Weiterbildungskurs Metrologie	Modul-Nr.:	MU-04
Grundlagen der Messunsicherheit	Dozent:	Dr. F. Pythoud

Fortpflanzung der Messunsicherheit

1. Einleitung

Ausgehend von einem Messmodell $Y = f(X_1,\ X_2,\ \dots, X_N)$ mit den Eingangsgrössen $X_1, X_2, \dots,$ X_N und der zu messenden Grösse Y stellt sich die Frage, wie sich die Unsicherheiten in den Eingangsgrössen auf die resultierende Wert y auswirken. Konkret gefragt: Welcher Wert und welche Unsicherheit $u(y)$ muss dem Wert y aufgrund der Werte und Unsicherheiten $u(x_i)$ der Messerte $x_1, x_2, \dots, x_N$ zugeordnet werden?

Gezeigt wurde bereits, dass sich eine unsicherheitsbehaftete Messgrösse durch eine Verteilung repräsentieren lässt. Wert und Standardunsicherheit der Messgrösse erhält man als Mittelwert und Standardabweichung dieser Verteilung.

Im Falle unseres Messmodells werden die verschiedenen Verteilungen der Eingangsgrössen $X_1, X_2, \dots, X_N$ durch das Messmodell verknüpft und führen zu einer resultierenden Verteilung, welche die gemessenen Grösse Y repräsentiert. Die Fortpflanzung der Messunsicherheit ist also eine Fortpflanzung der Verteilungen der Eingangsgrössen auf eine Verteilung der resultierenden Grösse. Aus der resultierenden Verteilung kann man dann den Wert (Mittelwert der Verteilung) und die Standardunsicherheit (Standardabweichung der Verteilung) von y bestimmen. Soweit die Theorie. In der Praxis zeigt sich, dass das Fortpflanzen von Verteilungen durch ein mathematisches Modell hindurch nicht trivial ist. Abgesehen von wenigen Ausnahmefällen lässt sich dazu keine mathematisch-analytische Lösung finden und man muss zu Näherungsmethoden oder zu numerischen Methoden greifen.

Der GUM schlägt als Standardverfahren eine Näherungsmethode vor, die sogenannte *Lineare Unsicherheitsfortpflanzung*. Dabei wird die Modellgleichung linearisiert und es werden Mittelwerte und Varianzen der Eingangsverteilungen durch das linearisierte Modell hindurch fortgepflanzt. Diese Methode wird im folgenden Kapitel besprochen.

In Bearbeitung befindet sich ein Supplement des GUM, welches die direkte Fortpflanzung von Verteilung mittels einer numerischen Methode („Monte Carlo“) diskutiert. Eine Einführung in diese Methode wird in einem ergänzenden Modul gegeben.

2. Lineare Unsicherheitsfortpflanzung

Die korrekte mathematische Herleitung der *Linearen Unsicherheitsfortpflanzung* erfordert mathematische Kenntnisse über das Rechnen mit Verteilungen und ist etwas langwierig und sehr formal. Deshalb wird hier darauf verzichtet (Der Vollständigkeit halber findet sich im Anhang die korrekte formale Herleitung) und stattdessen wird eine eher intuitive Herleitung gegeben, die zwar nicht exakt ist, dafür aber dem Verständnis der zugrundeliegenden Prinzipien förderlich ist. Dabei wird die *Lineare Unsicherheitsfortpflanzung* zuerst anhand eines Modells mit einer einzigen Einflussgrösse erörtert. Danach folgt die Verallgemeinerung auf mehrere Einflussgrössen.

2.1 Eine einzelne Eingangsgrösse, lineare Funktion

Dazu betrachten wir das Modell

$$Y = f(X) \tag{1}$$

mit einer einzelnen Einflussgrösse X und der resultierenden Grösse Y. Diese Funktion lässt sich graphisch darstellen. Im Falle eines linearen Zusammenhangs $Y = f(X) = c \cdot X + b$ ergibt sich eine Gerade.

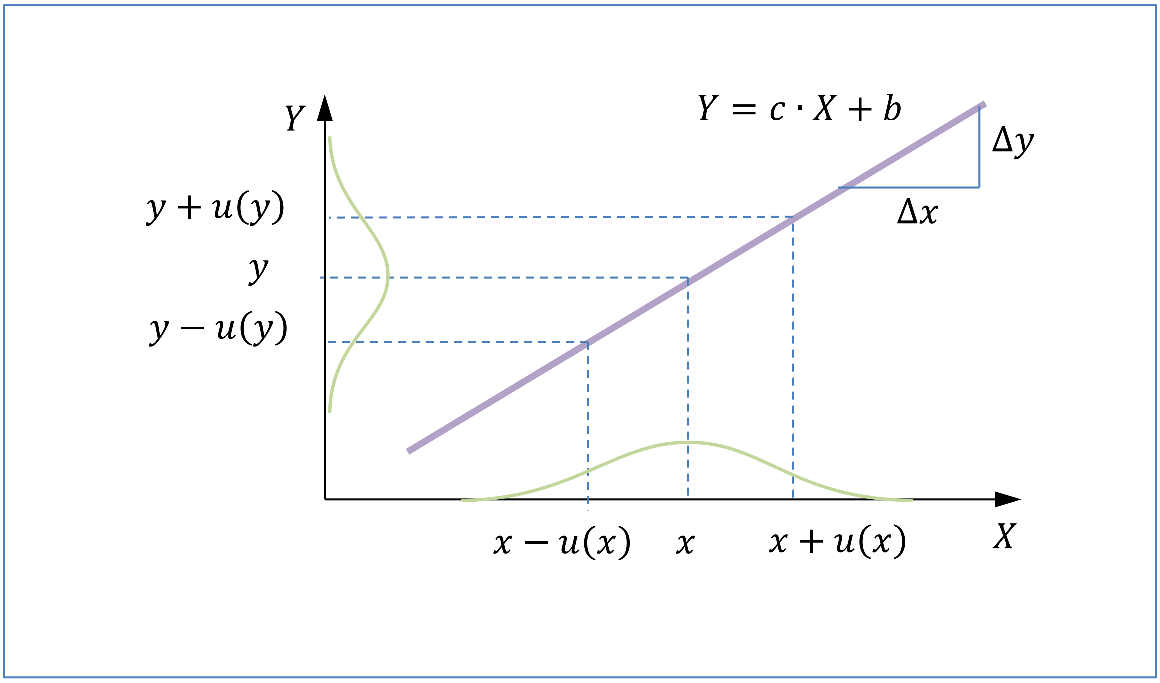

Abbildung 1: Lineare Modellfunktion mit konstanter Steigung. Die Steigung wirkt als Empfindlichkeitskoeffizient (abschwächend oder verstärkend) bei der Übertragung der Messunsicherheit von x auf y.

Anhand der Abbildung 1 ist ersichtlich, dass sich die Unsicherheit in der Einflussgrösse X über die Steigung der Geraden $c = \Delta y / \Delta x$ auf die gemessene Grösse Y überträgt. X hat einen Wert x mit einer Unsicherheit $u(x)$. Als Wert für Y erhält man dann $y = f(x)$ und die Messunsicherheit $u(y)$ ergibt sich zu

$$u(y) = c \cdot u(x) \tag{2}$$

Der Faktor c fungiert als Verstärkungs-, oder Abschwächungsfaktor beim Übertragen der Messunsicherheit von der Einflussgrösse X auf die gemessene Grösse Y Man bezeichnet den Faktor c deshalb auch als *Empfindlichkeitskoeffizienten*.

Beispiel: Bei der Längenänderung ΔL eines Längenmasses aus Stahl ($l = 50 \text{ mm}$ bei $t = 20°$) aufgrund einer Temperaturänderung ΔT lässt sich folgendes lineare Modell für die gemessene Länge ΔL ansetzen:

$$\Delta L = L \cdot \alpha \cdot \Delta T \tag{3}$$

Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass der Temperaturausdehnungskoeffizient $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}/\text{K}$ genau bekannt ist, was in der Realität natürlich nicht der Fall ist. Das Modell ist linear in ΔT und dies lässt dich durch die folgende Tabelle darstellen:

Temperatur	**Länge**
20.0º C	50.000’000 mm
21.0º C	50.000’600 mm
22.0º C	50.001’200 mm
30.0º C	50.006’000 mm

Eine Unsicherheit von 1ºC auf die Temperatur führt auf einer Unsicherheit von 0.6 µm auf die Länge. Der Empfindlichkeitskoeffizient ist also:

$$c = (\propto \cdot\, l) = 0.6\ \mu\text{m/K} \tag{4}$$

Mit dem Empfindlichkeitskoeffizient kann man aus einer Temperatur-Unsicherheit $u(t)$, die Längen-Unsicherheit bestimmen als:

$$u(l) = c \cdot u(t) \tag{5}$$

2.2 Eine einzelne Eingangsgrösse, nicht-lineare Funktion

Falls die Funktion nicht linear ist, was im allgemeinen der Fall ist, kann man als Näherung die Steigung der Funktion am Ort x als Empfindlichkeitskoeffizienten berechnen (Abbildung 2).

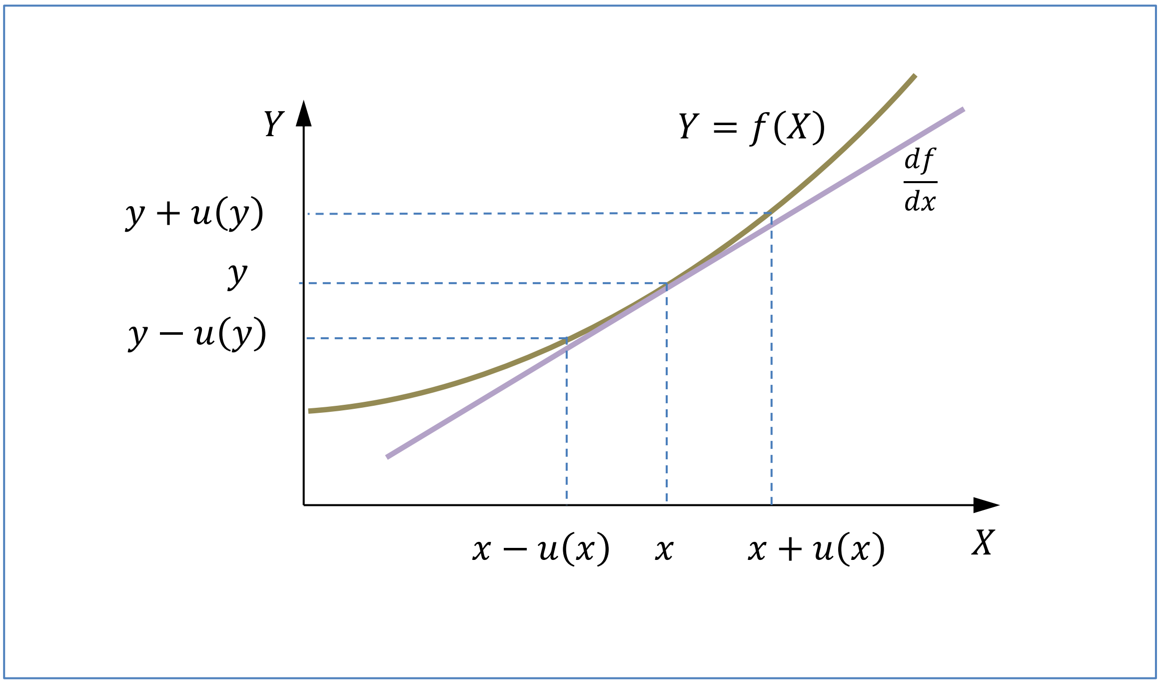

Abbildung 2: Die Ableitung der Modellfunktion an der Stelle x dient als Empfindlichkeitskoeffizient

Die Steigung der Funktion erhält man, indem man die Ableitung $\frac{df}{dx}$ berechnet. Somit erhält man für den Empfindlichkeitskoeffizienten

$$c = \frac{df}{dx} \tag{6}$$

Der damit berechnete Empfindlichkeitskoeffizient ist nicht exakt, sondern eine lineare Näherung.

Beispiel: Bestimmung der Fläche a eines Kreises über die Messung des Radius r.
Das Messmodell ist $A = f(R) = \pi$. Gemessen wird $r = 3\ \mathrm{m}$ mit einer Standardunsicherheit $u(r) = 0.01\ \mathrm{m}$. Wie gross sind Wert a und resultierende Standardunsicherheit $u(a)$?

Als Wert für A erhält man

$$a = \pi r^2 = 28.27\ \mathrm{m}^2 \tag{7}$$

und für den Empfindlichkeitskoeffizienten

$$c = \frac{df}{dr} = 2\pi r = 18.85\ \mathrm{m} \tag{8}$$

Die resultierende Unsicherheit ergibt sich damit zu

$$u(a) = c \cdot u(r) = 0.19\ \mathrm{m}^2. \tag{9}$$

Interessant ist festzustellen, dass das gleiche Ergebnis anders hergeleitet werden kann: man versuche Variationen von Radius zu berücksichtigen:

$$f(r) \qquad = f(3.00\ \mathrm{m}) = 28.27\ \mathrm{m}^2 \tag{10}$$

$$f\big(r + u(r)\big) = f(3.01\ \mathrm{m}) = 28.46\ \mathrm{m}^2 \tag{11}$$

Die Unsicherheit $u(a)$ ist

$$u(a) = \Delta a = f(3.01\ \mathrm{m}) - f(3.00\ \mathrm{m}) = 0.19\ \mathrm{m}^2 \tag{12}$$

Damit lässt sich der Empfindlichkeitskoeffizient bestimmen mit:

$$c = \frac{u(a)}{u(r)} = \frac{\Delta a}{\Delta r} = \frac{28.46\ \mathrm{m}^2 - 28.27\ \mathrm{m}^2}{3.01\ \mathrm{m} - 3.00\ \mathrm{m}} = 19\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{m}} \tag{13}$$

2.3 Mehrere Eingangsgrössen

Im Folgenden wird das bisher gezeigte auf mehrere Eingangsgrössen erweitert. Gegeben sei ein Modell mit N Eingangsgrössen :

$$Y = f(X_1,\ X_2,\ \dots, X_N) \tag{14}$$

Die Eingangsgrössen $X_1,\ X_2,\ \dots, X_N$ haben die Werte x_i mit den Standardunsicherheiten $u(x_i)$. Als Resultat der Messung erhält man dann wie erwartet

$$y = f(x_1,\ x_2,\ \dots, x_N) \tag{15}$$

Jede Eingangsgrösse X_i erhält einen Empfindlichkeitskoeffizienten

$$c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \tag{16}$$

zugeordnet. Zur Berechnung der Empfindlichkeitskoeffizienten bildet man die partiellen Ableitungen der Modellfunktion bezüglich der einzelnen Eingangsgrössen. Die partielle Ableitung ist die Ableitung einer Funktion mit mehreren Variablen nach einer dieser Variablen. Dabei werden die anderen Variablen konstant gehalten. Die partielle Ableitung gibt analog zur normalen Ableitung die Steigung einer Funktion in Richtung einer bestimmten Variablen. Rein technisch gesehen ist das Ausführen der partiellen Ableitung identisch zur normalen Ableitung bei einer Funktion mit einer Variablen.

Beispiel: Die partiellen Ableitungen der Funktion $g(X_1, X_2) = X_1^2 + X_1 \cdot X_2$ lauten:

$$\partial g / \partial x_1 = 2x_1 + x_2 \tag{17}$$

$$\partial g / \partial x_2 = x_1 \tag{18}$$

Multipliziert man den Empfindlichkeitskoeffizienten mit der Standardunsicherheit der jeweiligen Eingangsgrösse, erhält man den Beitrag von dieser Eingangsgrösse an die Gesamtunsicherheit. Es stellt sich jetzt die Frage, wie sich diese Beiträge zur Gesamtunsicherheit $u(y)$ addieren. Intuitiv würde man vielleicht erwarten, dass sich die Beiträge direkt addieren. Man muss aber berücksichtigen, dass mit den Unsicherheiten mögliche Abweichungen und Fehler berücksichtigt werden, deren Vorzeichen nicht bekannt ist. Es ist zu erwarten, dass sich die Abweichungen deshalb teilweise kompensieren. Eine direkte Summe würde deshalb die resultierende Unsicherheit überschätzen. Das korrekte Resultat für $u(y)$ erhält man, indem man die Beiträge der Eingangsgrössen quadratisch addiert und dann die Wurzel zieht.

$$u_c(y) = \sqrt{{c_1}^2 \cdot u^2(x_1) + {c_2}^2 \cdot u^2(x_2) + \cdots\ + {c_N}^2 \cdot u^2(x_N)} \tag{19}$$

$u_c(y)$ wird auch als die „Kombinierte Messunsicherheit" bezeichnet. Aus der exakten Herleitung ergibt sich die Summe der Quadrate automatisch. Mit den Gleichungen (16) und (19) lässt sich also die Standardunsicherheit von y berechnen. Alternativ lassen sich diese Gleichungen auch folgendermassen zusammenfassen

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(c_i \cdot u(x_i)\right)^2} \tag{20}$$

Das Zeichen $\sum$ ... wird hier (wie in der Mathematik gebräuchlich) als Kurzform für „Summe über den Index i von 1 bis N: eingesetzt und dient einzig einer kompakteren Darstellungsweise.

Beispiel: Gegeben sei das Modell $Y = f(X_1, X_2) = X_1 + X_2$ mit den Messwerten x_1 und x_2 und mit den Standardunsicherheiten $u(x_1)$ et $u(x_2)$. Wie gross ist die Standardunsicherheit $u_c(y)$?

Die Empfindlichkeitskoeffizienten ergeben sich zu

$$c_1 = \partial f / \partial x_1 = 1 \text{ und } c_2 = \partial f / \partial x_2 = 1 \tag{21}$$

Somit erhält man für die Unsicherheit in y:

$$u_c(y) = \sqrt{\left(c_1 \cdot u(x_1)\right)^2 + \left(c_2 \cdot u(x_2)\right)^2} = \sqrt{u^2(x_1) + u^2(x_2)} \tag{22}$$

Beispiel: Gegeben sei das Modell $Y = f(X_1, X_2) = X_1 \cdot X_2$ mit den Messwerten x_1 und x_2 und mit den Standardunsicherheiten $u(x_1)$ et $u(x_2)$. Wie gross ist die Standardunsicherheit $u_c(y)$?

Die Empfindlichkeitskoeffizienten ergeben sich zu

$$c_1 = \partial f / \partial x_1 = x_2 \text{ und } c_2 = \partial f / \partial x_2 = x_1 \tag{23}$$

Somit erhält man für die Unsicherheit in y:

$$u_c(y) = \sqrt{\left(x_2 \cdot u(x_1)\right)^2 + \left(x_1 \cdot u(x_2)\right)^2} \tag{24}$$

Nach Division beider Seiten durch $x_1 \cdot x_2$ lässt sich diese Gleichung auch schreiben als:

$$\frac{u_c(y)}{y} = \sqrt{\left(\frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2} \tag{25}$$

Zusammenfassend gilt:

- Gleichungen (15), (16) und (20) stehen für das Gesetz der *Linearen Unsicherheitsfortpflanzung* für ein Modell der Form (14). Sie dienen dazu, näherungsweise den Mittelwert und die Standardabweichung der resultierenden Verteilung für Y zu berechnen. Die dabei erhaltenen Werte lassen sich dann als Wert und Standardunsicherheit für y angeben. Die Standardunsicherheit von y wird auch als „Kombinierte Messunsicherheit" bezeichnet.
- Über die Form der Ausgangsverteilung von Y wird keine Aussage gemacht.
- Das Gesetz ist eine Näherung, deren Herleitung auf der Linearisierung der Modellgleichung beruht.
- Über die Form der Eingangsverteilungen werden keine weiteren Annahmen gemacht, abgesehen davon, dass sie symmetrisch sein müssen.
- Es wird angenommen, dass keine Abhängigkeit zwischen den Eingangsgrössen besteht. Eine erweiterte Form der Gleichung, die auch Korrelationen mit einbezieht, wird im ergänzenden Modul über Korrelationen besprochen.
- Für die meisten Messprobleme liefert die lineare Unsicherheitsfortpflanzung in der vorliegenden Form ein ausreichend korrektes Resultat.
- In der Literatur finden sich alternative Bezeichnungen für die Lineare Unsicherheitsfortpflanzung:
  - Gausssche Unsicherheitsfortpflanzung
  - Fortpflanzung der Varianzen oder Momente
  - Fehlerfortpflanzung (sollte nicht mehr verwendet werden)

2.4 Additives und multiplikatives Modell

Betrachtet werden als Verallgemeinerung der vorherigen Beispiele zwei Modelltypen die relativ oft vorkommen.

Beim **additiven Modell** addieren und subtrahieren sich einzelnen Eingangsgrössen zur resultierenden Grösse

$$Y = a + X_1 - X_2 + X_3 + \cdots \tag{26}$$

a ist eine Konstante. Unter Anwendung der linearen Unsicherheitsfortpflanzung erhält man als kombinierte Unsicherheit für y

$$\begin{aligned} u_c^2(y) &= u^2(x_1) + u^2(x_2) + u^2(x_3) + \cdots \\ &= \sum_{i=1}^{N} u^2(x_i) \end{aligned} \tag{27}$$

Beim **multiplikativen Modell** multiplizieren und dividieren sich die Eingangsgrössen

$$Y = \frac{a \cdot X_1 \cdot X_3 \cdot \cdots}{X_2 \cdot \cdot \cdots} \tag{28}$$

a ist wiederum eine Konstante. Unter Anwendung der linearen Unsicherheitsfortpflanzung erhält man

$$\begin{aligned} \left(\frac{u_c(y)}{y}\right)^2 &= \left(\frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2 + \cdots \\ &= \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{u(x_i)}{x_i}\right)^2 \end{aligned} \tag{29}$$

Während sich also bei einem additiven Modell die Quadrate der absoluten Beiträge zur Gesamtmessunsicherheit addieren, gilt dasselbe für die relativen Messunsicherheiten beim multiplikativen Modell. Bei einer überschlagsmässigen Beurteilung der Messunsicherheit kann die Vergegenwärtigung dieser einfachen Gesetzmässigkeiten von Nutzen sein.

2.5 Beispiele

Beispiel: Endmass

Modellgleichung:

$$L_X = f(L_N, \Delta L) = L_N + \Delta L \tag{30}$$

Empfindlichkeitskoeffizienten:

$$c_1 = \frac{\partial f}{\partial L_N} = 1 \tag{31}$$

$$c_2 = \frac{\partial f}{\partial \Delta L} = 1 \tag{32}$$

Kombinierte Messunsicherheit:

$$u_c(L_X) = \sqrt{u^2(L_N) + u^2(\Delta L)} \tag{33}$$

Es handelt sich hier um ein rein additives Modell, deshalb erhält man das gleiche Resultat durch Anwendung der Gleichung (27).

Beispiel: Elektrischer Strom

Modellgleichung:

$$I = f(U, R) = U/R \tag{34}$$

Empfindlichkeitskoeffizienten:

$$c_1 = \frac{\partial f}{\partial U} = \frac{1}{R} \tag{35}$$

$$c_2 = \frac{\partial f}{\partial I} = -\frac{U}{R^2} \tag{36}$$

Kombinierte Messunsicherheit:

$$u(I) = \sqrt{\frac{1}{R^2} u^2(U) + \frac{U^2}{R^4} u^2(R)} \tag{37}$$

nach Division beider Seiten durch U/R erhält man

$$\frac{u(I)}{I} = \sqrt{\frac{u^2(U)}{U^2} + \frac{u^2(R)}{R^2}} \tag{38}$$

Auch hier hätte man dasselbe Resultat durch Anwendung der Gleichung (29) für das multiplikative Modell erhalten.

Beispiel: Thermomètre

Modellgleichung:

$$t_X = f(t_{TD}, K, \Delta t) = t_{TD} + K + \Delta t \tag{39}$$

Empfindlichkeitskoeffizienten:

$$c_1 = \frac{\partial f}{\partial t_{TD}} = 1 \tag{40}$$

$$c_2 = \frac{\partial f}{\partial K} = 1 \tag{41}$$

$$c_3 = \frac{\partial f}{\partial \Delta t} = 1 \tag{42}$$

Kombinierte Messunsicherheit:

$$u(t_X) = \sqrt{u^2(t_{TD}) + u^2(K) + u^2(\Delta t)} \tag{43}$$

Analog zu Beispiel 1 erhält man dasselbe Resultat durch Anwendung der Gleichung (27).

Beispiel: Humidité de l'air

Modellgleichung:

$$\%rF = f\big(p_s(Tp), p_s(Kt)\big) = 100\,\frac{p_s(Tp)}{p_s(Kt)} \tag{44}$$

Empfindlichkeitskoeffizienten:

$$c_1 = \frac{\partial f}{\partial\big(p_s(Tp)\big)} = \frac{100}{p_s(Kt)} \tag{45}$$

$$c_2 = \frac{\partial f}{\partial\big(p_s(Kt)\big)} = -100\,\frac{p_s(Tp)}{p_s^2(Kt)} \tag{46}$$

Kombinierte Messunsicherheit:

$$u(\%rF) = 100\sqrt{\frac{1}{p_s^2(Kt)}u^2\big(p_s(Tp)\big) + \frac{p_s^2(Tp)}{p_s^4(Kt)}u^2\big(p_s(Kt)\big)} \tag{47}$$

nach Division beider Seiten durch $100 \cdot\ p_s(Tp)/p_s(Kt)$ erhält man

$$\frac{u(\%rF)}{\%rF} = \sqrt{\frac{u^2\big(p_s(Tp)\big)}{p_s^2(Tp)} + \frac{u^2\big(p_s(Kt)\big)}{p_s^2(Kt)}} \tag{48}$$

Analog zu Beispiel 2 haben wir hier ein multiplikatives Model und das Resultat lässt sich auch direkt durch Anwendung der Gleichung (29) erhalten.

Beispiel: Pression

Modellgleichung:

$$D_x = f(a_{PA}, b_{PA}, U) = a_{PA} + b_{PA} \cdot U \tag{49}$$

Empfindlichkeitskoeffizienten:

$$c_1 = \frac{\partial f}{\partial a_{PA}} = 2 \tag{50}$$

$$c_2 = \frac{\partial f}{\partial b_{PA}} = U \tag{51}$$

$$c_3 = \frac{\partial f}{\partial U} = b_{PA} \tag{52}$$

Kombinierte Messunsicherheit:

$$u(D_X) = \sqrt{u^2(a_{PA}) + U^2 \cdot u^2(b_{PA}) + b_{PA}^2 \cdot u^2(U)} \tag{53}$$

2.6 Alternative Berechnung der Empfindlichkeitskoeffizienten

Die Berechnung der Empfindlichkeitskoeffizienten ist das zentrale Konzept der *Linearen Unsicherheitsfortpflanzung*. Wie bereits ausgeführt lassen sich die Empfindlichkeitskoeffizienten über die partielle Ableitung der Modellgleichung berechnen. Dazu muss die Modellgleichung in analytischer Form vorliegen. Es gibt Fälle, in denen dies nicht der Fall ist, beispielsweise wenn ein Computerprogramm zur Berechnung der gewünschten Grösse eingesetzt wird. Auch kann es Modelle geben bei denen die Bildung der Ableitung kompliziert oder sehr aufwändig ist, oder die verantwortliche Person fühlt sich aus anderweitigen Gründen nicht in der Lage, eine Ableitung durchzuführen. In solchen Fällen bietet sich eine einfache numerische Art der Abschätzung der Empfindlichkeitskoeffizienten an: Man variiert die Eingangsgrösse um einen kleinen Betrag Δx_i und erhält dabei ein Variation Δy. Als Empfindlichkeitskoeffizienten erhält man dann

$$c_i = \frac{f(\cdots, x_{i-1}, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \cdots) - f(\cdots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \cdots)}{\Delta x_i} \tag{54}$$

Dies wiederholt man für alle Eingangsgrössen und erhält somit alle benötigten Empfindlichkeitskoeffizienten, um die *Lineare Unsicherheitsfortpflanzung* anzuwenden.

3. Die Grenzen der Linearität

Wie bereits erwähnt handelt es sich bei der *Linearen Unsicherheitsfortpflanzung* um eine Näherung, die auf der Linearisierung der Modellgleichung beruht. Für die meisten Messprobleme liefert diese Vorgehensweise absolut befriedigende Resultate. Es gibt allerdings Fälle bei denen sie versagt.

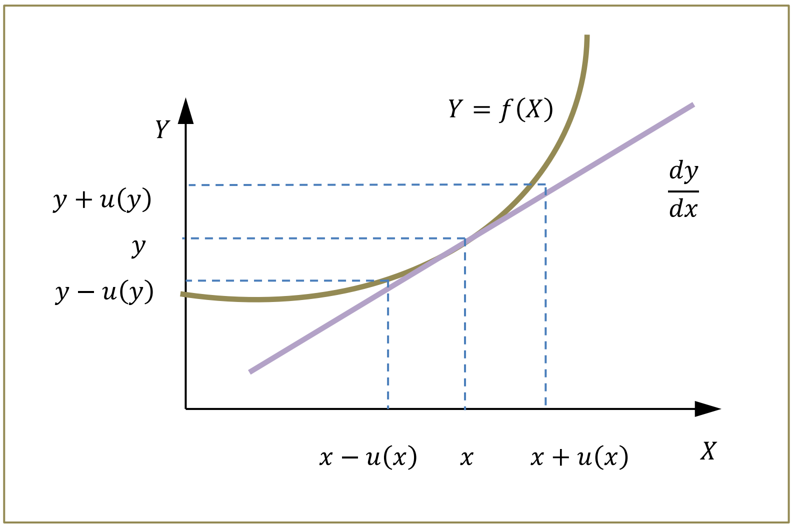

Abbildung 3: Nichtlinearität der Modellfunktion kombiniert mit grosser Messunsicherheit in der Eingangsgrösse kann zu Fehlern in der Berechnung der resultierenden Messunsicherheit führen.

Der Abbildung 3 kann man entnehmen, dass sich die Nichtlinearität erst mit zunehmender Messunsicherheit in den Eingangsgrössen signifikant auswirkt. Die Güte der linearen Näherung hängt deshalb nicht nur von der Nichtlinearität der Modellfunktion ab, sondern ist das Resultat einer Kombination aus Nichtlinearität des Modells und Messunsicherheit der Einflussgrössen. Wenn die Messunsicherheiten sehr gross werden, kann es also durchaus sein, dass die lineare Fortpflanzung unbefriedigende Resultate liefert.

Manchmal kommt es auch vor, dass sich man sich in einem Extremwert (Minimum oder Maximum) der Modellfunktion befindet (Abbildung 4). An diesem Ort ist die Ableitung der Funktion, und damit auch der Empfindlichkeitskoeffizient, gleich null. Somit erhält man unabhängig von der Grösse der Unsicherheit in der Eingangsgrösse überhaupt keinen Beitrag zur Gesamtunsicherheit.

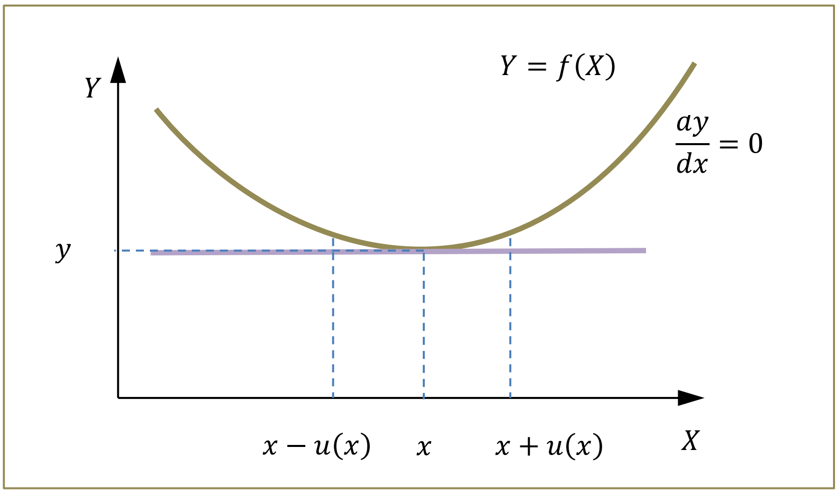

Abbildung 4: An einem Extremwert der Modellfunktion wird der Empfindlichkeitskoeffizient null.

Grundsätzlich stellt sich in einem solchen Fall die Frage wie dominant der entsprechende Beitrag zur Gesamtunsicherheit ist. Handelt es sich dabei um einen eher kleinen Beitrag, so lässt sich eventuell durch direkte Variation der Eingangsgrösse um den Betrag der eigenen Messunsicherheit und die daraus resultierende Variation in der resultierenden Grösse auf eine einfache Art der Beitrag zur Gesamtunsicherheit genügend gut abschätzen.

Falls der Einfluss einen dominanten Beitrag liefert, sollte man sich um eine verbesserte Methode bemühen. Eine Möglichkeit ist die Berücksichtigung der Terme höherer Ordnung in der Modellgleichung. Ohne Herleitung seien dazu der Vollständigkeit halber folgende Gleichungen für Wert y_0 und kombinierte Unsicherheit $u(y)$ angegeben:

$$y \quad = f(x_1,\, x_2,\, \ldots, x_N) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} u^2(x_i) \tag{55}$$

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i) + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j^2}\right] u^2(x_i) u^2(x_j) \tag{56}$$

Der jeweils erste Term in beiden Gleichungen entspricht der linearen Fortpflanzung. Die zusätzlichen Terme ergeben sich durch die Berücksichtigung der Terme quadratischer Ordnung in der Modellgleichung. Zusätzlich zu den Voraussetzungen der linearen Fortpflanzung wird hier angenommen, dass die Eingangsgrössen Gauss-verteilt sind. Auch bei diesen Gleichungen handelt es sich immer noch um Näherungen, und wenn auch damit das Resultat im Allgemeinen genauer wird, ist volle Zufriedenheit nicht garantiert. Eine genauere aber auch aufwändigere Methode der Messunsicherheitsfortpflanzung erhält man durch Anwendung numerischer Simulation. Mehr dazu im ergänzenden Exkurs über Monte Carlo.

4. Anhang: Formale Herleitung der *Linearen Unsicherheitsfortpflanzung*

Gegeben sei das Modell

$$Y = f(X_1,\ X_2,\ \ldots, X_N) \tag{57}$$

Den Eingangsgrössen X_i sind Zufallsvariablen, denen Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen zugrunde liegen, die sich durch Erwartungswerte $E[X_i] = \mu_i$ und durch Varianzen $E[(X_i - \mu_i)^2] = \sigma_i^2$ charakterisieren lassen. Durch eine Taylorentwicklung wird das Modell um $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\mu_X} = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_N)$ linearisiert.

$$Y \cong f(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_N) + \sum_{i=1}^{N} \left.\frac{\partial f}{\partial X_i}\right|_{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\mu_X}} \cdot (X_i - \mu_i) \tag{58}$$

Zur Berechnung des Wertes von Y wird der Erwartungswert des linearisierten Modells berechnet. Für das Quadrat der Standardunsicherheit von Y wird die Varianz als Erwartungswert des zweiten zentralen Moments berechnet.

Der Erwartungswert μ_Y von Y ergibt sich zu

$$\mu_Y = E(Y) \cong f(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_N) + \sum_{i=1}^{N} \left.\frac{\partial f}{\partial X_i}\right|_{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\mu_X}} \cdot E(X_i - \mu_i) \tag{59}$$

Da wir annehmen, dass alle Eingangsverteilungen symmetrisch sind, werden alle Erwartungswerte ungerader zentraler Momente gleich null. Somit fällt der zweite Term weg und es bleibt

$$\mu_Y \cong f(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_N) \tag{60}$$

Die Varianz σ_Y^2 von Y berechnet sich zu

$$\begin{aligned}\sigma_Y^2 &= E[(Y - \mu_Y)^2] = E\left[\left(\sum_{i=1}^{N} \left.\frac{\partial f}{\partial X_i}\right|_{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\mu_X}} \cdot (X_i - \mu_i)\right)^2\right] \\ &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \left.\frac{\partial f}{\partial X_i}\right|_{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\mu_X}} \left.\frac{\partial f}{\partial X_j}\right|_{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\mu_X}} \cdot E\left[(X_i - \mu_i) \cdot \left(X_j - \mu_j\right)\right]\end{aligned} \tag{61}$$

Für den Fall, dass die Eingangsgrössen unabhängig sind, werden die Mischterme im Erwartungswert gleich null und man erhält

$$\sigma_Y^2 = \sum_{j=1}^{N} \left(\left.\frac{\partial f}{\partial X_j}\right|_{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\mu_X}}\right)^2 E\left[\left((X_i - \mu_i)\right)^2\right] = \sum_{j=1}^{N} \left(\left.\frac{\partial f}{\partial X_j}\right|_{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\mu_X}}\right)^2 \sigma_i^2 = \tag{62}$$

Dabei handelt es sich um den Ausdruck für die *Lineare Unsicherheitsfortpflanzung* für unabhängige Eingangsgrössen.

Bei der Anwendung dieser Gleichungen in der Praxis werden Schätzwerte für die Grössen μ_i (Wert der Messgrösse) und σ_i (Standardunsicherheit der Messgrösse) eingesetzt. Die Resultate liefern dann Schätzwerte für Wert und Standardunsicherheit von Y.