu nähern. Die Fehlerquadrate unterstützen dies deutlich, durch einen Unterschied von vier Größenordnungen. Die Absorptionsfrequenz lässt sich aus den Parametern der Dispersionsfunktion bestimmen. Da dies auf zwei Wege möglich ist und beide Ergebnisse nah beieinander liegen, ist davon auszugehen, dass sich der tatsächliche Wert nah bei diesen befindet. Jedoch ist anzumerken, dass unter Verwendung der Koeffizienten höherer Ordnung eine größere Unsicherheit auftritt. Die Abbesche Zahl lässt sich leider nicht direkt aus den Messwerten bestimmen, da aufgrund der Art der Lichtquelle die Fraunhoferlinien nicht zu beobachten waren. Jedoch lässt sie sich mit relativ geringer Unsicherheit aus der Dispersionsfunktion bestimmen. Auch das Auflösungsvermögen kann mit kleiner Unsicherheit bestimmt werden.

Literatur

- [1] *Spektrum von Cd*. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Cd_Niederdruck_Spektrum.png (besucht am 20.05.2018).
- [2] *Spektrum von Hg*. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Hg_Niederdruck_Spektrum.png (besucht am 20.05.2018).
- [3] *Versuch 402: Die Dispersion am Glasprisma*. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V402.pdf> (besucht am 20.05.2018).