Schweizerische Eidgenossenschaft
Confédération suisse
Confederazione Svizzera
Confederaziun svizra

Eidgenössisches Institut für Metrologie METAS

Erweiterte Messunsicherheit

Sándor Vörös

Ausgangspunkt

Folgende Etappen des Messprozesses sind schon erledigt:

1) Formulierung: $Y, X_i, f \quad \longrightarrow \quad Y = f(X_1, \ldots, X_N)$

2) Schätzung: $x_i, u(x_i)$

3) Fortpflanzung: $y = f(x_1, \ldots, x_N)$

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} c_i^2 \cdot u^2(x_i)}$$

Damit sind wir (fast) am Ziel…

Es bleibt noch eine Frage offen…

Die kombinierte Standardunsicherheit $u_c(y)$ ist ein Mass für die Streuung der y-Werte, aber …

Wie soll man $u_c(y)$ nun quantitativ interpretieren?

… oder anders formuliert:

Wie gross ist das Risiko, dass bei Wiederholung der Messung der Wert für Y ausserhalb des Intervalls $[y - u_c(y)\,,\, y + u_c(y)]$ liegt?

Unsicherheit und Vertrauensgrad

- Schon gesehen: Jeder Messgrösse (X_i oder Y) wird eine Verteilung möglicher Werte zugeordnet. Diese Verteilung wird üblicherweise durch ihre so genannte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ($g_i(x_i)$ oder $g(y)$) angegeben.

- Eine (richtig normierte) Wahrscheinlichkeitsdichte hat eine Gesamtfläche = 1 unterhalb ihrer Kurve. Diese Fläche entspricht der Gesamtheit der Werte, die der entsprechenden Messgrösse vernünftigerweise zugeordnet werden können.

- Der Bruchteil p dieser Fläche, der innerhalb eines Intervalls $[a,b]$ liegt, ist gleich dem Anteil der Werte der Messgrösse, der in diesem Intervall liegt. Dieser Bruchteil p (in % ausgedrückt) wird <u>Vertrauensgrad</u> oder <u>Überdeckungswahrscheinlichkeit</u> des Intervalls genannt.

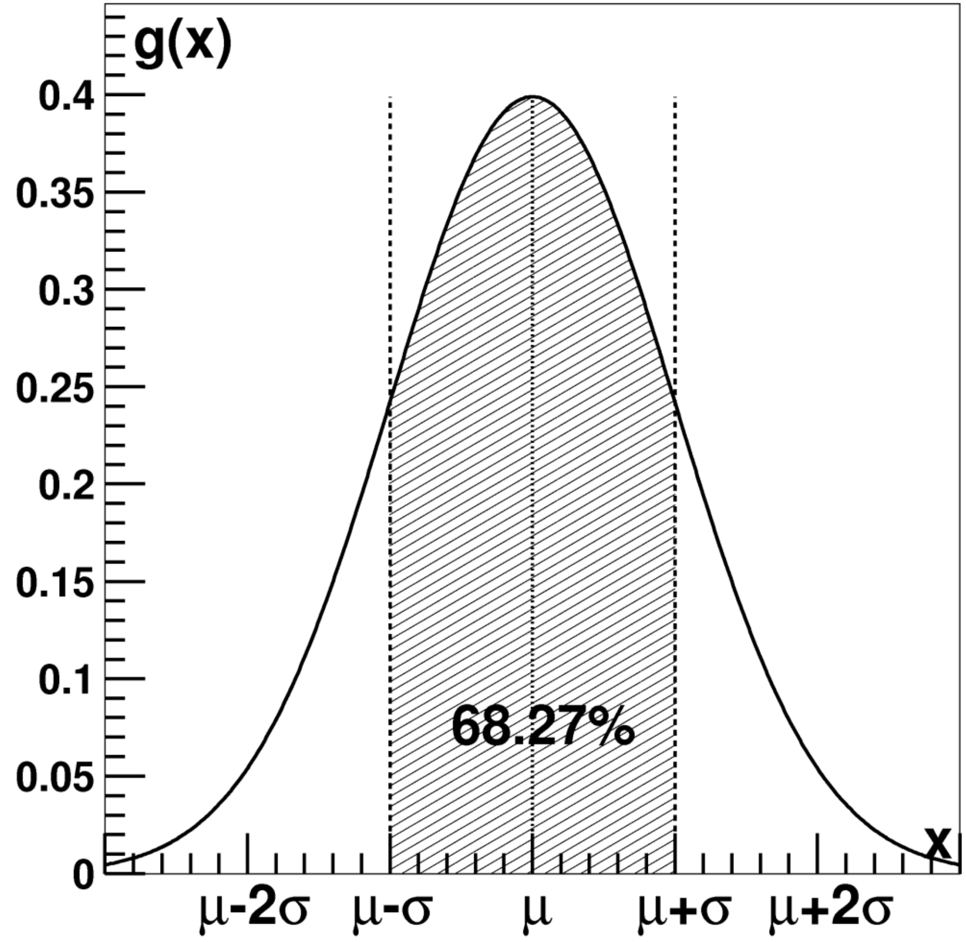
Vertrauensgrad für eine Normalverteilung

Wahrscheinlichkeitsdichte

$$g(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}$$

$$p = Pr[\mu - \sigma \ \leq x \ \leq \ \mu + \sigma]$$

$$= \int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} g(z)\cdot dz = 0.6827$$



Was für ein Risiko wollen wir akzeptieren?

- Für eine Normalverteilung entspricht das Intervall $\mu \pm \sigma$ einem Vertrauensgrad von ~68%. Es liegen also ~32% der Werte der Messgrösse ausserhalb.

- **Frage**: Sind wir einverstanden, eine Unsicherheit, die so viele mögliche Werte der Messgrösse ausschliesst, als Messresultat anzugeben?

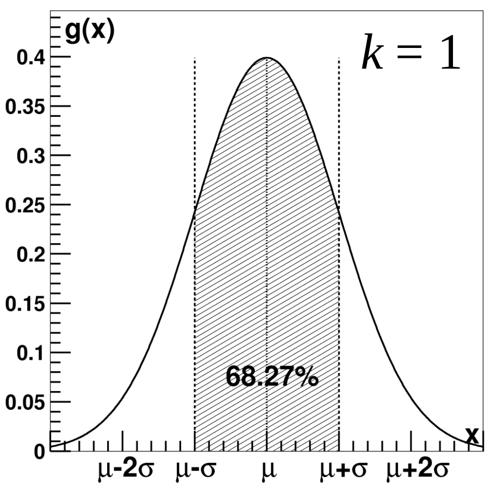
- Wenn nicht, dann sollen wir eine erweiterte Unsicherheit U, d.h. ein Intervall mit einem höheren Vertrauensgrad p als demjenigen, der durch die Standardunsicherheit $u_c(y) \equiv \sigma(Y)$ definiert wird, angeben.

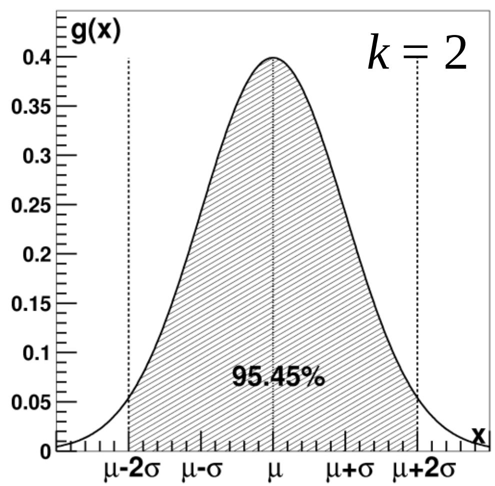
Erweiterte Unsicherheit

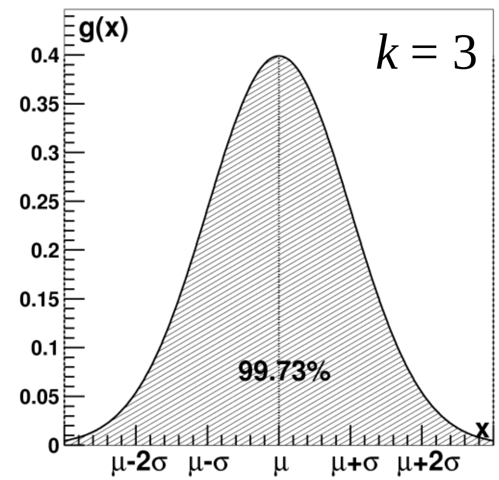
- Man erhält eine erweiterte Unsicherheit U durch Multiplikation der kombinierten Standardunsicherheit $u_c(y)$ mit einem Erweiterungsfaktor k, sodass $U = k \cdot u_c(y)$. Meistens ist $k = 2$ oder 3.

- Das Ergebnis wird durch $Y = y \pm U$ ausgedrückt, zusammen mit der Angabe des entsprechenden Vertrauensgrads

$$p = Pr[y - U \leq E(Y) \leq y + U]$$







Angabe der Messunsicherheit

Angabe der Messunsicherheit zusammen mit dem Messergebnis:

$$Y = y \pm U$$

Y Messgrösse
y durch Messung ermittelter Schätzwert
U erweiterte Messunsicherheit.

Die angegebene Messunsicherheit ist das Produkt der kombinierten Standardunsicherheit mit einem Erweiterungsfaktor $k = 2$. Der Messwert (y) und die dazugehörige erweiterte Messunsicherheit (U) geben den Bereich ($y \pm U$) an, der den Wert der gemessenen Grösse mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 95 % enthält. Die Unsicherheit wurde in Übereinstimmung mit den Richtlinien der ISO (GUM:2008) ermittelt.
Die Messunsicherheit beinhaltet Unsicherheitsbeiträge vom benutzten Normal, vom Kalibrierverfahren, von den Umgebungsbedingungen und vom kalibrierten Messmittel. Das Langzeitverhalten des kalibrierten Messmittels wurde nicht berücksichtigt.

Wie sind die Werte von Y überhaupt verteilt?

- Wir haben bis jetzt stillschweigend angenommen, dass die Werte, die die Messgrösse Y annehmen kann, normalverteilt sind.

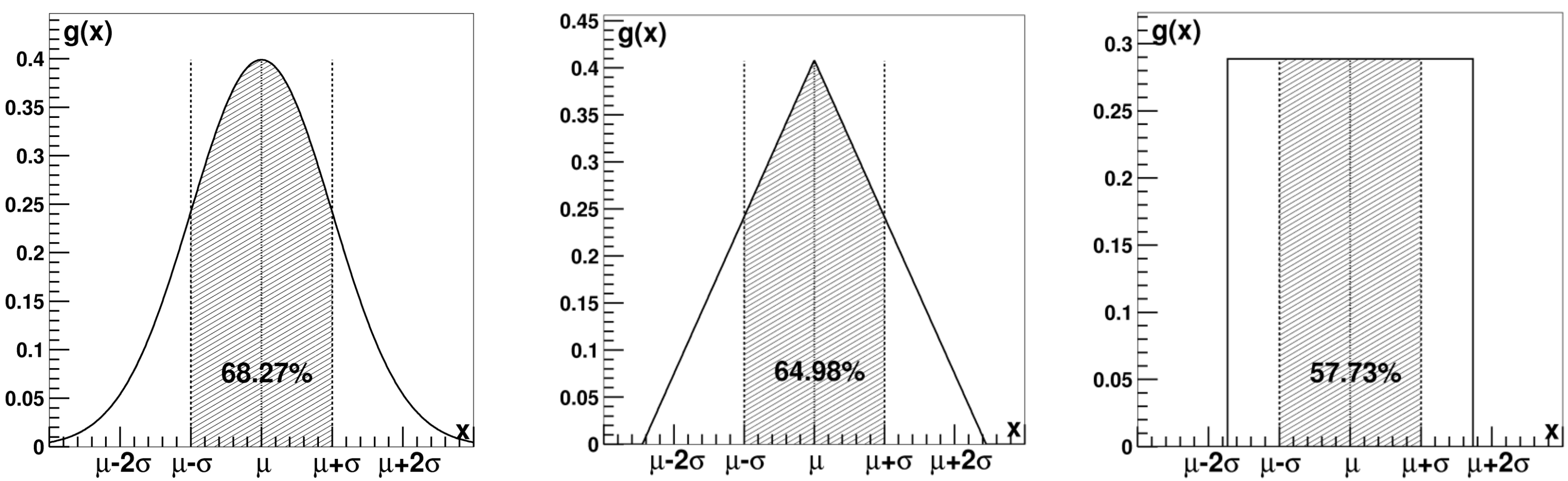
- Ist diese Annahme immer gerechtfertigt?

- Wenn nicht, wie kann man die Verteilung von Y bestimmen?

- **Problem**: die Unsicherheitsfortpflanzungsformel erlaubt es, die Standartabweichung $\sigma(Y) = u_c(y)$ zu berechnen, was ein Mass für die Breite der Verteilung der Werte von Y ist, aber sie gibt keine Auskunft über die Form dieser Verteilung.

Die Verteilung ist relevant für den Vertrauensgrad

- Ein Intervall fester Breite $\mu \pm \sigma$ hat unterschiedliche Vertrauensgrade, je nach Wahl der Verteilung.



→ Umfassende Kenntnisse der Wahrscheinlichkeitsverteilung sind notwendig, um den mit einem Bereich assoziierten Vertrauensgrad eindeutig angeben zu können.

Wie kann man die Verteilung $g(y)$ von Y bestimmen?

- Man kann die Verteilung $g(y)$ der Werte von Y ausgehend von den Verteilungen $g_i(x_i)$ der Eingangsgrössen X_i und der Funktion f explizit berechnen, aber das kann sehr aufwendig sein.

- Numerische Methoden erlauben es, diese Berechnung durchzuführen.

- Unter gewissen Annahmen kann man einen brauchbaren Ansatz für $g(y)$ finden, ohne die Verteilung exakt bestimmen zu müssen.

Der Ansatz für $g(y)$ nach dem GUM

Um den Ansatz der Standard-GUM-Methode für $g(y)$ zu rechtfertigen, sind zwei Instrumente aus der Statistik erforderlich:

- der zentrale Grenzwertsatz
  - wird jetzt eingeführt

- die t-Verteilung (Student'sche Verteilung)
  - wird im Skript von diesem Modul MU-05 behandelt

Linearkombination von Zufallsvariablen

Aus der Statistik lernen wir, dass

- Wenn eine Zufallsvariable Y sich als Linearkombination einer beliebigen Anzahl Zufallsvariablen X_i schreiben lässt, dann sind Erwartungswert und Varianz von Y gleich der Summe derjenigen von X_i (dies gilt für beliebige Verteilungen $g_i(x_i)$):

$$Y = \sum_{i=1}^{N} c_i \cdot X_i \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} E(Y) &= \sum_{i=1}^{N} c_i \cdot E(X_i) \\ \sigma^2(Y) &= \sum_{i=1}^{N} c_i^2 \cdot \sigma^2(X_i) \end{aligned}$$

- Wenn alle X_i normalverteilt sind, dann ist auch Y normalverteilt.

- Wenn nicht alle X_i normalverteilt sind, dann kann man keine allgemeine Aussage über die Verteilung $g(y)$ machen.

Zentraler Grenzwertsatz

$$Y = \sum_{i=1}^{N} c_i \cdot X_i \qquad E(Y) = \sum_{i=1}^{N} c_i \cdot E(X_i) \qquad \sigma^2(Y) = \sum_{i=1}^{N} c_i^2 \cdot \sigma^2(X_i)$$

Eine Linearkombination unabhängiger Zufallsvariablen X_i ist asymptotisch normalverteilt:

$$\lim_{N\to\infty} Y \quad \to \quad N\big(E(Y), \sigma^2(Y)\big)$$

wobei $N(\mu,\sigma^2)$ eine Normalverteilung mit Mittelwert μ und Varianz σ^2 bezeichnet.

(nicht zu verwechseln mit der Anzahl der Variablen N !)

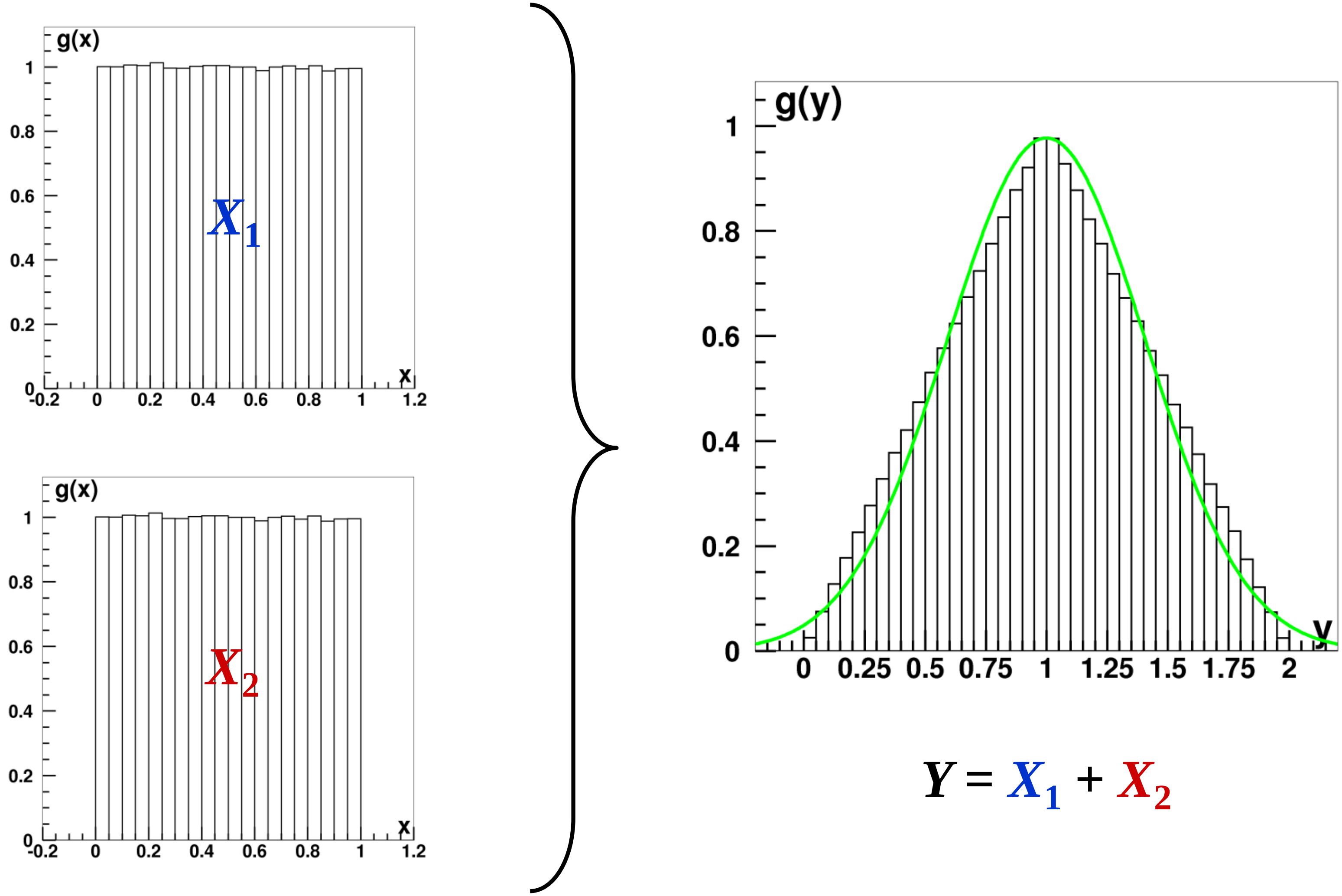
Zur Anwendung des zentralen Grenzwertsatzes

- In der Praxis sind die Voraussetzungen des zentralen Grenzwertsatzes nie völlig erfüllt, da wir nur endlich viele Eingangsgrössen haben (zum Glück!).

- Die Aussage des zentralen Grenzwertsatzes gilt näherungsweise, falls die Varianzen $\sigma^2(X_i)$ der Einzelnen X_i etwa gleich gross sind.

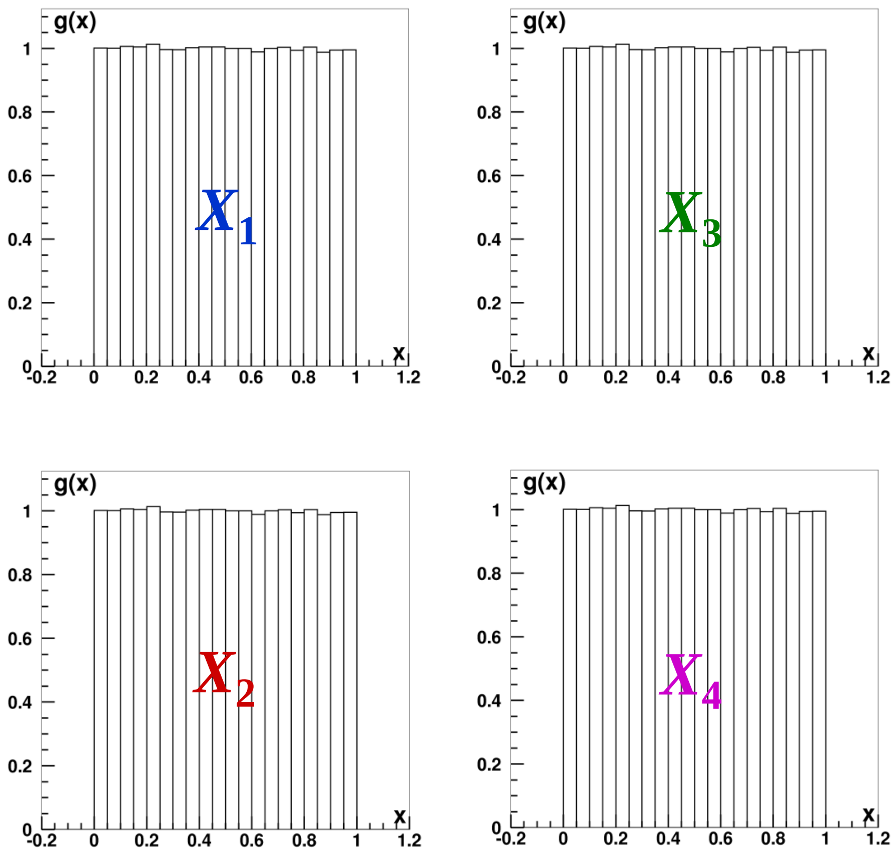
- Je näher die Verteilung der X_i einer Normalverteilung ist, desto weniger X_i werden benötigt, um eine Normalverteilung für Y zu erreichen.

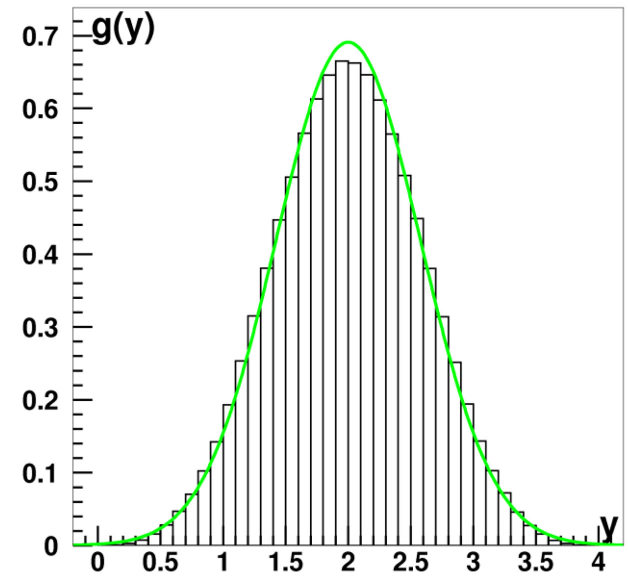
Verteilung von $Y = X_1 + X_2$ für rechteckverteilte X_i



$Y = X_1 + X_2$

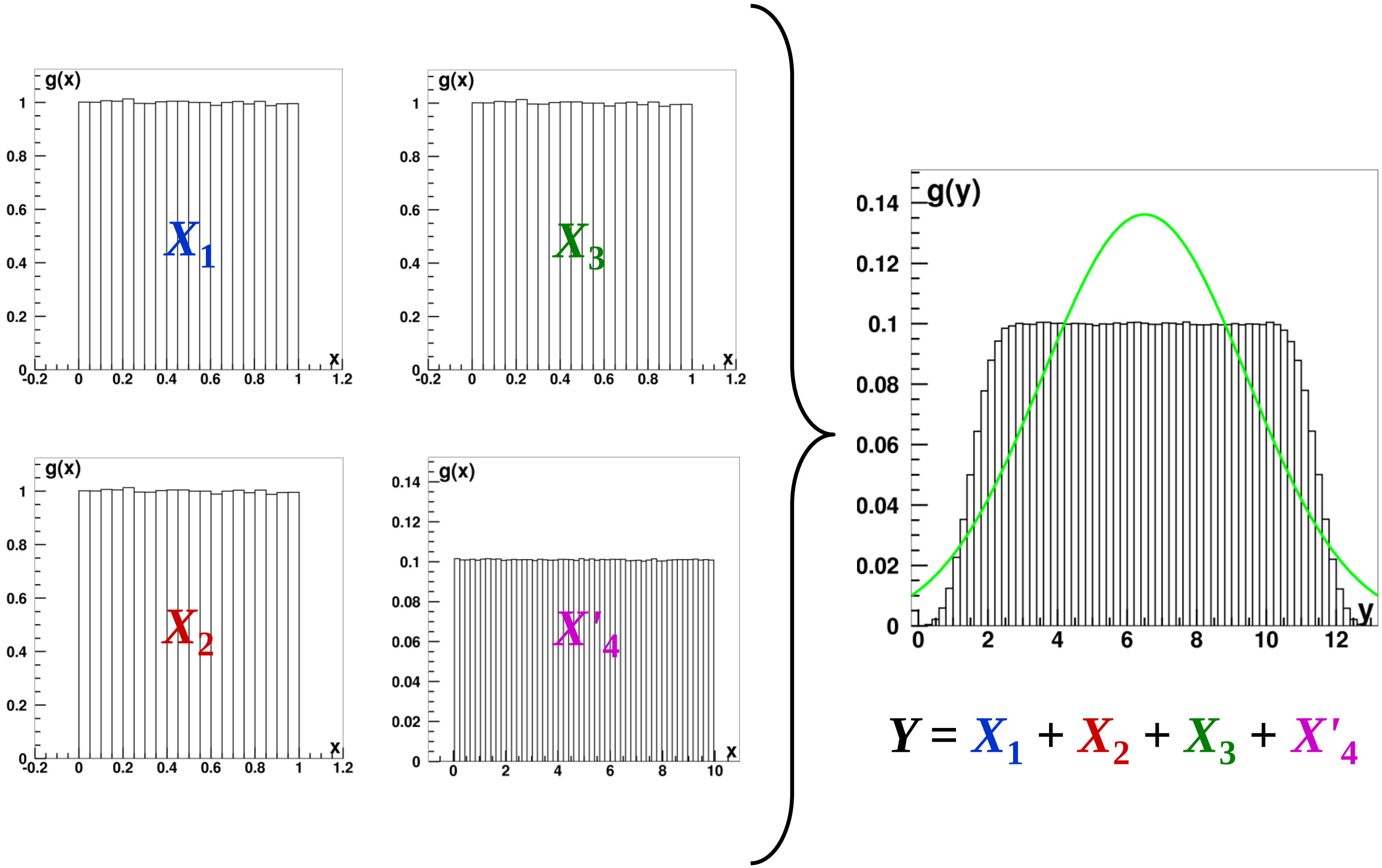
Verteilung von $Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$ für rechteckverteilte X_i





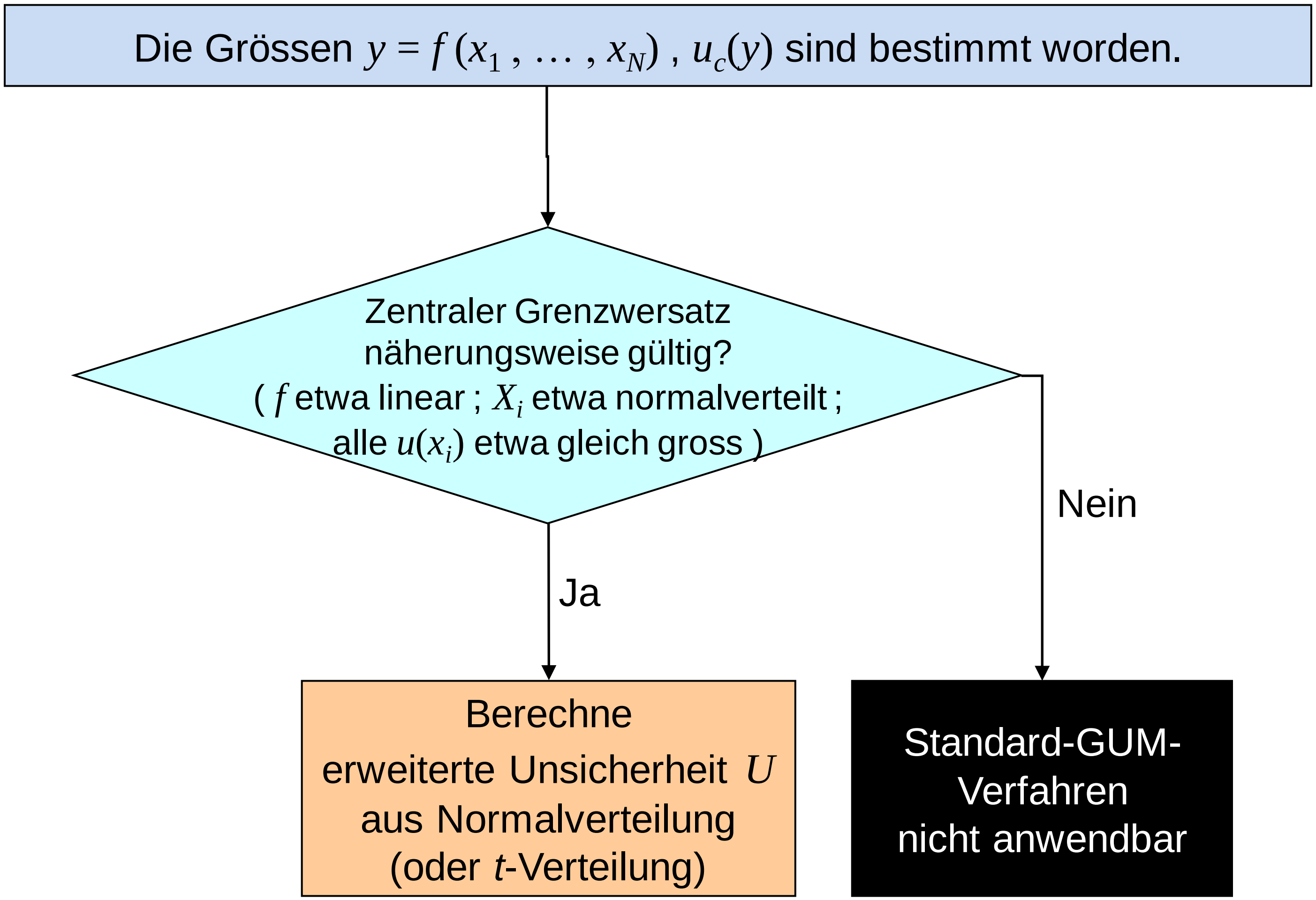
$$Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$$

Verteilung von $Y = X_1 + X_2 + X_3 + X'_4$ für rechteckverteilte X_i

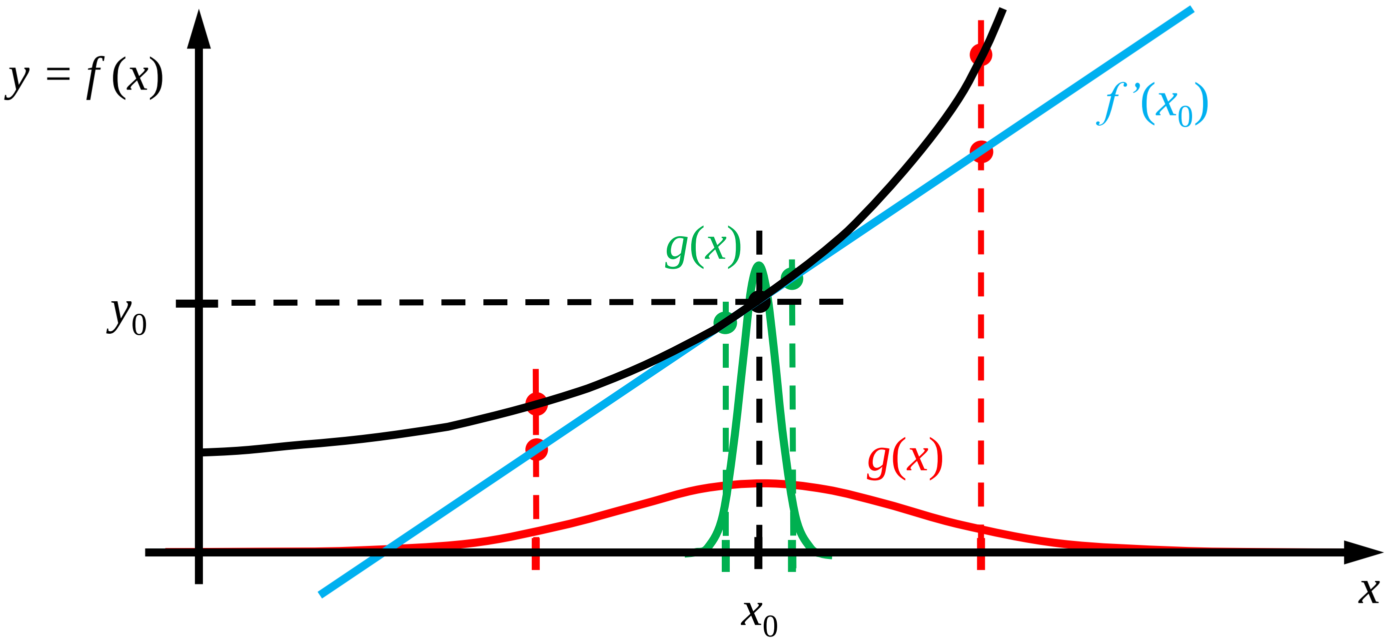


$$\boldsymbol{Y = X_1 + X_2 + X_3 + X'_4}$$

Berechnung der erweiterten Messunsicherheit



«Nichtlinearität» hängt von der Unsicherheit ab



Eine lineare Funktion ist mit Mittelwertbildung kommutativ. Beispiel: $f(x) = x^2$, $x_0 = 4$.

Verteilung $g(x)$ habe $u(x_0) \approx 1$ ➔ typische Werte sind $x = 3$ und $x = 5$

$$x = 3 / 5 \quad \Rightarrow \quad y = 9 / 25$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\bar{x} = 4 \quad \Rightarrow \quad \bar{y} = \underbrace{16 / 17}_{\text{Wesentliche Nichtlinearität}}$$

Verteilung $g(x)$ habe $u(x_0) \approx 0.1$ ➔ typische Werte sind $x = 3.9$ und $x = 4.1$

$$x = 3.9 / 4.1 \quad \Rightarrow \quad y = 15.21 / 16.81$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\bar{x} = 4 \quad \Rightarrow \quad \bar{y} = \underbrace{16 / 16.01}_{\text{Unwesentliche Nichtlinearität}}$$