Ermittlung der Standardunsicherheit

Frédéric Pythoud

Lernziel

- Verstehen des Begriffs „**Standardunsicherheit**“

- Kenntnis der Methoden zur **Bestimmung** der Standardunsicherheit

Inhalt

Theorie (60 min)

- Statistik
- Was ist eine Messung?
- Standardunsicherheit
- Typ A und Typ-B-Abschätzung der Unsicherheit

Praktische Übung (60 min)

- Praktische Ermittlung von Standardunsicherheiten am Beispiel des Pendels

Begriffe

- **Grundgesamtheit**
  Gesamte Menge der durch die statistische Untersuchung erfassbaren Elemente
- **Stichprobe**
  Teilmenge der in der statistischen Untersuchung erfassten Elemente
- **Häufigkeitsverteilung**
  Häufigkeit der Elemente einer Grundgesamtheit (oder Stichprobe), geordnet nach der statistisch untersuchten Grösse; als Grafik → Histogramm
- **Wahrscheinlichkeit**
  Eintretenshäufigkeit: Zahl im Bereich von 0 bis 1 (0 bis 100%)
- **Wahrscheinlichkeitsverteilung**
  Funktion, welche die Wahrscheinlichkeit angibt, mit der eine Zufallsgrösse einen bestimmten Wert annimmt;
  kumulative Wahrsch.verteilung → **Verteilungsfunktion**

Wiederholte Durchführung von Messungen

Nicht stabile Ablesungen eines Messinstrumentes

Wiederholungsmessungen geben Mass für Streuung und einen verlässlicheren Mittelwert als eine Einzelmessung

Füllmenge einer Fertigpackung

Gleiche Messung wird an verschiedenen Objekten wiederholt.

Darstellung zufällig verteilter Messwerte

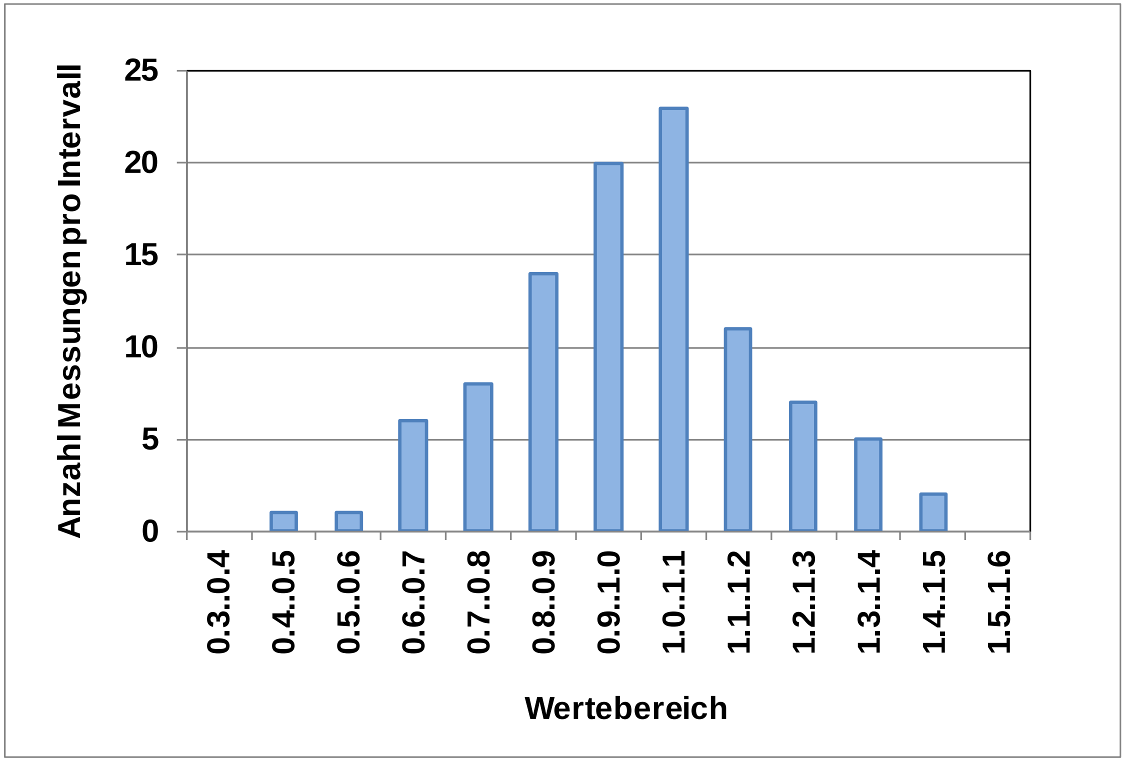
0.524	0.980	0.895	1.254	1.071	0.835	1.176	1.063	0.703	1.150
0.672	1.137	0.616	1.020	1.209	1.001	0.908	1.079	0.994	1.050
1.381	1.023	0.814	1.109	0.907	1.243	1.038	1.091	0.987	1.320
0.689	1.057	0.831	0.788	0.903	0.856	1.013	0.909	1.087	1.245
1.047	1.107	1.060	1.410	1.101	0.860	0.932	1.161	0.994	0.468
1.227	0.864	0.943	0.611	1.076	1.345	0.857	1.093	0.785	0.984
1.059	0.889	0.730	0.628	0.755	1.332	0.861	1.047	0.832	1.189
1.222	0.999	0.996	0.716	1.115	1.005	1.046	0.765	1.427	0.929
0.764	0.805	1.018	1.388	1.177	0.862	0.981	0.869	1.248	0.806
1.128	0.908	0.624	1.048	0.966	0.959	0.980	0.863	1.076	0.980

Darstellung zufällig verteilter Messwerte

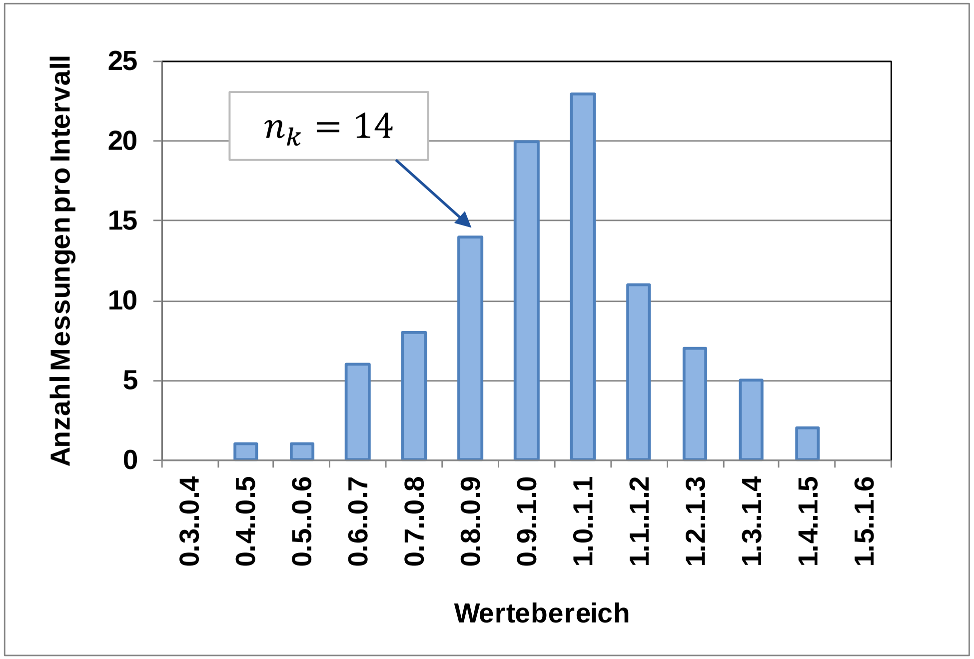
0.524	0.980	0.895	1.254	1.071	0.835	1.176	1.063	0.703	1.150
0.672	1.137	0.616	1.020	1.209	1.001	0.908	1.079	0.994	1.050
1.381	1.023	0.814	1.109	0.907	1.243	1.038	1.091	0.987	1.320
0.689	1.057	0.831	0.788	0.903	0.856	1.013	0.909	1.087	1.245
1.047	1.107	1.060	1.410	1.101	0.860	0.932	1.161	0.994	0.468
1.227	0.864	0.943	0.611	1.076	1.345	0.857	1.093	0.785	0.984
1.059	0.889	0.730	0.628	0.755	1.332	0.861	1.047	0.832	1.189
1.222	0.999	0.996	0.716	1.115	1.005	1.046	0.765	1.427	0.929
0.764	0.805	1.018	1.388	1.177	0.862	0.981	0.869	1.248	0.806
1.128	0.908	0.624	1.048	0.966	0.959	0.980	0.863	1.076	0.980

Bereich	Häufigkeit
0.3 .. 0.4	0
0.4 .. 0.5	1
0.5 .. 0.6	1
0.6 .. 0.7	6
0.7 .. 0.8	8
0.8 .. 0.9	14
0.9 .. 1.0	20
1.0 .. 1.1	23
1.1 .. 1.2	11
1.2 .. 1.3	7
1.3 .. 1.4	5
1.4 .. 1.5	2
1.5 .. 1.6	0

Histogramm



Häufigkeitsverteilung



Wahrscheinlichkeit, dass sich der Messwert X im Intervall I_k befindet:

$$\Pr(X \in I_k) = \frac{n_k}{n} = p_k$$

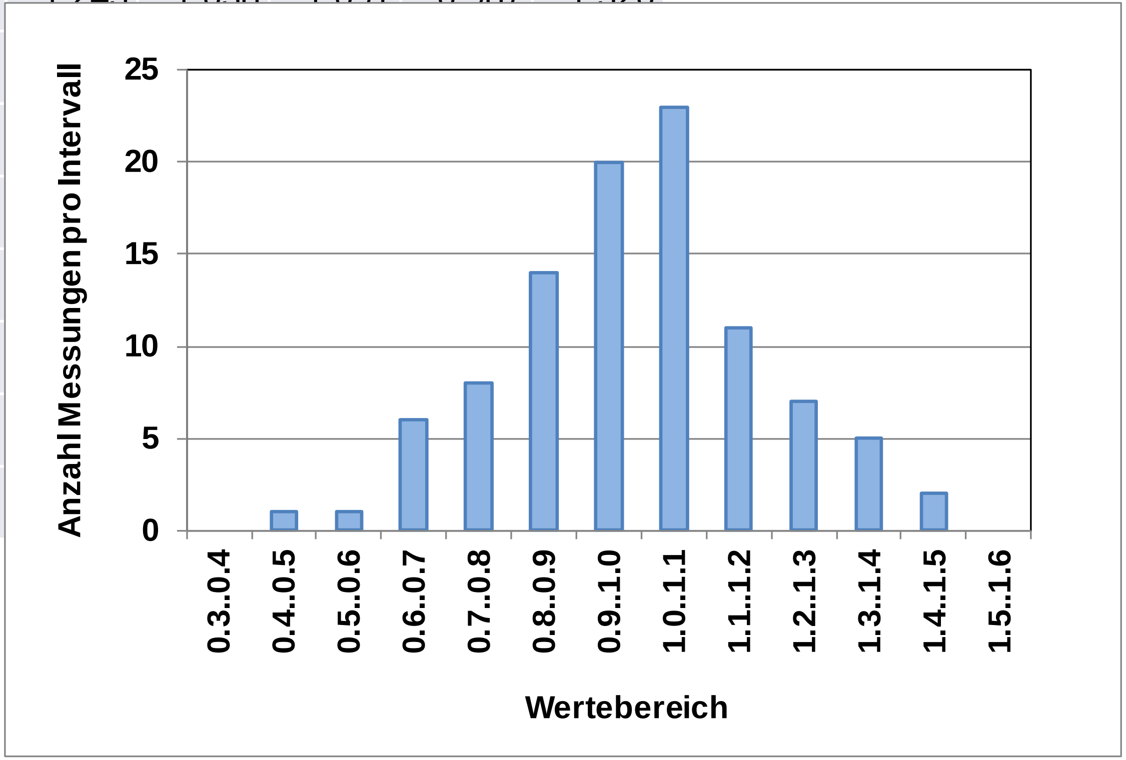
relative Höhe der Säule *k*

Summe aller Teilwahrscheinlichkeiten:

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$$

Auswertung zufällig verteilter Messwerte

0.524	0.980	0.895	1.254	1.071	0.835	1.176	1.063	0.703	1.150
0.672	1.137	0.616	1.020	1.209	1.001	0.908	1.079	0.994	1.050
1.381	1.023	0.814	1.109	0.907	1.243	1.038	1.091	0.987	1.320
0.689	1.057	0.831	0.788	0.903					
1.047	1.107	1.060	1.410	1.101					
1.227	0.864	0.943	0.611	1.076					
1.059	0.889	0.730	0.628	0.755					
1.222	0.999	0.996	0.716	1.115					
0.764	0.805	1.018	1.388	1.177					
1.128	0.908	0.624	1.048	0.966					



Einfache, statistische Kenngrössen?

Einfache statistische Kenngrössen

Annahme: wir haben die n unabhängige Beobachtungen x_k unter den gleichen Messbedingungen. Der Buchstabe x steht für irgendeine Grösse (Quantity)

Mittelwert (Erwartungswert, Schätzwert)

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

Zentralwert oder Median: Der Median einer Menge von Elemente ist der Wert desjenigen Elementes, für das es gleich viele grössere und kleiner Werte in der Menge gibt.

Einfache statistische Kenngrössen

Empirische Varianz:

$$s^2(x) = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2$$

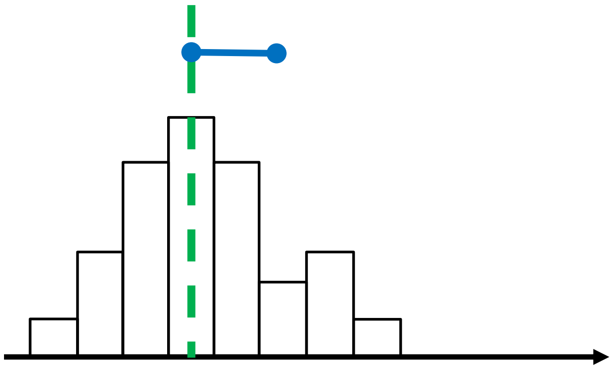
Empirische Standardabweichung:

$$s(x) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2}{n-1}}$$

Empirische Standardabweichung des Mittelwerts:

$$s(\bar{x}) = \frac{s(x)}{\sqrt{n}}$$

Einfache statistische Kenngrössen



Die Häufigkeitserteilung kann anhand statistischer Grössen charakterisiert werden:

1. Der **Mittelwert**

2. Die breite der Verteilung: die **Standardabweichung**

Auswertung zufällig verteilter Messwerte

1 ... 100

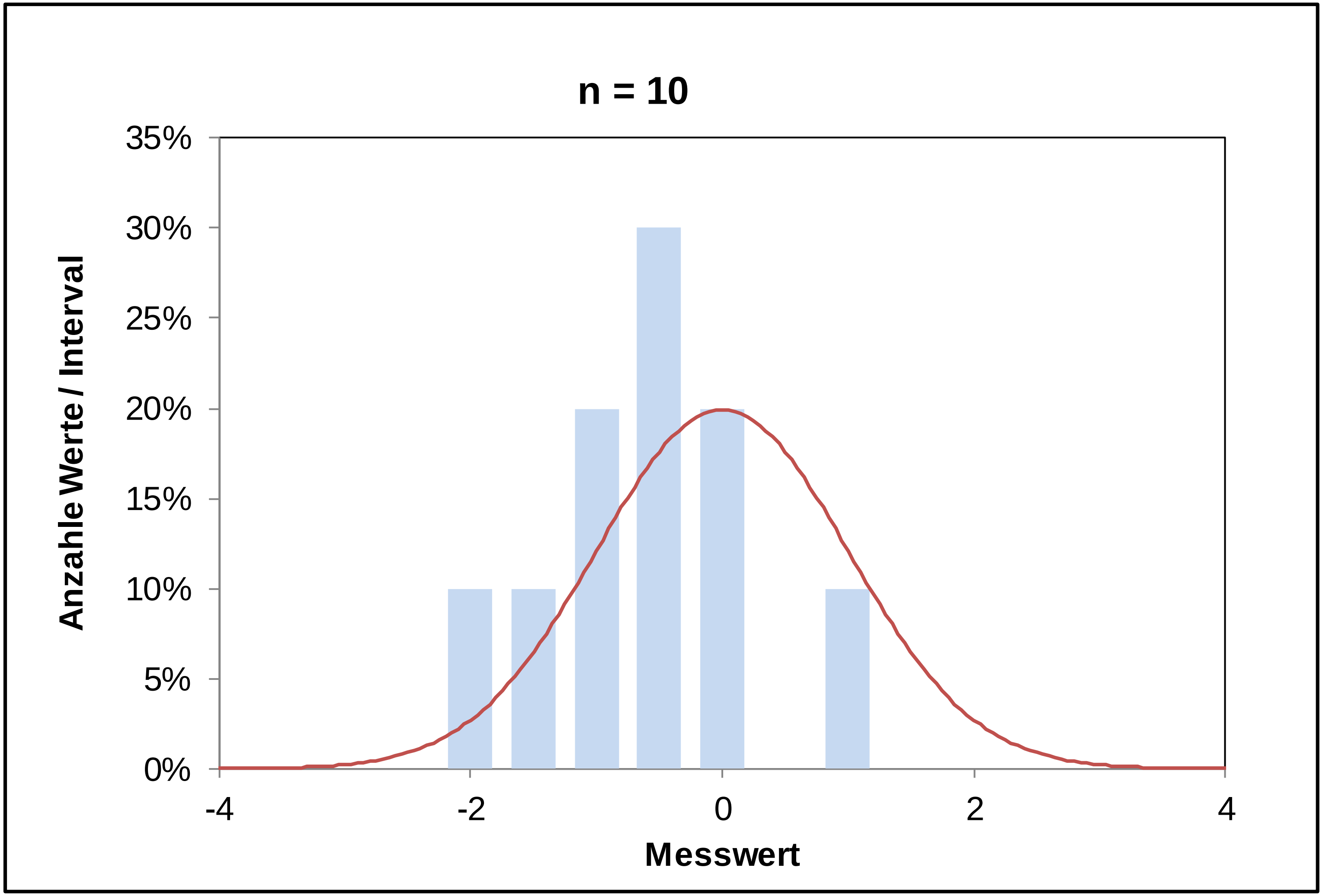
1 ... 30

1 ... 10

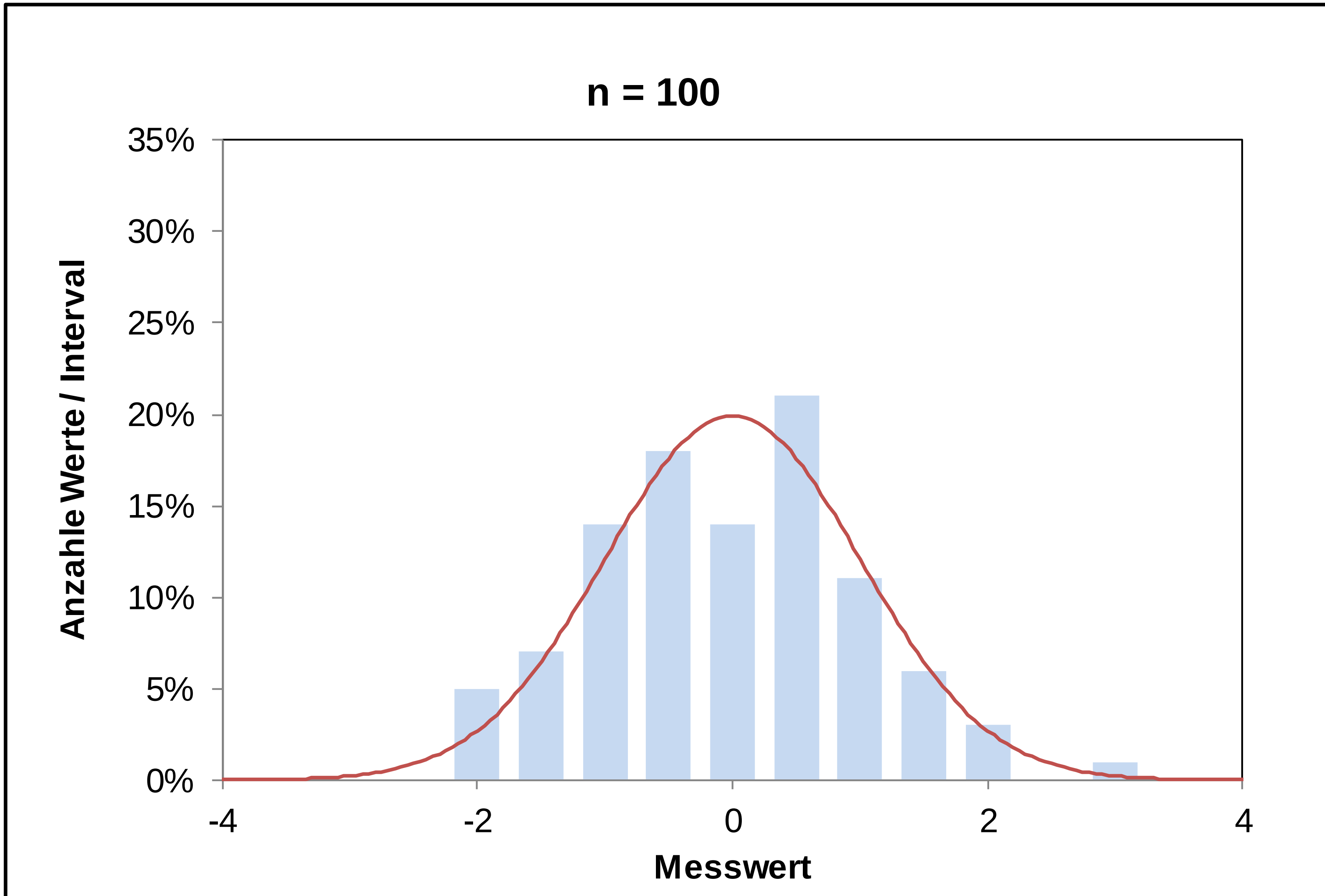
0.524	0.980	0.895	1.254	1.071	0.835	1.176	1.063	0.703	1.150
0.672	1.137	0.616	1.020	1.209	1.001	0.908	1.079	0.994	1.050
1.381	1.023	0.814	1.109	0.907	1.243	1.038	1.091	0.987	1.320
0.689	1.057	0.831	0.788	0.903	0.856	1.013	0.909	1.087	1.245
1.047	1.107	1.060	1.410	1.101	0.860	0.932	1.161	0.994	0.468
1.227	0.864	0.943	0.611	1.076	1.345	0.857	1.093	0.785	0.984
1.059	0.889	0.730	0.628	0.755	1.332	0.861	1.047	0.832	1.189
1.222	0.999	0.996	0.716	1.115	1.005	1.046	0.765	1.427	0.929
0.764	0.805	1.018	1.388	1.177	0.862	0.981	0.869	1.248	0.806
1.128	0.908	0.624	1.048	0.966	0.959	0.980	0.863	1.076	0.980

Auswertebereich	$\overline{x}$	*Median*	s	$s(\overline{x})$
1 ... 10	0.965	1.022	0.228	0.072
1 ... 30	1.008	1.031	0.202	0.037
1 ... 100	0.985	0.995	0.198	0.020

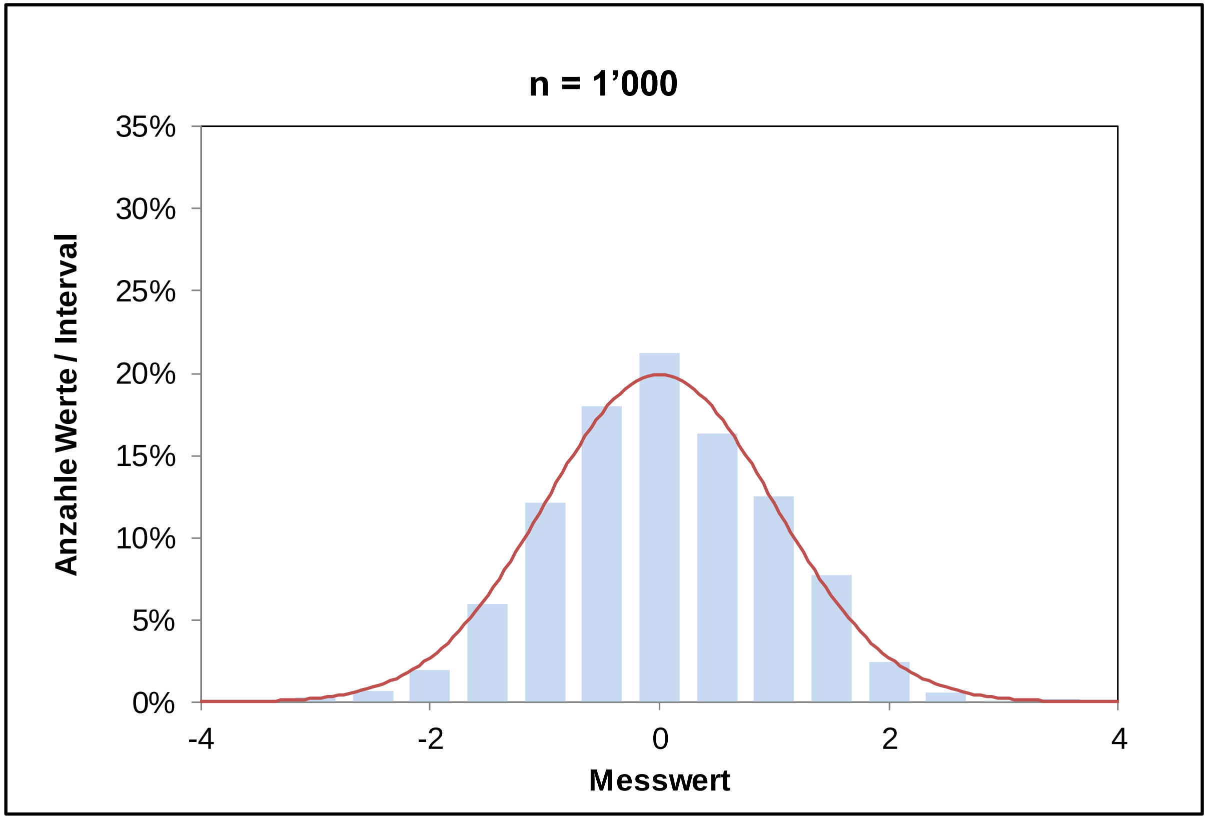
Wahrscheinlichkeitsverteilung



Wahrscheinlichkeitsverteilung



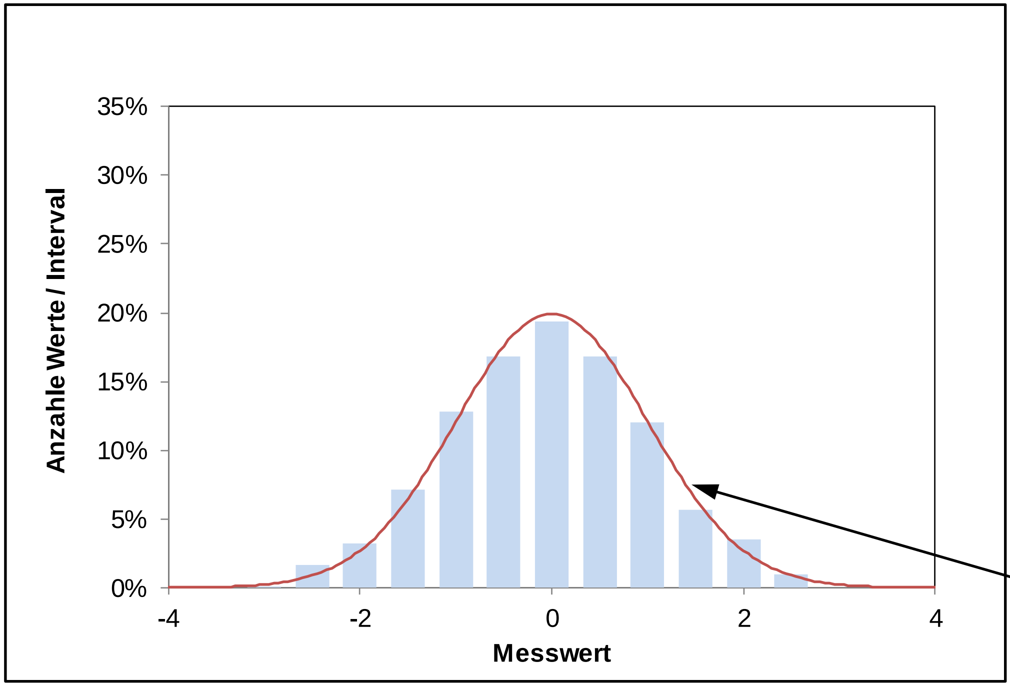
Wahrscheinlichkeitsverteilung



Verteilung der Werte strebt gegen eine Grenzverteilung zu:

➔ **Grundgesamtheit**

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion



$$\Pr(X \in I_k) = \frac{n_k}{n} = p_k$$

Grenzfall:

$n \rightarrow \infty$

Breite von $I_k \rightarrow 0$

$p_k \rightarrow p(x)$

Wahrscheinlichkeits-dichtefunktion

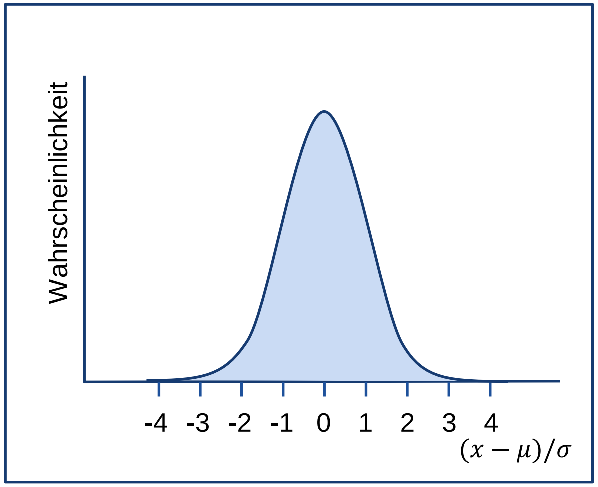
$$\Pr(x < X < x + dx) = p(x)dx$$

Normalverteilung

Viele Zufallsgrössen in der Natur können in guter Näherung durch eine Normalverteilung (Gauss-Verteilung) beschrieben werden. Diese Verteilung lässt sich anhand der Parameter μ und σ beschreiben

Carl Friedrich Gauss
1777 - 1855

$$g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$



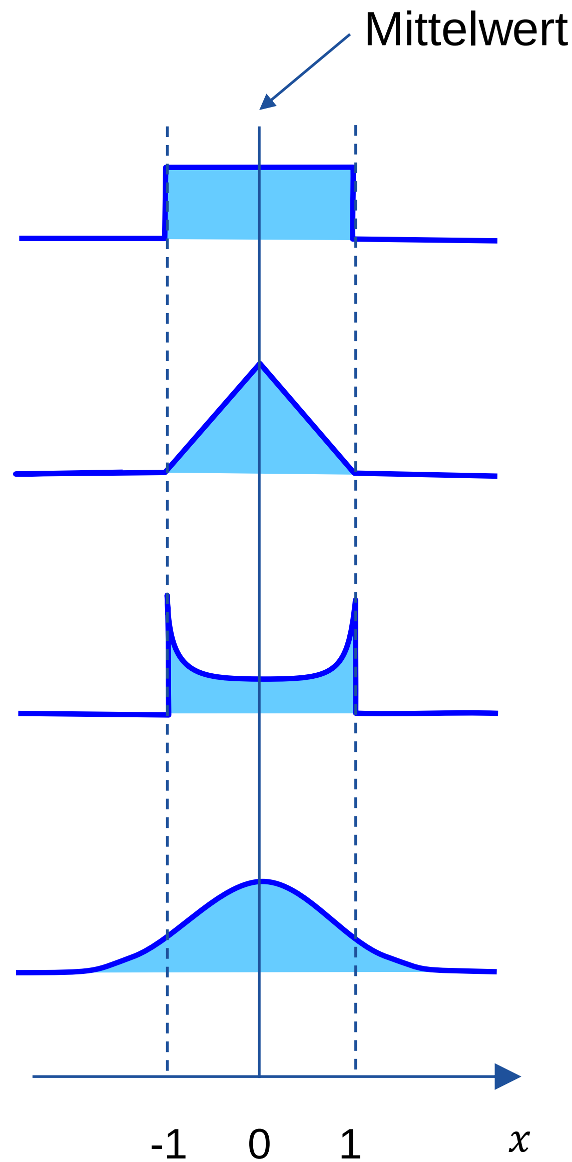
Für diese Verteilung gilt:

$$\bar{x} = \mu$$

$$s(x) = \sigma$$

Für $\mu = 0$, $\sigma = 1$, bekommt man $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

Übersicht



Rechteckverteilung $s = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.58$

Dreieckverteilung $s = \frac{1}{\sqrt{6}} = 0.41$

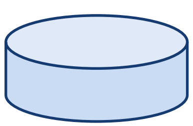
U-Verteilung $s = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.71$

Normalverteilung $s = 1$

Was ist eine Messung?

- Gesamtheit der Tätigkeiten zur Bestimmung eines Grössenwertes (VIM).

Messgrösse → **Messung**: Erfassen der Grösse → Vergleich der Grösse mit einer Einheit → Grössen-wert



Durchmesser D

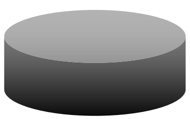
$D = 25.00$ mm

Messung

Messung

Messgrösse

D



Messprozess

Anzeige

$X_1, X_2, X_3, \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, X_N$

Einflussgrössen

Unsicherheitsanalyse

Klassisches Verständnis

- Prinzipiell sind Vorgänge in der Natur exakt berechenbar.
- Die Grössen haben wahre Werte.
- Messinstrumente liefern Schätzwerte der wahren Werte wegen Unzulänglichkeiten.
- Die Abweichung des Schätzwertes vom wahren Wert ist der Messfehler.

Modernes Verständnis

- **Wissenschaftliche Erkenntnisse** (Relativitätstheorie, Quantenmechanik)
  - Prinzipiell sind Vorgänge in der Natur dem Zufall unterworfen; wahre Werte gibt es nicht.

- **Messtechnische Erfahrung**
  - Messprozesse können nicht perfekt kontrolliert werden.
  - Messbedingungen sind niemals unendlich genau bekannt und stabil.

Eine messbare Grösse kann nicht durch einen einzigen Wert charakterisiert werden.

Statistische Methoden – Typ A

Messgrösse X_i wird wiederholt gemessen. Eine statistische Analyse der n zufällig verteilten Messwerte $X_{i,k}$ ergibt einen zuverlässigeren Schätzwert als das Resultat einer Einzelmessung x_i.

- Der Mittelwert $$x_i = \bar{X}_i = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_{i,k}$$
- Die Standardabweichung $$s(X_i) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}\left(X_{i,k} - \bar{X}_i\right)^2}{n-1}}$$
- Die Standardunsicherheit des Mittelwertes $$s(\bar{X}_i) = \frac{s(X_i)}{\sqrt{n}}$$

Typ A – Standardunsicherheit

Beispiele

- Wiederholtes Ablesen eines Instrumentes mit einer verrauschten digitalen oder analogen Anzeige
- Wiederholte Ablesungen nach neu durchgeführten manuellen Einstellungen an der Messeinrichtung

  → Bestimmung des Einflusses der endlichen Einstellgenauigkeit und des Bedieners

- Wiederholte Ablesungen nach neu durchgeführter Antastung eines gemessenen Objekts

  → Bestimmung der Antastunsicherheit

Typ A – Voraussetzungen

$$u(x_i) = s(\bar{X}_i) = \frac{s(X_i)}{\sqrt{n}}$$ Standardabweichung eines Mittelwertes

Lohnt es sich, eine Messung so oft wie möglich zu wiederholen?!

- Einzelmessungen müssen unabhängig voneinander sein.
- Messbedingungen dürfen sich während der Messserie nicht ändern.
- gilt nur, wenn der Rauschprozess in der Messung zufälliger Natur ist: Es gibt keine Korrelation zwischen zwei aufeinander folgenden Messpunkten.

Nicht-statistische Methoden – Typ B

- Für den Schätzwert x einer Eingangsgrösse X liegen keine wiederholten Beobachtungen vor.

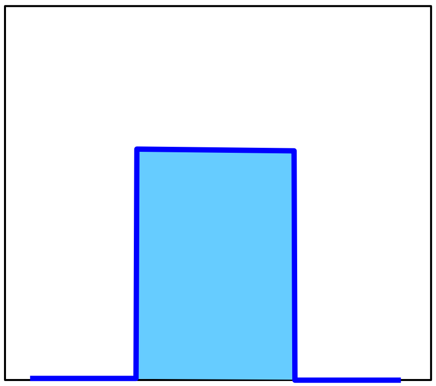
  - **Es müssen Annahmen über die mögliche Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion getroffen werden.**
  - **Standardunsicherheit muss durch wissenschaftliche Beurteilung gewonnen werden.**

Typ B – Quellen

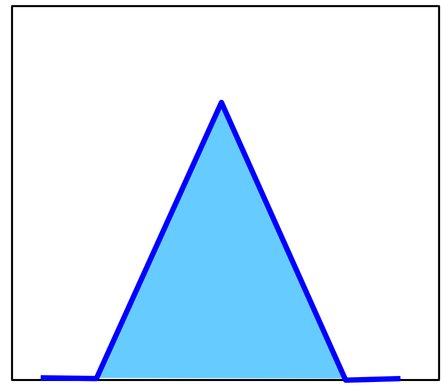
Quellen für die Beurteilung der möglichen Schwankungen der Eingangsgrösse:

- Frühere Messungen
- Erfahrungen oder allgemeines Wissen über das Verhalten und die Eigenschaften der verwendeten Materialien und Instrumente
- Spezifikationen der Hersteller
- Daten aus Kalibrierzertifikaten
- Unsicherheiten von Referenzwerten aus Handbüchern

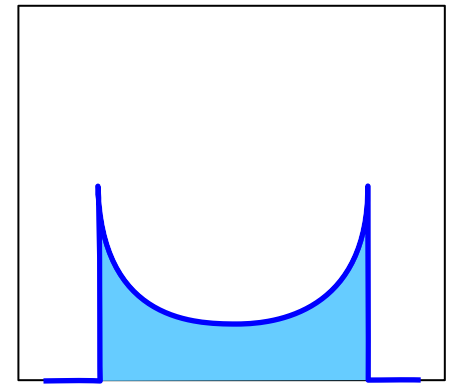
Typ B – Verteilungen



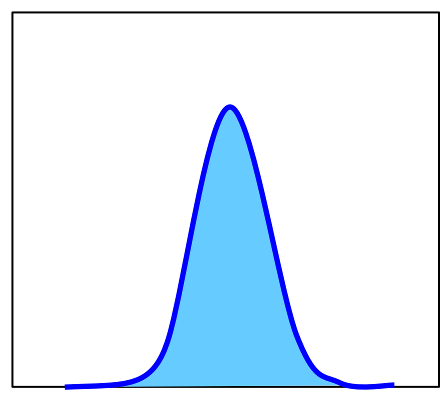
Rechteckverteilung



Dreieckverteilung

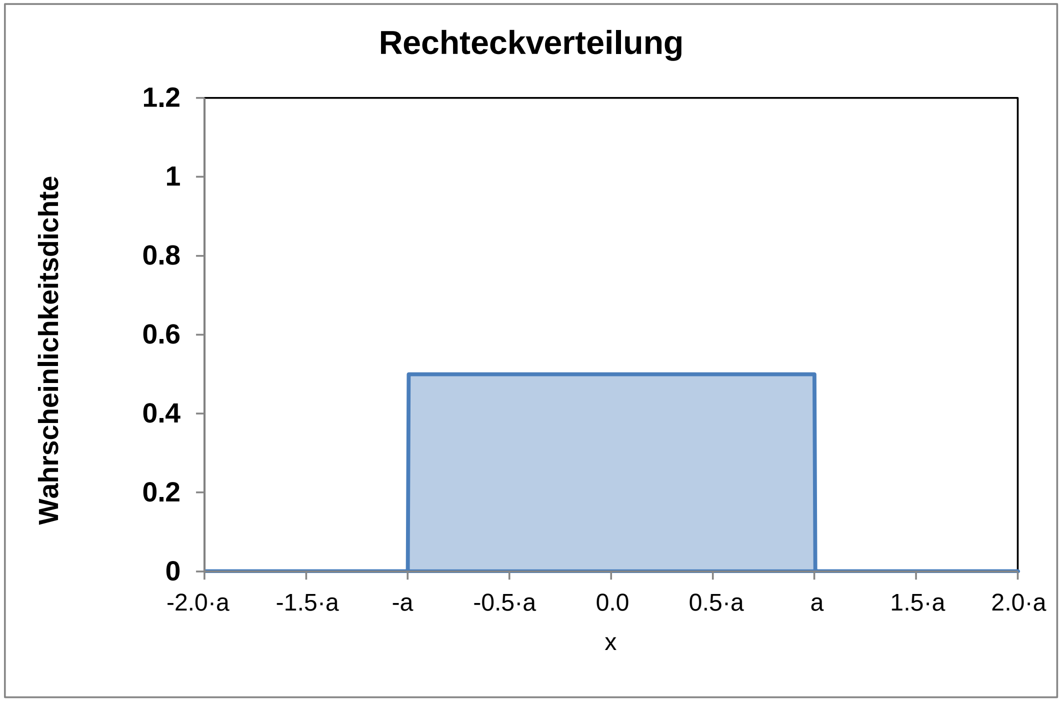


U-Verteilung



Normalverteilung

Typ B Auswertung – Rechteckverteilung



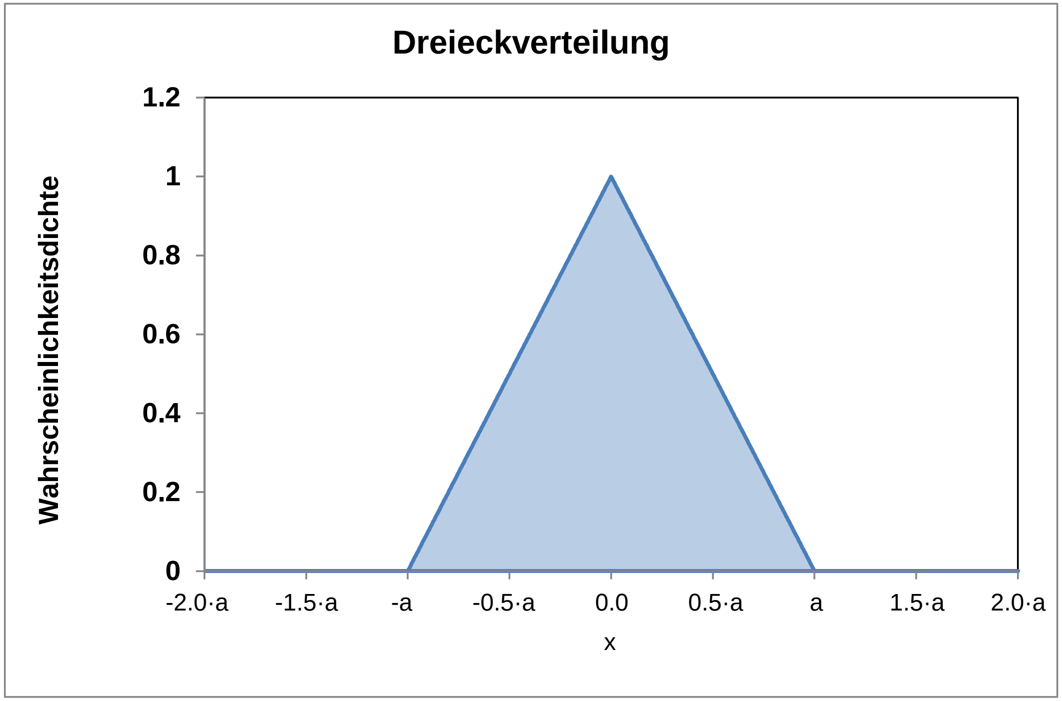
Standardunsicherheit:

$$u(x) = \frac{a}{\sqrt{3}} = 0.58\, a$$

Geeignet für:

- Messgrössen von Gegenständen, die aus einem Toleranz-Test gewählt wurden.
- Unsicherheit einer digitalen Anzeige: eine Auflösung von dx resultiert in einer Rechteckverteilung mit der halben Breite von $a = dx/2$.

Typ B Auswertung – Dreieckverteilung



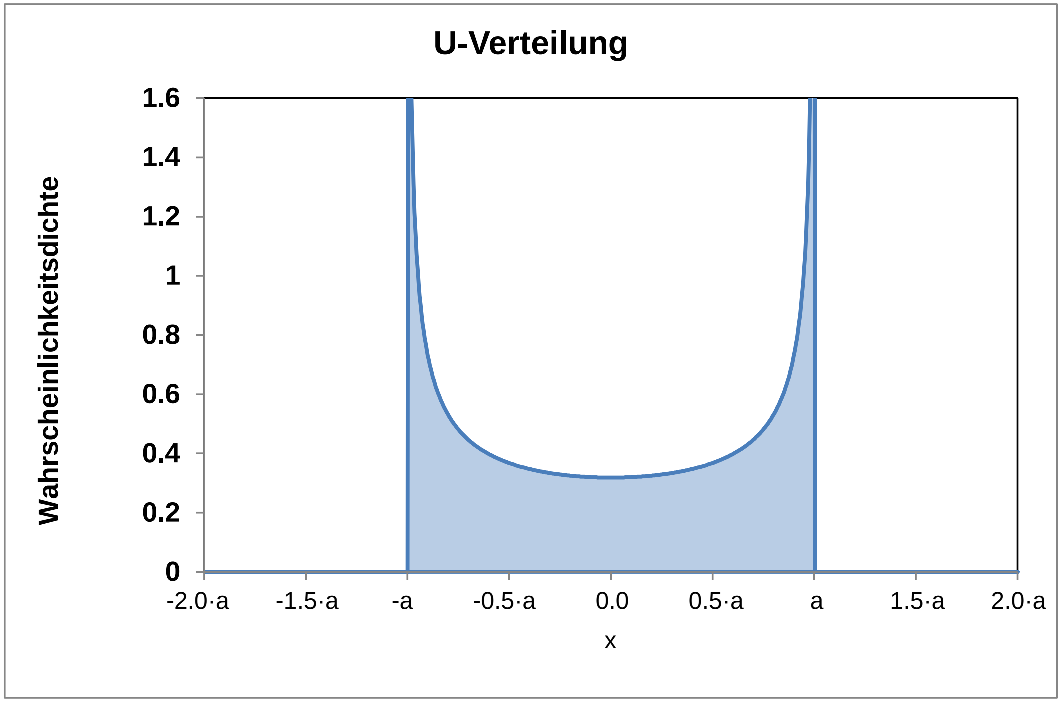
Standardunsicherheit:

$$u(x) = \frac{a}{\sqrt{6}} = 0.41\ a$$

Geeignet für:

- Ableseunsicherheit eines Analoggerätes
- alle Verteilungen die « besser » als die Rechteckverteilung sind.

Typ B Auswertung – U-Verteilung



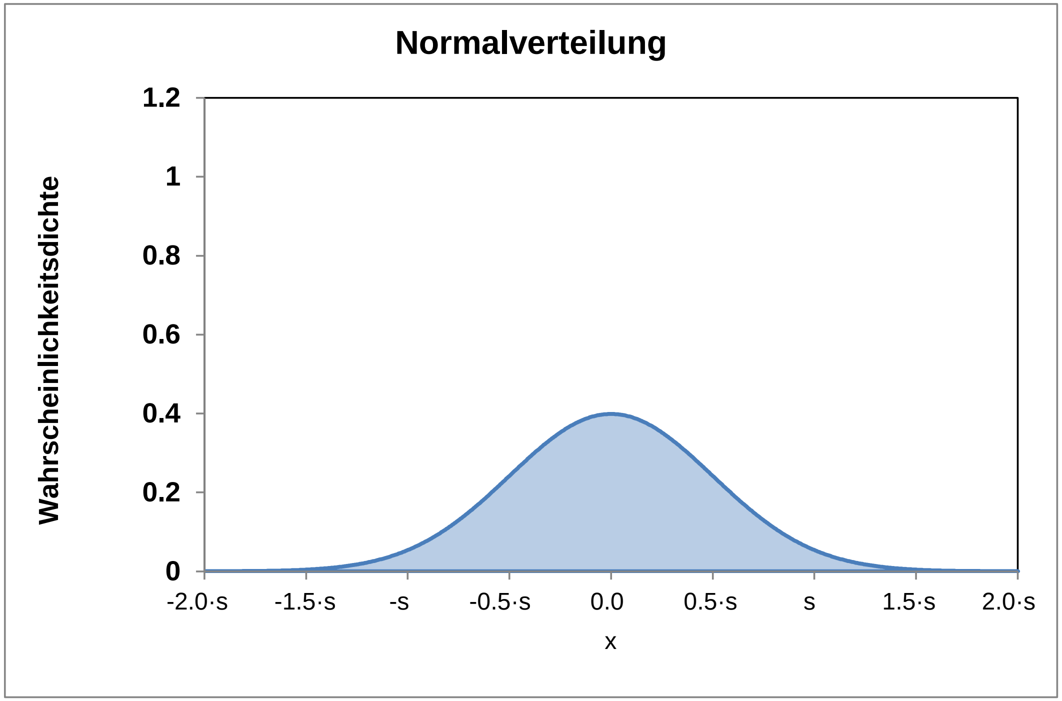
Standardunsicherheit:

$$u(x) = \frac{a}{\sqrt{2}} = 0.71\,a$$

Geeignet für:

- Unsicherheit von periodisch schwankenden Phänomenen, wo die Phase unbekannt ist.

Typ B Auswertung – Normalverteilung



Standardunsicherheit:

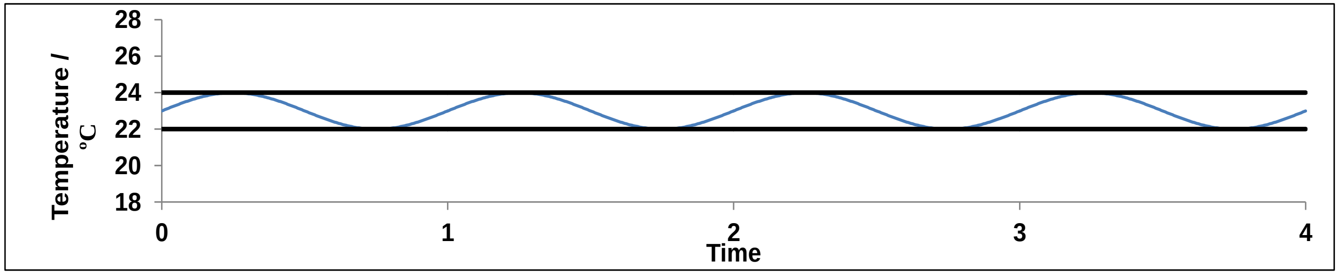
$$u(x) = s(X)$$

Geeignet für:

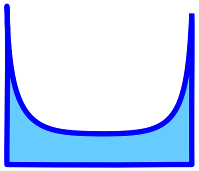
- Naturphänomene
- Kalibrierzertifikate
- Grenzwertsatz

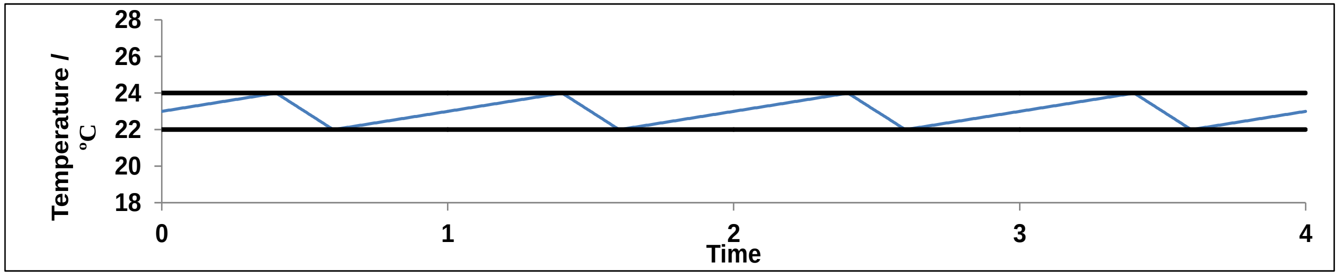
Typ-B-Auswertung

Beispiel : Raumtemperatur 23 °C ± 1 °C

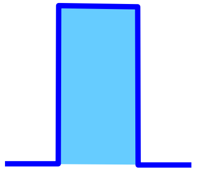


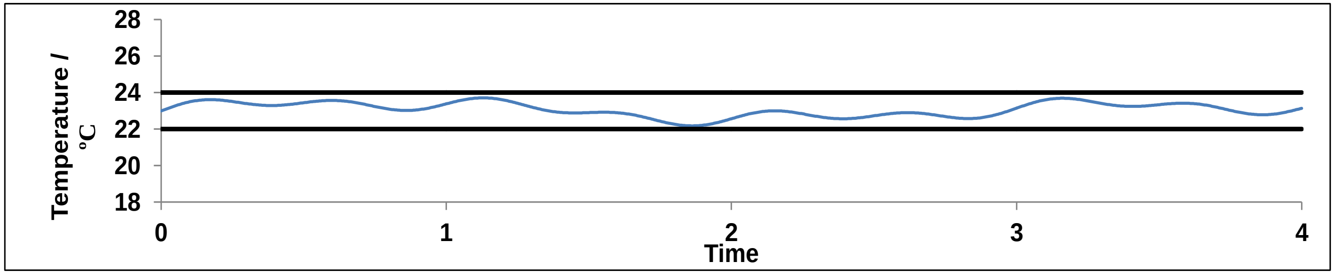
$$u(T) = \frac{a}{\sqrt{2}} = 0.707\ ^\circ\mathrm{C}$$



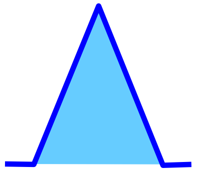


$$u(T) = \frac{a}{\sqrt{3}} = 0.577\ ^\circ\mathrm{C}$$





$$u(T) = \frac{a}{\sqrt{6}} = 0.408\ ^\circ\mathrm{C}$$



Beispiel – Längenmessung

Messung der Länge eines

Edelstahltisches von etwa 1.2 m

(Tischlänge) mit einem Doppelmeter.

Einflüsse

- Unsicherheit des Messinstruments
- Ableseunsicherheit
- Unzulänglichkeiten des gemessenen Objekts

METAS

Unsicherheit des Instruments

Der Massstab habe die Genauigkeitsklasse III

- Der maximale Fehler beträgt: $(0.6 + 0.4 \cdot L)\ \mathrm{mm}$

  wobei L: Länge in m, aufgerundet auf den nächsten ganzen m
  (bei uns 2)

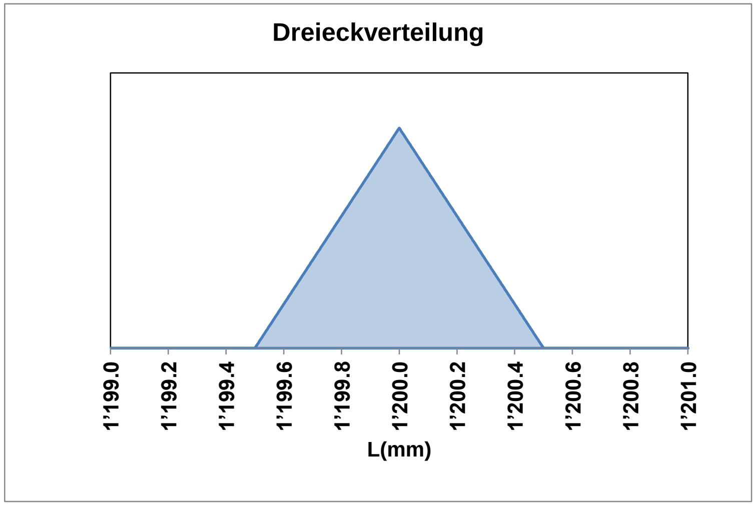
- Damit ergibt sich für einen Massstab der Länge 1.2 m ein maximaler Fehler von 1.4 mm, angenommen als maximale Abweichung einer Rechteckverteilung, und somit erhält man nach Typ B Methode:

$\Rightarrow$ Standardunsicherheit: $u(L) = \frac{1.4\ \mathrm{mm}}{\sqrt{3}} = 0.81\ \mathrm{mm}$

Ableseunsicherheit

2 Möglichkeiten

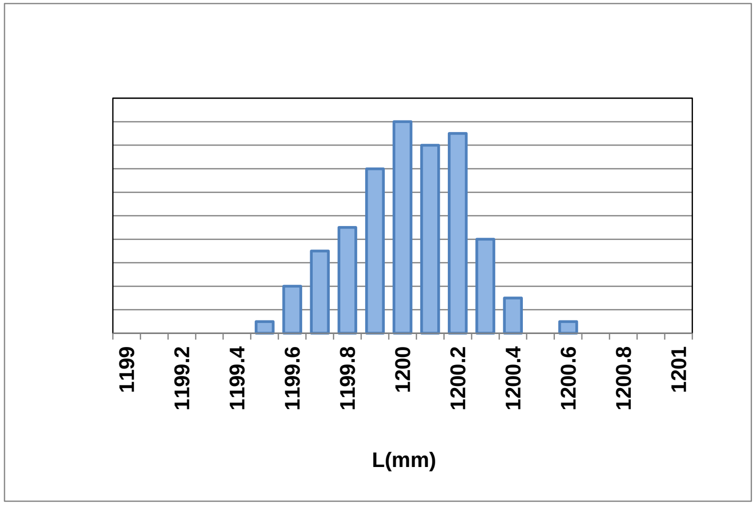
Typ B



$$a = 0.5\ \text{mm}$$

$$u(L) = \frac{a}{\sqrt{6}} = 0.20\ \text{mm}$$

Typ A



$$u(L) = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(L_k - \bar{L})^2)}{n-1}} = 0.21\ \text{mm}$$

Unzulänglichkeiten des gemessenen Objekts

2 Möglichkeiten

- Abschätzung mit Rechteckverteilung (Typ-B Evaluation)

$$a = 0.2\text{mm} \quad \rightarrow \quad u(L) = \frac{a}{\sqrt{3}} = 0.12\ \text{mm}$$

- Abschätzung mit statistischer Analyse (Typ-A Evaluation)

$$u(L) = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(L_k - \bar{L})^2}{n-1}} = 0.28\ \text{mm}$$

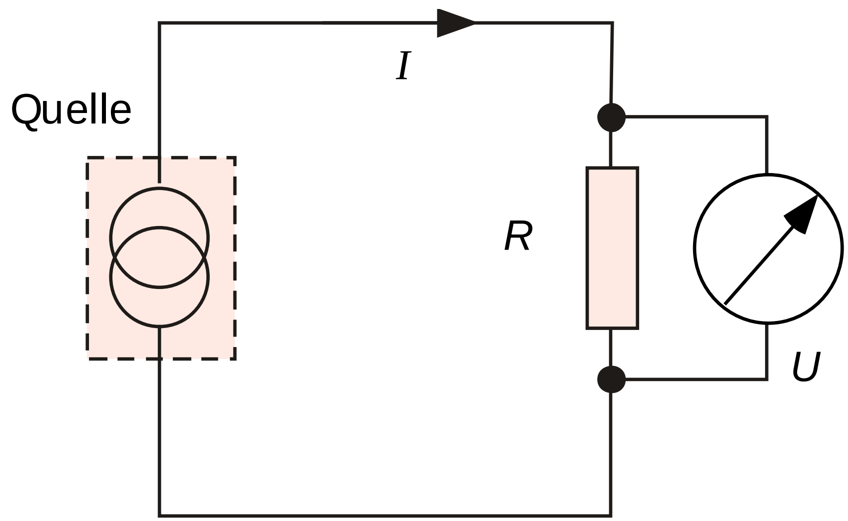
Zusammenfassung – Längenmessung

Einflussgrössen

- Unsicherheit des Messinstruments 0.81 mm
- Unsicherheit der Ablesung 0.20 mm
- Unzulänglichkeiten des gemessenen Objekts 0.28 mm

Beispiel Strommessung

- Der Strom I in einem Messkreis wird durch die Messung des Spannungsabfalls U über einem bekannten Widerstand R bestimmt.



$$I = \frac{U}{R}$$

Einflussgrössen

- Referenzwiderstand (Wert, Drift, Umwelteinflüsse)
- Spannung (Genauigkeit Voltmeter, Ablesung)

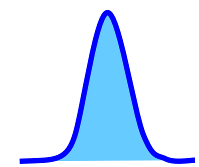
Typ-B Beiträge des Referenzwiderstands

- **Referenzwert:**

  Wert aus Kalibrierzertifikat (vor 12 Monaten)

  R = (1000.042 ± 0.005) Ω

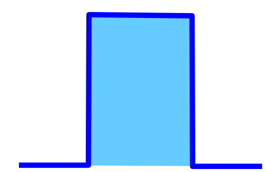
  $$u(R) = 5\ \mathrm{m}\Omega$$



- **Stabilität:**

  Herstellerangabe: jährliche Drift < 5 mΩ

  $$u_D = 5\ \mathrm{m}\Omega/\sqrt{3} = 2.9\ \mathrm{m}\Omega$$

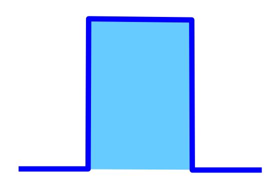


- **Umwelteinflüsse:**

  Herstellerangabe: 2 mΩ/°C

  Temperatur im Labor: (23 ± 1) °C

  $$u_T = 2\ \mathrm{m}\Omega/\sqrt{3} = 1.15\ \mathrm{m}\Omega$$



Unsicherheit der Spannungsablesung

- Typ-A-Analyse durch wiederholte Ablesung des Voltmeters
- Anzahl unabhängige Messungen mit dem Voltmeter ergibt:

$$\bar{V} = 3.001542 \text{ V}$$

- Typ-A-Standardunsicherheit:

  Standardabweichung des Mittelwertes der Ablesungen:

$$s(\bar{V}) = 12 \text{ µ}V$$

Typ-B Beiträge des Voltmeters

- **Angaben zum Multimeter:**

  Herstellerangabe zur 1-Jahr Stabilität:

  < 14 × 10⁻⁶ vom abgelesenen Wert

  <   2 × 10⁻⁶ vom Bereichsendwert

- **Messung:**

  Messung im 10 V Bereich

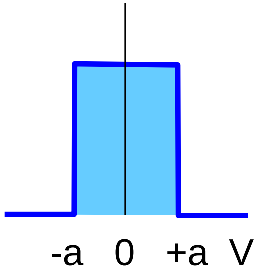
  Gemessener Wert: 3.001542 V

  Letzte Kalibrierung: vor ca. 3 Monaten

- **Ablesung der Spannung:**

  Korrektur: 0 V ± a V

  $a = (14 \times 10^{-6}) \times (3.001542\ \mathrm{V}) + (2 \times 10^{-6}) \times (10\ \mathrm{V}) = 62\ \mu\mathrm{V}$



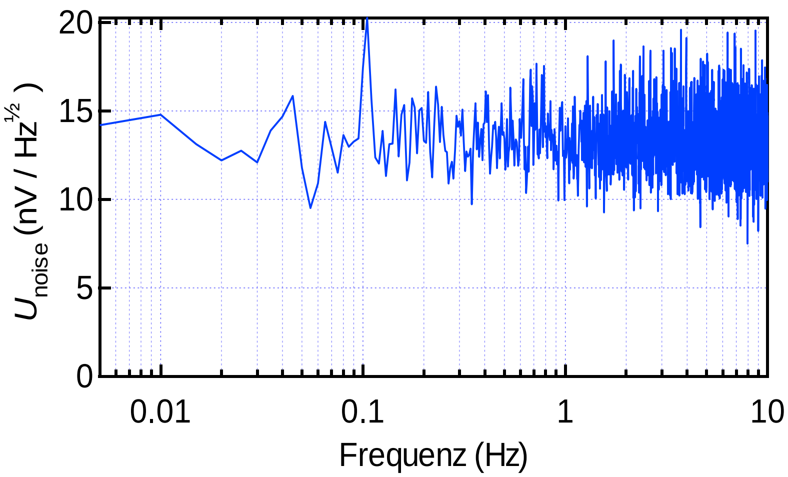
$$u_{DVM} = a/\sqrt{3} = 36\ \mu\mathrm{V}$$

Rauschprozesse

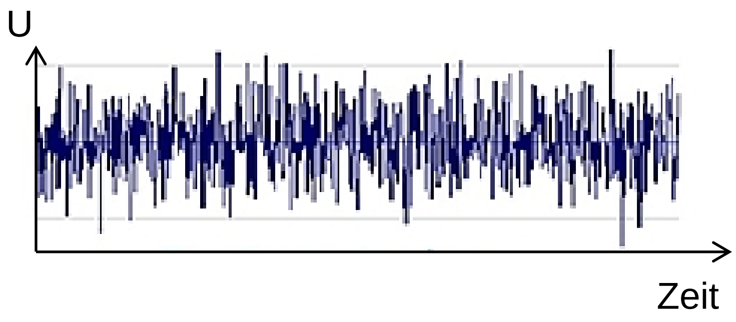
- **Weisses Rauschen**: Rauschleistung ist in jedem Teil des Frequenzspektrums dieselbe.
  z. B. Spannungsrauschen eines Widerstandes: „Johnson-noise“

Die Messunsicherheit kann durch Wiederholung der Messung mit $1/\sqrt{n}$ verkleinert werden.

Rauschen eines 10 kΩ-Widerstands:
Frequenz-Spektrum



Weisses Rauschen:
im Zeitbereich (Beispiel)

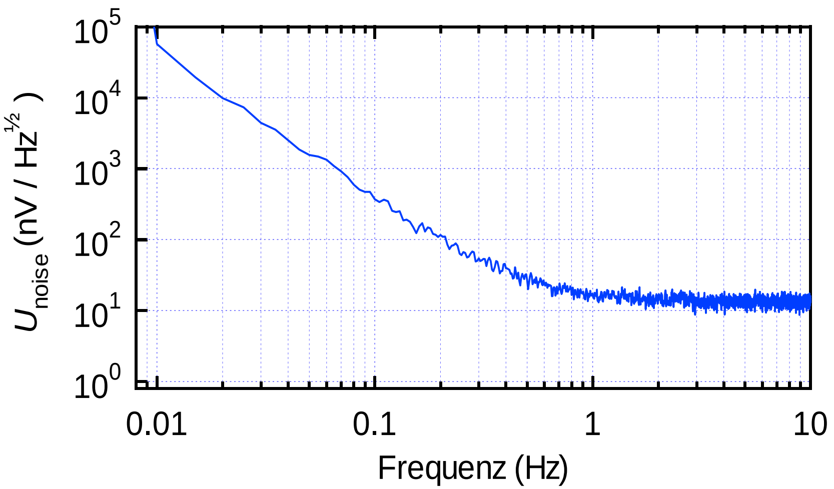


Rauschprozesse

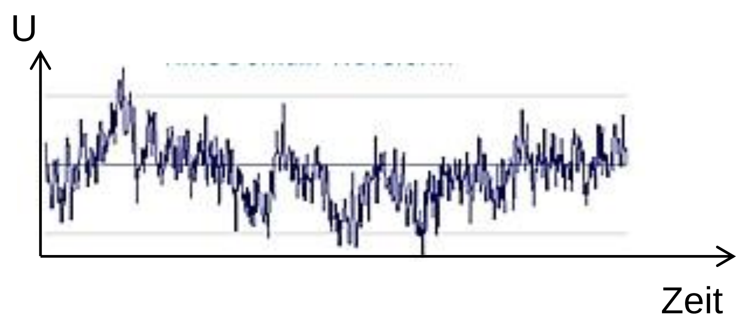
- **$1/f$-Rauschen (Flicker-Rauschen)**: Rauschsignale steigen unterhalb einer bestimmten Frequenz mit dem Kehrwert der Frequenz an.

  Die Anwendung der Regeln für rein zufällig verteilte Messwerte führt in diesem Fall zu einer ***unterschätzten*** Standardunsicherheit!

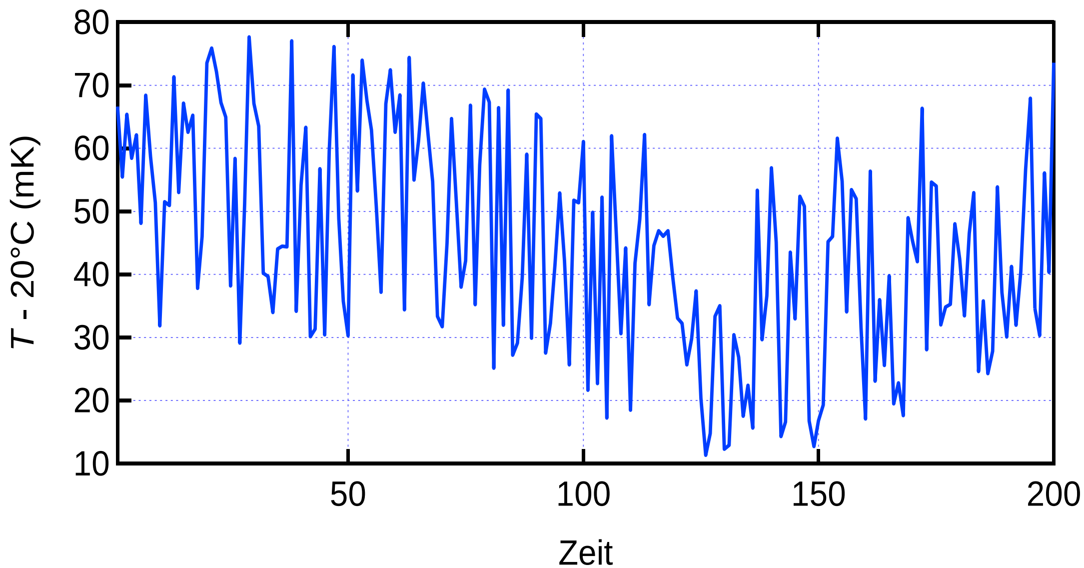
Flicker-Rauschen:
Frequenz-Spektrum



Flicker-Rauschen:
Zeitbereich



Messsignal mit überlagerter Störung

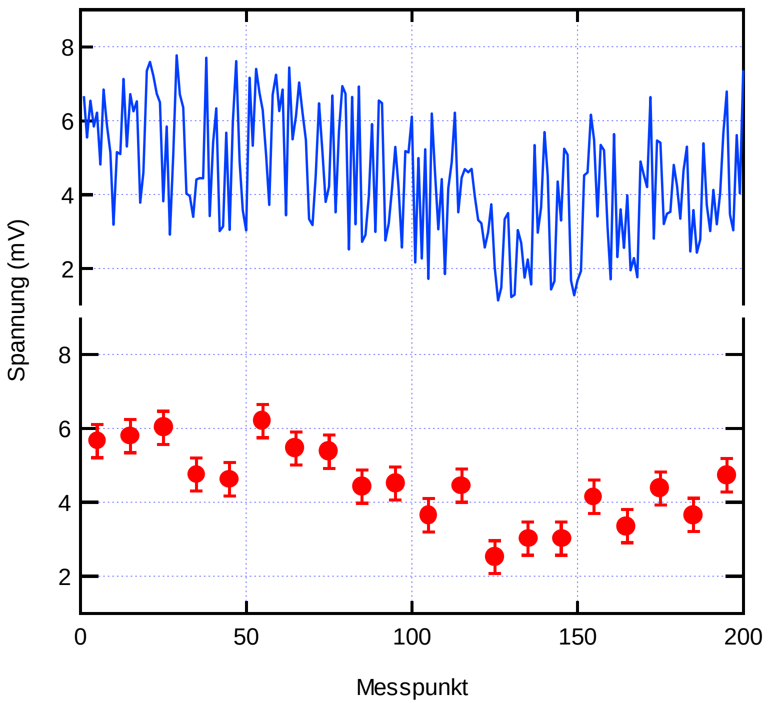


Mittelwert nach

- 90 Messwerte: $\overline{T_1} = \sum_1^{90} T_i = 20.0537\ °\mathrm{C}$ $\quad s_1(\overline{T}) = \sqrt{\frac{\sum_1^{90}(T_i - \overline{T_1})^2}{90 \times 89}} = 1.6\ \mathrm{mK}$
- 200 Messwerte: $\overline{T_2} = \sum_1^{200} T_i = 20.0448\ °\mathrm{C}$ $\quad s_2(\overline{T}) = \sqrt{\frac{\sum_1^{200}(T_i - \overline{T_1})^2}{200 \times 199}} = 1.2\ \mathrm{mK}$

$$\overline{T_1} - \overline{T_2} = 8.9\ mK \cong 6 \cdot s_1$$

Messsignal mit überlagerter Störung



n rohe Messwerte

k «Untermittelwerte» $V_{m,i}$
Standardabweichung $s(V_{m,i}) \approx s_m$

$$\frac{s_{ext}(\overline{V_m})}{s_{int}(\overline{V_m})} = 2.5$$

Methode zur Suche nach 1/*f*-Rauschen:

- Bildung von «Untermittelwerten» und Standardabweichungen für k Intervalle jeweils bestehend aus m Werten:

$$s_{int}(\overline{V_m}) \cong s_m/\sqrt{k}$$

$$k = n/m$$

- Berechnung der Standardabweichung der neuen Reihe aus «Untermittelwerten»

$$s_{ext}(\overline{V_m}) = \sqrt{\frac{\sum\left(V_{m,i} - \overline{V_m}\right)^2}{k \times (k-1)}}$$

- $s_{ext}(\overline{V_m}) > s_{int}(\overline{V_m})$ → Störprozesse
- $s_{ext}(\overline{V_m}) \approx s_{int}(\overline{V_m})$ → weisses Rauschen