Resolução de Exercícios

Questão 1(c) - Método Mestre

Recorrência: $T(n) = 3T(n/4) + T(n/4) + n^2$

Simplificação

Somando os termos recursivos: $3T(n/4) + T(n/4) = 4T(n/4)$

Logo: **$T(n) = 4T(n/4) + n^2$**

Estrutura geral

Identificamos os parâmetros:

- $a = 4$
- $b = 4$
- $f(n) = n^2$

Calculamos: $n^{(\log_b a)} = n^{(\log_4 4)} = n^1 = n$

Comparação

Comparando $f(n) = n^2$ com $n^{(\log_b a)} = n$: $f(n)$ cresce mais rapidamente. Logo, estamos no **Caso 3 do Método Mestre**.

Condição de regularidade:

$af(n/b) = 4 \cdot (n/4)^2 = n^2/4 \leq cf(n)$, com $c = 1/4 < 1$

Condição satisfeita.

Conclusão

$T(n) = \Theta(n^2)$

Interpretação: O custo quadrático de combinação domina o tempo total. Mesmo com 4 chamadas recursivas, o custo fora da recursão é o fator mais pesado.

Questão 2(b) - Método da Iteração (Expansão)

Recorrência: $T(n) = T(n-3) + n$

Ideia geral

A cada passo, o problema é reduzido em 3 unidades e soma-se um custo $O(n)$. Expandindo sucessivamente, somamos todos os custos até atingir o caso base.

Expansão passo a passo

Substituindo:

$T(n) = T(n-3) + n$

$T(n-3) = T(n-6) + (n-3)$

$T(n) = T(n-6) + n + (n-3)$

Depois de **k** passos:

$T(n) = T(n-3k) + \Sigma(i=0 \text{ até } k-1)\ (n-3i)$

Quando $n - 3k \leq 0$, temos $k \approx n/3$

Soma dos custos

A soma forma uma progressão aritmética:

$S = kn - 3k(k-1)/2$

Substituindo $k = n/3$:

$S = n^2/3 - (3/2)\cdot(n/3)^2 = \Theta(n^2)$

Conclusão

$T(n) = \Theta(n^2)$

Interpretação: O custo de cada chamada cresce linearmente, e há $O(n)$ chamadas até o caso base. Portanto, o custo total é quadrático.

Questão 2(c) - Método da Substituição (Indução)

Recorrência: $T(n) \leq 2T(n/3) + n^2$

O que é o método da substituição

O método da substituição é uma forma de provar formalmente que uma função de recorrência está limitada por uma expressão de crescimento. Ele consiste em:

1. Fazer uma hipótese indutiva (ex: $T(n) \le Cn^2$)
2. Substituí-la na recorrência
3. Escolher constantes que tornem a desigualdade verdadeira

Diferente do Método Mestre, aqui não se descobre a complexidade — se prova uma hipótese já suspeitada.

Hipótese de indução

Suponha que para todo $m < n$:

$T(m) \le Cm^2$

Queremos mostrar que a desigualdade também vale para $T(n)$.

Substituição

Usando a recorrência:

$T(n) \le 2T(n/3) + n^2$

Aplicando a hipótese de indução aos subproblemas:

$T(n) \le 2C(n/3)^2 + n^2 = (2C/9)n^2 + n^2$

Ajuste da constante

Queremos que o resultado final seja menor que Cn^2:

$(2C/9) + 1 \le C \Rightarrow 1 \le C(1 - 2/9) = C(7/9) \Rightarrow C \ge 9/7$

Logo, escolhendo $C = 2$ satisfazemos a desigualdade.

Passo base e observações

Para valores pequenos de n (ex: $n \le n_0$), verificamos manualmente que $T(n) \le Cn^2$. Assim, a indução se mantém para todo $n > n_0$.

Conclusão

Combinando com a análise pelo Método Mestre, temos também $T(n) = \Omega(n^2)$, logo:

$T(n) = \Theta(n^2)$

Interpretação: A recursão gera dois subproblemas menores, mas o custo local n^2 domina. A indução confirma que esse termo é o fator determinante da complexidade.