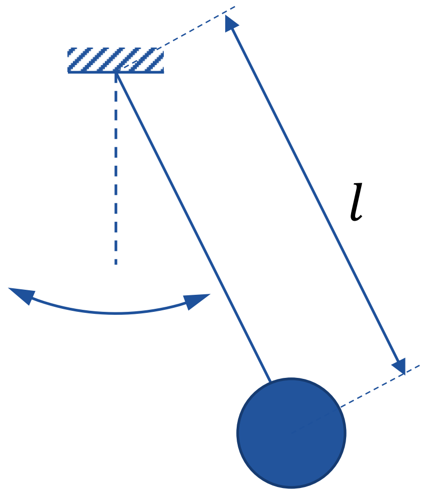
Schweizerische Eidgenossenschaft
Confédération suisse
Confederazione Svizzera
Confederaziun svizra

Eidgenössisches Institut für Metrologie METAS

Messung der Erdbeschleunigung mittels eines Pendels

Frédéric Pythoud

Das Pendel



Radius der Kugel: r

In einem Gravitationsfeld g schwingt das Pendel mit einer Periode τ

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{l^2 + \frac{2}{5} r^2}{g \cdot l}}$$

Prinzip für die Herleitung der Formel

Die Formel lässt sich aus dem Drehimpulssatz herleiten:

..

$$\sum \overrightarrow{\mathcal{M}} = \frac{d\vec{\mathcal{L}}}{dt}$$

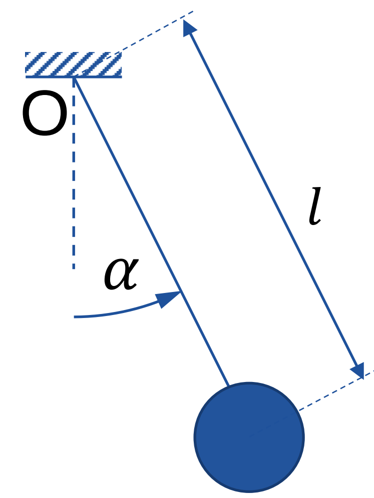
- $\sum \overrightarrow{\mathcal{M}}$ Summe aller Drehmomente
- $\vec{\mathcal{L}}$ Drehimpuls

Bedingungen:

- Rotationspunkt: Anbringungspunkt des Pendels
- Analyse der Gleichung in der Achse senkrecht zur Schwingungsebene
- Annahme: keine Reibung (Luft, Achse…)

Die Herleitung

Man bekommt



$$\sum \mathcal{M} = -m \cdot l \cdot \sin(\alpha)$$

$$\mathcal{L} = I \cdot \dot{\alpha}$$

mit

α	Winkel des Pendels mit der vertikalen Achse
$\dot{\alpha}$	Winkelgeschwindigkeit (erste zeitliche Ableitung)
m	Masse der Kugel
I	Trägheitsmoment der Kugel bezüglich des Rotationspunkts O:

$$I = m \cdot l^2 + \frac{2}{5} m \cdot r^2$$

Rechnung

Für kleine Bewegungen (kleiner Winkel α) gilt: $\sin(\alpha) \cong \alpha$. Das heisst:

$$I \cdot \ddot{\alpha} \cong -m \cdot l \cdot \alpha$$

Die Lösung lässt sich folgenderweise schreiben:

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{t}{\tau}\right)$$

mit

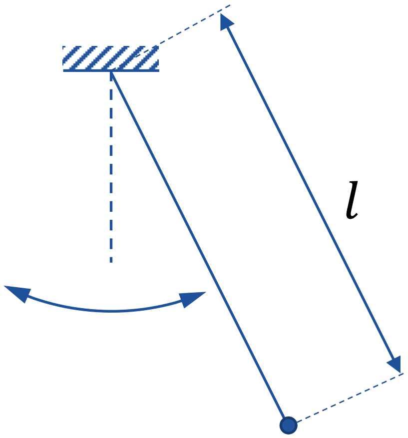
$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{I}{m \cdot g \cdot l}}$$

und

α_0 Startwinkel

$\ddot{\alpha}$ Winkelbeschleunigung (zweite zeitliche Ableitung)

Einfaches Pendel



Annahme:

- $r = 0 \;\Rightarrow\; I = m \cdot l^2$

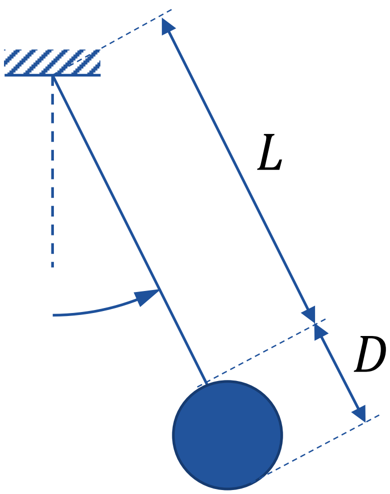
Schwingungsperiode:

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad \leftrightarrow \qquad g = \frac{4\pi^2}{\tau^2} \cdot l$$

Pendel mit Kugel

Schwingungsperiode:

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{I}{m \cdot g \cdot l}} \quad \leftrightarrow \quad g = \frac{4\pi^2}{\tau^2} \cdot \frac{I}{m \cdot l}$$



Nach Umdefinition der Messgrössen:

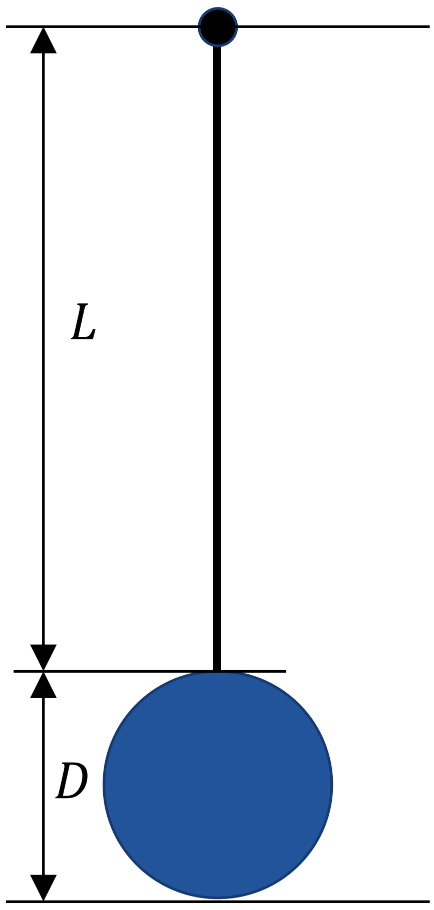
$$l = L + D/2$$

$$r = \frac{D}{2}$$

gilt

$$g = \frac{4\pi^2}{\tau^2} \cdot \left(L + \frac{D}{2} + \frac{D^2}{5(2L + D)}\right)$$

Bestimmung der Dimensionen des Pendels



Messbare dimensionelle Grössen:

- Periode τ
- Länge des Hebels (oder Draht) L
- Durchmesser D

Daraus erhält man die Gleichung für die Erdbeschleunigung:

$$g = \frac{4\pi^2}{\tau^2} \cdot \left(L + \frac{D}{2} + \frac{D^2}{5(2L + D)} \right)$$

Pendel Übung 1 – Messung

Messung der Messgrössen

- Periode τ
- Länge des Hebels/Draht L
- Durchmesser D

Etwa 95 Minuten zur Verfügung

Einflussgrössen

***g*: Erdbeschleunigung**

T_0: Periode	D: Durchmesser	L: Länge des Hebels
Operator	Massstab	Massstab
Ablesung	Ablesung	Ablesung
Stoppuhr	Temperatur	Temperatur
Temperatur		Verformung
Reibung		

vernachlässigen

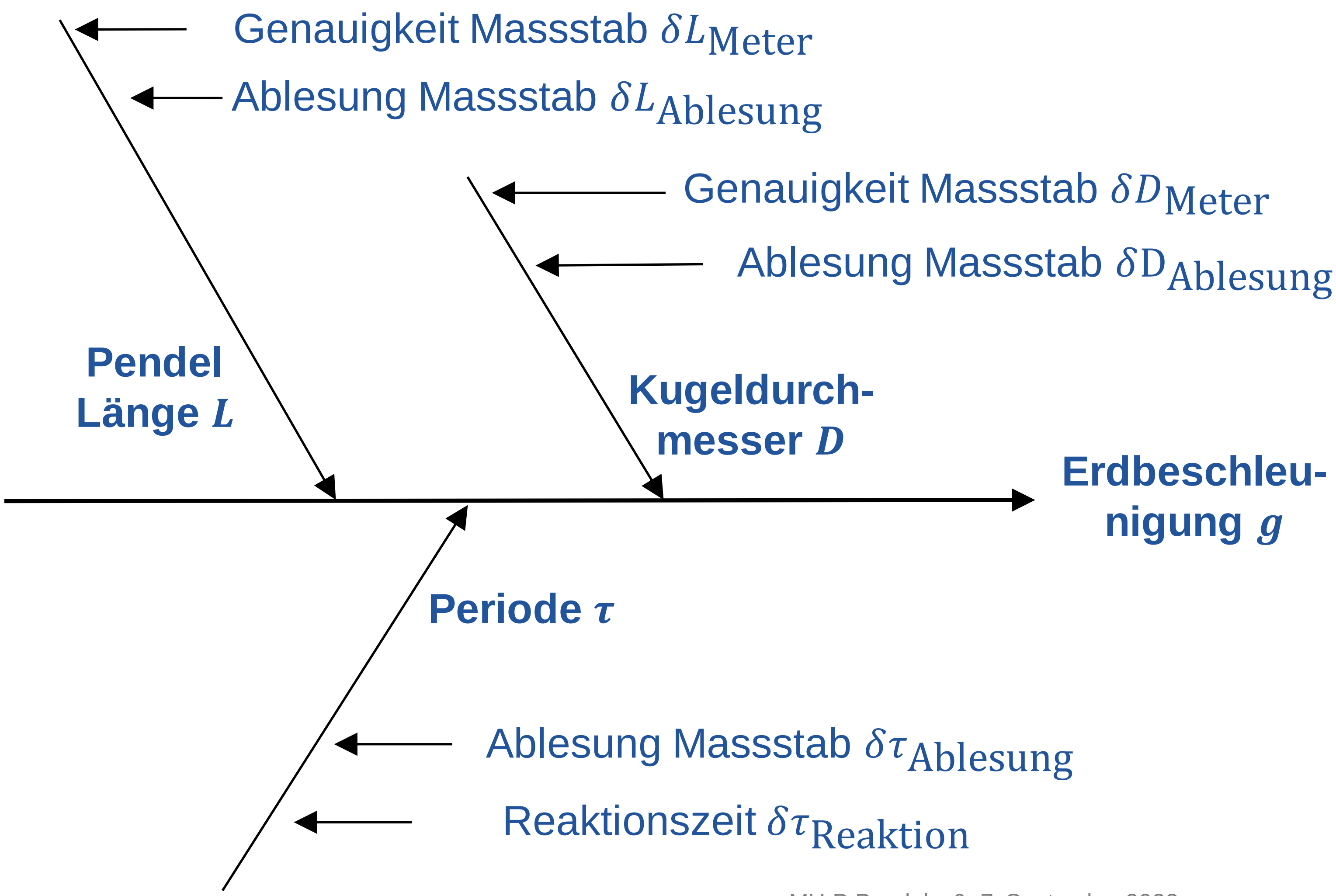
Pendel Übung 2 – Einflussgrössen

- Bestimmung der Einflussgrössen

- Evaluation der Einflussgrössen

Etwa 30 Minuten zur Verfügung

Pendel Übung 2 – Einflussgrössen



Pendel Übung 2 – Modelgleichung

$$g = \frac{4\pi^2}{\tau^2} \cdot \left(L + \frac{D}{2} + \frac{D^2}{5(2L + D)} \right)$$

$$\tau = \tau_{\text{gemessen}} + \delta\tau_{\text{Ablesung}} + \delta\tau_{\text{Reaktion}}$$

$$L = L_{\text{gemessen}} + \delta L_{\text{Meter}} + \delta L_{\text{Ablesung}}$$

$$D = D_{\text{gemessen}} + \delta D_{\text{Meter}} + \delta \mathrm{D}_{\text{Ablesung}}$$