| | | |
|---|---|---|
| Weiterbildungskurs Metrologie | Modul-Nr.: | MU-02 |
| **Grundlagen der Messunsicherheit** | Dozent: | Dr. M.-O. André |

# Modellierung des Messprozesses

Lernziel:
Erkennen der Zusammenhänge zwischen der resultierenden Messgrösse (Ausgangsgrösse) und den beeinflussenden Eingangsgrössen. Beherrschen der modellmässigen Umsetzung dieser Zusammenhänge hinsichtlich der Erstellung eines Messunsicherheitsbudgets.

## Inhalt

# 1. Messgrösse

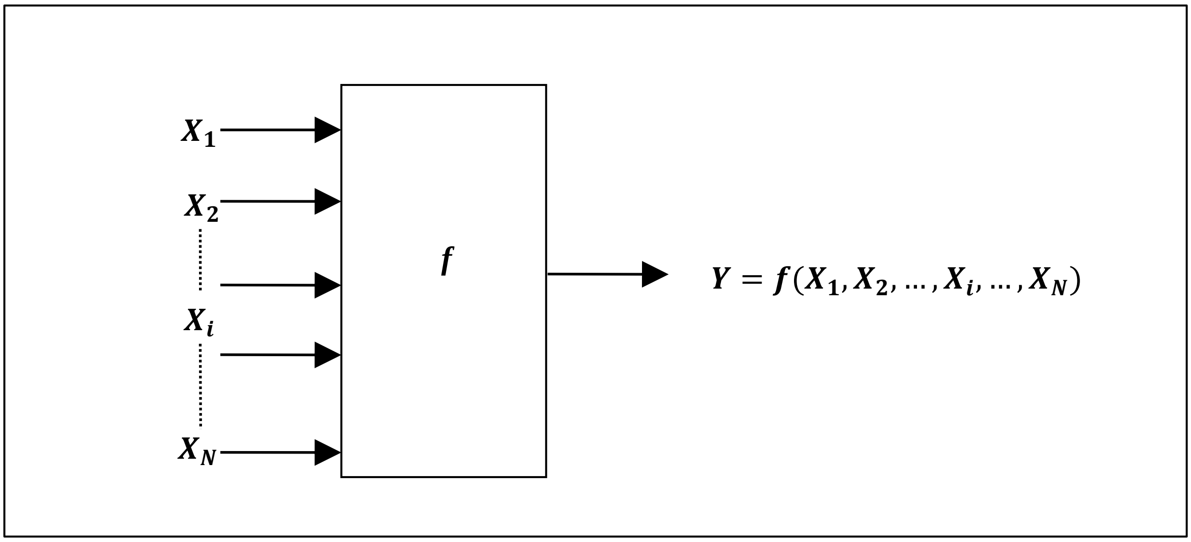
Messgrössen sind physikalische Grössen, deren Werte das Resultat einer Messung ist und damit abhängig vom Messverfahren sind.

Bei Kalibrierungen gibt es meistens nur eine resultierende Messgrösse, die aber von mehreren zu bestimmenden Bezugs- oder Einflussgrössen abhängig ist.

## 1.1 Ausgangs- und Eingangsgrössen

Die resultierende Messgrösse ist die so genannte Ausgangsgrösse. Sie ist immer abhängig von verschiedensten Eingangsgrössen. Der physikalische Zusammenhang zwischen der Ausgangsgrösse $y$ und den Eingangsgrössen $X_i$ wird durch eine mathematische Funktion $f$ beschrieben:

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_N)$$




Die Funktion $f$ beschreibt, wie die Werte der Ausgangsgrösse $Y$ aus den Werten der Eingangsgrössen $X_i$ gewonnen werden. Die Funktion $f$ beschreibt das Messverfahren und das Verfahren zur Auswertung der resultierenden Grösse.

Im speziellen ist zu beachten, dass die Eingangsgrössen oft andere Einheiten besitzen als die zugehörige Ausgangsgrösse. "Unbestimmtheiten" oder "Unzulänglichkeiten" der Eingangsgrössen werden durch die Funktion $f$ auf die Ausgangsgrösse weitergegeben bzw. fortgepflanzt.

## 1.2 Zwei Arten von Eingangsgrössen

Es können zwei verschiedene Arten von Eingangsgrössen unterschieden werden:

a) Direkt gemessene Grössen:
Die Werte dieser Eingangsgrössen werden direkt mit den aktuellen Messungen erfasst.

b) Aus externen Quellen bekannte Grössen:
Die Werte dieser Eingangsgrössen stammen aus Quellen wie Lehrbücher, Kalibrierzertifikate, aber auch von in der Vergangenheit durchgeführten und dokumentierten Messungen.

## 1.3 Die Modellfunktion

Die Modellfunktion $f$ ist das zentrale Element der Messunsicherheitsberechnung, deren ganze Herleitung daraus folgt.

Um die Modellfunktion $f$ aufzuschreiben, empfehlen wir, die zwei folgenden Fragen zu beantworten:

Frage 1: Was wird gemessen?

Frage 2: Wie wird es gemessen?

Von der ersten Frage erwartet man die genaue Messgrösse mit eventuellen Angaben über die Messbedingungen, wie zum Beispiel die Temperatur.

Bei der zweiten Frage möchte man wissen, mit welchem Messgerät die Messung durchgeführt wird. Wird der abgelesene Messwert korrigiert? Wenn ja mit welcher Formel? Wie wird die Kalibrierung einbezogen? Wird die Kalibrierung verifiziert? Welche externen Einflüsse werden berücksichtigt?

Die Modellfunktion wird hier in mehreren Schritten aufgestellt:

Schritt 1: die Formulierung der Grundgleichung

Schritt 2: die Vervollständigung der Grundgleichung mit weiteren Einflussgrössen

Schritt 3: eventuell die Verfeinerung der Modellgleichung

Diese Schritte werden anhand von einigen Beispielen illustriert.

## 1.4 Beispiele für Grundgleichung

### Beispiel Schraubendurchmesser

Der Innendurchmesser von Schrauben wird in einer Produktionsfirma anhand eines Videokamera-Systems direkt auf dem Laufband gemessen. Das Video-System ist ein kommerziell vorhandenes Produkt, das aus einem Set von Kameras mit hoher Auflösung besteht. Eine Software mit künstlicher Intelligenz identifiziert die beweglichen Schrauben und bestimmt deren Durchmesser.

Hiermit lassen sich die zwei Fragen beantworten:

Frage 1: Was wird gemessen?

Antwort: Der Durchmessen $D$ von Schrauben.

Frage 2: Wir wird es gemessen?

Antwort: Das kommerzielle System liefert einen Wert $D_{System}$ direkt. Damit lautet die Grundgleichung:

$$D = D_{\text{System}}.$$

### Beispiel Endmass

Ein Endmass der Länge $l_X$ wird durch eine Vergleichsmessung mit einem Endmassnormal der Länge $l_N$ (aus externer Quelle bekannte Eingangsgrösse, z.B. einem Kalibrierzertifikat) kalibriert, indem der Längenunterschied $\Delta l$ gemessen wird (direkt gemessene Eingangsgrösse):

Frage 1: Was wird gemessen?

Antwort: Die Länge $l_X$ des Endmasses.

Frage 2: Wir wird es gemessen

Antwort: Durch einen Vergleich mit einem bekannten Endmassnormal. Die Grundgleichung lautet damit

$$l_X = l_N + \Delta l.$$

**Beispiel Strom**

Ein Strom $I$ wird durch die Messung des Spannungsabfalls $U$ (direkt gemessene Eingangsgrösse) über einen Widerstand $R$ bestimmt (aus externer Quelle bekannte Eingangsgrösse, z.B. einem Kalibrierzertifikat oder einer vorgängig durchgeführten Messung):

Frage 1: Was wird gemessen?

Antwort: Der Strom $I$.

Frage 2: Wir wird es gemessen?

Antwort: Durch die Messung des Spannungsabfalls $U$ über einen Widerstand $R$ unter Verwendung des Ohmschen Gesetzes:

$$I = \frac{U}{R}$$

# 2. Aufstellung der Modellfunktion

## 2.1 Grundgleichung vs. Modellfunktion

Die Grundgleichungen sind noch keine Modellfunktion im Sinne des GUM [1]. Zum Beispiel beschreiben die Gleichungen

$$D = D_{\text{System}},$$

$$l_X = l_N + \Delta l,$$

$$I = \frac{U}{R}$$

den mathematischen Zusammenhang zwischen der Ausgangsgrösse und den gemessenen oder aus externen Quellen erhaltenen Grössen. Die Modellfunktion muss alle Effekte, Unsicherheitsquellen und Streuungsquellen berücksichtigen, die das Messverfahren beeinflussen können.

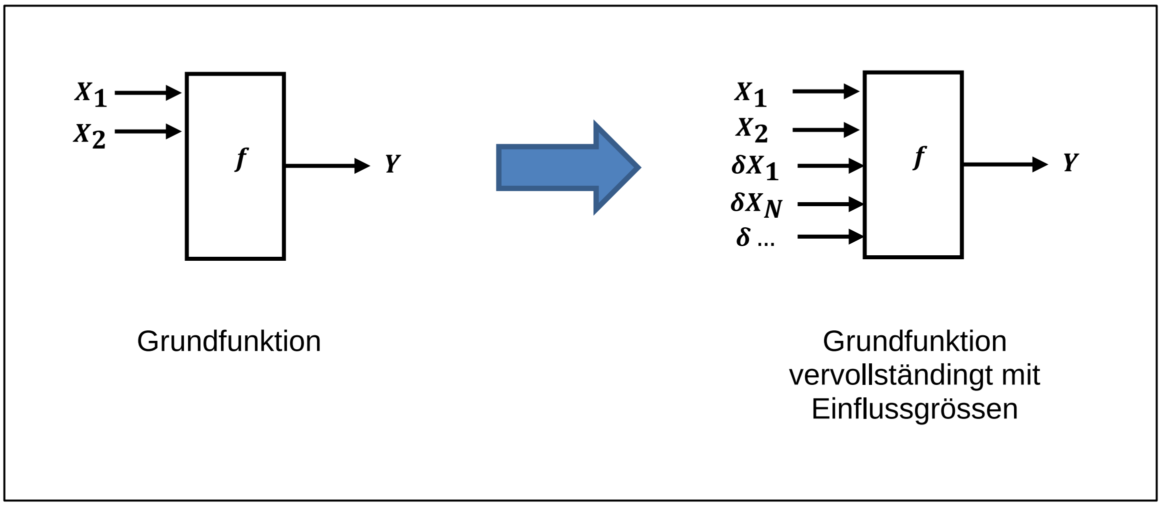
## 2.2 Einflussgrössen

In Messprozessen gibt es nicht nur die vorgängig erläuterten „primären" Eingangsgrössen, sondern stets auch zahlreiche äussere Einflüsse, die durch „sekundäre" Abhängigkeiten das Messresultat in meist ungewollter Art „stören". Diese sekundären Einflüsse stellen ihrerseits Eingangsgrössen zu den vorgängig beschriebenen primären Eingangsgrössen dar. So sind beispielsweise Materialeigenschaften, wie die räumliche Ausdehnung, der elektrische Widerstand und andere mehr von der Temperatur beeinflusst. Die Temperatur stellt aber in diesen Fällen nicht zwingend eine effektiv interessierende Eingangsgrösse dar, sondern wird eher als Störgrösse wahrgenommen. Nichtsdestoweniger stellen solche Einflussgrössen im Sinne der Messunsicherheitsbetrachtungen „vollwertige" Eingangsgrössen dar und ihr Einfluss auf die eigentliche Ausgangsgrösse kann bei Messungen hoher Genauigkeit äusserst relevant sein!

Das heisst, dass das Aufstellen der Modellfunktion eine vertiefte Analyse des Messprozesses bedarf, insbesondere die Berücksichtigung von allen Einflussgrössen, die das Messverfahren beeinflussen können, wie zum Beispiel:

- die Kalibrierung,
- die Verifikation,
- die Wiederholbarkeit,
- die Langzeitstabilität,
- die Reproduzierbarkeit,
- die externen Einflüsse (Temperatur, Vibration, ...),
- die systematischen Korrekturen.

Die Grundgleichung wird also vervollständigt, um die Einflussgrössen zu berücksichtigen. In der Regel wird nach dem GUM [1] eine mathematische Variable pro Effekt definiert. Schematisch lässt sich dies wie folgt darstellen:




Bemerkungen:

1. Die Einflussgrössen beschreiben Effekte, die in der Regel nicht gemessen werden (z.B. Temperatur).

2. Nach dem GUM [1] sind die Einflussgrössen **Eingangsgrössen** im vollen Sinne. Es gibt nämlich keinen formellen Unterschied zwischen
   - einer Eingangsgrösse die gemessen wird,
   - einer Einflussgrösse die nicht gemessen wird.

3. Einflussgrössen die nicht gemessen werden haben in der Regel einen (Erwartungs)-Wert von 0. Sie liefern aber einen **signifikanten** Beitrag zur Messunsicherheit.

4. Einflussgrössen werden zum Teil mit dem Symbol $\delta\ldots$ dargestellt. Diese intuitive Notation ist nicht Teil des GUMs [1].

## 2.3 Beispiele von Einflussgrössen

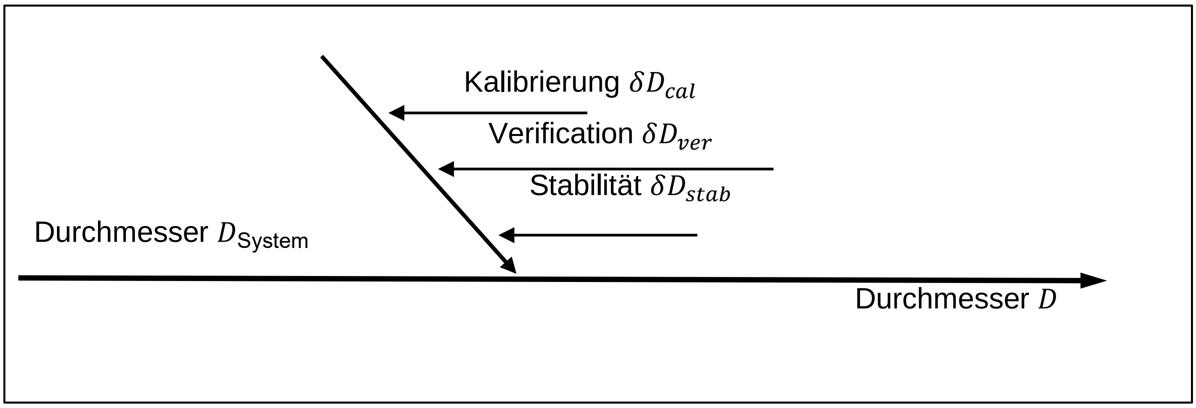
Die im § 1.4 vorgestellten Beispiele können in der Folge mit Betrachtungen zu gegebenenfalls vorhandenen Störeinflüssen ergänzt werden. Die nachfolgenden Darlegungen beschränken sich auf ein Paar markante oder signifikante Einflussgrössen für jedes Beispiel.

### Beispiel Schraubendurchmesser

Der Innendurchmesser von Schrauben wird anhand eines Videokamera-Systems bestimmt. Weil das System schon einen "fertigen" Wert liefert, muss man sich fragen wie das System kalibriert wird. In diesem Fall werden folgenden Einflussgrössen berücksichtigt:

- $\delta D_{\mathrm{cal}}$ Kalibrierfehler resultierend aus der Kalibrierung mittels eines Kalibriernormals
- $\delta D_{\mathrm{ver}}$ Verifikationsfehler aus der Verifikation mittels Verifikationsnormale
- $\delta D_{\mathrm{stab}}$ Stabilität des Systems über die Messzeit

Es ist äusserst wichtig, bei der Modellierung und Validierung von Messprozessen möglichst alle Einflussgrössen zu identifizieren, um in der Folge deren Auswirkung auf das Messresultat quantitativ abschätzen zu können.
Das so genannte Fischgrat-Diagramm, auch "Ursachen-Wirkungs-Diagramm" genannt, ist ein Hilfsmittel für eine schematische Visualisierung des Zusammenhangs zwischen der Ausgangsgrösse einerseits und den Eingangs- und deren Einflussgrössen andererseits. In diesem Beispiel sieht das Fischgrat-Diagramm so aus:




Die Modellfunktion (oder Modellgleichung) lässt sich folgendermassen aufschreiben:

$$D = D_{\text{System}} + \delta D_{cal} + \delta D_{ver} + \delta D_{stab}.$$

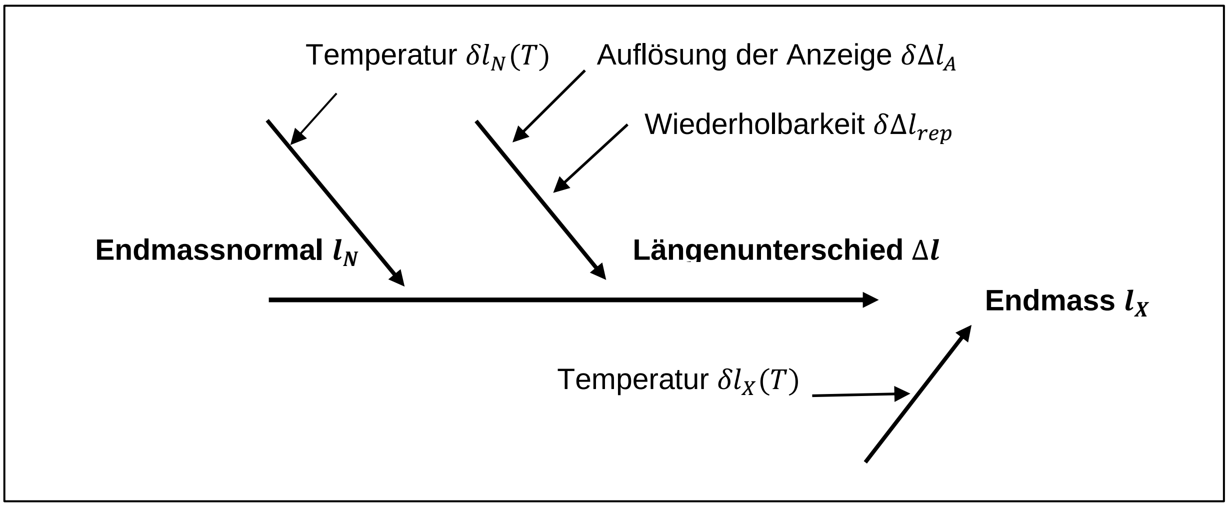
**Beispiel Endmass**

Die Länge $l_X$ eines Endmasses wird durch eine Vergleichsmessung mit einem Endmassnormal der Länge $l_N$ bestimmt.

Die Längenangaben für Massverkörperungen sind stets für eine Bezugstemperatur von 20 °C anzugeben. Weicht die aktuelle Temperatur der Endmasse bei der Vergleichsmessung von 20 °C ab, so sind die entsprechenden, eventuell unterschiedlichen, Temperatureinflüsse auf die Längen der Endmasse zu berücksichtigen. Folgende Einflussgrössen werden berücksichtigt:

- $\delta l_X(T)$ Effekt der thermischen Ausdehnung des Prüflings
- $\delta l_N(T)$ Effekt der thermischen Ausdehnung des Normals
- $\delta \Delta l_A$ Auflösung Anzeige Endmasskomparator
- $\delta \Delta l_{rep}$ Wiederholbarkeit Endmasskomparator

Das Fischgrat-Diagramm sieht so aus:




Die Modellgleichung lässt sich folgenderweise aufschreiben:

$$l_X + \delta l_X(T) = \left(l_N + \delta l_N(T)\right) + \left(\Delta l + \delta\Delta l_A + \delta\Delta l_{rep}\right).$$

Die Temperatur hat in diesem Beispiel einen Einfluss $\delta l_X(T)$ auf die zu messende Grösse $l_X$. Aus diesem Grund erscheint die Einflussgrösse auf der linken Seite der Gleichung. Die endgültige Modellgleichung wird korrigiert, um diese Einflussgrösse auf der rechten Seite zu haben:

$$l_X = \left(l_N + \delta l_N(T)\right) + \left(\Delta l + \delta\Delta l_A + \delta\Delta l_{rep}\right) - \delta l_X(T)$$

### Beispiel Strom

Ein Strom $I$ wird durch die Messung des Spannungsabfalls $U$ (direkt gemessene Eingangsgrösse) über einen Widerstand $R$ bestimmt.

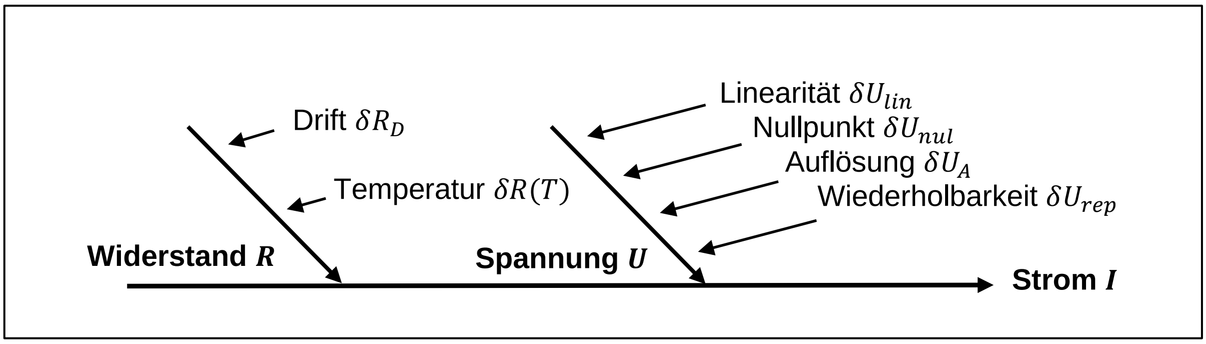
Der für den Widerstand $R$ aus einem Kalibrierzertifikat entnommene Wert $R(Kal)$ gilt für eine bestimmte Bezugstemperatur. Weicht die aktuelle Temperatur des Widerstands von dieser Bezugstemperatur ab, so ist mit Hilfe des spezifischen zugehörigen Temperaturkoeffizienten, z.B. vom Hersteller angegeben, eine Korrektur zu berechnen.

Bei Spannungs- und Widerstandsmessungen können weitere, unter Umständen signifikante Störungen durch parasitäre Thermospannungen an verschiedensten Anschlusspunkten auftreten. Diese störenden Spannungen sollten direkt gemessen und zumindest durch messtechnische Vorkehrungen minimiert werden.

Die folgenden Einflussgrössen werden berücksichtigt:

- $\delta U_{lin}$ Linearitätsabweichung Voltmeter
- $\delta U_{rep}$ Wiederholbarkeit Ablesung Voltmeter
- $\delta U_{nul}$ Korrektur für Nullpunktgenauigkeit Voltmeter
- $\delta U_A$ Korrektur für Auflösung Anzeige Voltmeter
- $\delta R_D$ Korrektur für Drift Normalwiderstand
- $\delta R(T)$ Korrektur für Temperaturabhängigkeit Normalwiderstand

Das Fischgrat-Diagramm sieht so aus:




Die Modellgleichung lässt sich folgenderweise aufschreiben:

$$I = \frac{U + \delta U_{lin} + \delta U_{rep} + \delta U_{nul} + \delta U_A}{R + \delta R_D + \delta R(T)}$$

# 3. Verfeinerung der Modellfunktion

Je nach Situation und Genauigkeitsbedarf, müssen die in § 2.2 definierten Eingangsgrössen präzisiert werden. Im Beispiel Endmass ist der Effekt der thermischen Ausdehnung des Prüfling mit der Variable $\delta l_X(T)$ beschrieben. Diese Einflussgrösse berücksichtigt die Streuung, die, infolge von Temperaturschwankungen, auf die Länge des zu messenden Prüfling auswirkt. Wenn man die Möglichkeit hätte, die Temperatur des Prüflings während der Messung zu bestimmen, dann könnte man diesen Einfluss korrigieren. Diese Präzisierung der Einflussgrösse $\delta l_X(T)$ lässt sich folgendermassen aufschreiben:¨

$$\delta l_N(T) = l_N \cdot \alpha_N \cdot (T - T_0).$$

Damit werden neue Eingangsgrössen definiert, die dann auch ausgewertet oder gemessen werden müssen:

- $l_N$ Länge des Endmassnormals
- $\alpha_N$ Ausdehnungskoeffizient des Normals
- $T$ Temperatur des Normals
- $T_0$ Referenztemperatur (in der Regel 20 ºC)

Mit diesem Schritt lässt sich die ursprüngliche Modellgleichung verfeinern

$$l_X = \left(l_N + \delta l_N(T)\right) + \left(\Delta l + \delta\Delta l_A + \delta\Delta l_{rep}\right) - \delta l_X(T),$$

was auch in dem folgenden Gleichungssystem dargestellt werden kann (die Substitution wird aus ästhetischen Gründen nicht gemacht)

$$\begin{cases} l_X = \left(l_N + \delta l_N(T)\right) + \left(\Delta l + \delta\Delta l_A + \delta\Delta l_{rep}\right) - \delta l_X(T) \\ \delta l_X(T) = l_X \alpha_X (T - 20°C) \\ \delta l_N(T) = l_N \alpha_N (T - 20°C) \end{cases}$$

Dieses Gleichungssystem beschreibt die vervollständigte **Modellfunktion**, d. h. heisst jede Modellgleichung kann potenziell noch weiter verfeinert werden. Je nach Situation werden zusätzliche Messgrössen erfasst, die dann konkret zu Korrekturen des angezeigten Messwerts beitragen können.

# 4. Schlussbemerkung und Zusammenfassung

## 4.1 Vereinfachte Darstellung

Im Beispiel Strom wurde die Modellfunktion, die die wesentlichen Einflussfaktoren berücksichtigt, definiert:

$$I = \frac{U + \delta U_{lin} + \delta U_{rep} + \delta U_{nul} + \delta U_A}{R + \delta R_D + \delta R(T)}$$

Diese Gleichung zeichnet sich dadurch aus, dass jeder Einfluss durch eine mathematische Variable beschrieben wird. Dies ist die korrekte Darstellung der Modellfunktion nach GUM [1].

In bestimmten Situationen, weil die Gleichung nicht gut lesbar ist und weil sich die Einflussgrössen entweder auf Spannungsmessungen oder auf den Widerstand beziehen, wird die obige Gleichung wie folgt dokumentiert:

$$I = \frac{U}{R}$$

Mit folgenden Einflussgrössen:

- für die Spannungsmessung
    - Linearitätsabweichung Voltmeter
    - Wiederholbarkeit Ablesung Voltmeter
    - Korrektur für Nullpunktgenauigkeit Voltmeter
    - Korrektur für Auflösung Anzeige Voltmeter
- für die Widerstandsmessung
    - Korrektur für Drift Normalwiderstand
    - Korrektur für Temperaturabhängigkeit Normalwiderstand

In dieser Darstellung werden die Variablen der Einflussgrössen nicht definiert. Aus Sicht der Unsicherheitsanalyse, insbesondere der Liste der Streuungsfaktoren, ist diese Schreibmethode der Modellfunktion nach GUM [1] ähnlich. Eine intelligente Interpretation dieser Daten führt ebenfalls direkt zur Modellfunktion nach GUM [1].

**Empfehlung**

Obwohl der Informationsgehalt beider Darstellungen ähnlich ist, empfehlen wir, auf die vereinfachte Darstellung zu verzichten, zum einen, weil sie nicht GUM-konform ist [1], zum anderen, weil die detaillierte Modellfunktion nach GUM [1] konzeptionell klar ist und zur Verfeinerung des Modells einlädt.

## 4.2 Zusammenfassung

In diesem Modul wurde die Modellfunktion nach GUM [1] vorgestellt. Diese Funktion ist der zentrale Punkt der Messunsicherheitsberechnung. Alle weiteren Schritte werden von dieser Funktion abgeleitet. Die Modellfunktion für eine gegebene Aufgabe ist nicht eindeutig, sondern sie kann immer verbessert und verfeinert werden. Diese ist anhand der folgenden Skizze dargestell:


**Grobes Modell**
**(Black Box-Ansatz)**

- Wenige zu messenden Eingangsgrössen
- Mehrere Einflussgrössen, die nicht gemessen werden (= 0)

➔ Grossere Unsicherheiten

**Feines Modell**

- Mehr zu messenden Eingangsgrössen
- Viele Einflussgrössen werden anhand von Messungen korrigiert

➔ Kleinere Unsicherheiten

Bei gröberen Modellen, manchmal Black-Box-Ansatz genannt, ist die Anzahl der zu messenden Eingangsgrössen klein. In gewissen Situation hat man sogar nur eine Eingangsgrösse. Dafür werden alle Einflussgrössen als zusätzliche Eingangsgrössen definiert, die in der Regel nicht gemessen werden. Ihre Streuung wird als Unsicherheitsanalyse quantifiziert. Weil die Einflussgrössen nicht im Detail gemessen werden, lässt sich aus diesen Modellen eher grössere Unsicherheiten bestimmen.

Im Gegensatz werden die meisten Einflussgrössen bei feinen Modellen dank der Bestimmung von zusätzlichen Eingangsgrössen (Temperatur, Druck) verfeinert. Die systematischen Effekte lassen sich damit voll korrigieren, so dass in der Regel kleinere Unsicherheiten erzielt werden.

In einer konkreten Situation kann man irgendwo zwischen diesen zwei Extremen arbeiten, abhängig davon welche Präzisionsanforderungen gewünscht sind.

# 5. Referenz


[1] JCGM 100: “Evaluation of measurement data — Guide to the expression of uncertainty in measurement” 2008 (verfügbar über die Suchfunktion auf http://www.bipm.org)