Weiterbildungskurs Metrologie	Modul-Nr.:	MU-03
Grundlagen der Messunsicherheit	Dozent:	Dr. F. Pythoud

Ermittlung der Standardunsicherheit

Lernziel:
Sie verstehen den Begriff Standardunsicherheit und kennen die verschiedenen Methoden zur Bestimmung der Standardunsicherheit einer Einflussgrösse.

Inhalt

1. Begriffe aus der Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Ein ausführliches Glossar ist im Dokument MU-G zu finden.

2. Darstellung und Auswertung zufällig verteilter Grössen

2.1 Wiederholte Durchführung von Messungen

Es gibt verschiedene Fälle, wo wiederholte Messungen angebracht sind, z.B.:

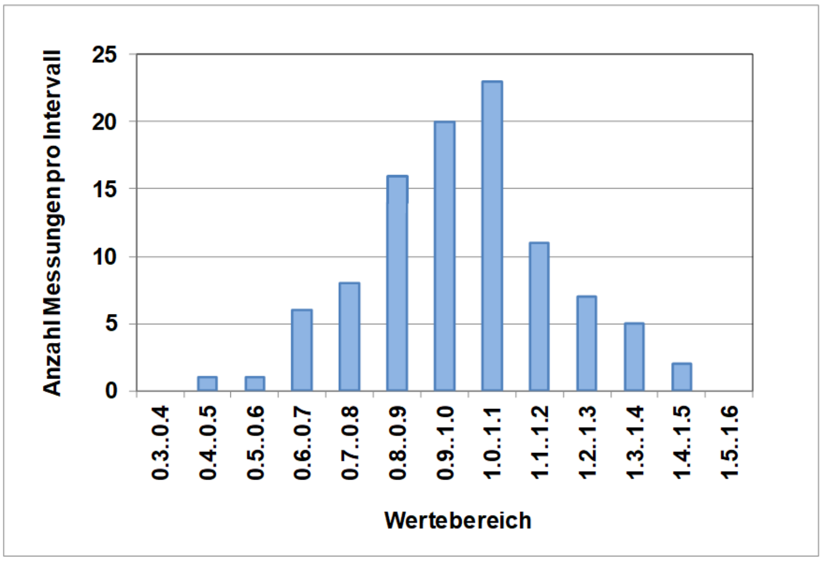
- Sind die Ablesungen eines Messinstrumentes trotz aller Massnahmen nicht stabil, sollte mehr als eine Ablesung vorgenommen werden, um ein Mass für die Streuung zu erhalten. In diesem Falle wird die gleiche Messung am gleichen Objekt wiederholt. Die Grundgesamtheit ist die Menge aller möglicher Ablesungen des gleichen Messinstrumentes und ist als solche nicht fassbar. Die Stichprobe entspricht der Menge der tatsächlich durchgeführten Messungen.
- Mehr als eine Messung wird auch vorgenommen, wenn die Messgrösse beispielsweise die Füllmenge einer Fertigpackung ist, will man doch eine Aussage über alle von einem Betrieb in einem bestimmten Zeitraum abgefüllten Fertigpackungen machen. In einem solchen Fall wird die gleiche Messung an verschiedenen Objekten wiederholt. Ähnliche Überlegungen gelten für die statistische Prozesskontrolle in der industriellen Fertigung, wo wiederholt Serienteile aus der Produktion auf die Einhaltung der Toleranzen überprüft werden und damit auch eine Aussage zur Prozesseignung und -stabilität gemacht werden kann.

2.2 Darstellung zufällig verteilter Messdaten

Beispiel: Eine Messung wurde hundertmal durchgeführt. Die Zahlenwerte der Wiederholungsmessungen können in einer Tabelle wiedergegeben werden:

0.524	0.980	0.895	1.254	1.071	0.835	1.176	1.063	0.703	1.150
0.672	1.137	0.616	1.020	1.209	1.001	0.908	1.079	0.994	1.050
1.381	1.023	0.814	1.109	0.907	1.243	1.038	1.091	0.987	1.320
0.689	1.057	0.831	0.788	0.903	0.856	1.013	0.909	1.087	1.245
1.047	1.107	1.060	1.410	1.101	0.860	0.932	1.161	0.994	0.468
1.227	0.864	0.943	0.611	1.076	1.345	0.857	1.093	0.785	0.984
1.059	0.889	0.730	0.628	0.755	1.332	0.861	1.047	0.832	1.189
1.222	0.999	0.996	0.716	1.115	1.005	1.046	0.765	1.427	0.929
0.764	0.805	1.018	1.388	1.177	0.862	0.981	0.869	1.248	0.806
1.128	0.908	0.624	1.048	0.966	0.959	0.980	0.863	1.076	0.980

Bereich	Häufigkeit
0.3 .. 0.4	0
0.4 .. 0.5	1
0.5 .. 0.6	1
0.6 .. 0.7	6
0.7 .. 0.8	8
0.8 .. 0.9	16
0.9 .. 1.0	20
1.0 .. 1.1	23
1.1 .. 1.2	11
1.2 .. 1.3	7
1.3 .. 1.4	5
1.4 .. 1.5	2
1.5 .. 1.6	0



Es ist jedoch schwierig, sich anhand einer langen Zahlenreihe ein Bild über die Streuung der Daten zu machen und es empfiehlt sich, die Daten zu ordnen und graphisch darzustellen. Dazu werden die Daten in einer **Häufigkeitstabelle** in Klassen eingeteilt und in einem **Histogramm** dargestellt. Häufigkeitstabelle und Histogramm sind beides Darstellungen der Häufigkeitsverteilung der Stichprobe.

2.3 Einfache statistische Kenngössen

X sei eine Eigenschaft (Grösse), die quantitativ bestimmt (gemessen) werden kann. Aus einer Stichprobe von n zufälligen Messungen x_i können folgende Kenngrössen bestimmt werden.

Mittelwert (Erwartungswert, Schätzwert):

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

Zentralwert oder Median: Der Median einer Menge von Elementen ist der Wert desjenigen Elementes, für das es gleich viele grössere und kleinere Werte in der Menge gibt.

Varianz:

$$s^2(x) = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2$$

Standardabweichung:

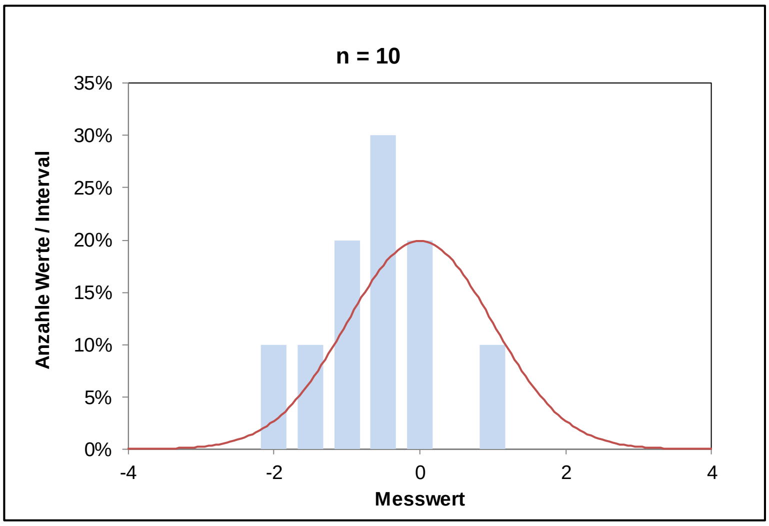
$$s(x) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2}{n-1}}$$

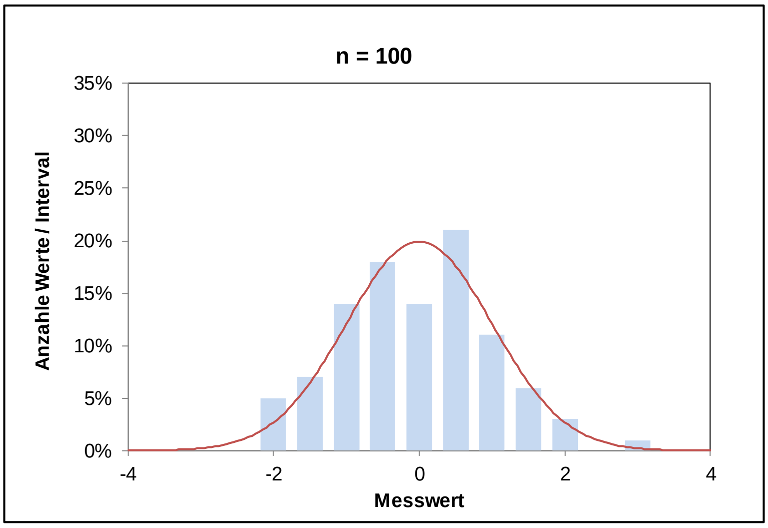
Eigenschaft der Standardabweichung: Die Standardabweichung ergibt eine gute Schätzung der Streuung der Elemente einer Zahlenmenge um deren Mittelwert.

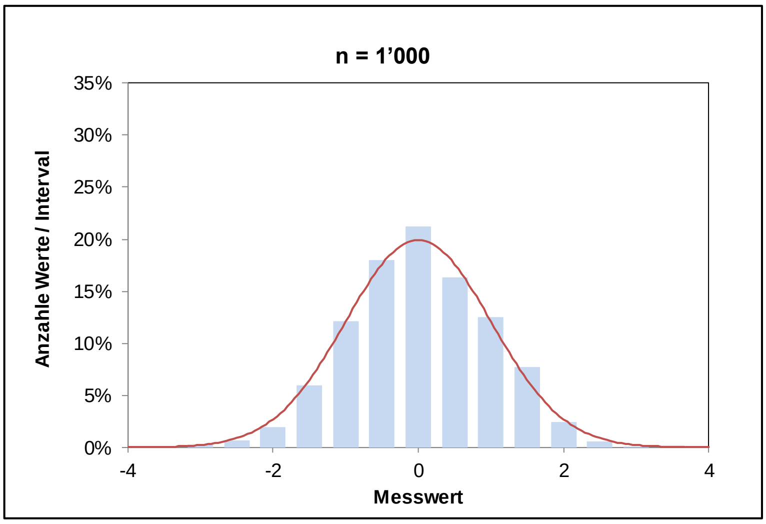
Standardunsicherheit des Mittelwertes:

$$s(\bar{x}) = \frac{s(x)}{\sqrt{n}}$$

Je grösser die Stichprobe (Anzahl n der Messwerte) ist, desto zuverlässiger können die Merkmale der Grundgesamtheit bestimmt werden. So wird insbesondere die Standardunsicherheit des Mittelwerts mit wachsendem n kleiner, die statistische Sicherheit wird erhöht.







Zur Veranschaulichung der Abhängigkeit statistischer Kenngrössen werden Mittelwert $\bar{x}$, Median, Standardabweichung s und Standardunsicherheit $s(\bar{x})$ des Mittelwertes jeweils für die ersten 10, 30 und für alle 100 Werte der Tabelle in 2.2 berechnet:

Auswertebereich	$\bar{x}$	*Median*	$s(x)$	$s(\bar{x})$
1 ... 10	0.965	1.022	0.228	0.072
1 ... 30	1.008	1.031	0.202	0.037
1 ... 100	0.985	0.995	0.198	0.020

2.4 Wahrscheinlichkeitsverteilung

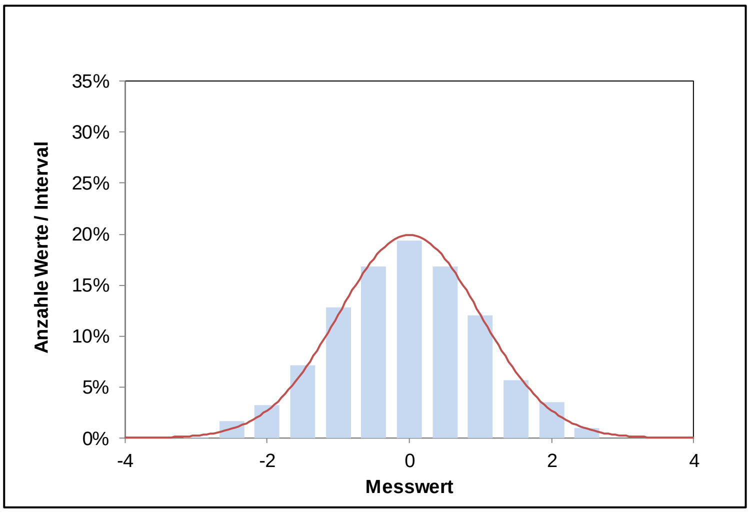
Durch Normierung der Häufigkeitsverteilung (die Wahrscheinlichkeit für den Gesamtbereich der Werte der Zufallsgrösse hat den Wert 1) ergibt sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung. Im obigen Beispiel beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass ein Wert im Bereich zwischen 1.0 und 1.1 liegt, 0.23 (23 %). Die kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilung (Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion) der Grundgesamtheit ist eine Normalverteilung (ausgezogene Linie, siehe auch 2.5.6).

2.5 Statistische Verteilungen

2.5.1 Kenngrössen von Verteilungen

Verteilungen werden durch einfache Kenngrössen wie Mittelwert, Varianz und Standardabweichung charakterisiert. Die Ermittlung dieser Kenngrössen für verschiedene Verteilungen wird im Anhang A beschrieben.

2.5.2 Diskrete und kontinuierliche Verteilungen



Häufigkeitsverteilungen (diskrete Verteilungen)

$$\Pr(X \in I_k) = \frac{n_k}{n} = p_k$$

lassen sich im Grenzfall durch Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen (kontinuierliche Verteilungen) darstellen:

$n \ \rightarrow \infty$

Breite von $I_k \rightarrow 0$

$p_k \rightarrow p(x)$

Die Wahrscheinlichkeit der Dichtefunktion $p(x)$ lässt sich durch

$$\Pr(x < X < x + dx) = p(x)dx$$

ausdrücken.

Die Kenngrössen von diskreten Verteilungen werden im Grenzfall folgendermassen definiert:

Mittelwert $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$:

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot x \cdot dx$$

Varianz $s^2(x) = \frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2)}{n-1}$:

$$s^2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot (x - \bar{x})^2 \cdot dx$$

Die Standardabweichung ist als Wurzel der Varianz definiert:

$$s(x) = \sqrt{s^2(x)}$$

2.5.3 Rechteckverteilung

Die Rechteckverteilung beschreibt eine Menge, deren Elemente die Werte innerhalb eines vorgegebenen Intervalls alle mit der gleichen Wahrscheinlichkeit annehmen. Die Rechteckverteilung ist definiert durch die Funktion:

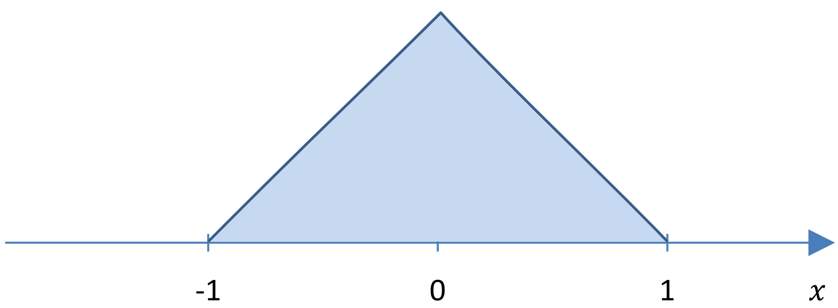
$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn} \quad |x| > 1 \\ 1/2 & \text{wenn} \quad |x| \leq 1 \end{cases}$$

Die Standardabweichung beträgt $s = 1/\sqrt{3} = 0.58$ (siehe Anhang A).

2.5.4 Dreieckverteilung

Die Dreiecksverteilung beschreibt eine Menge, deren Elemente die grössere Wahrscheinlichkeit in der Mitte, jeweils die kleinere an den Grenzen eines vorgegebenen Intervalls annehmen. Die Dreieckverteilung ist definiert durch die Funktion:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn} \quad x < -1 \\ 1 + x & \text{wenn} \quad -1 \leq x < 0 \\ 1 - x & \text{wenn} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{wenn} \quad 1 < x \end{cases}$$

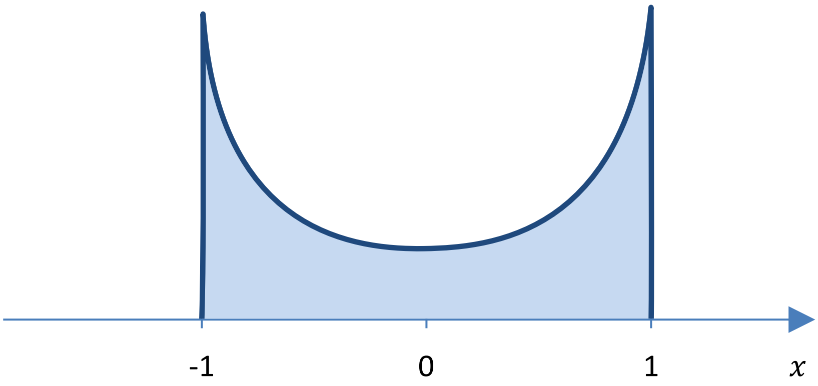


Die Standardabweichung beträgt $s = 1/\sqrt{6} = 0.41$ (siehe Anhang A).

2.5.5 U-Verteilung

Die U-Verteilung beschreibt eine Menge, deren Elemente die grössere Wahrscheinlichkeit in der Mitte, jeweils die kleinere an den Grenzen eines vorgegebenen Intervalls annehmen. Die U-Verteilung ist definiert durch die Funktion:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn} \quad |x| > 1 \\ \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} & \text{wenn} \quad |x| \leq 1 \end{cases}$$

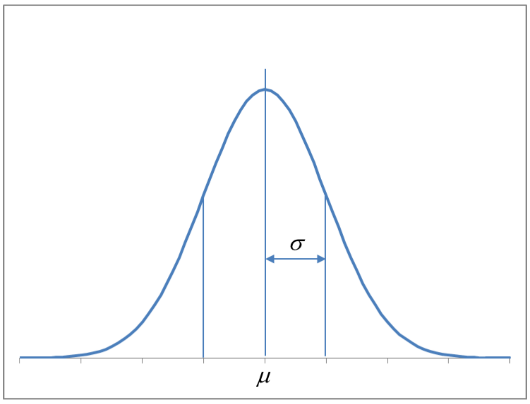


Die Standardabweichung beträgt $s = 1/\sqrt{2} = 0.71$ (siehe Anhang A).

2.5.6 Normalverteilung

Die Wahrscheinlichkeitsdichte zufällig verteilter Messwerte folgt in der Regel der bekannten Gauss'schen Glockenkurve, die in der Statistik als **Normalverteilung** bezeichnet wird. Die Normalverteilung ist durch deren Mittelwert μ und deren Standardabweichung σ charakterisiert.

$$g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$



Für diese Verteilung gilt

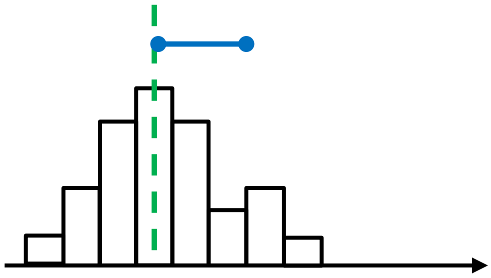
$$\bar{x} = \mu$$

$$s(x) = \sigma$$

Für $\mu = 0$, $\sigma = 1$, bekommt man: $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$.

3. Messunsicherheit und Statistik

Nach der GUM Definition ist die Messunsicherheit nicht durch die ganze Verteilung der möglichen Werte gegeben, sondern nur durch einen Parameter, der die Streuung der Werte kennzeichnet. Als Parameter wird im GUM die Breite der Verteilung im Sinne der Standardabweichung als ***Standardunsicherheit*** definiert.



Statistik		**Messwesen**
Mittelwert $\bar{X}_i$	→	Schätzwert x_i
Standardabweichung $s(\bar{X}_i)$	→	Standardunsicherheit $u(x_i)$

Für eine Eingangsgrösse X_i, die sich aus n Werten $X_{i,k}$ aus unabhängigen mehrmaligen Beobachtungen ergibt, beträgt die Standardunsicherheit $u(x_i)$ zu ihrem Schätzwert $X_i = \bar{X}_i$ somit $u(x_i) = s(\bar{X}_i)$.

4. Bestimmung der Standardunsicherheit von Einfluss- und Messgrössen

Jede Einflussgrösse muss quantifiziert und deren Standardunsicherheit bestimmt werden. Zur Bestimmung der Standardunsicherheit muss zuerst die Verteilung ermittelt werden, um dann deren Standardabweichung zu berechnen. Dafür gibt es zwei Möglichkeiten:

- Entweder ist die Verteilung durch wiederholte Messungen „realisiert“. Für zufällig verteilte Grössen werden dann statistische Methoden verwendet, um die Standardabweichung abzuschätzen. Diese Bewertungsmethode wird als Typ A bezeichnet.
- Wenn man aus Zeitgründen, Kostengründen, oder einfach, weil nicht machbar, keine Statistik zur Verfügung hat, versucht man die Verteilung anders abzuschätzen. Man nennt dieses Verfahren Typ B-Auswertung.

4.1 Anwendung statistischer Methoden (Typ A)

Von einer Typ-A-Bestimmung der Messunsicherheit spricht man, wenn die Schwankungen einer Eingangsgrösse X_i durch statistische Methoden bestimmt werden. Im Prinzip kann die Standardunsicherheit der meisten Einflussgrössen mit statistischen Mitteln aus einer Vielzahl von Messungen unter verschiedensten Bedingungen bestimmt werden. Zum Beispiel:

- Wiederholtes Ablesen eines Instrumentes mit einer verrauschten digitalen oder analogen Anzeige;
- Wiederholte Ablesungen nach neu durchgeführten manuellen Einstellungen an der Messeinrichtung: Bestimmung des Einflusses der endlichen Einstellgenauigkeit und des Bedieners;

- Wiederholte Ablesungen nach neu durchgeführter Antastung eines gemessenen Objekts in der Längenmessung: Bestimmung der Antastunsicherheit.

In diesem Fall hat man als Grundlage eine Stichprobe

mit *n* Messwerten der Messgrösse X_i : $X_{i,1}, X_{i,2}, X_{i,3,} \dots, X_{i,n}$

Nach statistischen Methoden erhält man den besten Schätzwert x_i aus dem Mittelwert $\bar{X}_i$:

$$x_i = \bar{X}_i = \frac{1}{n}\left(X_{i,1} + X_{i,2} + X_{i,3} + \cdots + X_{i,n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_{i,k}$$

und die Streuung aus der Standardabweichung

$$s(X_i) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}\left(X_{i,k} - \bar{X}_i\right)^2)}{n-1}}$$

Die Standardunsicherheit des Mittelwertes erhält man aus

$$s(\bar{X}_i) = \frac{s(X_i)}{\sqrt{n}}$$

4.1.1 Beispiel 1: Labortemperatur

Aufgabe: Bestimmung der Labortemperatur während der Dauer der Messung, angenommen hier 8 Stunden.

Folgendes Experiment wird durchgeführt: Während der Messung wird die Temperatur alle 10 Minuten (insgesamt 49 Messungen) aufgenommen. Man erhält den Mittelwert $\bar{x}$ = 23.39 °C und die Standardabweichung 0.57 °C. In diesem Fall wird die Temperatur folgendermassen ausgedrückt:

T = 23.39 °C mit Standardabweichung = 0.57 °C

4.1.2 Beispiel 2: Labortemperaturmittelwert

Aufgabe: Bestimmung der mittleren Labortemperatur während der Dauer der Messung, angenommen hier 8 Stunden. Es wird angenommen, dass das Experiment nicht sehr empfindlich auf Temperaturschwankungen, sondern auf die mittlere Temperatur während der Dauer des Experimentes ist.

Folgende Messserien konnten vorgängig realisiert werden: die Labortemperatur wird an drei verschiedenen Tagen alle 10 Minuten aufgenommen:

Tag	**Mittelwert $\bar{x}$ / °C**	**Standardabweichung / °C**
Tag 1	23.31	0.54
Tag 2	22.83	0.49
Tag 3	23.28	0.6

Aus diesen Werten lassen sich folgende Schlussfolgerungen ziehen:

1. Die Labortemperatur kann während eines Tages schwanken. Typische Standardabweichungen sind ungefähr 0.55 Grad.
2. Von Tag zu Tag schwankt der Temperaturmittelwert noch zusätzlich.

Mit diesen Schlussfolgerungen wird entschieden, am Tag 4 das Experiment durchzuführen. Es gibt nun zwei Möglichkeiten, die mittlere Temperatur während des Experimentes abzuschätzen:

a) Die Temperatur wird alle 10 Minuten (insgesamt 49 Messungen) gemessen: man erhält den Mittelwert $\bar{x}$ = 23.39 °C und die Standardabweichung 0.57 °C. In diesem Fall wird die mittlere Temperatur folgendermassen ausgedrückt:

   $\bar{T}$ = 23.39 °C mit Standardunsicherheit = 0.57/√49 = 0.081 °C

b) Man nehme die Temperatur nur einmal während dem Experiment auf: 23.43 °C. Die Erfahrung während den Tagen 1, 2, und 3 hat gezeigt, dass die Standardunsicherheit in der Grössenordnung von 0.55 Grad ist, also:
   T = 23.43 °C mit Standardunsicherheit = 0.55 °C

Je grösser die Zahl der Messwerte in der Reihe ist, desto besser ist der Mittelwert bekannt und desto besser stimmen die wiederholten Messreihen überein:

4.2 Anwendung nicht-statistischer Methoden (Typ B)

Wie schon erwähnt ist es nicht immer möglich, Stichproben von Messwerten zu haben, um Typ-A Auswertungen durchführen zu können. In diesem Fall versucht man so gut wie möglich die Form der Verteilung und deren Breite abzuschätzen. Zu diesem Zweck braucht man alle möglichen Informationen, z.B. aus:

- vorgängige Messdaten
- generelle Erfahrung über Verhalten, Eigenschaften
- Herstellerspezifikationen
- Daten aus Kalibrierzertifikaten
- Unsicherheit von Referenzdaten aus Handbüchern

Bei Typ B Abschätzungen wird die **Standardunsicherheit** unter Berücksichtigung der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen ermittelt. Weil keine Statistik vorhanden ist, kann über die Verteilungsform sehr wenig ausgesagt werden. Es ist üblich, einfach zwischen folgenden Verteilungstypen zu wählen:

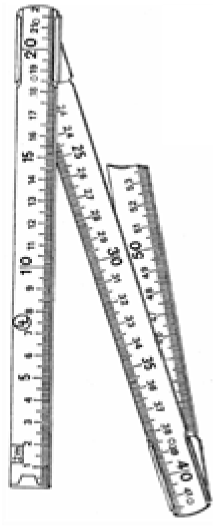
- Normalverteilung
- Rechteckverteilung
- Dreieckverteilung
- U-Verteilung
- Trapezverteilung (selten)

Die oben erwähnten Verteilungen und deren Anwendung sind im Anhang A beschrieben. Hat man keine weitere Information über die zugrundeliegende Verteilung, wie beispielsweise bei einer Spezifikation oder Toleranz, nimmt man in der Regel eine Rechteckverteilung an, wobei die Grenzen der Rechteckverteilung durch die Spezifikation gegeben sind.

5. Beispiele

5.1 Messung einer Tischlänge

In diesem Beispiel soll die Messunsicherheit der Längenmessung eines Tisches (Länge etwa 1.2 m) mit einem Doppelmeter bestimmt werden.



5.2 Messmodell und Messunsicherheiten

Folgende Einflussgrössen werden identifiziert:

- Messinstrument (Doppelmeter)
- Ablesung
- Unzulänglichkeiten des Tisches (nicht gerade und nicht parallele Seitenflächen, abgerundete Kanten etc.)

In diesem Beispiel wird die Tischlänge direkt gemessen. Um die Messunsicherheitsbeiträge zu berücksichtigen, wird ein mathematisches Modell folgendermassen definiert:

$$Y = X_1 + X_2 + X_3$$

mit Ausgangsgrösse $Y = L$

und Eingangsgrössen $X_1 = M$ (Länge gemessen mit dem Doppelmeter)
$X_2 = A$ (Ablesefehler)
$X_3 = K$ (Korrektur für Tischunzulänglichkeiten)

Es wird angenommen, dass $\bar{A} = 0$ $\bar{K} = 0$.

5.2.1 Messinstrument

Der Massstab habe die Genauigkeitsklasse III (siehe Bild oben), d.h. der maximale Fehler beträgt gemäss der Verordnung des EJPD vom 19. März 2006 über Längenmessmittel (SR 941.201)

$$(0.6 + 0.4 \cdot L)\ \mathrm{mm},$$

wobei L die Länge in m, aufgerundet auf den nächsten ganzen m, ist.

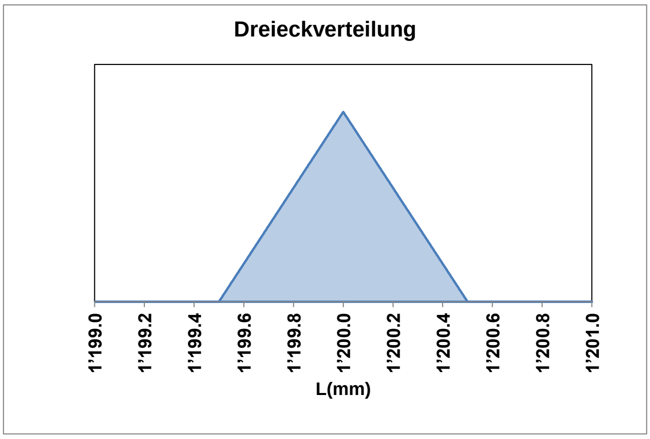
Damit ergibt sich für einen Massstab der Länge 1.2 m ein maximaler Fehler von 1.4 mm, angenommen als maximale Abweichung einer Rechteckverteilung, und somit erhält man nach **Typ B** Methode:

$$u(x_1) = u(M) = \frac{1.4\ \mathrm{mm}}{\sqrt{3}} = 0.81\ \mathrm{mm}$$

5.2.2 Ableseunsicherheit

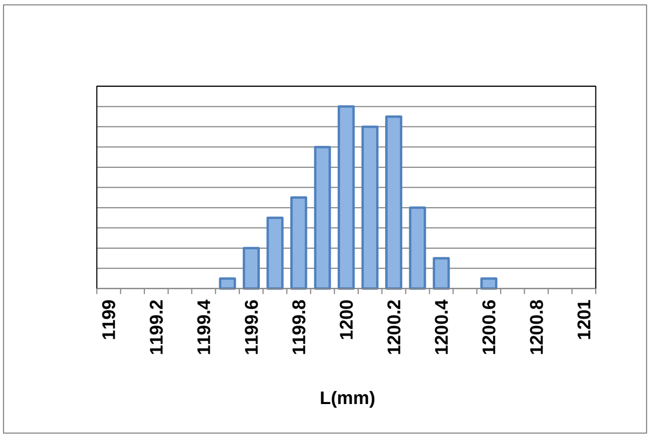
Zur Bestimmung der Ableseunsicherheit gibt es hier verschiedene Varianten:

Variante 1: Man nehme an, dass die Ableseunsicherheit eine Dreiecksverteilung ist (was ziemlich korrekt ist im Fall der Ablesung eines analogen Instrumentes). Die halbe Breite wird nun anhand des maximalen Ablesefehlers abschätzt, z.B. 0.5 mm. So bekommt man nach **Typ B** Methode



$$u(x_2) = u(A) = \frac{0.5\ \text{mm}}{\sqrt{6}} = 0.20\ \text{mm}$$

Variante 2: Man lässt die Länge des Tisches von mehreren Personen messen. Die Unsicherheit wird dann nach **Typ A** Methode gegeben durch:



$$u(x_2) = u(A) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(L_k - \bar{L})^2}{n-1}} = 0.21\ \text{mm}$$

Im Prinzip sind beide Methoden gleichwertig und sollten zu ähnlichen Ergebnissen führen.

5.2.3 Unzulänglichkeiten des Messobjektes

Zur Bestimmung der Formabweichungen des Tisches gibt es wiederum verschiedene Varianten:

Variante 1: Man versuche, eine zutreffende Verteilung zu finden nach **Typ B** Methode und deren Breite abzuschätzen, z.B. aus der Differenz der „grössten" zu „kürzesten" Länge.

Variante 2: Man versuche anhand einer Auswertung **Typ A** verschiedene Messungen der Tischlänge durchzuführen und anschliessend eine statistische Auswertung zu machen.

In diesem Beispiel nehmen wir $u(x_3) = u(K) = 0.28\ \text{mm}$ an.

5.3 Strommessung

Der Strom I in einem Messkreis wird durch die Messung des Spannungsabfalls U über einem Referenzwiderstand R bestimmt.

$$I = \frac{U}{R}$$

5.3.1 Typ-B Beiträge des Referenzwiderstands

Der Wert des Referenzwiderstandes stammt aus einem Kalibrierzertifikat. Er wird angegeben mit R = (1000.042 ± 0.005) Ω. Die angegebene Messunsicherheit ist die Standardunsicherheit. Falls wir die Unsicherheit von 5 mΩ aus dem Zertifikat ohne weitere Untersuchungen übernehmen, entspricht dies einer Typ-B-Bestimmung der Unsicherheit mit Normalverteilung und die Typ-B-Standardunsicherheit ist somit 5 mΩ.

Nach Herstellerangabe ist die Stabilität mit einem jährlichen Drift von < 5 mΩ gekennzeichnet. Dies entspricht einer Typ-B Unsicherheit mit Rechteckverteilung:

$u_D = 5 \text{ m}\Omega/\sqrt{3} = 2.9 \text{ m}\Omega$.

Wiederum nach Herstellerangabe ist die Temperaturabhängigkeit des Widerstands 2 mΩ/°C. Da die Temperatur im Labor (23 ± 1) °C beträgt, entspricht diese Abhängigkeit einer Typ-B Unsicherheit mit Rechteckverteilung:

$u_T = 2 \text{ m}\Omega/\sqrt{3} = 2.9 \text{ m}\Omega$.

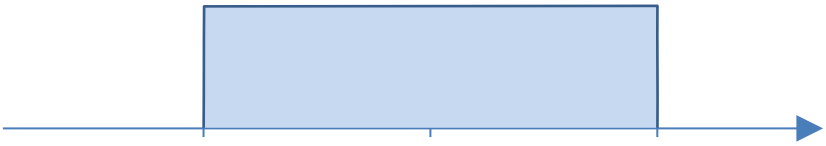
5.3.2 Unsicherheiten der Spannungsablesung

Für die Messung der Spannung verwenden wir ein digitales Multimeter im 10-V-Bereich, das vor 3 Monaten kalibriert wurde. Der Hersteller gibt in seinen Spezifikationen an, dass die Genauigkeit des Voltmeters bis 1 Jahr nach der Kalibration besser ist als: 14×10^{-6} vom abgelesenen Wert plus 2×10^{-6} vom Bereichswert. Die Analyse einer Anzahl unabhängiger Messungen mit dem Voltmeter ergibt einen Mittelwert der abgelesenen Spannung von $\bar{V} = 3001542$ V mit einer Typ-A-Standardunsicherheit von 12 µV. Die zusätzliche, mit den Herstellerspezifikationen für das Voltmeter verbundene Unsicherheitskomponente kann durch eine Typ-B-Evaluation bestimmt werden. Dabei nehmen wir an, dass die Spezifikationen Grenzen für eine mögliche Korrektur ΔV zur abgelesenen Spannung darstellen. Der Erwartungswert für die Korrektur ist Null und die Wahrscheinlichkeit für die Korrektur ist dieselbe überall im durch die Spezifikationen definierten Intervall. Wir gehen damit von einer Rechteckverteilung mit einer halben Breite a aus: $a = (14\times10 - 6) \times (3.001542\,V) + (2\times10 - 6) \times (10\,V) = 62\,\mu V$. Die Typ-B-Standardunsicherheit für die Spannungskorrektur ist somit: $u(\Delta V) = a/\sqrt{3} = 36\,\mu V$. Diese Unsicherheitskomponente muss nun noch mit der Typ-A-Standardunsicherheitskomponente kombiniert werden (siehe Modul MU-04).

Anhang

A Verteilungen

Rechteckverteilung



Funktion: $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn} \quad |x| > 1 \\ 1/2 & \text{wenn} \quad |x| \leq 1 \end{cases}$

Gesamtwahrscheinlichkeit: $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot dx = \int_{-1}^{1} 1/2 \cdot dx = 1$

Mittelwert: $\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot x \cdot dx = \int_{-1}^{1} x/2 \cdot dx = 0$

Varianz: $s^2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot x^2 \cdot dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot dx = \frac{x^3}{6}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{3}$

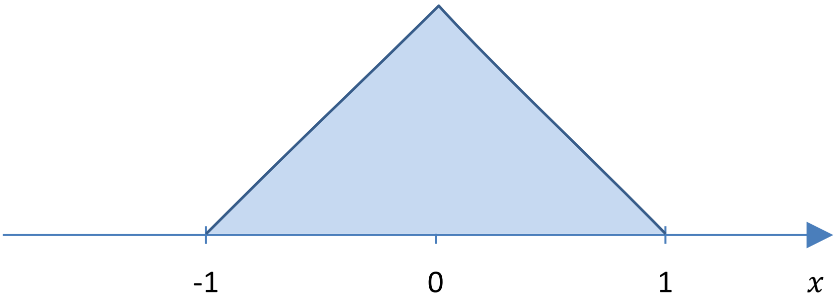
Standardabweichung: $s(x) = \sqrt{s^2(x)} = \sqrt{\frac{1}{3}}$

Anwendung

In Anwendungsfällen wird das Intervall $[-1, +1]$ durch $[-a, +a]$ ersetzt. Diese Verteilung wird oft gebraucht

- um Messgrössen von Gegenständen zu beschreiben, die sich aus einer Toleranz ergeben.
- für die Unsicherheit einer digitalen Anzeige: eine Auflösung von dx resultiert in einer Rechteckverteilung mit halben Breite von $a = dx/2$.

Dreieckverteilung



Funktion: $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn} \quad x < -1 \\ 1 + x & \text{wenn} \quad -1 \leq x < 0 \\ 1 - x & \text{wenn} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{wenn} \quad 1 < x \end{cases}$

Gesamtwahrscheinlichkeit: $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot dx = \int_{-1}^{0} (1 + x) \cdot dx + \int_{0}^{1} (1 - x) \cdot dx = 1$

Mittelwert: $\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot x \cdot dx = \int_{-1}^{0} (1 + x) \cdot x \cdot dx + \int_{0}^{1} (1 - x) \cdot x \cdot dx = 0$

Varianz: $s^2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot x^2 \cdot dx$

$= \int_{-1}^{0} (1 + x) \cdot x^2 \cdot dx + \int_{0}^{1} (1 - x) \cdot x^2 \cdot dx = \frac{1}{6}$

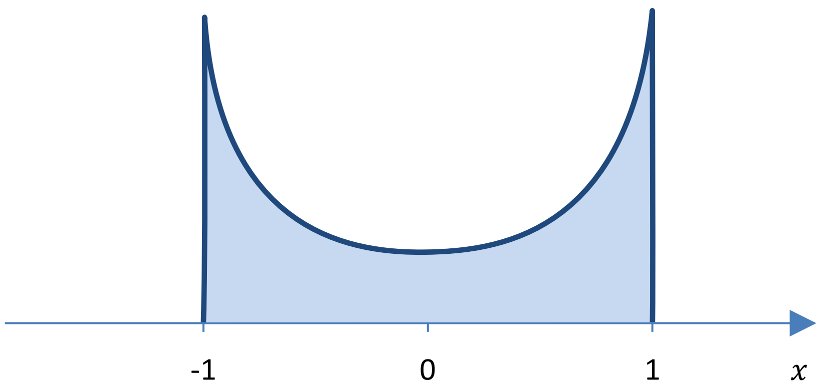
Standardabweichung: $s(x) = \sqrt{s^2(x)} = \sqrt{\frac{1}{6}}$

Anwendung

In Anwendungsfällen wird das Intervall $[-1, +1]$ durch $[-a, +a]$ ersetzt. Diese Verteilung wird oft gebraucht für

- die Ableseunsicherheit eines Analoggerätes. In diesem Fall wird a als eine Abschätzung des maximalen Fehlers angenommen.
- alle Verteilungen mit beschränktem Fehler, die besser als eine Rechteckverteilung sind.

U-Verteilung



Funktion: $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn} \quad |x| > 1 \\ \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} & \text{wenn} \quad |x| \leq 1 \end{cases}$

Gesamtwahrscheinlichkeit: $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\pi \cdot \sqrt{1-x^2}} \cdot dx = \frac{\arcsin x}{\pi}\Big|_{-1}^{1} = 1$

Mittelwert: $\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot x \cdot dx = \int_{-1}^{1} \frac{x}{\pi \cdot \sqrt{1-x^2}} \cdot dx = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi}\Big|_{-1}^{1} = 0$

Varianz: $s^2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot x^2 \cdot dx = \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\pi \cdot \sqrt{1-x^2}} \cdot dx$

$$= \frac{-x \cdot \sqrt{1-x^2} + \arcsin x}{2\pi}\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{2}$$

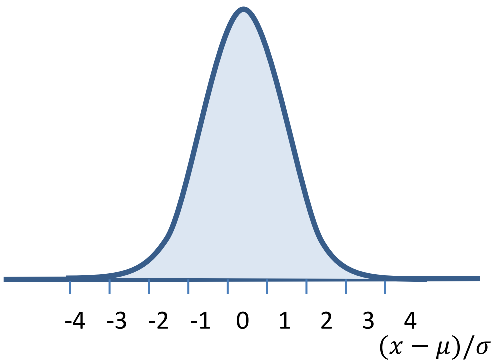
Standardabweichung: $s(x) = \sqrt{s^2(x)} = \sqrt{\frac{1}{2}}$

Anwendung

In Anwendungsfällen wird das Intervall $[-1, +1]$ durch $[-a, +a]$ ersetzt. Diese Verteilung wird oft gebraucht für

- die Unsicherheit der Amplitude von Wellenphänomenen, wo die Phase nicht bekannt ist.
- periodisch schwankende Phänomenen, wie z.B. Raumtemperatur in klimatisierten Räumen.

Normalverteilung



Funktion: $g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

Gesamtwahrscheinlichkeit: $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot dx = 1$

Mittelwert: $\bar{x} = \mu$

Varianz: $s^2(x) = \sigma^2$

Standardabweichung: $s(x) = \sigma$

Anwendung: Diese Verteilung wird oft gebraucht

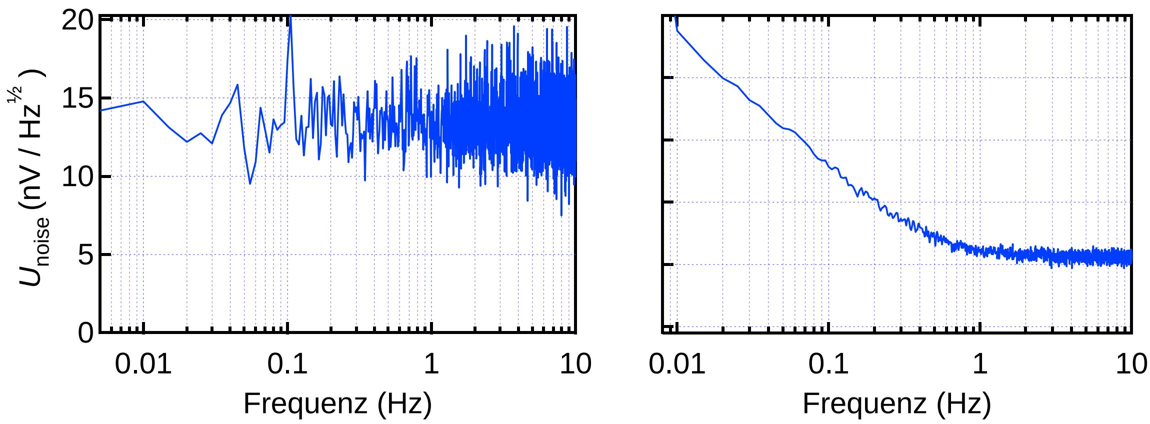
- für Naturphänomene.
- um die Unsicherheit von Kalibrierzertifikaten zu interpretieren.

B Bemerkungen zur Standardunsicherheit eines Mittelwertes

Im Kapitel 2 haben wir gesehen, dass die statistische Unsicherheit eines Messresultates aus der Streuung einer Serie von Messwerten gewonnen werden kann. Dabei werden die Messwerte, z.B. die Anzeige eines Voltmeters, unter denselben Bedingungen durchgeführt. Es lohnt sich, eine Messung so oft wie möglich zu wiederholen, weil die Standardunsicherheit des Mittelwertes wie $1/\sqrt{n}$ abnimmt, wobei n die Anzahl der Ablesungen bezeichnet. Dies gilt jedoch nur, wenn der die Messung beeinflussende Rauschprozess zufälliger Natur ist.

Rauschsignale können durch ihr Frequenzspektrum, ihre Amplituden-Verteilung und durch den zu Grunde liegenden Prozess charakterisiert werden:

- Zufälliges Rauschen, oft auch weisses Rauschen genannt, zeichnet sich durch ein flaches Frequenzspektrum aus. Das heisst, dass die Rauschleistung in jedem Teil des Frequenzspektrums dieselbe ist. Jeder elektrische Widerstand generiert an seinen offenen Enden ein Spannungsrauschen, das von seinem Wert und der Temperatur abhängt. Dieses thermische Rauschen („Johnson noise“) ist weiss. Falls es in einem Messprozess dominant ist, kann somit die Messunsicherheit durch Wiederholung der Messung verkleinert werden.
- In den meisten elektrischen Messungen gibt es nebst dem thermischen Rauschen Rauschsignale, die unterhalb einer bestimmten Frequenz mit dem Kehrwert der Frequenz ($1/f$) ansteigen. Man spricht in diesem Fall auch von Flicker-Rauschen. Falls das $1/f$-Rauschen dominant wird, kann eine Messung nach einer bestimmten Zeit durch weiteres Wiederholen nicht mehr verbessert werden. Die Anwendung der Regeln, die für rein zufällig verteilte Messwerte gilt, führt in so einem Fall zu einer ***unterschätzten*** Standardunsicherheit.



Frequenzspektrum bei einer Spannungsablesung. Links: weisses Rauschen; rechts: 1/f-Rauschen (Flickerrauschen).

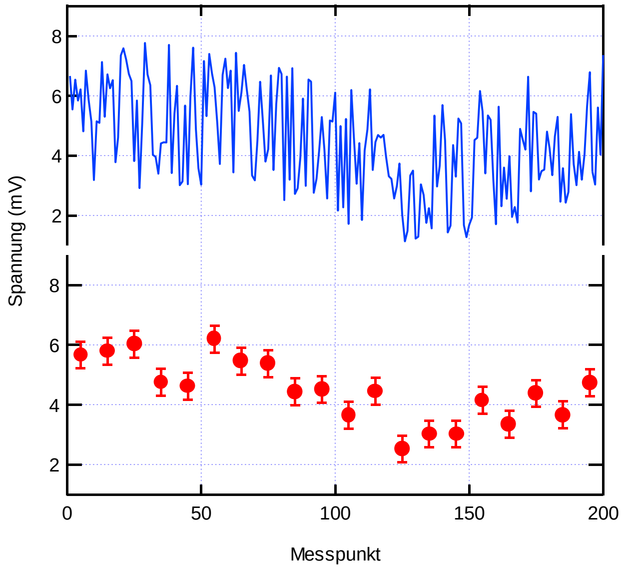
Figur A1 zeigt den Verlauf eines Spannungssignals über eine bestimmte Zeit. Eine niederfrequente Störung, z. B. verursacht durch eine periodische Änderung der Temperatur, bringt eine $1/f$-Komponente in das sonst weisse Rauschspektrum.

Falls wir unter der Annahme eines weissen Rauschspektrums nach den ersten 90 Messwerten einen Mittelwert bilden, so wird das Resultat:

$$\overline{V_1} = \sum_{i=1}^{90} V_i = 5.37 \text{ mV};\ s_1(\overline{V}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{90}(V_i - \overline{V})^2}{n(n-1)}} = 0.16 \text{ mV} \tag{A.1}$$

Falls wir den Mittelwert nach 200 Messwerten bilden (und damit ungefähr eine ganze Periode der Störung überdecken), so wird der Mittelwert:

$\overline{V_2} = 4.48$ mV; $s_2(\overline{V}) = 0.12$ mV



Zeitlicher Verlauf eines Spannungssignals. Im unteren Teil sind je 10 Messwerte zu einem Mittelwert zusammengefasst. Deutlich zu sehen ist die überlagerte sinusförmige Störung.

Dieser Mittelwert ist das 5.6-fache der Standardabweichung s_1 vom Mittelwert V_1 entfernt, was deutlich zeigt, dass in diesem Fall die Standardabweichung des Mittelwertes die tatsächliche Unsicherheit deutlich unterschätzt.

Eine gute Methode, um eine Messserie nach $1/f$-Rauschanteilen zu untersuchen besteht darin, die gesamte Messreihe in eine Anzahl gleich grosser Unterreihen zu unterteilen. In der Figur A2 bilden wir alle m Messwerte (z.B. 10) einen Mittelwert V_{m-i} und berechnen die dazugehörende Standardunsicherheit, die für alle Mittelwerte ungefähr gleich ausfällt: $s(V_{m-1}) \cong s_m$. Für den Mittelwert der ganzen Messserie gilt:

$$\overline{V_m} = \frac{1}{k}\sum V_{m-1};\ k = n/m. \tag{A.2}$$

Für die Berechnung der Standardunsicherheit dieses Mittelwertes gibt es zwei Möglichkeiten. Bei der ersten benützen wir die bereits berechneten Unsicherheiten eines jeden der k Teilmittelwerte und erhalten mit dem Unsicherheitsfortpflanzungsgesetz:

$$s_{int}\left(\overline{V_m}\right) = \frac{1}{k}\sqrt{\sum s^2(V_{m-i})} \cong \frac{s_m}{\sqrt{k}}. \tag{A.3}$$

Als zweite Möglichkeit können wir eine Unsicherheit des globalen Mittelwertes aus der Streuung der Teilmittelwerte berechnen:

$$s_{ext}\left(\overline{V_m}\right) = \sqrt{\frac{\left(V_{m-i}-\overline{V_m}\right)^2}{k(k-1)}}\ ;\ k = n/m. \tag{A.4}$$

Bei zufällig verteilten Messwerten (weisses Rauschen) sind die Werte $s_{ext}\left(\overline{V_m}\right)$ und $s_{int}\left(\overline{V_m}\right)$ ungefähr gleich gross. Falls $s_{ext}\left(\overline{V_m}\right)$ deutlich grösser als $s_{int}\left(\overline{V_m}\right)$ ist, sind weitere Störprozesse vorhanden. In unserem Beispiel berechnen wir:

$$\frac{s_{ext}\left(\overline{V_m}\right)}{s_{int}\left(\overline{V_m}\right)} = 2.5 \tag{A.5}$$

Die Anzahl Messpunkte (n, m, k) muss genügend gross sein, damit statistisch signifikante Aussagen gemacht werden können.

C EXCEL-Funktionen für die Unsicherheitsberechnung

Das Microsoft Office Programm EXCEL bietet eine Reihe von statistischen Funktionen, die für die Messunsicherheitsanalyse von Bedeutung sind. Die wichtigsten Funktionen sind im Folgenden aufgeführt.

Funktion	**Name und Syntax der Funktion in EXCEL**	**Benützte Formel für die Berechnung**
Mittelwert Arithmetischer Mittelwert einer Zahlenreihe $x_i, i = 1\ \dots n$	**MITTELWERT**(**Zahl1**;Zahl2; ...)	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$
Varianz auf der Basis einer Stichprobe	**VARIANZA**(**Zahl1**;Zahl2;…)	$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$
Experimentelle Standardabweichung	**STABW.S**(**Zahl1**;Zahl2;…)	$\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$
Median	**MEDIAN**(**Zahl1**;Zahl2;...)	zu beiden Seiten des Medians befinden sich gleichviele Zahlenwerte der Zahlenreihe, nämlich ½ $(n-1)$; n = Anzahl Zahlen in der Reihe.
Durchschnittliche absolute Abweichung einer Zahlenreihe von ihrem Mittelwert	**MITTELABW**(**Zahl1**;Zahl2;...)	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lvert x_i - \overline{x}\rvert$
Varianz ausgehend von der Grundgesamtheit	**VARIANZENA**(**Zahl1**;Zahl2;…)	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$
Standardabweichung ausgehend von der Grundgesamtheit	**STABW.N**(**Zahl1**;Zahl2;…)	$\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$