Weiterbildungskurs Metrologie	Modul-Nr.:	MUS-02
Grundlagen der Messunsicherheit	Dozent:	Dr. F. Pythoud

Korrelationen

Lernziele:
Verständnis für Bedeutung von Korrelationen in der Messunsicherheitsbewertung. Erwerb des formalen Rüstzeugs zur Berücksichtigung der Korrelationen in der Messunsicherheitsberechnung.

1. Grundsätzliches

Der Begriff der Korrelation stammt aus der Statistik und ist dort ein Mass für den linearen Zusammenhang zweier Zufallsvariablen. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von der statistischen Ähnlichkeit zweier Grössen. Als Ursache für eine Korrelation besteht meistens ein mehr oder weniger direkter funktionaler Zusammenhang. Dieser Zusammenhang wird durch zusätzliche Einflüsse verwischt und verdünnt. So dass schlussendlich nur eine statistische Aussage möglich ist.

Zum Beispiel besteht eine positive Korrelation zwischen Futtermenge und Gewichtszunahme, d.h. je höher die Futtermenge desto stärker die Gewichtszunahme. Obwohl der ursächliche Zusammenhang hier ziemlich eindeutig ist, führt der Einfluss weiterer Faktoren dazu, dass es statistische Schwankungen gibt. Korrelation beschreibt aber nicht immer eine direkte Ursache-Wirkung-Beziehung zwischen den beteiligten Grössen. So sollte man aus der allfälligen Beobachtung, dass die Anzahl der Nistplätze für Störche mit der menschlichen Geburtenrate örtlich korreliert, keine falschen Schlüsse ziehen. In vielen Fällen ist der ursächliche Zusammenhang, der zu Korrelationen führt etwas versteckt. Während in der angewandten Statistik normalerweise über den Nachweis von Korrelation in den Daten versucht wird auf eine Ursache-Wirkung-Beziehung zu schliessen, spielt die Korrelation in Messvorgängen eine andere Rolle. Dort sind die Ursachen, die zu einer Korrelation zwischen Messgrössen führen, oft bekannt. Von Interesse ist einerseits die Bestimmung der Stärke der Korrelation zwischen zwei Messgrössen und andererseits die Bestimmung des Einflusses, den Korrelationen zwischen Eingangsgrössen auf die kombinierte Messunsicherheit haben.

2. Korrelationen bei Messvorgängen

Bei Messvorgängen hat man grundsätzlich zwei Vorgänge, bei denen Korrelationen eine Rolle spielen:

1. Gemeinsame Einflüsse führen zu Korrelationen zwischen Messgrössen, die diesen Einflüssen unterliegen.
2. Korrelationen zwischen Eingangsgrössen beeinflussen die kombinierte Messunsicherheit.

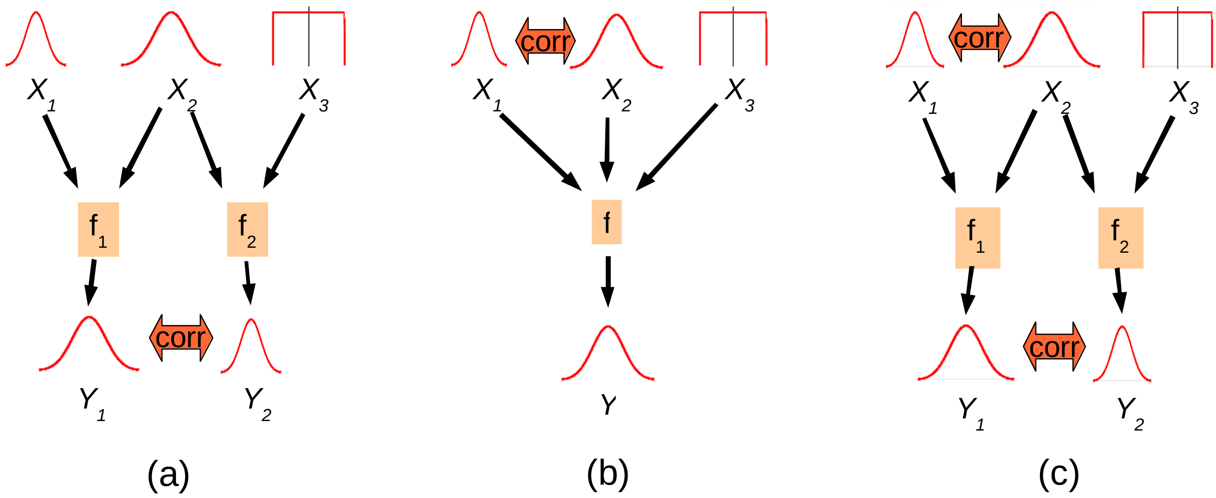

Abbildung 1: Schematische Darstellung von drei verschiedenen Konfigurationen von Messvorgängen bei denen Korrelation eine Rolle spielt. Erklärungen dazu finden sich im Text.

Aufgrund dieser zwei Vorgänge lassen sich drei archetypische Konfigurationen für Messvorgänge definieren, bei denen die Berechnung oder die Berücksichtigung von Korrelationen eine Rolle spielen. Diese drei Konfigurationen sind in Abbildung 1 schematisch dargestellt.

Bei Konfiguration (a) werden die beiden Ausgangsgrössen durch eine gemeinsame Eingangsgrösse beeinflusst. Dies führt zu Korrelation zwischen den beiden Ausgangsgrössen und es ist von Interesse, wie gross diese Korrelation ist. Die Bestimmung der Korrelation in einem solchen Fall kann auf zwei Arten geschehen: Falls sich der Messvorgang, wie in der Grafik angedeutet, modellieren lässt, kann man die Korrelation über eine erweiterte Form der *Linearen Unsicherheitsfortpflanzung* bestimmen (Kapitel 3.2). Falls die Modellierung nicht möglich ist, lässt sich die Korrelation eventuell über eine grössere Anzahl simultaner Messungen der Ausgangsgrössen (Messreihe) mit nachfolgender statistischer Analyse bestimmen (Kapitel 3.1).

Bei Konfiguration (b) besteht eine Korrelation zwischen den Eingangsgrössen, die eventuell entsprechend der Konfiguration (a) vorgängig bestimmt wurde. Hier stellt sich die Frage, wie sich die Korrelation über das Messmodell auf die kombinierte Messunsicherheit der Ausgangsgrösse auswirkt. Grundsätzlich gibt es auch hier zwei Möglichkeiten. Möglicherweise lässt sich die Korrelation zwischen den beiden Eingangsgrössen gemäss Konfiguration (a) modellieren, d.h. man kann den Einfluss der zur Korrelation führt mit ins Modell einbeziehen (Abbildung 2). Auf diese Art lässt sich die explizite Behandlung der Korrelation durch die Erweiterung des Modells vermeiden, und man erhält ein Modell mit lauter unabhängigen Eingangsgrössen. Darauf lässt sich die bereits bekannte *Lineare Unsicherheitsfortpflanzung* für unkorrelierte Eingangsgrössen anwenden. Diese Lösung ist erstrebenswert aber nicht immer praktikabel. Es kann sein, dass die nötige Information zur erweiterten Modellierung fehlt. In diesem Fall muss die *Lineare Unsicherheitsfortpflanzung* in eine erweiterte Form gebracht werden (Kapitel 4), damit auch Korrelationen zwischen Eingangsgrössen berücksichtigt werden.

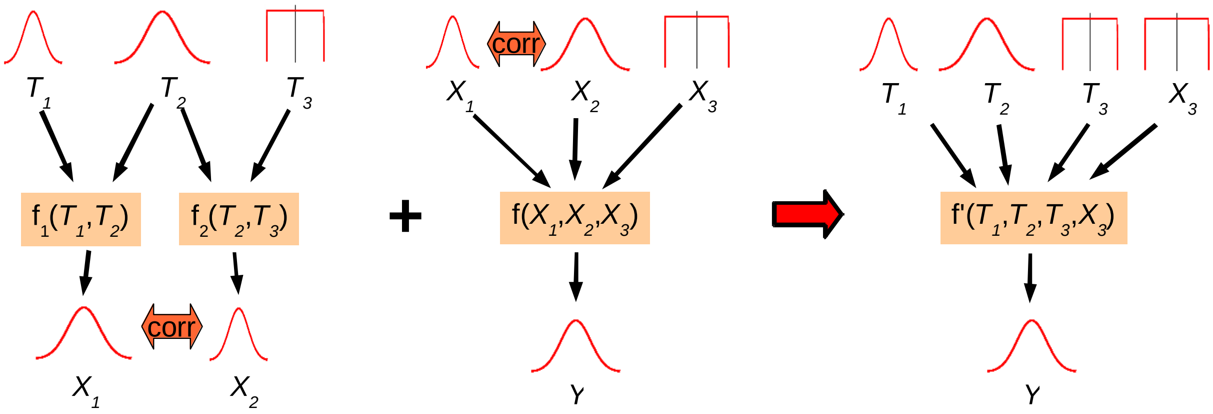

Abbildung 2: Vermeidung der expliziten Behandlung der Korrelation durch die Berücksichtigung der Korrelationsursache in einem erweiterten Modell. Die Eingangsgrössen X_1 und X_2 im mittleren Modell werden durch das Modell links ersetzt. Das resultierende erweiterte Modell (rechts) vereint dann die beiden Modelle links und besteht aus lauter unabhängigen Eingangsgrössen.

Konfiguration (c) ist eine Kombination von (a) und (b). Hier hat man sowohl korrelierte Eingangsgrössen, welche die kombinierten Messunsicherheiten der Ausgangsgrössen beeinflussen und man hat gleichzeitig gemeinsame Eingangsgrössen, die zu Korrelationen zwischen den Ausgangsgrössen führen. Alles was über (a) und (b) gesagt wurde gilt hier in kombinierter Form. Eine verallgemeinerte Form der *Linearen Unsicherheitsfortpflanzung*, die die Behandlungen von Situationen gemäss Konfiguration (c) erlaubt und die in Kapitel 3 und 4 diskutierten Erweiterungen der *Linearen Unsicherheitsfortpflanzung* mit einbezieht, wird in Kapitel 5 angegeben.

Bei der bisherigen Diskussion sind wir von einem gegebenen Messvorgang ausgegangen. Es sollte hier aber nicht unerwähnt bleiben, dass man gerade auch über die Art und Weise, wie man die Messung durchführt (Messaufbau und –ablauf), unter Umständen Korrelationen vermeiden kann. Dies ist wesentlich, da die beste Behandlung von Korrelationen in der Vermeidung derselben besteht.

3. Bestimmung der Korrelation zweier Messgrössen

Wie bereits gesagt lässt sich die Korrelation zwischen zwei Messgrössen auf zwei verschiedene Arten bestimmen:

1. Mittels statistischer Analyse von Messreihen.
2. Über die Modellierung: Indem man die gemeinsamen Einflussgrössen explizit im Modell berücksichtigt.

Im Folgenden werden die beiden Methoden vorgestellt, wobei zuerst die statistische Methode behandelt wird, im Rahmen derer sich der verwandte Begriff der Kovarianz und einige allgemeine Eigenschaften der Korrelation diskutieren lassen. Gezeigt wird auch, wie diese Begriffe aus der Statistik von der Messunsicherheitsbewertung übernommen werden.

3.1 Bestimmung der Korrelation mittels statistischer Analyse

Die Begriffe der Korrelation und der Kovarianz stammen aus der Statistik und dienen der Charakterisierung mehrdimensionaler Zufallsverteilungen. Eine entsprechende formale Definition ist im Anhang gegeben. Im Folgenden beschränken wir uns auf die Anwendung und verzichten auf eine Erläuterung oder Herleitung der benützten Formeln. Zur Bestimmung der Korrelation zwischen zwei Grössen a und b aus einer Messreihe mit n simultanen Messungen

a_1	b_1
a_2	b_2
a_3	b_3
…	…
a_n	b_n

führen wir eine neue statistische Kenngrösse, die Kovarianz ein. Ein Schätzwert für die Kovarianz von a und b lässt sich mit $s(a,b)$ aus der Messreihe abschätzen:

$$s(a,b) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(a_i - \bar{a}) \cdot \left(b_i - \bar{b}\right)$$

wobei $\bar{a}$ und $\bar{b}$ die geschätzten Mittelwerte der Messreihen sind

$$\bar{a} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \qquad \bar{b} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i$$

Ausserdem lässt sich aus den Messreihen auch die Standardabweichungen (als Wurzel der Varianz) von a und b abschätzen

$$s(a) = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(a_i - \bar{a})^2} \qquad s(b) = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(b_i - \bar{b}\right)^2}$$

Man beachte, dass es sich beim Ausdruck für die Kovarianz um eine Art verallgemeinerte Varianz handelt. So gilt $s(a,a) = s^2(a)$ und $s(b,b) = s^2(b)$.

Ausserdem lässt sich analog zur Varianz (oder Standardabweichung) der Mittelwerte

$$s(\bar{a}) = \frac{1}{\sqrt{n}} s(a) \qquad s\left(\bar{b}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} s(b)$$

auch die Kovarianz der Mittelwerte berechnen

$$s\left(\bar{a},\bar{b}\right) = \frac{1}{n} s(a,b)$$

Auch hier gilt natürlich $s(\bar{a},\bar{a}) = s^2(\bar{a})$ und $s\left(\bar{b},\bar{b}\right) = s^2\left(\bar{b}\right)$.

Der Korrelationskoeffizient r von a und b ist eng verwandt mit der Kovarianz und kann als normierte Kovarianz betrachtet werden. Er errechnet sich definitionsgemäss aus Kovarianz und Standardabweichungen als

$$r(a,b) \coloneqq \frac{s(a,b)}{s(a) \cdot s(b)} \tag{1.1}$$

Ausserdem gilt $r(\bar{a}, \bar{b}) = r(a, b)$. Der Korrelationskoeffizient ist auf Werte zwischen -1 und +1 beschränkt. Entsprechend spricht man von positiver oder negativer Korrelation. Falls die Grössen unabhängig sind, werden Kovarianz und Korrelationskoeffizient gleich null. Je näher die Werte des Korrelationskoeffizienten sich +1 oder -1 annähern, desto stärker ist die Abhängigkeit zwischen den Grössen.

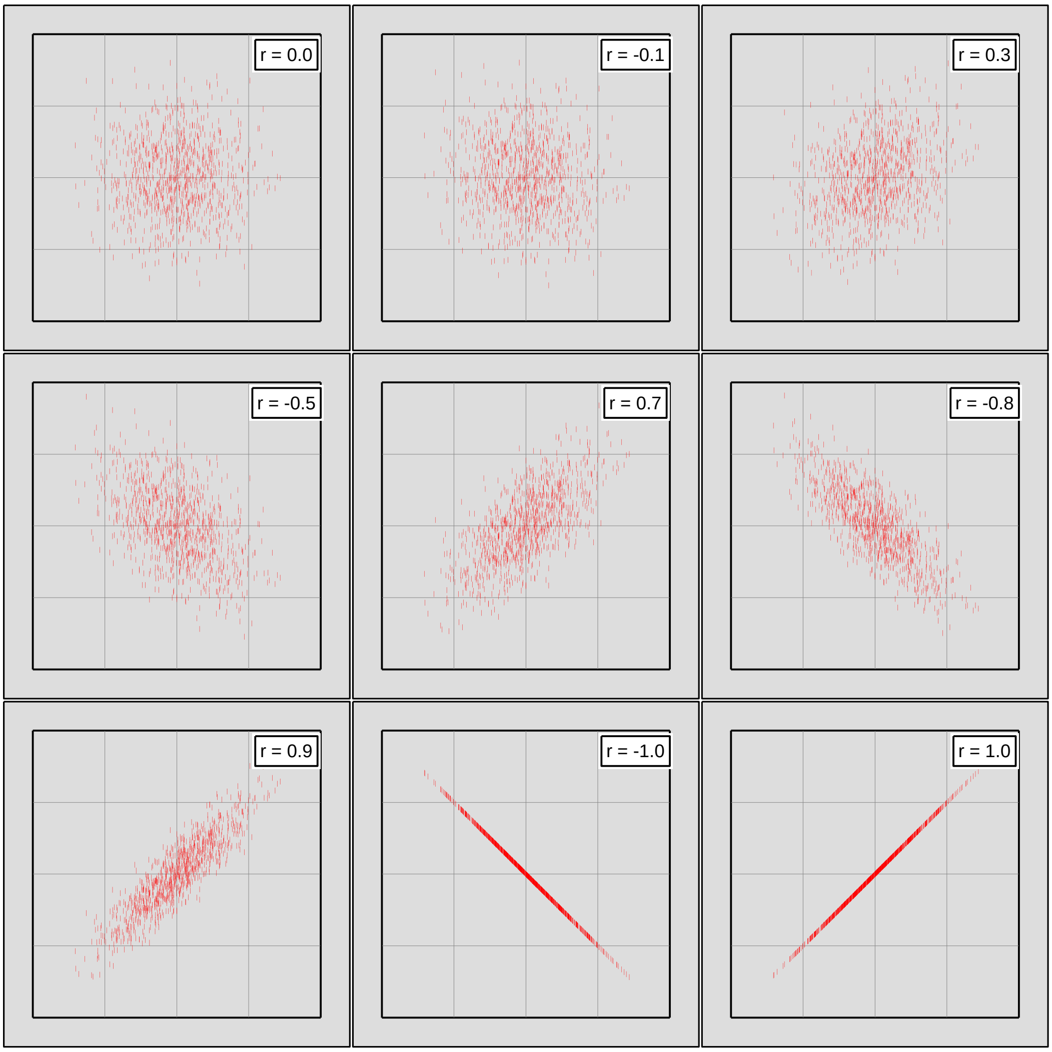

Abbildung 3: Verschiedene Korrelationsstärken zwischen zwei Gauss-verteilten Zufallsgrössen. Die beiden Grössen sind im kartesischen Koordinatensystem gegeneinander aufgetragen.

Jede Grösse für sich betrachtet, streut unabhängig von der Korrelation entsprechend der zugrunde liegenden Verteilung (beispielsweise Gauss). Erst wenn man die Messdaten von a und b grafisch gegeneinander aufträgt (Abbildung 3), tritt die Bedeutung der Korrelation zutage. Mit zunehmender Korrelationsstärke nähert sich das Bild einer Geraden an.

Zu beachten ist, dass es sich bei der Bestimmung des Korrelationskoeffizienten aus einer Messreihe um einen statistischen Schätzwert handelt, der mit zunehmender Länge der Messreihe genauer wird. Bei einer sehr kurzen Messreihe ist es in vielen Fällen sinnlos, einen Korrelationskoeffizienten zu berechnen. Als Hilfestellung sei hier eine Gleichung angegeben, die näherungsweise die Unsicherheit in r in Abhängigkeit von der Länge der Messreihen n und vom Wert von r angibt

$$r \pm U(r) = \operatorname{arctan}[\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right) \pm \frac{2}{\sqrt{n-3}}\right]$$

Dabei handelt es sich um die erweiterte Unsicherheit (k = 2). Ausserdem wird das Unsicherheitsintervall im Allgemeinen asymmetrisch um r sein.

Beispiel: Aus 8 Wiederholungen wird ein Korrelationskoeffizient von 0.2 berechnet. Die erweiterten Unsicherheiten in r betragen dann $+0.6$ und -0.8. Man sieht, dass dieses Resultat ohne weiteres mit null verträglich ist.

Beispiel: Aus 8 Wiederholungen wird ein Korrelationskoeffizient von 0.8 berechnet. Die erweiterten Unsicherheiten in r betragen dann $+0.16$ und -0.6. Das Resultat legt nahe, dass tatsächlich eine positive Korrelation vorhanden ist, aber der Wert ist immer noch sehr unsicher.

Die Beispiele zeigen, dass es eine grössere Anzahl Wiederholungen braucht, um einigermassen vernünftige Aussagen über den Korrelationskoeffizienten machen zu können. In der Messtechnik ist dies nicht immer praktikabel. Bei einer kleinen Anzahl Wiederholungen hat es keinen Sinn, Korrelationen auf statistische Weise zu bestimmen. Falls keine signifikanten Aussagen gemacht werden können, behandelt man die Grössen am besten als unkorreliert.

Beim Übergang von der Statistik zur Messunsicherheit werden wie bereits bekannt $s(\bar{a})$ und $s(\bar{b})$ als die Standardunsicherheiten $u(a)$ und $u(b)$ der Messgrössen a und b benutzt. Neu nimmt $s(\bar{a}, \bar{b})$ die Rolle der „korrelierten Messunsicherheit“ $u(a, b)$ von a und b ein. In Analogie zur Varianz und Kovarianz lässt sich auch hier der Formalismus verallgemeinern, so dass

$$u(a, a) := u^2(a) \qquad\qquad u(b, b) := u^2(b) \tag{1.2}$$

Dieser verallgemeinerte Formalismus wird zum Teil bei der Erweiterung der *Linearen Unsicherheitsfortpflanzung* in den folgenden Kapiteln benutzt werden.

Der Korrelationskoeffizient ist aufgrund seiner Beschränkung auf das Intervall [-1…1] die intuitiv anschaulichere Grösse als die korrelierte Standardunsicherheit. Die Umrechnung zwischen den beiden Grössen geht aber analog zu Gleichung (1.1) über die Standardunsicherheiten von a und b

$$r(a, b) = \frac{u(a,b)}{u(a) \cdot u(b)} \tag{1.3}$$

3.2 Bestimmung der Korrelation mittels Modellierung

Alternativ zur statistischen Methode lassen sich Korrelationen oder korrelierte Messunsicherheiten auch über die Modellierung bestimmen, falls die gemeinsamen Einflüsse, welche zur Korrelation führen, bekannt sind und sich im Modell erfassen lassen. Betrachten wir zwei Messgrössen y_1 und y_2, die über die Messmodelle f_1 und f_2 miteinander verknüpft sind, d.h. gewisse Eingangs- oder Einflussgrössen $X_1, X_2, \dots X_N$ kommen in beiden Modellen vor, gemäss Konfiguration (a) in Abbildung 1. Wir können die Modellgleichungen folgendermassen hinschreiben:

$$Y_1 = f_1(X_1,\ X_2,\ \dots,\ X_N)$$
$$Y_2 = f_2(X_1,\ X_2,\ \dots,\ X_N)$$

Die Gesamtheit aller Eingangsgrössen, die entweder in Modell 1 oder Modell 2 oder in beiden vorkommen, sei $X_1, X_2, \dots X_N$. Diese allgemeine Art der Formulierung lässt die Möglichkeit offen, dass sämtliche Eingangsgrössen in beiden Modellen vorkommen können aber nicht zwingend vorkommen müssen.

Unter der Annahme, dass die Eingangsgrössen unkorreliert sind, lässt sich die korrelierte Unsicherheit zwischen Y_1 und Y_2 berechnen als

$$u(y_1, y_2) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \frac{\partial f_2}{\partial x_i} u^2(x_i) \tag{1.4}$$

und der Korrelationskoeffizient ergibt sich als

$$r(y_1, y_2) = \frac{u(y_1, y_2)}{u(y_1) \cdot u(y_2)}$$

mit den kombinierten Standardunsicherheiten von y_1 und y_2

$$u^2(y_1) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i) \qquad u^2(y_2) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i)$$

Gleichung (1.4) hat ihren Ursprung in einer erweiterten Form der *Linearen Unsicherheitsfortpflanzung*, die in der allgemeinen Form in Kapitel 5 behandelt wird.

4. Korrelation und Fortpflanzung der Unsicherheit

In diesem Kapitel wird der Einfluss der Korrelation zwischen Eingangsgrössen auf die kombinierte Messunsicherheit diskutiert. In der bisherigen Behandlung der *Linearen Unsicherheitsfortpflanzung* wurde angenommen, dass die Eingangsgrössen unkorreliert sind. Das Gesetz lässt sich aber ohne weiteres entsprechend erweitern. Für eine Modellfunktion

$$Y = f_1(X_1,\, X_2,\, \ldots,\, X_N)$$

mit teilweise korrelierten Eingangsgrössen erhält man folgenden Ausdruck für die kombinierte Messunsicherheit

$$u^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i) \cdot u(x_j) \cdot r(x_i, x_j) \tag{1.5}$$

und somit eine weitere erweiterte Form der *Linearen Unsicherheitsfortpflanzung*. Falls alle Korrelationskoeffizienten null sind erhält man als Spezialfall den bekannten Ausdruck, bei dem die einzelnen Unsicherheitsbeiträge einfach quadratisch addiert werden.

$$u^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i) \tag{1.6}$$

4.1 Auswirkung der Korrelation bei Grundoperationen

Unter Anwendung von Gleichung (1.5) betrachten wir die Auswirkung der Korrelation auf die kombinierte Messunsicherheit für die Grundoperationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division) zwischen zwei korrelierten Messgrössen.

Addition: $Y = f\left(X_1, X_2\right) = X_1 + X_2$

Kombinierte Unsicherheit gemäss Gleichung (1.5)

$$u^2(y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 u^2(x_1) + \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2} r(x_1, x_2) u(x_1) u(x_2) + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_1} r(x_2, x_1) u(x_2) u(x_1) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 u^2(x_2)$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 u^2(x_1) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 u^2(x_2) + 2\,\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2} r(x_1, x_2) u(x_1) u(x_2)$$

$$= u^2(x_1) + u^2(x_2) + 2\, r(x_1, x_2) u(x_1) u(x_2)$$

Die Ableitungen sind alle 1. Durch die Korrelation erhält man zusätzlich zu den bekannten quadratischen Beiträgen den letzten Term mit dem Korrelationskoeffizienten $r(x_1, x_2)$. Bei einem positiven Korrelationskoeffizienten führt dies zu einer Vergrösserung der kombinierten Messunsicherheit gegenüber dem unkorrelierten Fall. Bei $r \cong 1$ kann sich die kombinierte Unsicherheit um bis zu $\sqrt{2}$ vergrössern. Bei negativer Korrelation verhält es sich umgekehrt. Im Extremfall bei sehr starker negativer Korrelation $r \cong -1$ und bei ungefährer Gleichheit der Unsicherheitsbeiträge $u(x_1) \cong u(x_2)$ kann die kombinierte Unsicherheit nahezu null werden.

Subtraktion: $Y = f(X_1, X_2) = X_1 - X_2$

Als kombinierte Unsicherheit erhält man hier

$$u^2(y) = u^2(x_1) + u^2(x_2) - 2\,r(x_1, x_2)u(x_1)u(x_2)$$

Aufgrund des negativen Vorzeichens beim Korrelationsterm gilt hier das umgekehrte Verhalten wie bei der Addition.

Multiplikation: $Y = f(X_1, X_2) = X_1 \cdot X_2$

Die kombinierte relative Unsicherheit ergibt sich hier zu

$$\left(\frac{u(y)}{y}\right)^2 = \left(\frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2 + 2\,r(x_1, x_2)\frac{u(x_1)}{x_1}\frac{u(x_2)}{x_2}$$

Bereits bei der Behandlung der *Linearen Unsicherheitsfortpflanzung* für unkorrelierte Eingangsgrössen haben wir gesehen, dass man beim multiplikativen Modell am besten die kombinierte relative Unsicherheit betrachtet: Diese ergibt sich dort einfach durch die Addition der Quadrate der relativen Einzelbeiträge. Durch die Korrelation erhält man hier einen zusätzlichen Term der sich analog zur Addition auswirkt, nur jetzt auf die relative Unsicherheit.

Division: $Y = f(X_1, X_2) = X_1/X_2$

Die kombinierte Unsicherheit ergibt sich zu

$$\left(\frac{u(y)}{y}\right)^2 = \left(\frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2 - 2\,r(x_1, x_2)\frac{u(x_1)}{x_1}\frac{u(x_2)}{x_2}$$

Hier gilt dasselbe wie bei der Multiplikation nur, dass der Einfluss jetzt durch den Vorzeichenwechsel beim Zusatzterm analog zur Subtraktion ist.

5. Verallgemeinerte Lineare Unsicherheitsfortpflanzung

In Kapitel 3 und 4 wurde sowohl die Bestimmung von Korrelation als auch der Einfluss der Korrelation auf die kombinierte Messunsicherheit gemäss Konfigurationen (a) und (b) in Abbildung 1 besprochen. Dazu wurde eine erweiterte Form der *Linearen Unsicherheitsfortpflanzung* präsentiert. In diesem Kapitel wird die *Verallgemeinerte Lineare Unsicherheitsfortpflanzung* definiert, welche als Spezialfälle die Gleichungen (1.4) und (1.5) enthält. Mit dieser verallgemeinerten Form lassen sich insbesondere auch Situationen gemäss Konfiguration (c) in Abbildung 1 behandeln.

Gegeben sei ein allgemeines Modell mit N Eingangsgrössen $X_1, X_2, \dots X_N$, die korreliert sein können, und M Ausgangsgrössen $Y_1, Y_2, \dots Y_M$

$$\begin{gathered} Y_1 = f_1(X_1,\ X_2,\ \dots,\ X_N) \\ Y_2 = f_2(X_1,\ X_2,\ \dots,\ X_N) \\ \vdots \\ Y_M = f_M(X_1,\ X_2,\ \dots,\ X_N) \end{gathered}$$

Die Unsicherheiten der Eingangsgrössen sind durch korrelierte Unsicherheiten $u(x_i, x_j)$ definiert, insbesondere sind auch die Standardunsicherheiten der einzelnen Grössen gemäss Gleichung (1.2) gegeben: $u(x_i, x_i) = u^2(x_i)$. Ziel ist die Bestimmung von $u(y_k, y_l)$.

Als Resultat erhält man

$$u(y_k, y_l) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \frac{\partial f_l}{\partial x_j}\ u\left(x_i, x_j\right) \tag{1.7}$$

Diese Gleichung bezeichnet die *Verallgemeinerte Lineare Unsicherheitsfortpflanzung*.

Aus den somit bestimmten $u(y_k, y_l)$ lassen sich wiederum unter Anwendung von (1.2) die Standardunsicherheiten für aller Grössen $Y_1, Y_2, \dots Y_M$ bestimmen

$$u(y_i) = \sqrt{u(y_i, y_i)}$$

Zudem lassen sich die Korrelationskoeffizienten gemäss (1.3) bestimmen

$$r(y_k, y_l) = \frac{u(y_k, y_l)}{u(y_k) \cdot u(y_l)}$$

Aus Gleichung (1.7) lassen sich die Ausdrücke (1.4) und (1.5) herleiten, als Spezialfälle, die einerseits die Berechnung der Korrelation und andererseits die Auswirkung der Korrelation isoliert betrachten. Gleichung (1.7) vereint die Behandlung beider Aspekte in einem Ausdruck.

Die formale Herleitung von (1.7) wird hier nicht gezeigt. Im Modul über die Fortpflanzung der Unsicherheit wird im Anhang die formale Herleitung des vereinfachten Gesetzes gezeigt. Die Herleitung von (1.7) geschieht völlig analog dazu unter Einbezug der Kovarianzen.

6. Beispiele

6.1 Erweiterte Modellierung

Verschiedene Eingangsgrössen sind relativ oft durch dieselben Umgebungsbedingungen (Temperatur, Druck, Feuchtigkeit, …) beeinflusst. Dies führt zu Korrelationen zwischen diesen Eingangsgrössen. Im Beispiel 1 dieses Kurses (Bestimmung der Länge eines Endmasses) wird sowohl die Länge des Normals als auch des Prüflings durch die Temperatur beeinflusst. Dies lässt sich in der Modellgleichung durch Korrekturfaktoren berücksichtigen

$$k_X(\Delta T) \cdot L_X = k_N(\Delta T) \cdot L_N + \Delta L$$

Dabei bezeichnen $k_X(\Delta T)$ und $k_N(\Delta T)$ die relative Abweichung von der Länge bei 20 °C durch eine Temperaturdifferenz $T = 20°\mathrm{C} + \Delta T$.

Für die zu bestimmende Länge des Prüflings löst man die Modellgleichung nach l_X auf

$$L_X = \frac{k_N(\Delta T) \cdot L_N + \Delta L}{k_X(\Delta T)}$$

Die Grössen $k_X(\Delta T)$ und $k_N(\Delta T)$ sind korreliert, da sie beide von der gemessenen Temperatur abhängen. Indem man die Korrekturfaktoren explizit als Funktion der Temperatur angibt

$$k_X(\Delta T) = 1 + \alpha_X \cdot \Delta T$$

$$k_N(\Delta T) = 1 + \alpha_N \cdot \Delta T$$

mit den Längenausdehnungskoeffizienten α_X und α_N und diese in die Modellgleichung einsetzt

$$L_X = \frac{(1 + \alpha_N \cdot \Delta T) \cdot L_N + \Delta L}{1 + \alpha_X \cdot \Delta T}$$

erhält man ein erweitertes Modell, das direkt von der Temperaturmessung abhängt und die explizite Behandlung von Korrelationen vermeidet.

Diese Art der Erweiterung des Messmodells unter Einbezug der grundsätzlichen Einflussgrössen macht der Messtechniker oft intuitiv. Es ist, falls praktikabel, die beste Methode um die explizite Behandlung von Korrelationen zu vermeiden.

6.2 Korrelation und Wahl des Messmodells

Abbildung 4 zeigt einen Aufbau zur Bestimmung eines Widerstandsverhältnisses $\nu = R_1/R_2$, beispielsweise als Teil einer Wheatstoneschen Brücke. Dabei wird über ein Abgriff der Gesamtwiderstand R in zwei serielle Widerstände R_1 und R_2 aufgeteilt gemäss den Längen L_1 und L_2. Die Bestimmung der Widerstände wird also auf eine Längenmessung zurückgeführt.

$$\nu = \frac{L_1}{L_2}$$

Über die Ablesung des Abgriffpunkts auf einem Massstab lassen sich L_1 und L_2 direkt bestimmen, allerdings sind die beiden Grössen vollständig miteinander korreliert und zwar mit $r = -1$, da ein Messfehler in der einen Grösse sich gegenteilig in der anderen Grösse auswirkt.

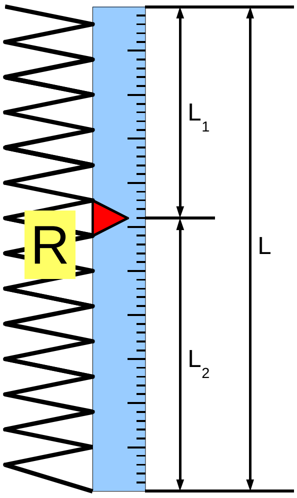

Abbildung 4: Messaufbau zur Bestimmung eines Widerstandsverhältnisses

Zur Vermeidung der expliziten Behandlung der Korrelation sollte das Modell folgendermassen formuliert werden

$$\nu = \frac{L_1}{L_2}$$

Dabei muss auch die Unsicherheit in der Gesamtlänge L des Massstabs berücksichtigt werden, welche in einer unabhängigen Messung vorgängig bestimmt wurde.

6.3 Korrelation durch gemeinsam genutztes Normal

In der Praxis kommt es häufig vor, dass gemeinsam genutzte Normale zu Korrelationen führen. Beispielsweise sind zwei Widerstände, die vorgängig mit dem gleichen Referenzwiderstand kalibriert wurden, und dann zusammen in Serie in einem Messaufbau eingesetzt werden, korreliert. Bei der resultierenden Unsicherheit des Gesamtwiderstands sollte die Korrelation berücksichtigt werden

Bleiben wir bei Beispiel 1 dieses Kurses und betrachten zwei Längenmasse, L_1 und L_2, die vorgängig mit demselben Referenzlängenmass, L_N, kalibriert wurden, und jetzt zusammen seriell angeordnet in einem Messaufbau benutzt werden. Von Interesse sei die resultierende Unsicherheit in der Gesamtlänge

$$L_1 = L_1 + L_2 \tag{1.8}$$

Die vorgängige Kalibration wurde gemäss folgenden Modellen durchgeführt:

$$\begin{aligned} L_1 &= L_N + \Delta L_1 \\ L_2 &= L_N + \Delta L_2 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Es gibt jetzt zwei verschiedene Szenarien:

(a) Das Labor hat die Kalibration selber durchgeführt und kann die Unsicherheitsbeiträge der Kalibration (1.9) rekonstruieren. In diesem Fall kann man das Modell (1.8) durch Einsetzen von (1.9) erweitern

$$L = 2L_N + \Delta L_2 + \Delta L_1,$$

vermeidet damit Korrelationen und hat ein Modell mit unkorrelierten Eingangsgrössen. Die resultierende Unsicherheit beträgt dann (additives Modell)

$$u^2(l) = 4\,u^2(l_N) + u^2(\Delta l_1) + u^2(\Delta l_2) \tag{1.10}$$

(b) Das Labor hat die Kalibration extern durchführen lassen. In diesem Fall benötigt man einen Korrelationskoeffizienten $r(l_1, l_2)$, der durch das die Kalibration durchführende Labor zusammen mit den Standardunsicherheiten in l_1 und l_2 bestimmt wurde.
Versetzen wir uns kurz in das Labor, das die Kalibration durchführt: Bei einem Kalibrationsmodell gemäss (1.9) lassen sich die Standardunsicherheiten in l_1 und l_2 sowie die korrelierte Unsicherheit gemäss *Verallgemeinerter Linearer Unsicherheitsfortpflanzung* (1.7) bestimmen

$$u^2(l_1) = u^2(l_N) + u^2(\Delta l_1)$$

$$u^2(l_2) = u^2(l_N) + u^2(\Delta l_2)$$

$$u(l_1, l_2) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial l_1}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial l_2}{\partial x_j}\, u(x_i, x_j) = u^2(L_N) \tag{1.11}$$

Versetzen wir uns jetzt wieder in das Labor, das die Messung mit den zwei kalibrierten Endmassen durchführt. Das Labor ist im Besitz der numerischen Werte von $u(l_1)$, $u(l_2)$ und $u(l_1, l_2)$, die es vom Kalibrationslabor erhalten hat, und kann damit unter Anwendung der *Verallgemeinerten Linearen Unsicherheitsfortpflanzung* (1.7) die Messunsicherheit von L bestimmen

$$u(l) = \sqrt{u^2(l_1) + u^2(l_2) + 2 \cdot u(l_1, l_2)}$$

Setzt man in diese Gleichung die Ausdrücke (1.11) ein erhält man erwartungsgemäss dasselbe Resultat wie (1.10).

Die Korrelation führt hier zu einer Erhöhung der resultierenden Messunsicherheit. Je nachdem, wie dominant der Unsicherheitsbeitrag des Referenzmasses ist, kann diese Erhöhung signifikant sein (bis zu 40%).

Dieses Beispiel zeigt, dass es nicht immer möglich ist, die explizite Behandlung der Korrelation durch ein erweitertes Messmodell zu vermeiden. Dies ist gerade im Fall von Transferstandards, die in einem anderen Labor kalibriert werden, der Fall. Werden diese Transferstandards zusammen in einem Messaufbau eingesetzt, kann der Einfluss der Korrelation erheblich sein.

7. Anhang: Formale Definition von Korrelation und Kovarianz

Die Begriffe der Korrelation und der Kovarianz sind eng miteinander verwandt. Es sind Grössen, die dazu dienen mehrdimensionale Wahrscheinlichkeitsverteilungen zu charakterisieren.

Die Kovarianz ist mit der Varianz verwandt, man kann sie als Verallgemeinerung der Varianz auf mehrdimensionale Verteilungen bezeichnen. Während die Varianz der Erwartungswert des zweiten zentralen Moments einer Verteilung $g(x)$ ist

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= E[(X - E[X])^2] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 \cdot g(x) \cdot dx\end{aligned}$$

ist die Kovarianz analog dazu der Mischterm bei einer zweidimensionalen Verteilung $g(x_1, x_2)$

$$\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = E[(X_1 - E[X_1]) \cdot (X_2 - E[X_2])]$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \overline{x_1}) \cdot (x_2 - \overline{x_2}) \cdot g(x_1, x_2) \cdot dx_1 \cdot dx_2$$

Die Beziehung zwischen Korrelation und Kovarianz ist definitionsgemäss:

$$\mathrm{Corr}(X_1, X) = \frac{\mathrm{Cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_1) \cdot \mathrm{Var}(X_2)}}$$

Wie bereits erwähnt, wird die einzelne unsicherheitsbehaftete Messgrösse durch eine Verteilung repräsentiert wird. Dabei handelt es sich um eine eindimensionale Verteilung (Rechteck, Gauss, etc.), die durch Mittelwert und Varianz charakterisiert ist. Die Standardabweichung, als Wurzel der Varianz, dient dann als Standardunsicherheit der Messgrösse.

Beim Auftreten von Korrelationen zwischen zwei Messgrössen werden die beiden Grössen durch eine zweidimensionale Verteilung repräsentiert. Zusätzlich zu Varianzen und Mittelwerten lässt sich eine solche Verteilung nun auch durch die Kovarianz charakterisieren, quasi als Mass für die „korrelierte Standardunsicherheit“.