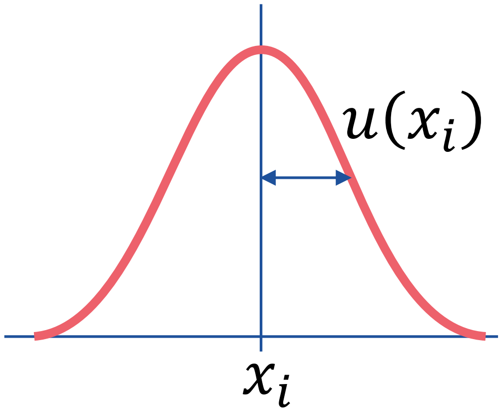
Schweizerische Eidgenossenschaft
Confédération suisse
Confederazione Svizzera
Confederaziun svizra

Eidgenössisches Institut für Metrologie METAS

Fortpflanzung der Messunsicherheit

Frédéric Pythoud

Erinnerung – GUM-Ansatz

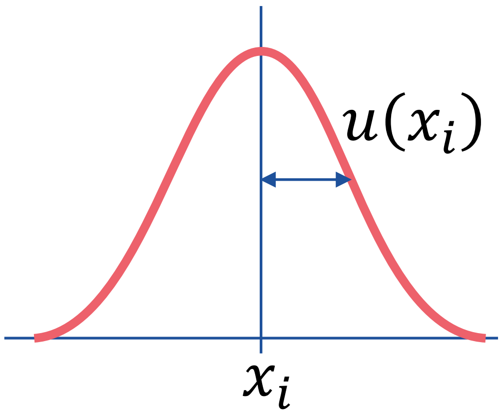


1. Messgrössen sind durch Verteilungen repräsentiert:
   „Man akzeptiert, dass es unmöglich ist, ohne Unsicherheit zu messen"

2. Das gilt für „systematische Fehler" und „zufällige Fehler"
   „Fehler" → Unsicherheit

3. Die Breite der Verteilung ist ein Mass für das Vertrauen in das Messergebnis.

Erinnerung – Kenngrössen der Verteilung

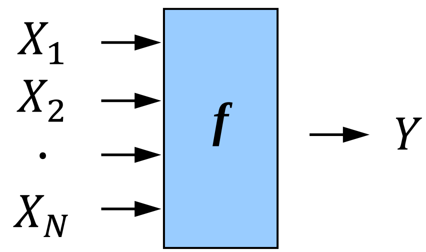


1. Mittelwert: x_i → bester Schätzwert

2. Standardabweichung: $u(x_i)$ → Standardunsicherheit

Fragestellung

Eingangsgrössen:
zum Beispiel:
- *Temperatur*
- *Messgerät*
- *Ablesung*



Ausgangsgrösse:
Zum Beispiel:
- *Länge*

- $x_1, x_2, \ldots, x_N$ Eingangsgrössen
- $u(x_1), u(x_2), \ldots, u(x_N)$ Unsicherheiten der Eingangsgrössen
- $Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_N)$ Messmodell

Fragen

- Was ist der beste Schätzwert y ?
- Was ist die standard Unsicherheit $u(y)$?

Beispiel

Frage: Welche Unsicherheit an der Bestimmung eines Endmasses (Länge 50 mm) erfolgt aufgrund einer Temperatur-Unsicherheit von 2 °C?
Die Referenztemperatur ist 20.0 °C.

- Ausdehnungskoeffizient (Eisen): $\alpha = 12 \times 10^{-6}/\mathrm{K}$
- Interpretation: $\Delta L = L_{20\,°\mathrm{C}} \cdot \alpha \cdot \Delta T$

Temperatur	Länge
20.0 °C	50.000 000 mm
21.0 °C	50.000 600 mm
22.0 °C	50.001 200 mm
30.0 °C	50.006 000 mm

Beispiel: Darstellung

Temperatur-Differenz Temperatur-Unsicherheit	→	Längen Differenz Längen-Unsicherheit
1.0 °C		0.6 µm
2.0 °C		1.2 µm
3.0 °C		1.8 µm
…		…

$$u(t) \longrightarrow u(l) = c \cdot u(t)$$

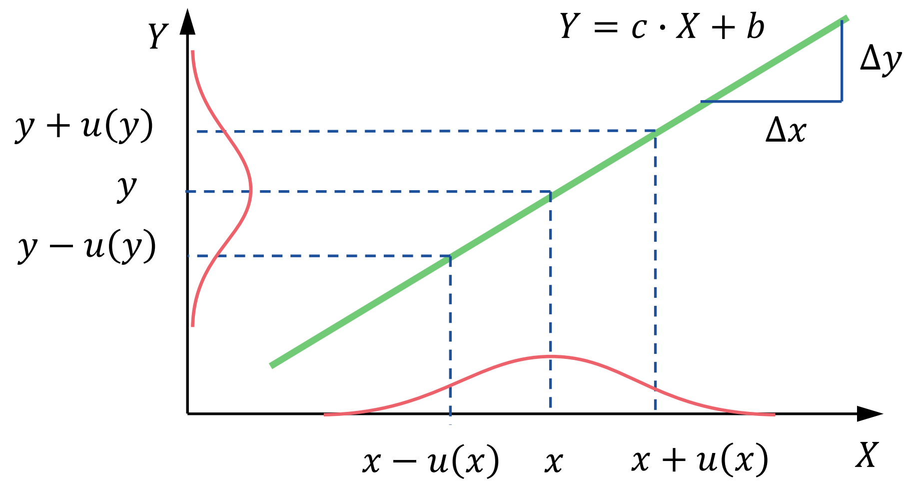
Empfindlichkeitskoeffizient

In diesem Beispiel: $c = L_{20°} \cdot \alpha = (50\ \mathrm{mm})\left(\frac{12\times 10^{-6}}{\mathrm{K}}\right) = 0.6\ \mu\mathrm{m/K}$

Einzelne Eingangsgrösse, Lineare Funktion

Lineares Modell:

$$Y = f(X) = c \cdot X + b$$



$$y \quad \rightarrow \quad f(x) = c \cdot x + b$$

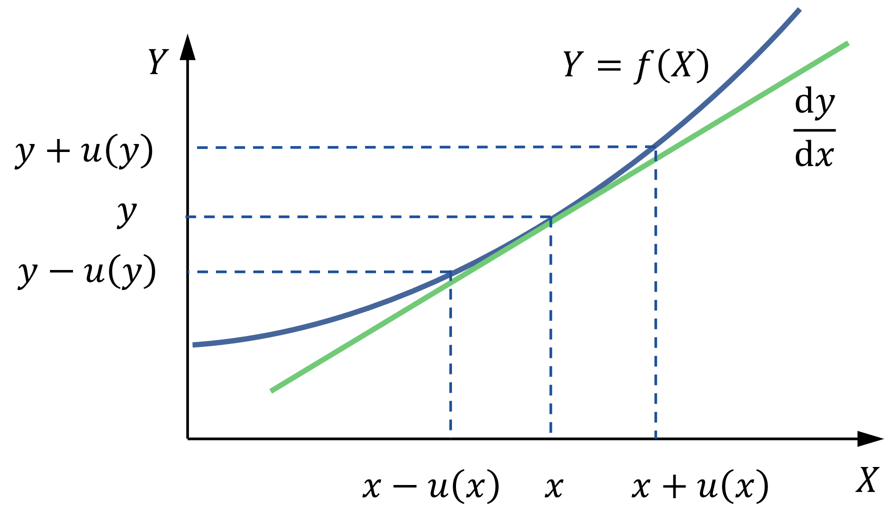
$$u(y) \quad \rightarrow \quad c \cdot u(x)$$

Empfindlichkeitskoeffizient: $c = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

Einzelne Eingangsgrösse II, Nichtlineare Funktion

Nichtlineares Modell:

$$Y = f(X)$$



$$y \rightarrow f(x)$$

$$u(y) \rightarrow c \cdot u(x)$$

Empfindlichkeitskoeffizient: $c = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$

Empfindlichkeitskoeffizient

Empfindlichkeitskoeffizient wirkt als

- Verstärkungsfaktor oder als
- Abschwächungsfaktor

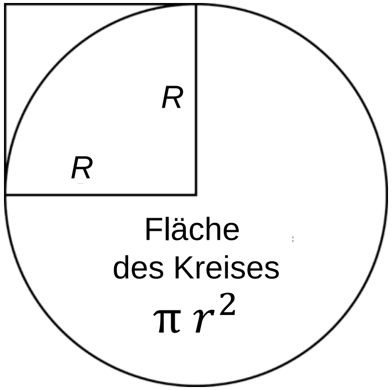
bei der Übertragung der Messunsicherheit

Der Empfindlichkeitskoeffizient ist

die Ableitung am Ort $X = x$

Beispiel Bestimmung einer Fläche

Bestimmung der Fläche *A* eines
Kreises über die Messung des Radius *r*



- Modell: $A = f(r) = \pi\, r^2$
- Messung: $r = 3\ \mathrm{m}$ $\quad u(r) = 0.01\ \mathrm{m}$

- Wert von A $a = \pi\, r^2 = 28.27\ \mathrm{m}^2$

- Aufgabe: bestimme
  - den Empfindlichkeitskoeffizient $c = ?$
  - die Unsicherheit $u(a) = ?$

Beispiel – Lösung

Methode 2: Variation

- $f(r) = f(3.00\ \mathrm{m}) = 28.27\ \mathrm{m}^2$
- $f\big(r + u(r)\big) = f(3.01\ \mathrm{m}) = 28.46\ \mathrm{m}^2$

➔ $u(a) = \Delta a = 0.19\ \mathrm{m}^2$

➔ $c = \frac{u(a)}{u(r)} = \frac{\Delta a}{\Delta r} = \frac{(28.46\ \mathrm{m}^2)-(28.27\ \mathrm{m}^2)}{(3.01\ \mathrm{m})-(3.00\ \mathrm{m})} = 19\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{m}}$

Methode 1: Analytisch

➔ $c = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r} = 2\pi\, r = 18.85\ \mathrm{m}$

➔ $u(a) = c \cdot u(r) = 0.19\ \mathrm{m}^2$

Beispiel – Darstellung

- Wert von A

$$a \quad = 28.27\ \mathrm{m}^2$$

- Unsicherheit von A:

$$u(a) = \ 0.19\ \mathrm{m}^2$$

- Die Unsicherheit wird mit höchstens 2 signifikanten Stellen dargestellt

- Gleich viele Kommastellen

Mehrere Eingangsgrössen

Modell:	$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N)$
Eingangsgrössen	$x_1, x_2, \dots, x_N$
Unsicherheiten	$u(x_1), u(x_2), \dots, u(x_N)$

- Schätzung von y $\quad y = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$
- Empfindlichkeitskoeffizienten $\quad c_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,,\ c_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2}\,,\ \dots\,,\ c_N = \frac{\partial f}{\partial x_N}$
- Unsicherheitsbeiträge: $\quad c_1 \cdot u(x_1)\,,\ c_2 \cdot u(x_2), \dots, c_N \cdot u(x_N)$

Kombinierte Messunsicherheit

Beispiel: Messung der Tischlänge

mit Doppelmeter

- Unsicherheit des Messinstruments 0.81 mm
- Ableseunsicherheit 0.20 mm
- Unzulänglichkeiten des gemessenen Objekts 0.28 mm

Kombinierte Messunsicherheit

Unsicherheitsbeiträge: $c_1 \cdot u(x_1)\,,\; c_2 \cdot u(x_2), \ldots, c_N \cdot u(x_N)$

Wie kombinieren sich die einzelnen Unsicherheitsbeiträge der Eingangsgrössen zur Gesamtunsicherheit der Ausgangsgrösse?

$$u_c(y) = \sqrt{{c_1}^2 \cdot u^2(x_1) + {c_2}^2 \cdot u^2(x_2) + \cdots + {c_N}^2 \cdot u^2(x_N)}$$

„Kombinierte Messunsicherheit“

Warum quadratische Addition ?

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_i \left(c_i \cdot u(x_i)\right)^2}$$

- Unsicherheitsbeiträge berücksichtigen mögliche Messfehler und Abweichungen.

  → Ihren Wert und Vorzeichen sind nicht bekannt
  → Sie können sich teilweise kompensieren

- Quadratische Summe ist kleiner als direkte Summe.

- Direkte Summe würde kombinierte Messunsicherheit überschätzen

- Beispiel:

  $u(x_1) = 1\ \text{mm}$

  $u(x_2) = 0.1\ \text{mm}$ (10 % von $u(x_1)$)

  $c_1 = c_2 = 1$

  $u_c(y) = \sqrt{(1\ \text{mm})^2 + (0.1\ \text{mm})^2} = 1.005\ \text{mm}$

Kombinierte Messunsicherheit

Beispiel: Messung vom Tischlänge mit Doppelmeter

- Unsicherheit des Messinstruments 0.81 mm
- Ableseunsicherheit 0.20 mm
- Unzulänglichkeiten des gemessenen Objekts 0.28 mm

$$u_c(l) = \sqrt{(0.81\ \mathrm{mm})^2 + (0.20\ \mathrm{mm})^2 + (0.28\ \mathrm{mm})^2} = 0.88\ \mathrm{mm}$$

Die lineare Fortpflanzung der Messunsicherheit

- Das Gesetz ist eine Näherung (Linearisierung des Modells).
- Eingangsverteilungen müssen symmetrisch sein,
  sonst keine Annahmen über Form.
- Eingangsgrössen müssen unabhängig voneinander sein
  (Erweiterte Form: Modul über Korrelationen).
- Form der Ausgangsverteilung bleibt unbestimmt.
- Bei einer grossen Zahl von Messproblemen völlig hinreichend

Berechnung der Empfindlichkeitskoeffizienten

Method 1: Analytisch

$$c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Mit partieller Ableitung

Bedingung dafür: Die Modellgleichung liegt in analytischer Form vor.

Nicht immer der Fall:

- Ausgangsgrösse wird durch Computerprogramm berechnet
- Auswirkung eines Einflusses auf Anzeige eines Gerätes

Methode 2: Variation

$$\Delta x_i \quad \rightarrow \quad \Delta y$$

→ $c_i = \Delta y / \Delta x_i$

Variation von x_i um einen kleinen Betrag Δx_i produziert eine Beobachtung von Δy

Wiederholung der Prozedur für die anderen Eingangsgrössen

Überlegung

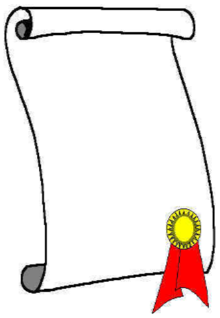
- Unsicherheit des Messinstruments 0.81 mm
- Unsicherheit der Ablesung 0.20 mm
- Unzulänglichkeiten des gemessenen Objekts 0.28 mm

$$u_c(l) = \sqrt{(0.81\ \mathrm{mm})^2 + (0.20\ \mathrm{mm})^2 + (0.28\ \mathrm{mm})^2} = 0.88\ \mathrm{mm}$$

Ist es möglich, kleinere Unsicherheiten zu erreichen, ohne das Messinstrument zu wechseln ?

Den Doppelmeter kalibrieren lassen!

Strich auf dem Doppelmeter	Position (von METAS gemessen) (m)	Unsicherheit (von METAS) (k = 2) (mm)
0.900	0.90042	0.10
0.901	0.90148	0.10
0.902	0.90243	0.10
0.903	0.90351	0.10



Unsicherheit des Messinstruments[1] 0.81 mm → 0.05 mm

Ableseunsicherheit 0.20 mm → 0.20 mm

Unzulänglichkeiten des gemessenen Objekts 0.28 mm → 0.28 mm

(1): unter der Annahme, dass die abgelesenen Werte korrigiert werden

$$u_c(l) = \sqrt{(0.05\ \mathrm{mm})^2 + (0.20\ \mathrm{mm})^2 + (0.28\ \mathrm{mm})^2} = \cancel{0.88\ \mathrm{mm}} \qquad 0.48\ \mathrm{mm}$$

Additives Modell

Die Einflussgrössen kombinieren sich durch Addition oder Subtraktion

Modell: (a = Konstante) $$Y = a + X_1 - X_2 + X_3 + \cdots$$

Kombinierte Unsicherheit:
(Quadratische Addition
der Standardunsicherheiten)

$$u_{\mathrm{c}}^2(y) = u^2(x_1) + u^2(x_2) + u^2(x_3) + \cdots$$

$$= \sum_{i=1}^{N} u^2(x_i)$$

Multiplikatives Modell

Die Einflussgrössen kombinieren sich durch Multiplikation oder Division

Modell: (a = Konstante)

$$Y = \frac{a \cdot X_1 \cdot X_3 \cdot \cdots}{X_2 \cdot \cdots \cdot}$$

Kombinierte Unsicherheit:

(Quadratische Addition

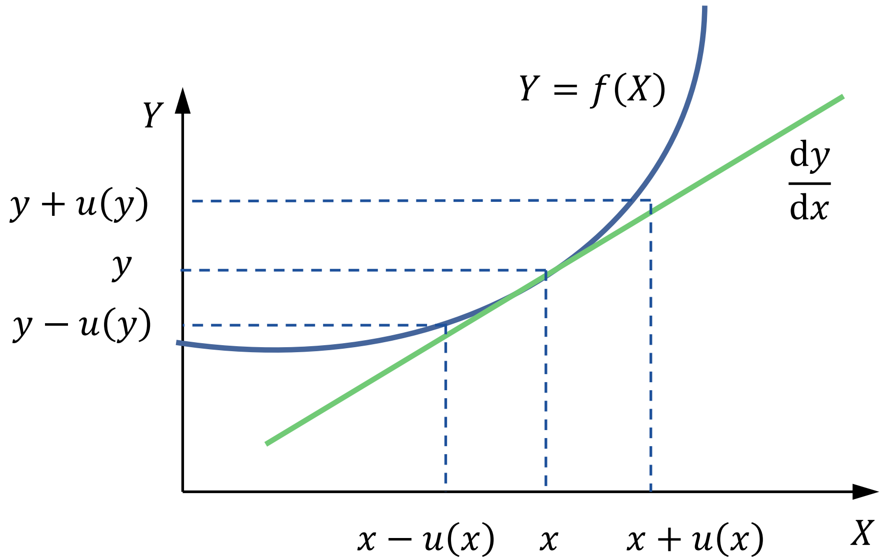
der relativen

Standardunsicherheiten

$$\left(\frac{u_c(y)}{y}\right)^2 = \left(\frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2 + \cdots$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{u(x_i)}{x_i}\right)^2$$

Grenzen der Linearität



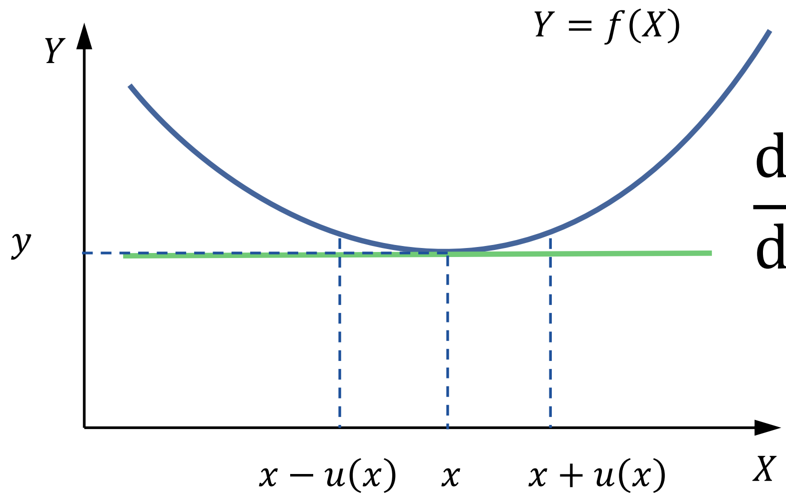
Beispiel:

- Gemessene Spannung (V): 2, 5, 4, 8, 5, 6 → Mittelwert = 5 V

Mit Widerstand 1 Ω

- Thermische Leistung (W) : 4, 25, 16, 64, 25, 36 → Mittelwert = 28 W

Grenzen der Linearität



$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$$

Beispiel:

- Gemessene Spannung (V): −2, 0, 1, 2, −1, 0 → Mittelwert = 0 V

Mit Widerstand 1 Ω

- Thermische Leistung (W) : 4, 0, 1, 4, 1, 0 → Mittelwert = 1.6 W

Berücksichtigung Terme höherer Ordnung

Gleichung ohne Herleitung:

$$y \qquad = f(x_1, x_2, \dots, x_N) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} u^2(x_i)$$

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i) + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j^2}\right] u^2(x_i) u^2(x_j)$$

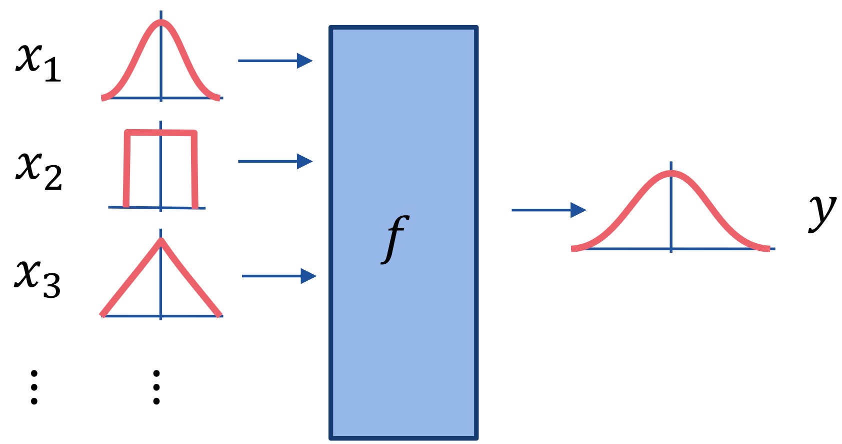
1. Ordnung: *Lineare Unsicherheitsfortpflanzung*

2. Ordnung: Berücksichtigung quadratischer Terme in der Modellgleichung

Zusätzliche Annahme: Alle Eingangsgrössen Gauss-verteilt

Fortpflanzung von Verteilungen

- Fortpflanzung der Verteilungen der Eingangsgrössen durch das Modell hindurch führt zu einer resultierenden Verteilung für die Ausgangsgrösse



- Mathematisch-analytische Berechnung dieser Art der Fortpflanzung ist nicht trivial
- Nur für wenige spezielle Modelle gibt es analytische Lösungen
  (analytische Lösung =
  Resultierende Verteilung lässt sich mit Gleichung beschreiben)

Übersicht

Linearisierung der Modellgleichung und Fortpflanzung der Mittelwerte und der Standardabweichungen

- Bezeichnung: *Lineare Unsicherheitsfortpflanzung*
- Standardverfahren des GUM

Numerische Simulation

- Bezeichnung: *Monte Carlo Methode*
- GUM Supplement 1
- wird in einem Ergänzungsmodul vorgestellt