Weiterbildungskurs Metrologie	Modul-Nr.:	MUS-04
Grundlagen der Messunsicherheit	Dozent:	Dr. T. Bühlmann

Beispiel einer Dokumentation für die Messunsicherheitsbilanz

Lernziele:
Praktische Tipps und Empfehlungen, um eine Messunsicherheitsbilanz aufzustellen. Diese Empfehlungen sind nicht von einer Norm abgeleitet, sondern von der Erfahrung der Dozenten bei ihren Tätigkeiten als Fachexperte.

Überblick über das Angebot an Programmen und die diesbezüglichen Informationsquellen bekommen.

Vorzüge und Grenzen eines Programms zur Ermittlung der Messunsicherheit anhand eines Beispiels kennenlernen und andere einfache Beispiele umsetzen.

Form der Messunsicherheitsbilanz: Eine Messunsicherheitsbilanz ist im Prinzip ein eigenes Dokument oder eventuelle mehrere Dokumente. Er dient nur, die Unsicherheitsberechnung zu dokumentieren.

Beispiele:

- **Word alleine**
- Excel alleine
- **Word + Excel (als Berechnungs-Tool)**
- Word + Mathematisches Programm
- Mathematisches Programm alleine (mit vielen Kommentaren)
- ….

Die Messunsicherheitsbilanz ist keine
- Arbeitsanweisung
- Keine detaillierte Beschreibung vom Aufbau

Korrekte Identifizierung des Dokumentes: Eine Messunsicherheitsbilanz ist ein Dokument (unabhängig davon mit welcher Software es erstellt wurde) das folgende Informationen enthält:

- Dokumenten Name – Titel
- Eventuell Dokumenten Nummer
- Autor
- Version
- Datum

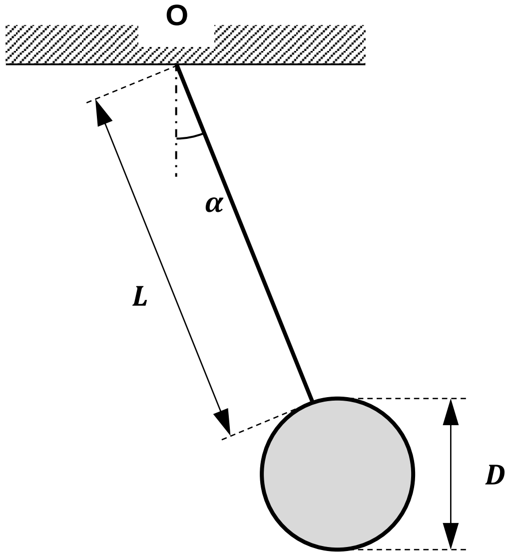
Inhalt

Inhaltsverzeichnis: Ein Inhaltsverzeichnis ist nicht unbedingt nötig, kann aber für grosse Dokumente von Vorteil sein.

1. Messprinzip

1.1 Schematische Darstellung

Messprinzip: Bestimmung der Erdbeschleunigung g mittels die Messung der Periode eines Pendels.



Schematische Darstellung: eine Schematische Darstellung ist sehr vorteilhaft. Sie verbessert die Lesbarkeit der Dokumente deutlich.

Wenn das Dokument schon in Word geschrieben ist, dann ist es empfohlen die Word Zeichnungstools zu verwenden.

Vorteil: kann in die Zukunft von jedem Kollege angepasst werden ohne zusätzliche Dokumenten zu verwalten, z.B. Visio.

1.2 Genauere Beschreibung

Das Ziel der Übungen ist mit einem Pendel die Erdbeschleunigung g und die Standardunsicherheit $u(g)$ zu bestimmen. Eine Kugel mit Durchmesser D sei mit einer Stange oder Schnur mit Länge L an einem Drehpunkt O fixiert. Die Periode der Pendelschwingung der Kugel sei τ .Im Anhang A wird gezeigt, dass für den Fall kleiner Auslenkungen von α die gesuchte Ausgangsgrösse der Erdbeschleunigung g durch folgende Formel bestimmt werden kann:

$$g(\tau, L, D) = \frac{4\pi^2}{\tau^2}\left(L + \frac{D}{2} + \frac{D^2}{5(2L + D)}\right)$$

Für dieses Modell des Pendels gelten folgende Grössen:

- Ausgangsgrösse: $Y = g$ Erdbeschleunigung (m/s^2)
- Eingangsgrössen: $X_1 = \tau$ Periode der Schwingung (s)
  $X_2 = L$ Länge der Stange/Schnur (m)
  $X_3 = D$ Durchmesser der Kugel (m)

Genauere Beschreibung: kurze aber korrekte Beschreibung des Messprinzips. Diese Beschreibung enthält:

- Die Beschreibung aller Grössen die eine Rolle bei dieser Messung spielen
- Die korrekte und konsistente Benennung der Variablen

Die Beschreibung enthält keine detaillierte Beschreibung des Messprozesses:

- Keine Geschichte der Messmethode
- Keine Dissertationsarbeit über das Messprinzip
- ..
- Dafür aber Referenzen zu wissenschaftlichen Beiträgen
- Eventuell Ausschnitte davon im Angang

Nicht berücksichtigt werden die folgenden Parameter welche das Verhalten des Pendels mitbeeinflussen:

- Einflussgrössen: Temperatur (K)
  Reibung am Drehpunkt O

Grössen die vernachlässigt werden: es ist hier sehr empfohlen, Grössen oder Phänomene aufzulisten, die vernachlässigt werden.

Bei zukünftigen Verbesserungen vom Messverfahren kann es sehr wichtig sein.

1.3 Messaufbau

Die Eingangsgrössen τ, L und D des Pendels werden gemessen und die Ausgangsgrösse g bestimmt.

Die Längendimensionen D und L des Pendels werden mit einem einfachen Massstab bestimmt und die Schwingungsdauer τ wird mit einer Stoppuhr gemessen.

Es gibt zwei verschiedene Type von Pendeln:

Pendel Typ A
Kleine / grosse Kugel
Stangen verschiedener Länge

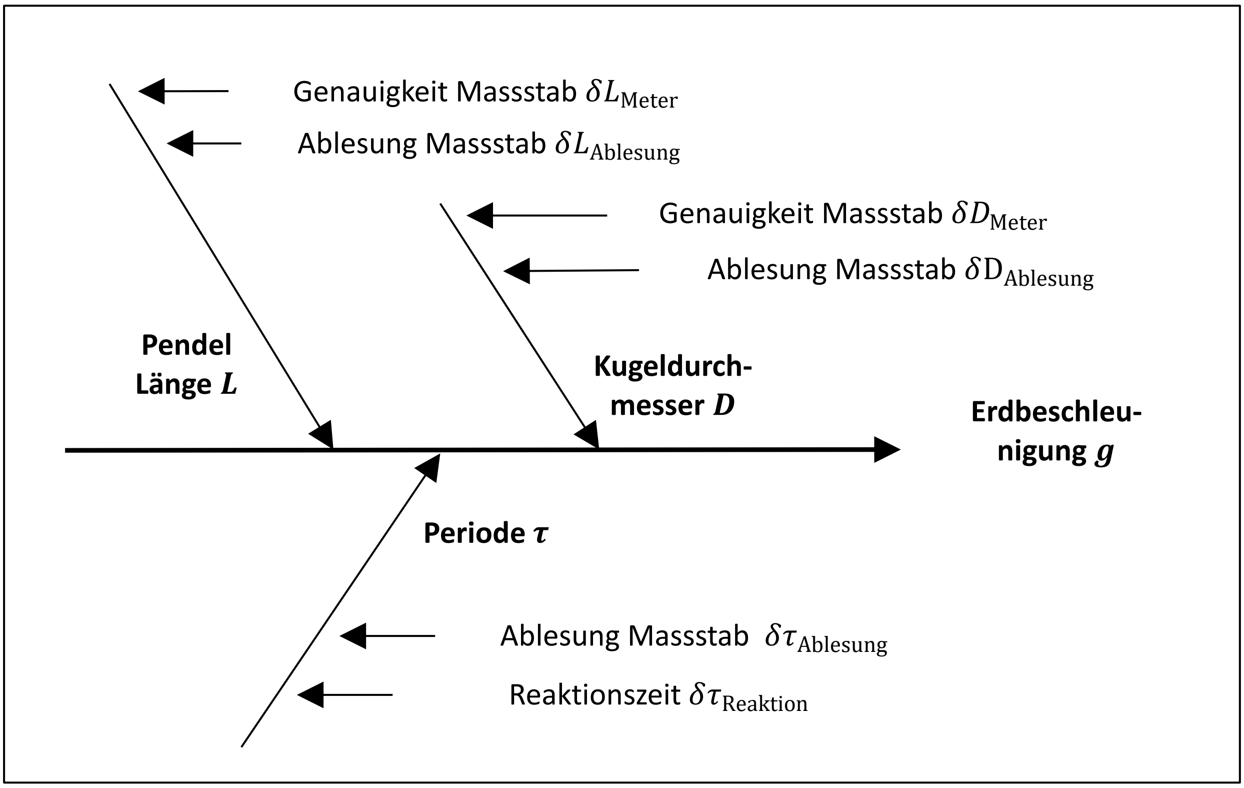
Pendel Typ B
Kleine Kugel
Schnur in beliebiger Länge

1.4 Modellgleichung

Die Grundgleichung für die Bestimmung der Erdbeschleunigung g ist (die Herleitung dieser Formel ist im Annex A beschrieben):

$$g(\tau, L, D) = \frac{4\pi^2}{\tau^2}\left(L + \frac{D}{2} + \frac{D^2}{5(2L + D)}\right)$$

Diese Grundgleichung wird mit zusätzlichen Einflussgrössen nach dem folgenden Diagramm vervollständigt:



Das heisst, dass die Modellgleichung als System von Gleichungen umgeschrieben wird:

- $g(\tau, L, D) = \frac{4\pi^2}{\tau^2}\left(L + \frac{D}{2} + \frac{D^2}{5(2L+D)}\right)$
- $\tau = \tau_{\mathrm{gemessen}} + \delta\tau_{\mathrm{Ablesung}} + \delta\tau_{\mathrm{Reaktion}}$
- $L = L_{\mathrm{gemessen}} + \delta L_{\mathrm{Meter}} + \delta L_{\mathrm{Ablesung}}$
- $D = D_{\mathrm{gemessen}} + \delta D_{\mathrm{Meter}} + \delta D_{\mathrm{Ablesung}}$

Legende:

- τ_{gemessen} gemessene Periode als Mittelwert von Wiederholten Messungen. Dieser Beitrag berücksichtigt die Typ A Unsicherheit
- $\delta\tau_{\text{Ablesung}}$ Ableseunsicherheit der Periodenmessungen
- $\delta\tau_{\text{Reaktion}}$ Unsicherheit der Reaktionszeit
- L_{gemessen} gemessene Länge als Mittelwert von Wiederholten Messungen. Dieser Beitrag berücksichtigt die Typ A Unsicherheit
- δL_{Meter} Genauigkeit des Meters
- $\delta L_{\text{Ablesung}}$ Ableseunsicherheit der Längenmessungen
- D_{gemessen} gemessenen Durchmesser als Mittelwert von Wiederholten Messungen. Dieser Beitrag berücksichtigt die Typ A Unsicherheit
- δD_{Meter} Genauigkeit des Meters
- $\delta D_{\text{Ablesung}}$ Ableseunsicherheit der Durchmessermessungen

Die Modellgleichung ist der Hauptpunkt der Messunsicherheitsbilanz.

In MS Word kann sie mit dem Gleichungseditor geschrieben werden.

2. Messunsicherheitsbeiträge

Die Messunsicherheitsbeiträge werden hier im Detail aufgelistet:

- Quelleninformationen
- Angaben über die Art, wie sie bestimmt wurden.
- Unsicherheiten
- Je präziser die Angaben sind, desto einfacher ist es die zu identifizieren, wie die Messunsicherheit anzupassen ist.

2.1 Unsicherheit der Zeitmessung $u(\tau_{\text{gemessen}})$

Die Periodendauer τ wird mit einer Stoppuhr aus der Dauer τ_{10} von 10 Perioden bestimmt: $\tau = \tau_{10}/10$. Die Standardunsicherheit wird mit einem statistischen Verfahren (Typ A) aus der Standardabweichung einer Messreihe mit n Messungen ermittelt:

$$s(\tau_{10}) = \sqrt{\frac{\sum(\tau_{10i} - \overline{\tau}_{10})^2}{n-1}}$$

.

Damit ergibt sich $u(\tau) = s(\tau_{10})/10$ und für den Mittelwert aus n Messungen $u(\tau_{\text{gemessen}}) = u(\tau)/\sqrt{n}$.

Anlässlich einer Messkampagne mit 12 Wiederholungen kann man eine Standardunsicherheit berechnen:

$$u(\boldsymbol{\tau}_{\text{gemessen}}) = \frac{u(\tau)}{\sqrt{n}} = 12.1\ \text{ms.}$$

2.2 Unsicherheit der Zeitablesung $\boldsymbol{u(\delta\tau_{\text{Ablesung}})}$

Die Stoppuhr hat eine Auflösung einer Hundertstelsekunde. Der maximale Fehler beträgt damit 0.005 s für 10 Perioden, d.h. 0.0005 s pro Periode. Die Unsicherheit wird als Unsicherheit vom Typ B mit einer Rechteckverteilung bewertet:

$$u(\delta\tau_{\text{Ablesung}}) = \frac{0.0005\ \text{s}}{\sqrt{3}} = 0.\ 29\ \text{ms.}$$

2.3 Unsicherheit der Reaktionszeit $\boldsymbol{u(\delta\tau_{\text{Reaktion}})}$

Die Unsicherheit der Reaktionszeit berücksichtigt die kleine Synchronisationsabweichung zwischen dem Start-Drücken und dem Stop-Drücken des Operators. Diese Unsicherheit kann minimiert werden indem man die ersten Pendelschwingungen nicht berücksichtigt, und erst nach 3 bis 5 Schwingungen den Start-Knopf drückt. Die Bestimmung dieser Unsicherheit basiert auf einer Schätzung der Reaktionszeit-"Reproduzierbarkeit" von etwa 0.1 s für 10 Perioden, d.h. 0.01 s für eine Periode. Die Unsicherheit wird als Unsicherheit vom Typ B mit einer Rechteckverteilung bewertet:

$$u(\delta\tau_{\text{Reaktion}}) = \frac{0.01\ \text{s}}{\sqrt{3}} = 5.7\ \text{ms.}$$

2.4 Unsicherheit der Längenmessung $\boldsymbol{u(L_{\text{gemessen}})}$

Die Standardunsicherheit der Ablesung des Massstabes bei der Bestimmung der Pendellänge lässt sich mit einem statistischen Verfahren (Typ A) aus einer Messserie ermitteln, wobei möglichst verschiedene Personen die Messung durchführen sollten, um systematische Ablesefehler erfassen zu können. Aus einer Reihe von n Messungen wird die Standardabweichung $s(L)$ berechnet. Daraus ergibt sich $u_A(L) = s(L)/\sqrt{n}$.

Anlässlich einer Messkampagne mit 6 Wiederholungen kann man eine Standardunsicherheit berechnen:

$$u(L_{\text{gemessen}}) = \frac{s(L)}{\sqrt{n=6}} = 0.46\ \text{mm.}$$

2.5 Genauigkeit des Massstabs $\boldsymbol{u(\delta L_{\text{Meter}})}$

Die Länge L des Pendels wird mit einem Massstab mit mm-Teilung der Genauigkeitsklasse III bestimmt, d.h. der maximale Fehler beträgt (0.6 + 0.4·L) mm, wobei L die Länge in m, aufgerundet auf den nächsten ganzen m, ist.

Damit ergibt sich für einen Massstab der Länge 1 m oder kleiner ein maximaler Fehler von 1.0 mm, angenommen als maximale Abweichung einer Rechteckverteilung:

$$u(\delta L_{\text{Meter}}) = \frac{1\ \text{mm}}{\sqrt{3}} = 0.\ 58\ \text{mm.}$$

2.6 Ablesefehler $u\left(\delta L_{\mathrm{Ablesung}}\right)$

Die Pendellänge L wird mit einem Massstab mit mm-Teilung bestimmt. Man nimmt hier an, dass der Operator sich bemüht einen Messwert mit einer Auflösung vom Zehntel Millimeter anzugeben. Der maximale Fehler beträgt 0.5 mm. Weil der Operator den Zehntel Millimiter angibt, nimmt man an, dass die Ableseunsicherheit nach einer Dreieckverteilung verteilt ist:

$$u\left(\delta L_{\mathrm{Ablesung}}\right) = \frac{0.5\ \mathrm{mm}}{\sqrt{3}} = 0.20\ \mathrm{mm}.$$

2.7 Unsicherheit der Durchmessermessung $u(D_{\mathrm{gemessen}})$

Die Standardunsicherheit der Ablesung des Massstabes bei der Bestimmung des Kugeldurchmessers lässt sich mit einem statistischen Verfahren (Typ A) aus einer Messserie ermitteln, wobei möglichst verschiedene Personen die Messung durchführen sollten, um systematische Ablesefehler erfassen zu können. Aus einer Reihe von n Messungen wird die Standardabweichung $s(D)$ wie in 4.1 berechnet. Daraus ergibt sich $u_A(D) = s(D)/\sqrt{n}$.

Anlässlich einer Messkampagne mit 6 Wiederholungen kann man eine Standardunsicherheit berechnen:

$$u_A(D_{\mathrm{gemessen}}) = \frac{s(D)}{\sqrt{n=6}} = 0.87\ \mathrm{mm}.$$

2.8 Genauigkeit des Massstabs $u(\delta D_{\mathrm{Meter}})$

Der Durchmesser D der Kugel wird mit einem Massstab mit mm-Teilung der Genauigkeitsklasse III bestimmt, d.h. der maximale Fehler beträgt (0.6 + 0.4·L) mm, wobei L die Länge in m, aufgerundet auf den nächsten ganzen m, ist. Damit ergibt sich für einen Massstab der Länge 1 m oder kleiner ein maximaler Fehler von 1.0 mm, angenommen als maximale Abweichung einer Rechteckverteilung:

$$u(\delta D_{\mathrm{Meter}}) = \frac{1\ \mathrm{mm}}{\sqrt{3}} = 0.\ 58\ \mathrm{mm}.$$

2.9 Ablesefehler $u\left(\delta D_{\mathrm{Ablesung}}\right)$

Der Durchmesser D wird mit einem Massstab mit mm-Teilung bestimmt. Man nimmt hier an, dass der Operator sich bemüht einen Messwert mit einer Auflösung vom Zehntel Millimeter anzugeben. Der maximale Fehler beträgt 0.5 mm. Weil der Operator den Zehntel Millimeter angibt, nimmt man an, dass die Ableseunsicherheit nach einer Dreieckverteilung verteilt ist:

$$u\left(\delta D_{\mathrm{Ablesung}}\right) = \frac{0.5\ \mathrm{mm}}{\sqrt{3}} = 0.20\ \mathrm{mm}.$$

3. Messunsicherheitsbilanz

Grösse	X_i	Messwert		Verteilung/ Form		Standard Unsicherheit		Sensitivität		$u\,(k=1)$ (m/s²)
Zeit										
Wiederholbarkeit	τ_{gemessen}	1.145	s	A		12	ms	-17.16	m/s^{-3}	0.208
Ablesung	$\delta\tau_{\text{Ablesung}}$	0.0	s	B	Recht.	0.29	ms	-17.16	m/s^{-3}	0.005
Reaktionszeit	$\delta\tau_{\text{Reaktion}}$	0.0	s	B	Recht.	5.7	ms	-17.16	m/s^{-3}	0.099
Länge										
Wiederholbarkeit	L_{gemessen}	0.301	m	A		0.46	mm	30.04	s^{-2}	0.014
Massstabgenauigkeit	δL_{Meter}	0.0	m	B	Recht.	0.58	mm	30.04	s^{-2}	0.017
Ablesung	$\delta L_{\text{Ablesung}}$	0.0	-m	B	Dreick	0.20	mm	30.04	s^{-2}	0.006
Durchmesser										
Wiederholbarkeit	D_{gemessen}	0.050	m	A		0.87	mm	15.95	s^{-2}	0.014
Massstabgenauigkeit	δD_{Meter}	0.0	m	B	Recht.	0.58	mm	15.95	s^{-2}	0.009
Ablesung	$\delta D_{\text{Ablesung}}$	0.0	m	B	Dreick	0.20	mm	15.95	s^{-2}	0.003
Kombinierte Standardunsicherheit										**0.232**
Erweiterte Messunsicherheit (k=2)										**0.47**

Die Messunsicherheitsbilanz ist eine Tabellarische Zusammenfassung der verschiedenen Beiträge.

Ein paar Tipps:

- Auflistung nach Unsicherheitsbeitrag / mathematischer Variable
- Unwesentliche Beiträge werden vernachlässigt
- Tabellenschrift typische 8 Punkte bis 10 Punkte (hier 8 Punkte) damit man genug Platz hat.
    - Bei Spalten "Messwert", " Standard Unsicherheit", "Verteilung", und "Sensitivität", bitte die Spalten so spalten dass man die Zahl und die weiteren Angaben getrennt hat. Damit kann man schnell die Tabelle in Excel kopieren und eventuell die Berechnung noch einmal machen.
- Klare Deklaration (überall wo es vorkommt), dass man hier mit $\boldsymbol{k=1}$ rechnet.

Resultat

g = 9.81 m/s² ± 0.47 m/s² ($k = 2$)

oder

g = 9.81 m/s² ± 0.47 m/s² (Vertrauensintervall von 95%)

Das Resultat enthält:

- Den Messwert
- Die Unsicherheit
- Eine Angabe über das Vertrauensniveau des Resultats.

4. Bestimmung der Empfindlichkeitskoeffizienten

Empfindlichkeitskoeffizienten: hier hat man die Möglichkeit zu dokumentieren,

- wie die Empfindlichkeitskoeffizienten bestimmt werden
- numerisch oder algebraisch
- Gleichungen die gebraucht werden

Die Modellgleichung lautet:

$$g(\tau, L, D) = \frac{4\pi^2}{\tau^2}\left(L + \frac{D}{2} + \frac{D^2}{5(2L + D)}\right)$$

Mit

- $\tau = \tau_{\text{gemessen}} + \delta\tau_{\text{Ablesung}} + \delta\tau_{\text{Reaktion}}$
- $L = L_{\text{gemessen}} + \delta L_{\text{Meter}} + \delta L_{\text{Ablesung}}$
- $D = D_{\text{gemessen}} + \delta D_{\text{Meter}} + \delta D_{\text{Ablesung}}$

Beschreibt man den Messprozess durch ein mathematisches Modell, so kann man die Empfindlichkeitskoeffizienten c_i aus dem mathematischen Modell herleiten. Die Empfindlichkeitskoeffizienten c_i sind dann die mathematischen Ableitungen der Modellfunktion:

$$c_i = \frac{\partial f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{\partial x_i}$$

Die partielle Ableitung $c_{\tau_{\text{gemessen}}}$ von g nach τ_{gemessen} ergibt sich nach dem Prinzip der multidimensionalen Kettenregel:

$$\frac{\partial g}{\partial \tau_{\text{gemessen}}} = \frac{\partial g}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial \tau_{\text{gemessen}}} + \frac{\partial g}{\partial L} \cdot \frac{\partial L}{\partial \tau_{\text{gemessen}}} + \frac{\partial g}{\partial D} \cdot \frac{\partial D}{\partial \tau_{\text{gemessen}}}$$
$$= \frac{\partial g}{\partial \tau} \cdot 1 + \frac{\partial g}{\partial L} \cdot 0 + \frac{\partial g}{\partial D} \cdot 0 = \frac{\partial g}{\partial \tau}$$

Damit gilt für das mathematische Modell des Pendels für die neun Eingangsgrössen τ_{gemessen}, $\delta\tau_{\text{Ablesung}}$, $\delta\tau_{\text{Reaktion}}$, L_{gemessen}, δL_{Meter}, $\delta L_{\text{Ablesung}}$, D_{gemessen}, δD_{Meter}, $\delta D_{\text{Ablesung}}$:

$$c_{\tau_{\text{gemessen}}} = c_{\delta\tau_{\text{Ablesung}}} = c_{\delta\tau_{\text{Reaktion}}} = \frac{\partial g}{\partial \tau}$$
$$c_{L_{\text{gemessen}}} = c_{L_{\text{Meter}}} = c_{L_{\text{Ablesung}}} = \frac{\partial g}{\partial L}$$
$$c_{D_{\text{gemessen}}} = c_{D_{\text{Meter}}} = c_{D_{\text{Ablesung}}} = \frac{\partial g}{\partial D}$$

Mit

$$\frac{\partial g}{\partial \tau} = \frac{-8\pi^2}{\tau^3}\left(L + \frac{D}{2} + \frac{D^2}{5(2L+D)}\right) = \frac{-2}{\tau} g(\tau, L, D)$$
$$\frac{\partial g}{\partial L} = \frac{4\pi^2}{\tau^2}\left(1 - \frac{10D^2}{\left(5(2L+D)\right)^2}\right) \cong \frac{1}{L} g(\tau, L, D)$$
$$\frac{\partial g}{\partial D} = \frac{4\pi^2}{\tau^2}\left(\frac{1}{2} + \frac{2D}{5(2L+D)} - \frac{5D^2}{\left(5(2L+D)\right)^2}\right) \cong \frac{1}{2L} g(\tau, L, D)$$

Die Empfindlichkeitskoeffizienten können wie angegeben angenähert werden, weil die Formel $g(\tau, L, D)$ des mathematischen Models durch den Längenterm L dominiert ist.

5. Programme zur Ermittlung der Messunsicherheit

5.1 Einleitung

Es existiert eine Vielzahl von Programmen zur Evaluation der Messunsicherheit. Jedes hat seine Spezifizität und seine Akzeptanz in eingeschränkten Gebieten. Oft gibt es eine dedizierte Software für eine bestimmte Aufgabe. Mit wenig Mehraufwand und den nötigen Kenntnissen lassen sich viele der gestellten Evaluationsprobleme auch mit üblichen Tabellenkalkulations- oder Mathematik-Programmen wie Mathematica, Mathcad, Mathlab, Maple usw. erledigen; die komplexeren darunter unter Umständen mit der METAS.UncLib (https://www.metas.ch/unclib).

5.2 Software-Beispiele

Die nachfolgende Liste soll einen kleinen Überblick über Programme geben, deren Thema die Messunsicherheiten und deren Evaluation sind. Diese Liste erhebt keinesfalls Anspruch auf Vollständigkeit und ist im Begriff, mit der Entwicklung zu wachsen. Im Folgenden sind Software Applikationen erwähnt, die über die rein statistischen Funktionen und die Modellierung sowie Ausgleichsrechnung hinausgehen und mit ihrer Struktur einen gesamten Evaluationsprozess (z. B. nach ISO GUM) begleiten und ein fertiges Resultat oder einen Bericht liefern.

- **DFM-GUM** Version 2.1 veröffentlicht durch DFM, the Danish Institute for Fundamental Metrology http://dfm-gum.software.informer.com/
- **Evaluator** Version 3.0 veröffentlicht durch Newton Metrology Inc. https://www.newtonmetrology.com/product/evaluator/
- **GUM Workbench** Version 2.4 Pro veröffentlicht durch Metrodata GmbH, Demoversion erhältlich http://www.metrodata.de
- **GUM Tree Calculator** Version 1.4.0 veröffentlicht durch Measurement Standards Laboratory of New Zealand https://github.com/MSLNZ/GTC
- **Uncertainty Analyzer** Version 3.0 veröffentlicht durch Integrated Sciences Group http://www.isgmax.com/ua_product.htm
- **Oil and Gas Uncertainty Calculator** Version 1.3 veröffentlicht durch Bureau of Land Management, U.S. Dpeartment of the Interior https://www.callabmag.com/blm-uncertainty-calculator-for-flow/
- **Uncertainty Sidekick**: http://www.isgmax.com/uncertainty_freeware.htm ist eine Demoversion (Freeware) Auch als Pro Version erhältlich
- **Uncertainty Toolbox** Version 6.51, Excel basierte Applikation veröffentlicht durch Quametec Corporation, https://www.qimtonline.com/mod/page/view.php?id=448
- **WINCERT** veröffentlicht durch Implex, entwickelt in Zusammenarbeit mit LNE, https://www.implex.fr/split_oip_logiciel_gum_fdx07014_opperet.php beinhaltet GUM- und Monte-Carlo Methode.

5.3 Demonstration GUM Workbench V 2.4

- Einstellungen
- Eingabe mathematisches Modell
- Eingabe Grössen, Möglichkeiten Import, Verteilungen
- Funktionen
- Erstellen der Bilanz
- Erstellen eines Berichts

5.4 Beispiel Bericht

Erdbeschleunigung mittels eines mathematischen Pendels

Mit Messungen der Pendelperiode τ und der dimensionalen Grössen soll die Erdbeschleunigung g ermittelt werden.

Modellgleichung:

$$\boldsymbol{g = 4 * \pi\text{^}2/\tau\text{^}2 * (L + D/2 + (D\text{^}2/(5 * (2 * L + D))))} \text{ ;}$$

$$\tau = \tau_{\text{gemessen}} + \delta\tau_{\text{Ablesung}} + \delta\tau_{\text{Reaktion}} \text{ ;}$$

$$L = L_{\text{gemessen}} + \delta L_{\text{Meter}} + \delta L_{\text{Ablesung}} \text{ ;}$$

$$D = D_{\text{gemessen}} + \delta D_{\text{Meter}} + \delta D_{\text{Ablesung}} \text{ ;}$$

Liste der Größen

Größe	Einheit	Definition
g	m/s^2	Erdbeschleunigung
π		Pi
τ	s	Periode der Pendelschwingung
L	m	Distanz zwischen Rotationspunkt und dem nächstgelegenen Punkt auf der Kugel
D	m	Durchmesser der Kugel
τ_{gemessen}	s	Gemessene Periode als Mittelwert von Messungen
$\delta\tau_{\text{Ablesung}}$	s	Ableseunsicherheit der Periodenmessungen
$\delta\tau_{\text{Reaktion}}$	s	Unsicherheit der Reaktionszeit
L_{gemessen}	m	Gemessene Länge als Mittelwert von Messungen
δL_{Meter}	m	Genauigkeit des Meters
$\delta L_{\text{Ablesung}}$	m	Ableseunsicherheit der Längenmessungen
D_{gemessen}	m	Gemessener Durchmesser als Mittelwert von Messungen
δD_{Meter}	m	Genauigkeit des Meters
$\delta D_{\text{Ablesung}}$	m	Ableseunsicherheit der Längenmessungen

Beschreibung der Messgrößen

Variable	Beschreibung	
$\boldsymbol{\pi}$	Konstante Wert: 3.1415926535898	
$\boldsymbol{\tau}$	Zwischenergebnis	
$\boldsymbol{L}$	Zwischenergebnis	
$\boldsymbol{D}$	Zwischenergebnis	
τ_{gemessen}	Typ	Type A
	Methode der Beobachtung	Direkt
	Anzahl der Beobachtungen	12
	Daten	1.148, 1.211, 1.175, 1.157, 1.115, 1.076, 1.145, 1.106, 1.172, 1.172, 1.082, 1.181
	Ermittlung der Unsicherheit	Experimentell
$\delta\tau_{\text{Ablesung}}$	Typ	Typ B
	Verteilung	Rechteck
	Wert	0.0 s
	Halbbreite der Grenzen	0.0005 s
$\delta\tau_{\text{Reaktion}}$	Typ	Typ B
	Verteilung	Rechteck
	Wert	0.0 s
	Halbbreite der Grenzen	0.01 s
L_{gemessen}	Typ	Typ A zusammengefasst
	Ermittlung der Unsicherheit	Standard
	Mittelwert	0.301 m
	Standardmessunsicherheit	0.00046 m
	Freiheitsgrad	10
δL_{Meter}	Typ	Typ B
	Verteilung	Rechteck
	Wert	0.0 s
	Halbbreite der Grenzen	0.001 s
$\delta L_{\text{Ablesung}}$	Typ	Typ B
	Verteilung	Dreieck
	Wert	0.0 s
	Halbbreite der Grenzen	0.0005 s
D_{gemessen}	Typ	Typ A zusammengefasst
	Ermittlung der Unsicherheit	Standard
	Mittelwert	0.050 m
	Standardmessunsicherheit	0.00087 m
	Freiheitsgrad	10

Variable	Beschreibung	
$\delta D_{\mathrm{Meter}}$	Typ	Typ B
	Verteilung	Rechteck
	Wert	0.0 s
	Halbbreite der Grenzen	0.001 s
$\delta D_{\mathrm{Ablesung}}$	Typ	Typ B
	Verteilung	Dreieck
	Wert	0.0 s
	Halbbreite der Grenzen	0.0005 s

Messunsicherheitsbilanz

g: Erdbeschleunigung

Grösse	Wert	Standard-messunsi-cherheit	Vertei-lung	Sensi-tivitäts-koeffi-zient	Unsicherheits-beitrag	Index
π	3.1415					
τ	1.1450 s	0.0134 s				
L	0.301 m	0.000766 m				
D	0.050 m	0.00106 m				
τ_{gemessen}	1.1450 s	0.0121 s	Normal	-17	-0.210 m/s²	80.2 %
$\delta\tau_{\mathrm{Ablesung}}$	0.0 s	0.000289 s	Rechteck	-17	0.005 m/s²	0.0 %
$\delta\tau_{\mathrm{Reaktion}}$	0.0 s	0.00577 s	Rechteck	-17	-0.099 m/s²	18.3 %
L_{gemessen}	0.301 m	0.000460 m	Normal	30	0.014 m/s²	0.4 %
$\delta L_{\mathrm{Meter}}$	0.0 m	0.000577 m	Rechteck	30	0.017 m/s²	0.6 %
$\delta L_{\mathrm{Ablesung}}$	0.0 m	0.000204 m	Dreieck	30	0.006 m/s²	0.0 %
D_{gemessen}	0.050 m	0.000870 m	Normal	16	0.014 m/s²	0.4 %
$\delta D_{\mathrm{Meter}}$	0.0 m	0.000577 m	Rechteck	16	0.009 m/s²	0.2 %
$\delta D_{\mathrm{Ablesung}}$	0.0 m	0.000204 m	Dreieck	16	0.003 m/s²	0.0 %

Ergebnisse:

Größe	Wert	Erw.-Mess-unsicherheit	Erweite-rungsfaktor	Überdeckungs-wahrscheinlichkeit
g	9.84 m/s²	0.50 m/s²	2.16	95% (t-Tabelle 95.45%)

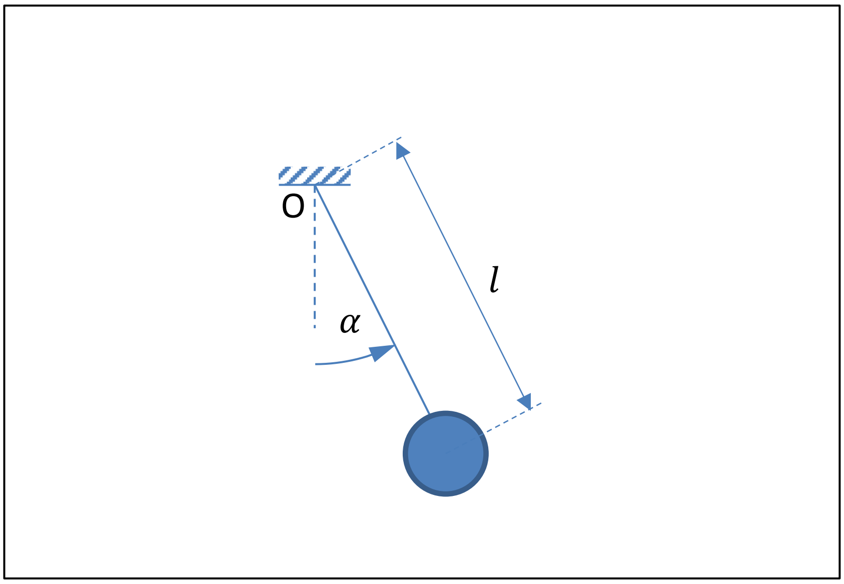
5.5 Literatur

- https://opus4.kobv.de/opus4-bam/files/185/fb266_vt.pdf
- http://www.isgmax.com/Articles_Papers/Software%20Comparison%20Updated%20Version.pdf
- International Organization for Standardization: *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement.* ISO, Genf 1995, ISBN 92-67-10188-9
  oder DIN Deutsches Institut für Normung e.V., „Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen“, DIN V ENV 13005, Beuth Verlag GmbH, 1999

6. Annexe: Herleitung der Formel für die Erdbeschleunigung

6.1 Allgemeine Formel

Das Pendel bestehe aus einem Punkt der Masse m mit Radius r und drehe sich im Abstand l um den Drehpunkt O. Der Auslenkungswinkel sei α. Die Reibung am Drehpunkt und in der Luft werde vernachlässigt.



Das auf das Pendel wirkende Drehmoment $\vec{\mathcal{M}}$ erzeugt eine Drehbewegung, welche durch die zeitliche Änderung des Auslenkungswinkels $\alpha(t)$ beschrieben wird. Die Formel lässt sich aus dem Drehimpulssatz herleiten:

$$\sum \vec{\mathcal{M}} = \frac{d\vec{\mathcal{L}}}{dt}$$

Mit folgenden Werten für den Drehmoment $\vec{\mathcal{M}}$ und für den Drehimpuls $\vec{\mathcal{L}}$ in der Achse senkrecht zur Schwingungsebene:

- $\sum \mathcal{M} = -m \cdot l \cdot \sin(\alpha)$
- $\mathcal{L} = I \cdot \dot{\alpha}$

Die Variable α bezeichnet den Winkel des Pendels mit der vertikalen Achse, $\dot{\alpha}$ die erste Ableitung (Winkelgeschwindigkeit), und $\ddot{\alpha}$ die zweite Ableitung (Winkelbeschleunigung, siehe weiter unten). Die Masse der Kugel ist m, und I bezeichnet das Trägheitsmoment der Kugel (Drehpunkt O):

$$I = m \cdot l^2 + \frac{2}{5} m \cdot r^2$$

Für kleine Bewegungen gilt: $\sin(\alpha) \cong \alpha$. Damit lässt sich der Drehimpulssatz umschreiben als:

$$I \cdot \ddot{\alpha} \cong -m \cdot l \cdot \alpha$$

Die Lösung lässt sich folgenderweise schreiben (α_0 bezeichnet den Startwinkel)

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{t}{\tau}\right)$$

Mit

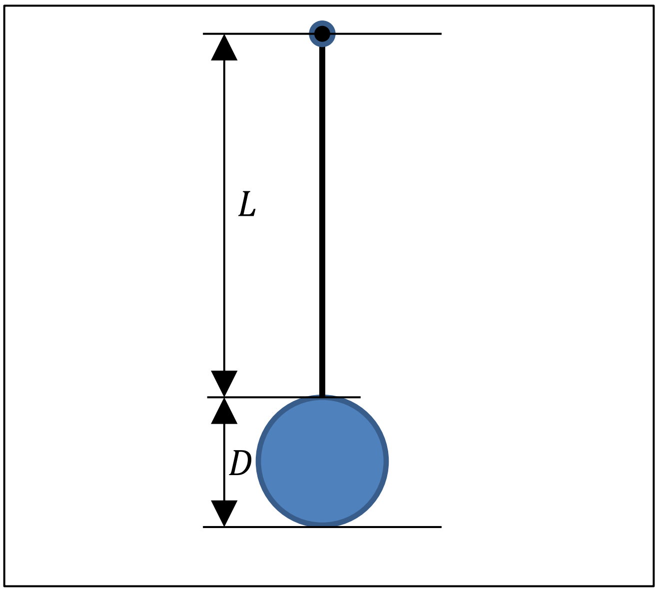
$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{I}{m \cdot g \cdot l}}$$

Nach Umkehrung dieser Formel lässt sich die Erdbeschleunigung g bestimmen als:

$$g = \frac{4\pi^2}{\tau^2} \cdot \frac{I}{m \cdot l}$$

6.2 Umdefinition der Variablen

Weil die Länge l und der Radius r nicht direkt messbar sind, wurden neue Variablen nach der folgenden Skizze eingeführt: L ist der Abstand vom Drehpunkt zu Kugeloberfläche, D der Durchmesser der Kugel.



Damit lässt sich die obere Gleichung folgendermassen umschreiben:

$$\begin{aligned} g &= \frac{4\pi^2}{\tau^2} \cdot \frac{I}{m \cdot l} \\ &= \frac{4\pi^2}{\tau^2} \cdot \frac{m \cdot l^2 + \frac{2}{5} m \cdot r^2}{m \cdot l} \\ &= \frac{4\pi^2}{\tau^2} \cdot \frac{\left(L + \frac{D}{2}\right)^2 + \frac{2}{5}\left(\frac{D}{2}\right)^2}{\left(L + \frac{D}{2}\right)} \\ &= \frac{4\pi^2}{\tau^2} \cdot \left(L + \frac{D}{2} + \frac{D^2}{5(2L + D)}\right) \end{aligned}$$