Schweizerische Eidgenossenschaft
Confédération suisse
Confederazione Svizzera
Confederaziun svizra

Eidgenössisches Institut für Metrologie METAS

Messunsicherheitsbilanz

Sándor Vörös

Messunsicherheitsbilanz

- Die Messunsicherheitsbilanz besteht im Wesentlichen aus einer Tabelle, die eine Übersicht über den ganzen Messprozess und alle Messunsicherheitsbeiträge bietet.

- Eine Zusammenstellung der Messunsicherheit in Tabellenform ermöglicht den Vergleich der einzelnen Beiträge untereinander und damit die Identifikation der wichtigsten Einflussgrössen.

Messunsicherheitsbilanz

$$u_i(y) = |c_i| \cdot u(x_i)$$

$$\% \, u(y) = \frac{u_i^2(y)}{u^2(y)}$$

Grösse X_i	x_i	[E]	Typ	Verteilung	$u(x_i)$	[E]	c_i	[E]	$\lvert c_i \rvert \cdot u(x_i)$	$\% \, u(y)$
X_1	x_1	…	…	…	$u(x_1)$	…	c_1	…	…	…
X_2	x_2	…	…	…	$u(x_2)$	…	c_2	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
$Y =$	…	…					$u_c(y) =$ …			
							$U_{p=\dots}(k = \dots) =$ …			

$$y = f(x_1, \dots, x_n)$$

p $\quad k \quad$ $U = k \cdot u(y)$

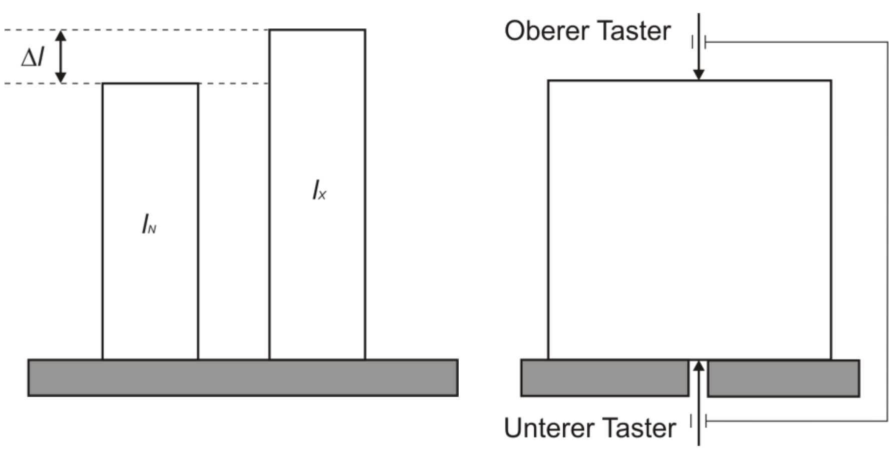
$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} c_i^2 \cdot u^2(x_i)}$$

Beispiel – Endmass

Die Länge l_X eines Endmasses (resultierende Messgrösse bzw. Ausgangsgrösse) soll durch Vergleichsmessung mit einem Endmass Normal der Länge l_N (aus seinem Kalibrierzertifikat bekannt) bestimmt werden, indem der Längenunterschied Δl mit einem Komparator gemessen wird:

$$l_X = l_N + \Delta l$$

Beide Endmasse haben gleiche nominelle Längen von 20 mm. Der Einfachheit halber werden alle Einflüsse (Temperatur, Komparator, Drift des Normals, usw.) im Rahmen dieses Beispiels weggelassen.



Beispiel – Endmass

Ermittlung von l_N

- Schätzwert l_N und Unsicherheit $u(l_N)$ des Normals (aus seinem Zertifikat): seine Länge beträgt l_N = 20.000351 mm und die erweiterte Unsicherheit U = 40 nm mit einem Erweiterungsfaktor k = 2.

- Für die Standardunsicherheit gilt dann $u(l_N)$ = (40 nm)/2 = 20 nm.

Beispiel – Endmass

Ermittlung von Δl

- Der arithmetische Mittelwert aus 5 mehrmaligen Beobachtungen der Längendifferenz beträgt Δl = 319 nm.

- Die Wiederholbarkeit des Vergleichs von l_N und l_X wird anhand der Streuung der 5 unabhängigen Beobachtungen von Δl zu

$$\sqrt{\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{5}(\Delta l_i - \Delta l)^2} = 5.8 \text{ nm} \qquad \text{ermittelt.}$$

- Für die dem arithmetischen Mittelwert dieser 5 Ablesungen zugeordnete Standardunsicherheit gilt dann

$$u(\Delta l) = s\left(\overline{\Delta l}\right) = 5.8 \text{ nm}/\sqrt{5} = 2.6 \text{ nm}$$

Beispiel – Endmass

Fortpflanzung

- Schätzung des Messresultates:

$$l_X = l_N + \Delta l = 20.000351 + 0.000319 = 20.000670 \text{ mm}$$

- Empfindlichkeitskoeffizienten: $c_{l_N} = 1$ und $c_{\Delta l} = 1$

- Kombinierte Standardunsicherheit:

$$u_c(l_X) = \sqrt{c_{l_N}^2 \cdot u^2(l_N) + c_{\Delta l}^2 \cdot u^2(\Delta l)}$$

$$= \sqrt{1^2 \cdot (20 \text{ nm})^2 + 1^2 \cdot (2.6 \text{ nm})^2} = 20.17 \text{ nm} \cong 21 \text{ nm}$$

Beispiel – Endmass

Fortpflanzung

- Erweiterte Unsicherheit:

Normalverteilung für p = 95% $\Rightarrow$ k_{95} = 1.96 ≈ 2 $\Rightarrow$

$U_{95} = k_{95} \cdot u_c(l_X)$ = 2 · 20.17 nm = 41 nm

METAS

Beispiel – Endmass

Grösse X_i	x_i	[E]	Typ	$u(x_i)$	[E]	c_i	[E]	$\lvert c_i\rvert \cdot u(x_i)$	$\% u(l_X)$
l_N	20.000351	mm	B	20.000	nm	1	1	20.00	98.34
Δl	0.000319	mm	A	2.600	nm	1	1	2.60	1.66
l_X =	20.000670	mm				$u_c(l_X)$ =		20.17	nm
						U_{95} (k =2) =		41	nm

Resultat

l_X = (20.000670 $\pm$ 0.000041) mm, wobei die angegebene Messunsicherheit das Produkt der kombinierten Standardunsicherheit u_c = 20.2 nm mit einem Erweiterungsfaktor k = 2 ist, der auf der Normalverteilung beruht. Der Messwert (l_X) und die dazugehörige erweiterte Messunsicherheit ($U = k \cdot u_c$) geben den Bereich ($l_X \pm U$) an, der den Wert der gemessenen Grösse mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 95 % enthält. Die Unsicherheit wurde in Übereinstimmung mit den Richtlinien der ISO ermittelt.

Beispiel – Elektrischer Strom

Messung eines Stromes I (Ausgangsgrösse) durch Messung des Spannungsabfalls U (direkt gemessene Eingangsgrösse) über einem Widerstand R :

$$I = \frac{U}{R}$$

Temperatureffekte, sowie allfällige Störungen bei der Spannungsmessung, Drift der Widerstand seit der letzten Kalibrierung, usw. werden im Rahmen dieses Beispiels nicht berücksichtigt.

Beispiel – Elektrischer Strom

Ermittlung von U

- Die Spannung U wird mit einem Multimeter gemessen.

- Aus Zertifikat: U_{95} = 3 μV (k = 2) für den Messbereich 2 V

  $\Rightarrow$ Standardunsicherheit $u_B(U)$ = (3 μV)/2 = 1.5 μV

- Mittelwert aus 4 Spannungsmessungen: U = 0.7331 V und

$$u_A(U) = \frac{1}{\sqrt{4}} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{4}(U_i - U)^2} = 0.0002 \text{ V}$$

Beispiel – Elektrischer Strom

Ermittlung von U

- Die Gesamtunsicherheit von U ist dann

$$u(U) = \sqrt{u_A^2(U) + u_B^2(U)} = \sqrt{0.2^2 + 0.0015^2} \cong 0.2\ \mathrm{mV}$$

Beispiel – Elektrischer Strom

Ermittlung von R

- Widerstandswert (aus ihrem Zertifikat): R = 100.0013 Ω mit erweiterter Unsicherheit U_{95} = 2.0 mΩ (k = 2).

- Für die Standardunsicherheit gilt dann

$$u(R) = (2.0\ \mathrm{m\Omega})/2 = 1.0\ \mathrm{m\Omega}.$$

Beispiel – Elektrischer Strom

Fortpflanzung

- Schätzung des Messresultates: $I = U\,/\,R$ = 0.7331 / 100.0013 = 7.331 mA

- Empfindlichkeitskoeffizienten:

$$c_U = 1/R = 0.01\ \Omega^{-1}$$

$$c_R = -U/R^2 = -\,0.7331/100.0013^2 = -\,7.331 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{V} \cdot \Omega^{-2}$$

- Kombinierte Standardunsicherheit:

$$u_c(I) = \sqrt{c_U^2 \cdot u^2(U) + c_R^2 \cdot u^2(R)}$$

$$= \sqrt{(0.01\ \Omega^{-1})^2 \cdot (0.2\ \mathrm{mV})^2 + (7.331 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{mV} \cdot \Omega^{-2})^2 \cdot (0.001\ \Omega)^2}$$

$$= 0.002\ \mathrm{mA}$$

Beispiel – Elektrischer Strom

<u>Fortpflanzung</u>

- Erweiterte Unsicherheit: Normalverteilung für $p = 95\%$

  $\Rightarrow$ $k_{95} \approx 2$ $\Rightarrow$ $U_{95} = k_{95} \cdot u_c(I) = 2 \cdot 0.002\ \text{mA} = 0.004\ \text{mA}$

Beispiel – Elektrischer Strom

Grösse X_i	x_i	[E]	Typ	Verteilung	$u(x_i)$	[E]	c_i	[E]	$\lvert c_i \rvert \cdot u(x_i)$	$\%u(I)$
U	0.733	V	A	t	0.2000	mV	0.0100	Ω^{-1}	0.00200	99.86
U			B	Normal	0.0015	mV	0.0100	Ω^{-1}	0.00002	0.01
R	100.0013	Ω	B	Normal	0.0010	Ω	-0.0733	$\mathrm{mV}\Omega^{-2}$	0.00007	0.13
I =	7.331000	mA					$u_c(I)$ =		0.002	mA
							U_{95} (k =2) =		0.004	mA

Resultat

I = (7.331 ± 0.004) mA, wobei die Zahl nach dem Formelzeichen ± den Zahlenwert einer erweiterten Unsicherheit $U = k \cdot u_c$ angibt; U errechnet sich aus einer kombinierten Standardunsicherheit u_c = 0.002 mA und einem Erweiterungsfaktor $k = 2$, der auf der Normalverteilung beruht und ein Intervall angibt, das einen geschätzten Vertrauensgrad von 95% hat.

Beispiel – Druck

Druckmessung D_X (Ausgangsgröße) in einem geschlossenen Behältnis mit einem angeflanschten piezoelektrischen Aufnehmer D_{PA} (direkt gemessene Eingangsgröße = elektrische Spannung). Das gemessene Spannungssignals des Aufnehmers wird durch den Offset-Spannungswert a_{PA} und einen Spannungssensitivitätskoeffizienten b_{PA} beschrieben:

$$D_X = D_{PA} = a_{PA} + b_{PA} \cdot U$$

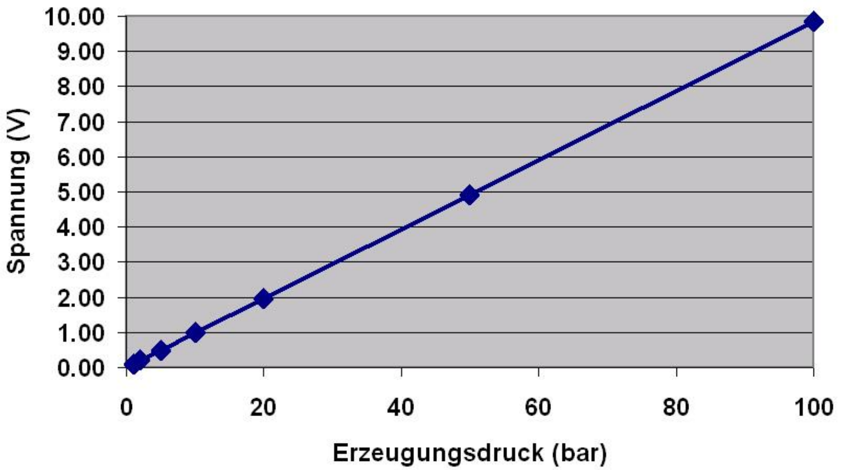
Hier werden wieder alle anderen Einflussgrößen weggelassen.

Beispiel – Druck

<u>Ermittlung von a_{PA} und b_{PA}</u>

- Im Zertifikat des piezoelektrischen Aufnehmers wird folgende Tabelle angegeben:

Erzeugungs-druck (bar)	Spannung (V)	Messun-sicherheit (k=2) (V)
99.99	9.8415	0.0062
49.996	4.9213	0.0031
19.999	1.9675	0.0020
9.999	0.9865	0.0010
5	0.4919	0.0019
2	0.1964	0.0016
1	0.0986	0.0008



- Eine lineare Regression erlaubt es, die Steigung b_{PA} und Achsenabschnitt a_{PA} der Gerade $U(D_{PA})$, die diese Punkte durchläuft, auszurechnen.

Beispiel – Druck

Ermittlung von a_{PA} und b_{PA}

- Vereinfachungen:
  - unterschiedliche Unsicherheiten der einzelnen Tabellenwerte nicht berücksichtigt
  - Korrelationskoeffizienten der beiden Regressionsparameter weggelassen.

- Resultat: Steigung: b_{PA} = (10.1602 ± 0.0013) bar·V^{-1}
  Achsenabschnitt: a_{PA} = (-0.0023 ± 0.0056) bar

Beispiel – Druck

Ermittlung von U

- Die Spannung U wird mit einem Digitalmultimeter gemessen. Im Zertifikat des Gerätes wird eine Unsicherheit U_{95} = 30 µV (k = 2) für den Messbereich 20 V angegeben. Die Standardunsicherheit ist $u_B(U)$ = (30 µV)/2 = 15 µV.

- Die Spannungsmessung beträgt U = 7.61816 V und bei Wiederholung der Messung wurde keine Änderung festgestellt.

- Dann ist $u(U) = u_B(U)$ = 15 µV.

Beispiel – Druck

Fortpflanzung

- Schätzung des Messresultates:

$$D_X = D_{PA} = a_{PA} + b_{PA} \cdot U$$

$$= -0.0023\ \text{bar} + 10.1602\ \text{bar}\cdot\text{V}^{-1} \cdot 7.61816\ \text{V} = 77.400\ \text{bar}$$

- Empfindlichkeitskoeffizienten:

$$c_{a_{PA}} = 1$$
$$c_{b_{PA}} = U = 7.61816\ \text{V}$$
$$c_U = b_{PA} = 10.1602\ \text{bar}\cdot\text{V}^{-1}$$

- Kombinierte Standardunsicherheit:

$$u_c(D_X) = \sqrt{c_{a_{PA}}^2 \cdot u^2(a_{PA}) + c_{b_{PA}}^2 \cdot u^2(b_{PA}) + c_U^2 \cdot u^2(U)}$$

$$= \sqrt{1^2 \cdot (0.0056\ \text{bar})^2 + (7.61816\ \text{V})^2 \cdot (0.0013\ \text{bar}\cdot\text{V}^{-1})^2 + (10.1602\ \text{bar}\cdot\text{V}^{-1})^2 \cdot (0.000015\ \text{V})^2}$$

$$= 0.011\ \text{bar}$$

Beispiel – Druck

Fortpflanzung

- Erweiterte Unsicherheit: Normalverteilung für p = 95% $\Rightarrow$ $k_{95} \approx 2$

  $\Rightarrow$ $U_{95} = k_{95} \cdot u_c(D_X)$ = 2 · 0.011 bar = 0.022 bar

Beispiel – Druck

Grösse X_i	x_i	[E]	Typ	Verteilung	$u(x_i)$	[E]	c_i	[E]	$\lvert c_i\rvert \cdot u(x_i)$	% $u(y)$
b_{PA}	10.1602	bar V^{-1}	A		0.0013	bar V^{-1}	7.6182	V	0.00990	75.76
a_{PA}	-0.0023	bar	A		0.0056	bar	1.0	1	0.00560	24.22
U	7.61816	V	B	Normal	0.000015	V	10.1602	bar V^{-1}	0.00015	0.02
D_X =	77.400	bar					$u_c(y)$ =		0.0114	bar
							U_{95} (k =2) =		0.023	bar

Resultat

D_X = (77.40 ± 0.03) bar, wobei die Zahl nach dem Formelzeichen ± den Zahlenwert einer erweiterten Unsicherheit $U = k \cdot u_c$ angibt; U errechnet sich aus einer kombinierten Standardunsicherheit u_c = 0.011 bar und einem Erweiterungsfaktor k = 2, der auf der Normalverteilung beruht und ein Intervall angibt, das einen geschätzten Vertrauensgrad von 95% hat.