Weiterbildungskurs Metrologie Modul-Nr.: MU-G

Grundlagen der Messunsicherheit

Glossar

Die Definitionen der folgenden Begriffe sind aus verschiedenen Quellen entnommen, die, soweit bekannt, angegeben sind. Sie werden zum Teil vereinfacht und oft mit Beispielen, Anmerkungen und Erläuterungen in Kursivschrift versehen.

Definitionen nach GUM Annex B (Version 2008, auf English)

Übersetzung von der DIN V ENV 13005:1999 (zurückgezogen)

(Messbare) Grösse

Eigenschaft eines Phänomens, eines Körpers oder einer Substanz, die qualitativ beschrieben und quantitativ ermittelt werden kann.

Grössen im allgemeinen Sinne:	*Länge, Masse, Temperatur, Zeit, …*
Spezielle Grössen:	*Länge eines Endmasses, Masse eines Gewichtsstückes, Temperatur einer Flüssigkeit*

Wert (einer Grösse)

Spezielle Grösse, dargestellt als Produkt aus Zahl und Einheit

Länge eines Endmasses:	*10.0012 mm*
Masse eines Gewichtstückes:	*100.00023 g*
Temperatur einer Flüssigkeit:	*18.54 °C*

Wahrer Wert

Wert, der mit der Definition einer betrachteten speziellen Grösse übereinstimmt.

Diesen Wert würde man bei einer idealen Messung erhalten.
Wahre Werte sind ihrer Natur nach nicht ermittelbar.

Richtiger Wert

Durch Vereinbarung anerkannter Wert, der einer betrachteten speziellen Grösse zugeordnet wird, und der mit einer dem jeweiligen Zweck angemessenen Unsicherheit behaftet ist.

*Ein richtiger Wert wird gelegentlich **zugewiesener Wert**, **bester Schätzwert**, **vereinbarter Wert** oder **Referenzwert** genannt. Um einen richtigen Wert festzulegen, werden oft zahlreiche Messergebnisse ausgewertet.*

Schätzwert

Resultat einer Schätzung.

z.B. aus dem Mittelwert einer Reihe von Messergebnissen.

Messgrösse

Spezielle Grösse, die Gegenstand einer Messung ist.

Die Spezifikation einer Messgrösse kann Angaben über Grössen wie Zeitpunkt, Temperatur oder Druck erfordern.

Einflussgrösse

Grösse, die nicht Messgrösse ist, jedoch das Messergebnis beeinflusst.

Beispiel: Temperatur eines Endmasses bei der Bestimmung dessen Länge.

Messergebnis
Einer Messgrösse zugeordneter, durch Messung gewonnener Wert.

Eine vollständige Angabe des Messergebnisses enthält eine Information über die Messunsicherheit.

Messunsicherheit
Dem Messergebnis zugeordneter Parameter, der die Streuung der Werte kennzeichnet, die vernünftiger Weise der Messgrösse zugeordnet werden könnte.

Der Parameter kann beispielsweise eine Standardabweichung (oder ein gegebenes Vielfaches davon) oder die halbe Weite eines Bereiches sein, der ein festgelegtes Vertrauensniveau hat.

Messabweichung
Messergebnis minus den wahren Wert der Messgrösse.

Relative Messabweichung
Messabweichung dividiert durch den wahren Wert der Messgrösse.

Definitionen nach GUM chapter 2 (Version 2008 / English)
Übersetzung von der DIN V ENV 13005:1999 (zurückgezogen)

Standardunsicherheit
Als Standardabweichung ausgedrückte Unsicherheit des Ergebnisses einer Messung.

Kombinierte Standardunsicherheit
Standardunsicherheit eines Messergebnisses, wenn dieses Ergebnis aus den Werten· einer Anzahl anderer Grössen gewonnen wird. Sie ist gleich der positiven Quadratwurzel einer Summe von Gliedern, wobei die Glieder Varianzen oder Kovarianzen dieser anderen Grössen sind, gewichtet danach, wie das Messergebnis mit Änderungen dieser Grössen variieren.

Erweitere Unsicherheit
Kennwert. der einen Bereich um das Messergebnis kennzeichnet, von dem erwartet werde kann, dass er einen grossen Anteil der Verteilung der Werte umfasst, die der Messgrösse vernünftigerweise zugeordnet werden könnten.

Der Anteil kann als Überdeckungswahrscheinlichkeit oder Vertrauensgrad des Bereiches angesehen werden.

Erweiterungsfaktor
Zahlenfaktor, mit dem die kombinierte Standardunsicherheit multipliziert wird, um eine erweiterte Messunsicherheit zu erhalten.

Der Erweiterungsfaktor liegt typisch im Bereich zwischen 2 und 3.

Typ A Ermittlung der Unsicherheit
Methode zur Berechnung der Messunsicherheit durch statistische Analyse von Reihen von Beobachtungen.

Typ B Ermittlung der Unsicherheit
Methode zur Berechnung der Messunsicherheit mit anderen Mitteln als der statistischen Analyse von Reihen von Beobachtungen.

Einige Definitionen aus der Statistik

Häufigkeitsverteilung

Eine Häufigkeitsverteilung ist eine Methode zur statistischen Beschreibung von Daten (Messwerten, Merkmalswerten). Mathematisch gesehen ist eine Häufigkeitsverteilung eine Funktion, die zu jedem vorgekommenen Wert angibt, wie häufig dieser Wert vorgekommen ist.

Man kann eine solche Verteilung als Tabelle, als Grafik oder modellhaft über eine Funktionsgleichung beschreiben.

Grundgesamtheit

Gesamte Menge der durch die statistische Untersuchung erfassbaren Elemente, manchmal endlich (z.B. alle Schweizer Stimmbürger), manchmal undefiniert oder unendlich (z.B. Menge aller möglichen Wiederholungsmessungen eines Gewichtsstückes).

Stichprobe

Teilmenge der in der statistischen Untersuchung erfassten Elemente, meist zufällig der Grundgesamtheit entnommen (z.B. 1000 in einer Umfrage repräsentativ ausgewählte Stimmbürger; 10 Messresultate von Wiederholungsmessungen eines Gewichtsstückes).

Wahrscheinlichkeit

Reelle Zahl im Bereich von 0 bis 1, die einem zufälligen Ereignis beigefügt ist. Sie kann entweder auf eine langzeitliche relative Eintretenshäufigkeit oder auf einen Überzeugtheitsgrad vom Eintreten des Ereignisses bezogen sein.

Bei einem hohen Überzeugtheitsgrad liegt die Wahrscheinlichkeit bei 1. Ein Ereignis mit Wahrscheinlichkeit 1 ist eine Gewissheit (es kommt sicher vor) und ein Ereignis mit Wahrscheinlichkeit 0 ist unmöglich (es findet nie statt).

Wahrscheinlichkeitsverteilung

Funktion, welche die Wahrscheinlichkeit angibt, mit der eine Zufallsgrösse X einen bestimmten Wert annimmt oder zu einem gegebenen Wertebereich gehört.

Sie gibt den Wert $\Pr[X = x]$ *an. Die Wahrscheinlichkeit für den Gesamtbereich der Werte der Zufallsgrösse hat den Wert 1.*

Verteilungsfunktion

Die Verteilungsfunktion (oder kumulative Wahrscheinlichkeitsverteilung) einer Zufallsvariablen X ist diejenige Funktion $G(x)$, die angibt, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Zufallsvariable einen Wert kleiner oder gleich x annimmt.

Es gilt $G(x) = \Pr[X = x]$.

Wahrscheinlichkeitsdichte

Die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ausprägungen einer stetigen Zufallsvariablen können (im Gegensatz zum diskreten Fall der Wahrscheinlichkeitsfunktion) nicht angegeben werden, denn die Wahrscheinlichkeiten für jede einzelne Ausprägung müssen streng genommen 0 gesetzt werden. Es lassen sich nur Wahrscheinlichkeiten $g(x)dx$ dafür angeben, dass die Werte innerhalb eines Intervalls dx um x liegen. Die Funktion $g(x)$ heisst dann Wahrscheinlichkeitsdichte.

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable Werte zwischen a und b annimmt, wird dann allgemein definiert als das Integral über diese Funktion mit den Integrationsgrenzen a und b (siehe Vertrauensgrad). Die Wahrscheinlichkeitsdichte ist die Ableitung der Verteilungsfunktion: $g(x) = \partial G/\partial x$.

Vertrauensgrad

Der Vertrauensgrad p (oder Überdeckungswahrscheinlichkeit oder Vertrauensniveau) eines Intervalls $[a,\ b]$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zufallsgrösse einen Wert in diesem Intervall annimmt.

Diese Wahrscheinlichkeit ist gleich dem Anteil der Gesamtfläche unterhalb der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $g(x)$, der im Intervall $[a,\ b]$ liegt. Mathematisch wird sie durch folgendes Integral ausgedrückt: $\int_a^b g(x) \cdot dx$.

Erwartungswert

Erwartungswert (einer Zufallsgrösse oder einer Wahrscheinlichkeitsverteilung) oder Mittelwert (der Grundgesamtheit):

1. Für eine diskrete Zufallsgrösse X, die die Werte x_i mit den Wahrscheinlichkeiten $w_i\ =\ \Pr[x_i]$ annimmt, ist der Erwartungswert definiert durch

$$\mu = E(x) = \sum_{k=1}^{m} w_k \cdot x_k$$

wobei die Summierung über alle x_i zu erstrecken ist, die von X angenommen werden können.

2. Für eine stetige Zufallsgrösse X mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $g(x)$ ist der Erwartungswert definiert durch

$$\mu = E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot g(x) \cdot dx$$

wobei die Integration sich über den Gesamtbereich der Werte von X erstreckt.
Er wird statistisch geschätzt durch $\bar{x}$, den arithmetischen Mittelwert oder das Mittel aus unabhängigen Beobachtungswerten x_i der Zufallsgrösse X :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k$$

3. Der Erwartungswert einer Funktion $f(x)$ über eine Wahrscheinlichkeitsdichte $g(x)$ der Zufallsgrösse x ist definiert durch

$$E\big(f(x)\big) = \int f(x) \cdot g(x) \cdot dx$$

Varianz

Die Varianz einer Zufallsgrösse oder einer Wahrscheinlichkeitsverteilung ist der Erwartungswert des Quadrats der zentrierten Zufallsgrösse:

$$\sigma^2 = V(x) = E\left[\big(x - E(x)\big)^2\right]$$

Sie wird statistisch geschätzt durch $s^2(x)$ aus n unabhängigen Beobachtungswerten x_k der Zufallsgrösse X :

$$s^2(X) \equiv s^2(x_k) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} (x_k - \bar{x})^2$$

Standardabweichung

Die positive Quadratwurzel aus der Varianz.

Kovarianz

Die Kovarianz zweier Zufallsgrössen ist ein Mass für ihre gegenseitige Abhängigkeit. Die Kovarianz der Zufallsgrössen x_1 und x_2 ist gegeben durch

$$cov(x_1, x_2) = cov(x_2, x_1) = E\Big[\big(x_1 - E(x_1)\big) \cdot \big(x_2 - E(x_2)\big)\Big]$$

Unabhängigkeit
Zwei Zufallsgrössen sind statistisch unabhängig voneinander, wenn ihre gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung das Produkt ihrer individuellen Wahrscheinlichkeitsverteilungen ist:
$g(x_1, x_2) = g_1(x_1) \cdot g_2(x_2)$
Sind zwei Zufallsgrössen unabhängig voneinander, sind ihre Kovarianz und ihr Korrelationskoeffizient gleich Null. Umgekehrt gilt dies jedoch nicht notwendigerweise.

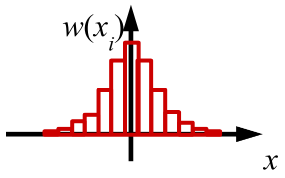
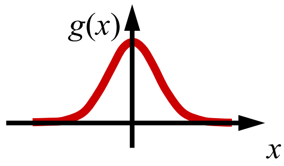
Freiheitsgrade
Ganz allgemein die Anzahl der Glieder einer Summe abzüglich der Anzahl der Nebenbedingungen, die für die Glieder dieser Summe gelten.

Anhang A: die Notation nach GUM

Begriffe	**Modellierung**	**Physikalischen Messungen**	**Unsicherheits-Berechnung**
Eingangsgrössen	Math. Variablen $X_1, X_2, \dots, X_N$ oder $X_i,\ i = 1 \rightarrow N$	Mittelwert $\bar{X}_i = \left(\sum_{k=1}^{n} X_{i,k}\right)/n$ aus individuelle Messungen $X_{i,k} \qquad k: 1 \rightarrow n$	Schätzungen $x_1, x_2, \dots, x_N$ oder $x_i,\ i = 1 \rightarrow N$ Und $x_i = \bar{X}_i$,
	Bemerkung • N ist die Anzahl Eingangsgrössen → Index i • n ist der Stichprobenumfang → Index k •		
Ausgangsgrösse	Y $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N)$ Ist die Modell-Gleichung	$\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(X_{1,k}, X_{2,k}, \dots, X_{N,k}\right)$ **Bemerkung**: gilt wenn der Satz von Eingangsgrössen simultan beobachtet wird	y $y = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ Ist die Schätzung für y
Streuung / Unsicherheit des Eingangsgrössen		Standardabweichung vom Mittelwert $s(\bar{X}_i) = \frac{1}{\sqrt{n}} s(X_i)$	Standard Unsicherheit $u(x_i) \stackrel{\text{def}}{=} s(\bar{X}_i)$ Siehe Bemerkung 1
Unsicherheit der Ausgangsgösse			Kombinierte Unsicherheit $u_c(y)$ $u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \cdot u^2(x_i)$ Unterschrift "c" für "combined", oder kombinierte Unsicherheit
Erweiterte Unsicherheit			Erweiterte Unsicherheit $U = k \cdot u_c(y)$ Keine Unterschrift "y" nach dem "U"

Bemerkung 1: wenn die Standard-Abweichung s_p eines Messprozesses aus einer grossen Stichprobe ("Pool") bekannt ist, dann ist es besser, anstelle von $u(x_i) = s(\bar{X}_i)$ die folgende Schätzung der Unsicherheit zu machen: $u(x_i) = s_p/\sqrt{n}$. Dies führt zu einer genaueren Schätzung der Unsicherheit, insbesondere wenn $n = 1$.

Anhang B: Übersicht der Begriffe aus der Statistik

	Grundgesamtheit mit diskreter Zufallsgrösse	**Grundgesamtheit mit stetiger Zufallsgrösse**	**Stichprobe aus Grundgesamtheit**
			Gemessene Grössen $x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_n$
Erwartungswert **oder** **Mittelwert**	$\mu = E(x) = \sum_{k=1}^{m} w_k \cdot x_k$ $w_k = \Pr[X = x_k]$ Wahrscheinlichkeiten	$\mu = E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot g(x) \cdot dx$ $g(x)$ Wahrscheinlichkeitsdichte	$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$ Schätzung für den Erwartungs-wert der Grundgesamtheit
Varianz	$\sigma^2 = V(x) = E\left[\left(x - E(x)\right)^2\right]$ $= \sum_{k=1}^{m} w_k \cdot (x_k - \mu)^2$	$\sigma^2 = V(x) = E\left[\left(x - E(x)\right)^2\right]$ $= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 \cdot g(x) \cdot dx$	$s^2(x_k) = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n} (x_k - \bar{x})^2$
Standard-abweichung	$\sigma = \sqrt{V(x)}$	$\sigma = \sqrt{V(x)}$	$s(x_k) = \sqrt{s^2(x_k)}$