Drugi domaći zadatak iz predmeta 13E053SSE Stohastički sistemi i estimacija

Aleksa Janjić 2019/0021

Januar 2022.

A 237366

Образац бр. 1

ЈМБГ 1502001773622

Алекса Јањић
(име и презиме - штампаним словима)

(својеручни потпис студента)

* Врста студија: основне академске, основне струковне, специјалистичке струковне студије, интегрисане основне и мастер академске, мастер академске, мастер струковне, специјалистичке академске, докторске академске.

** Степен студија: први, други, трећи.

A237366

РЕПУБЛИКА СРБИЈА

Универзитет у Београду
(назив и седиште самосталне високошколске установе)

Електротехнички факултет
(назив и седиште високошколске установе)

ОС

Број индекса 0021 / 2019
(број) (година уписа)

СТУДЕНТСКА КЊИЖИЦА
ИНДЕКС

Алекса Јањић
(име и презиме)

Раде (име једног родитеља), 15.02.2001. (датум рођења)

Лозница (место рођења), Лозница (општина рођења)

Република Србија (држава рођења), Републике Србије (држављанство)

уписан-а је школске 2019/2020 године на

основне академске (врста студија)*, први (степен студија)**

електротехника и рачунарство
(назив студијског програма)

240/4 године
(обим изражен у ЕСПБ и време трајања студијског програма)

Овлашћено лице

(датум уписа)

(М.П.)

1 Zadatak 1

a) U zadatku je dato N opservacija oblika $x[n] = \theta + w[n]$ zašumljenih belim Gumbelovim šumom koji je opisan izrazom:

$$p(w[n]) = e^{-w[n]-e^{-w[n]}}.$$

Koristeći date izraze, možemo odrediti i model zašumljenog merenja u zavisnosti od nepoznatog parametra θ:

$$w[n] = x[n] - \theta;$$

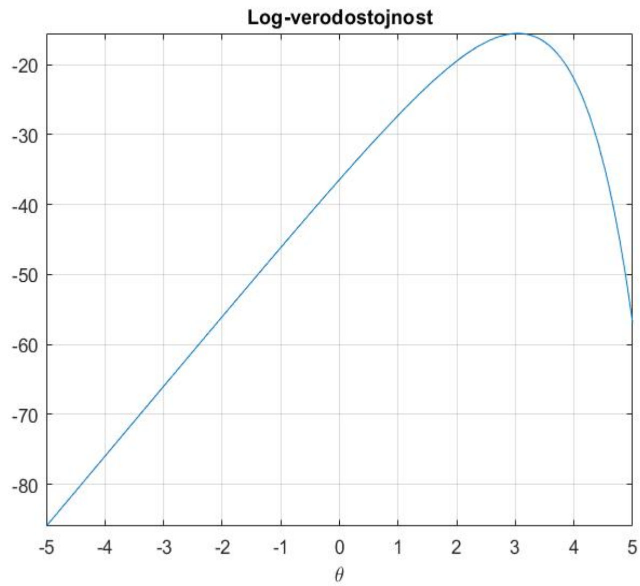
$$p(x[n];\theta) = p(w[n]) = e^{-(x[n]-\theta)-e^{-(x[n]-\theta)}}.$$

Nakon logaritmovanja dobijenog modela, dobijamo funkciju log-verodostojnosti jednog zašumljenog merenja:

$$ln\{p(x[n];\theta)\} = -(x[n]-\theta) - e^{-(x[n]-\theta)}.$$

Pošto su merenja nezavisna, dobijamo konačnu funkciju log-verodostojnosti:

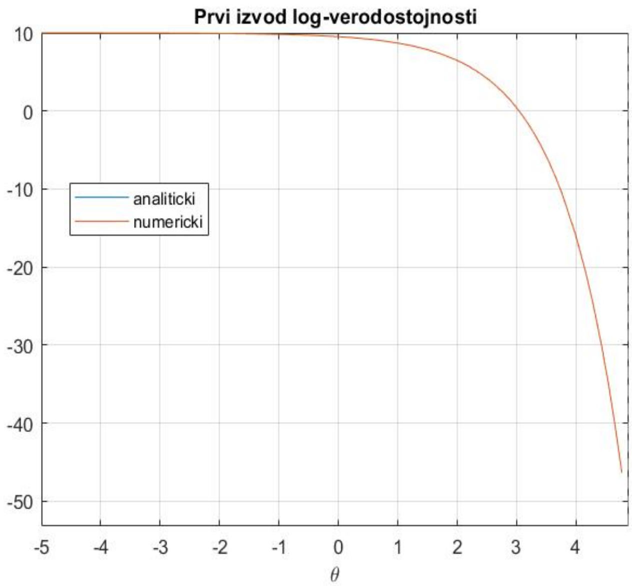
$$ln\{p(\mathbf{x};\theta)\} = \sum_{n=0}^{N-1} ln\{p(x[n];\theta)\} = -\sum_{n=0}^{N-1}(x[n]-\theta) - \sum_{n=0}^{N-1} e^{-(x[n]-\theta)}.$$



Slika 1: Funkcija log-verodostojnosti prvog eksperimenta

Prvi izvod funkcije log-verodostojnosti je jednostavno tada odrediti:

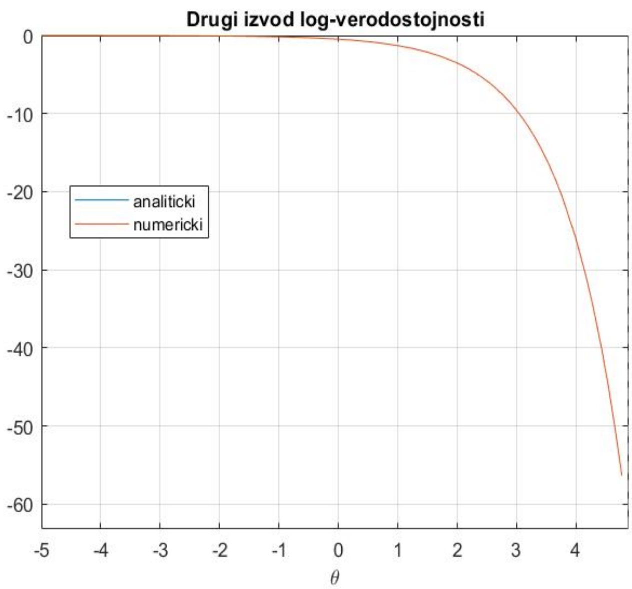
$$\frac{\partial ln\{p(\mathbf{x};\theta)\}}{\partial\theta} = -\sum_{n=0}^{N-1}(-1) - \sum_{n=0}^{N-1} e^{-(x[n]-\theta)}(-1)(-1) = N - \sum_{n=0}^{N-1} e^{-(x[n]-\theta)}.$$



Slika 2: Prvi izvod funkcije log-verodostojnosti prvog eksperimenta- analitički i numerički

Drugi izvod funkcije log-verodostojnosti izračunavamo kao:

$$\frac{\partial^2 ln\{p(\mathbf{x};\theta)\}}{\partial\theta^2} = -\sum_{n=0}^{N-1} e^{-(x[n]-\theta)}.$$



Slika 3: Drugi izvod funkcije log-verodostojnosti prvog eksperimenta- analitički i numerički

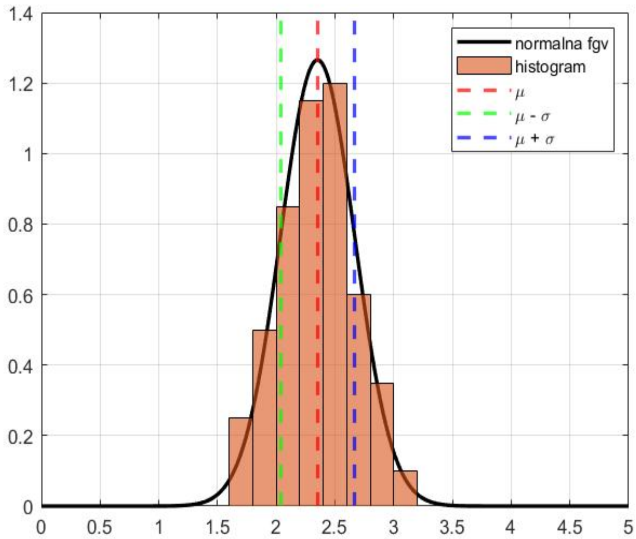
b)

```
function return_val = Newton_method(start,df,d2f,tol,max_it)

pom = start;
for i = 1:max_it
    new_pom = pom - double(subs(df,pom))/double(subs(d2f,pom));
    if (abs(new_pom - pom) <= tol)
        return_val = new_pom;
    break;
    else
        pom = new_pom;
        return_val = new_pom;
    end
end

end
```

c) U nastavku je prikazan grafik na kom se nalazi histogram konačnih estimacija za svih $N_r = 100$ realizacija eksperimenta, zajedno sa srednjom vrednošću estimacija i σ intervalu, kao i normalne funkcije gustine verovatnoće sa određenom srednjom vrednošću estimacija μ i varijansom σ.




```
clear
close all
clc
%% a
load('dom2_zad1.csv');
opservations_pom = dom2_zad1;
x = opservations_pom(1,:); %prvi eksperiment

Nr = 100;
N = 10;

syms theta
logp = - sum(x-theta) - sum(exp(-(x-theta))); %log verodostojnost
dlogp_analiticki = N - sum(exp(-(x-theta))); % prvi izvod analiticki
dlogp_numericki = diff(logp,theta); % prvi izvod numericki
d2logp_analiticki = - sum(exp(-(x-theta))); % drugi izvod analiticki
d2logp_numericki = diff(dlogp_numericki,theta); % drugi izvod numericki
```

```
figure(1)
    fplot(logp);
    title('Log-verodostojnost'); xlabel('\theta');
    grid on
figure(2)
    fplot(dlogp_analiticki);
    hold all;
    fplot(dlogp_numericki);
    title('Prvi izvod log-verodostojnosti'); xlabel('\theta');
    grid on;
    legend('analiticki','numericki','Location','Best');
figure(3)
    fplot(d2logp_analiticki);
    hold on;
    fplot(d2logp_numericki);
    title('Drugi izvod log-verodostojnosti'); xlabel('\theta');
    grid on;
    legend('analiticki','numericki','Location','Best');

%% c
estimations = zeros(1,100);

for i = 1:Nr
    x = opservations_pom(i,:);
    logp = - sum(x-theta) - sum(exp(-(x-theta)));
    dlogp = N - sum(exp(-(x-theta)));
    d2logp = - sum(exp(-(x-theta)));

    estimations(i) = Newton_method(2,dlogp,d2logp,10^(-3),20);
end

mi_est = mean(estimations);
sigma_est = sqrt(var(estimations));
xosa=0:0.01:5;
y = normpdf(xosa,mi_est,sigma_est);

figure(4)
plot(xosa,y,'k-','LineWidth',2);
hold all;
histogram(estimations,'Normalization','pdf');
xline(mi_est,'r--','LineWidth',2)
xline(mi_est - sigma_est,'g--','LineWidth',2)
xline(mi_est + sigma_est,'b--','LineWidth',2)
grid on;
legend('normalna fgv','histogram','\mu','\mu - \sigma','\mu + \sigma');
```

2 Zadatak 2

Model stanja je dat u obliku:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} p[t+1] \\ v[t+1] \\ \tilde{a}[t+1] \end{bmatrix}}_{S[t+1]} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & T & \frac{T^2}{2} \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} p[t] \\ v[t] \\ \tilde{a}[t] \end{bmatrix}}_{S[t]} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} \mu_a[t] + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{U} u[t] \tag{1}$$

Jednačina merenja je data u matričnom obliku:

$$x[t] = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{H} \underbrace{\begin{bmatrix} p[t] \\ v[t] \\ \tilde{a}[t] \end{bmatrix}}_{S[t]} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{W} w[t] \tag{2}$$

Kovarijaciona matrica modela Q definisana je narednim izrazom:

$$Q = E\{U \times U^T\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sigma_a^2 \tag{3}$$

Kasnije u zadatku, u različitim vremenskim trenucima, σ_a^2 će imati različite vrednosti, kao što je u tekstu zadatka navedeno.

Varijansa šuma merenja je definisana narednim izrazom:

$$C = E\{W \times W^T\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sigma_u^2 \tag{4}$$

Slično kao i za σ_a^2, tako će i σ_u^2 u različitim vremenskim trenucima imati različite vrednosti, kao što je navedeno u tekstu zadatka.

Za početne uslove uzet je vektor **s_est** sa vrednostima $[0]_{3x1}$ sa početnom kovarijacionom matricom estimacije greške **M_est** koja je jednaka jediničnoj dijagonalnoj matrici reda 3, pošto nismo u potpunosti sigurni u početne uslove.

Nakon svih definisanja i inicijalizacija, implementiran je algoritam Kalmanovog filtra koji iterativno određuje predikcije, a potom i koriguje estimacije stanja. Algoritam je dat narednim jednačinama:

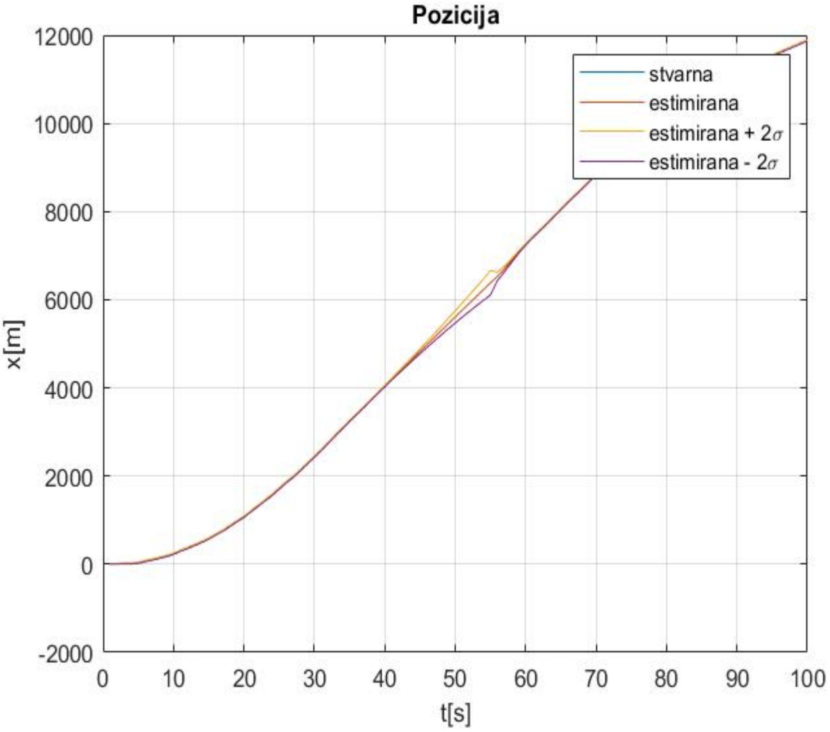
$$\hat{s}[t|t-1] = A\hat{s}[t-1|t-1] + B\mu_a[t]$$

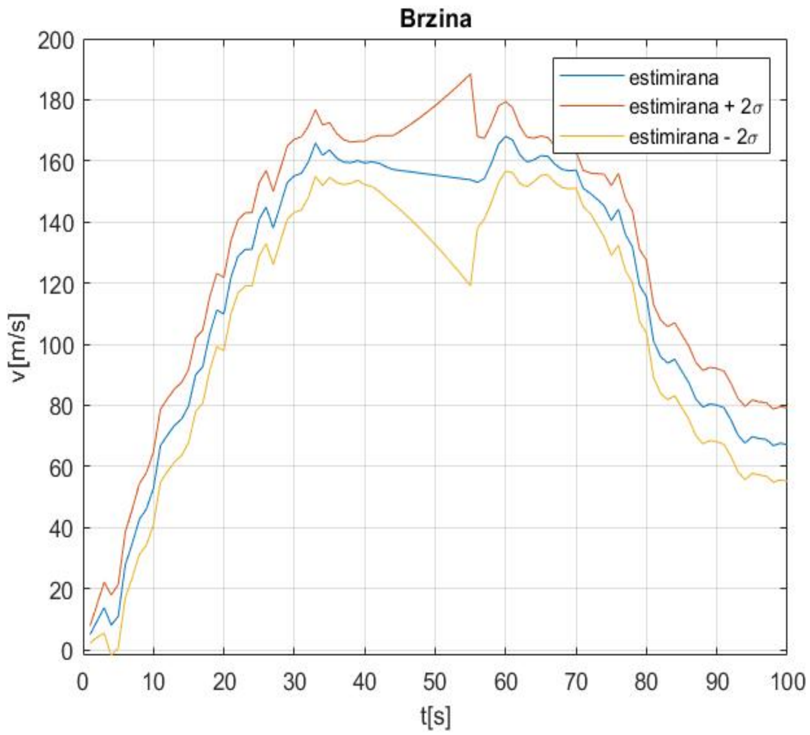
$$M[t|t-1] = AM[k-1|k-1]A^T + Q$$

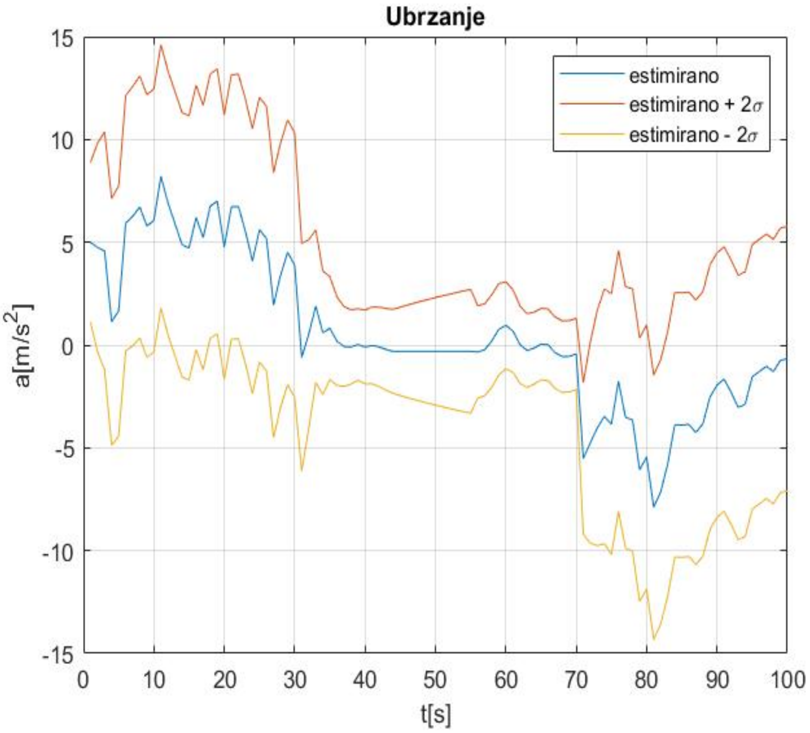
$$K[t] = M[t|t-1]H^T(HM[t-1|t-1]H^T + C)^{-1}$$

$$\hat{s}[t|t] = \hat{s}[t|t-1] + K[t](y[t] - H\hat{s}[t|t-1])$$

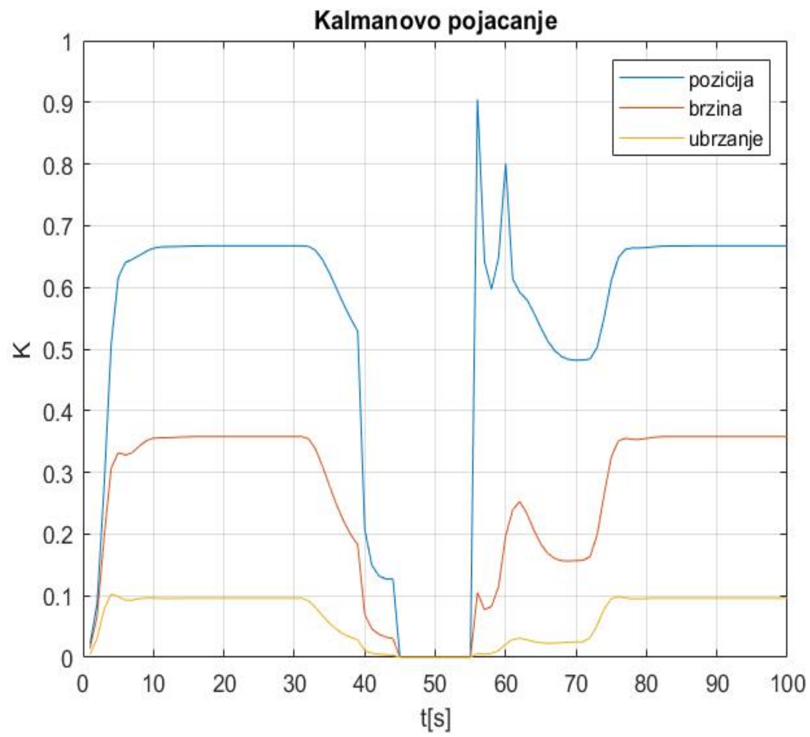
$$M[t|t] = (I - K[t]H)M[t|t-1]$$


Pozicija
12000
10000
8000
6000
4000
2000
0
-2000
x[m]
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
t[s]
stvarna
estimirana
estimirana + 2σ
estimirana - 2σ


Brzina
200
180
160
140
120
100
80
60
40
20
0
v[m/s]
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
t[s]
estimirana
estimirana + 2σ
estimirana - 2σ



Ubrzanje
estimirano
estimirano + 2σ
estimirano - 2σ
a[m/s^2]
t[s]



Kalmanovo pojacanje
pozicija
brzina
ubrzanje
K
t[s]

```
clear all;
close all;
clc;

y = load("gnss_data.csv");

T = 1;
A = [1 T T^2/2;0 1 T;0 0 1];
B = [T^2/2; T; 0];
U = [0;0;1];
H = [1 0 0];

mi_a = [5*ones(1,30) 0*ones(1,40) -5*ones(1,30)];
sigma_a = [5*ones(1,30) 1*ones(1,40) 5*ones(1,30)];
var_a = (sigma_a/3).^2; %smatramo 99.7% sigurnost

Q = U*U'*var_a(1); %kovarijaciona matrica modela

sigma_u_poc = 10;
C = sigma_u_poc^2*ones(1,length(y)); %vektor varijanse suma merenja
for i=1:length(y)
    if(i>=40) && (i<45)
        sigma_u_poc = sigma_u_poc + 10;
        C(i) = sigma_u_poc^2;
    end
    if(i>=45) && (i<=55)
        C(i) = 10^12;
    end
    if(i>55) && (i<=60)
        sigma_u_poc = sigma_u_poc - 10;
        C(i) = sigma_u_poc^2;
    end
end

%inicijalizacija i pocetna estimacija
s_est = [0; 0; 0];
M_est = eye(3); %prilicno smo sigurni da se krece iz nulte tacke,...
                %sa nultom pocetnom brzinom i nultim odstupanjem
                %ubrzanja

s_estimirano = zeros(3, length(y) + 1); %matrica vektora estimiranih stanja
M_estimirano = zeros(3, length(y) + 1); %matrica vektora kovarijansi greske estimacije
K_pojacanje = zeros(3,length(y)); %matrica vektora Kalmanovog pojacanja

s_estimirano(:,1) = s_est;
M_estimirano(:,1) = [M_est(1,1);M_est(2,2);M_est(3,3)];

for i = 1:length(y)
    %predikcija
    s_pred = A*s_est + B*mi_a(i);
    M_pred = A*M_est*A' + U*U'*var_a(i);

    %estimacija
    if (i>=45) && (i<=55)
        K = 0;
        s_est = s_pred;
        M_est = M_pred;
    else
```

```
            K = M_pred*H'*inv(H*M_pred*H' + C(i));
            s_est = s_pred + K*(y(i) - H*s_pred);
            M_est = (eye(3) - K*H)*M_pred;
        end

        K_pojacanje(:,i) = K;
        s_estimirano(:, i+1) = s_est;
        M_estimirano(:, i+1) = [M_est(1,1);M_est(2,2);M_est(3,3)];
end

M_2sigma = 2*sqrt(M_estimirano);
t = 1:100;

figure(1)
plot (t, y);
hold all;
plot(t, s_estimirano(1,2:end));
hold all;
plot(t, s_estimirano(1,2:end)+M_2sigma(1,2:end));
hold all;
plot(t, s_estimirano(1,2:end)-M_2sigma(1,2:end));
grid on;
xlabel('t[s]');
ylabel('x[m]');
title('Pozicija');
legend('stvarna','estimirana','estimirana + 2\sigma','estimirana - 2\sigma')

figure(2)
plot(t, s_estimirano(2,2:end))
hold all;
plot(t, s_estimirano(2,2:end)+M_2sigma(2,2:end));
hold all;
plot(t, s_estimirano(2,2:end)-M_2sigma(2,2:end));
grid on;
xlabel('t[s]');
ylabel('v[m/s]');
title('Brzina');
legend('estimirana','estimirana + 2\sigma','estimirana - 2\sigma')

figure(3)
plot(t, s_estimirano(3,2:end)+mi_a(1,:));
hold all;
plot(t, s_estimirano(3,2:end)+mi_a(1,:)+M_2sigma(3,2:end));
hold all;
plot(t, s_estimirano(3,2:end)+mi_a(1,:)-M_2sigma(3,2:end));
grid on;
xlabel('t[s]');
ylabel('a[m/s^2]');
title('Ubrzanje');
legend('estimirano','estimirano + 2\sigma','estimirano - 2\sigma')

figure(4)
plot(t, K_pojacanje(1,:));
hold all;
plot(t,K_pojacanje(2,:));
hold all
plot(t,K_pojacanje(3,:));
grid on;
```

```
xlabel('t[s]');
ylabel('K');
title('Kalmanovo pojacanje');
legend('pozicija','brzina','ubrzanje');
```