



Schweizerische Eidgenossenschaft
Confédération suisse
Confederazione Svizzera
Confederaziun svizra

Eidgenössisches Institut für Metrologie METAS



Einführung in die Messunsicherheitsberechnung

Frédéric Pythoud

Vorbemerkungen

- Ein Messwert ist nur dann aussagekräftig, wenn er von einer **Messunsicherheits**angabe begleitet ist.
- Die Angabe einer Messunsicherheit enthält zwingend auch eine Angabe des **Vertrauensniveaus**.
- Die in einem Zertifikat angegebene Messunsicherheit bezieht sich stets auf das angegebene **Resultat** (und nicht auf eine Referenzgrösse) und schliesst damit das Verhalten des Prüflings mit ein.

Das einheitliche Verfahren nach GUM

*Guide to the expression of uncertainty in measurement,
Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen,
JCGM 100:2008 (GUM)*

- *universell:*
auf alle Arten von Messungen
anwendbar
- *in sich konsistent:*
unabhängig von der Gruppierung von Komponenten und ihrer
Zerlegung in Unterkomponenten
- *übertragbar:*
Messunsicherheits-Komponente bei einer anderen Messung
wiederverwendbar
- *quantifizierbares Vertrauen:*
Das Verfahren liefert einen Bereich um das Messergebnis, dessen
Vertrauensniveau bekannt ist.

Begriffe

(Messbare) Grösse

Eigenschaft eines Phänomens, eines Körpers oder einer Substanz, die qualitativ beschrieben und quantitativ ermittelt werden kann.

Grössen im allgemeinen Sinn:

Länge, Masse, Temperatur, Zeit, ...

Spezielle Grössen:

*Länge eines Endmasses, Masse eines
Gewichtsstückes, Temperatur einer Flüssigkeit*

Wert (einer Grösse)

Spezielle Grösse, dargestellt als Produkt aus Zahl und Einheit.

Länge eines Endmasses: 10.0012 mm

Masse eines Gewichtstückes: 100.00023 g

Temperatur einer Flüssigkeit: 18.54 °C

Begriffe

Wahrer Wert

Wert, der mit der Definition einer betrachteten speziellen Grösse übereinstimmt.

Diesen Wert würde man bei einer idealen Messung erhalten.

Wahre Werte sind ihrer Natur nach nicht ermittelbar.

Richtiger Wert

*Ein richtiger Wert wird gelegentlich **zugewiesener Wert**, **bester Schätzwert**, **vereinbarter Wert** oder **Referenzwert** genannt. Um einen richtigen Wert festzulegen, werden oft zahlreiche Messergebnisse ausgewertet.*

Schätzwert

Resultat einer Schätzung.

z.B. aus dem Mittelwert einer Reihe von Messergebnissen.

Begriffe

Messgrösse

Spezielle Grösse, die Gegenstand einer Messung ist.

Die Spezifikation einer Messgrösse kann Angaben über Grössen wie Zeitpunkt, Temperatur oder Druck erfordern.

Einflussgrösse

Grösse, die nicht Messgrösse ist, jedoch das Messergebnis beeinflusst.

Beispiel: Temperatur eines Endmasses bei der Bestimmung dessen Länge.

Messergebnis

Einer Messgrösse zugeordneter, durch Messung gewonnener Wert.

Eine vollständige Angabe des Messergebnisses enthält eine Information über die Messunsicherheit.

Begriffe

Messunsicherheit

Dem Messergebnis zugeordneter Parameter, der die Streuung der Werte kennzeichnet, die vernünftiger Weise der Messgrösse zugeordnet werden könnte.

Der Parameter kann beispielsweise eine Standardabweichung (oder ein gegebenes Vielfaches davon) oder die halbe Weite eines Bereiches sein, der ein festgelegtes Vertrauensniveau hat.

Messabweichung

Messergebnis minus den wahren Wert der Messgrösse.

Relative Messabweichung

Messabweichung dividiert durch den wahren Wert der Messgrösse.

Definition der Grössen und deren Symbole

Y Ausgangsgrösse

y Schätzwert für Y

X_i Eingangsgrösse

x_i Schätzwert für X_i

$u(x_i)$ Standardunsicherheit für jeden Schätzwert x_i

c_i Empfindlichkeitskoeffizient für X_i

$u_c(y)$ kombinierte Unsicherheit für y

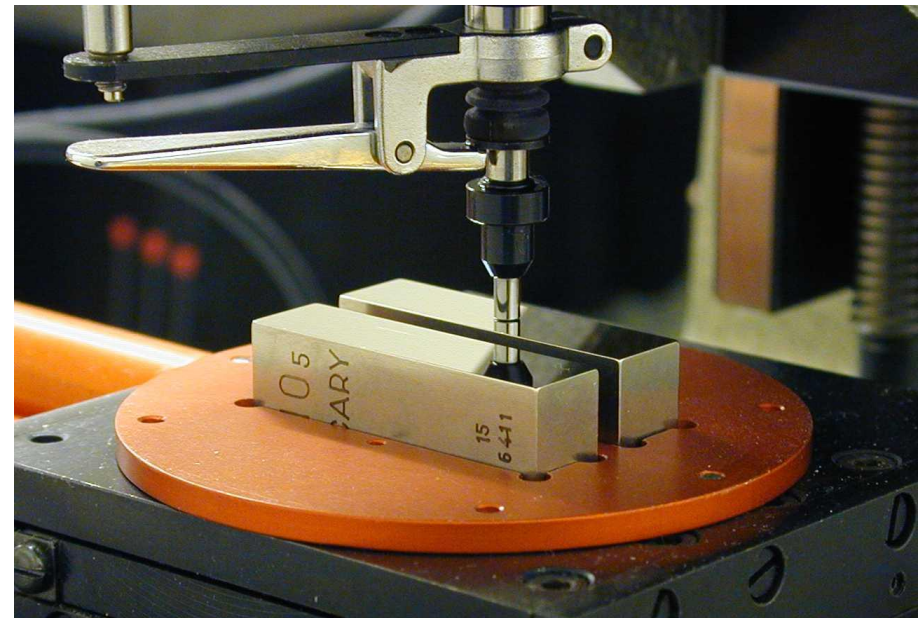
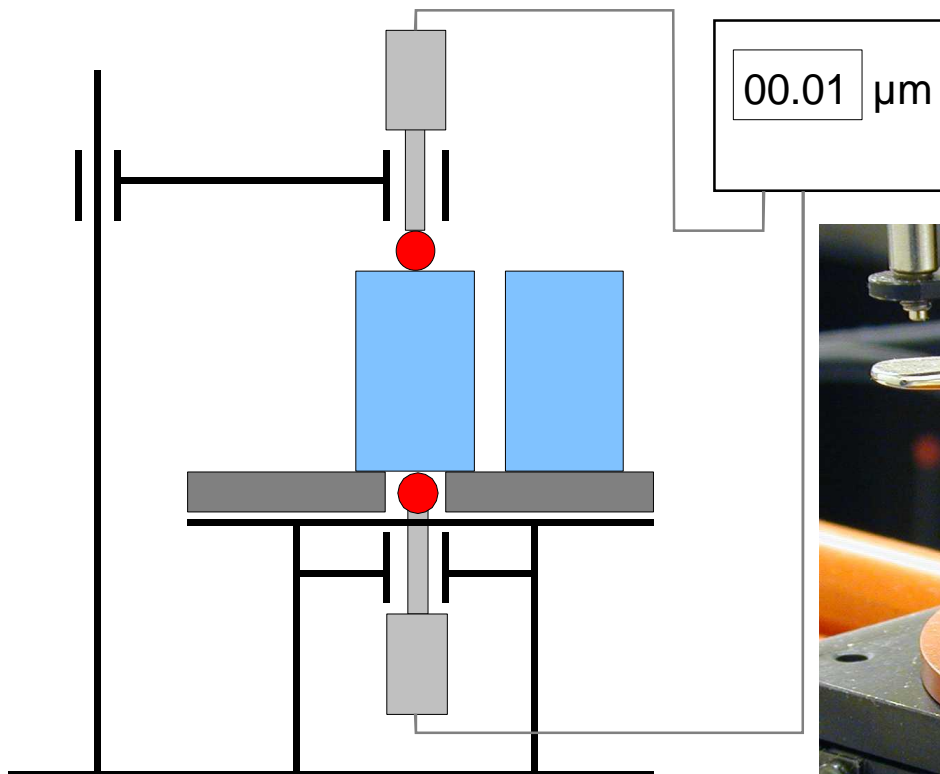
U erweiterte Unsicherheit

Vorgehen zur Ermittlung der Messunsicherheit U

1. Mathematische Modellierung des Messprozesses
2. Identifikation der Eingangsgrößen X_i
3. Bestimmung des Schätzwerts x_i für jede Eingangsgrösse X_i
4. Bestimmung des Empfindlichkeitskoeffizients c_i für jede
Eingangsgrösse X_i
5. Ermittlung der Standardunsicherheit $u(x_i)$ für jeden Schätzwert x_i
6. Berechnung der kombinierten Standardunsicherheit $u_c(y)$
7. Berechnung der erweiterten Unsicherheit U

Einfaches Beispiel

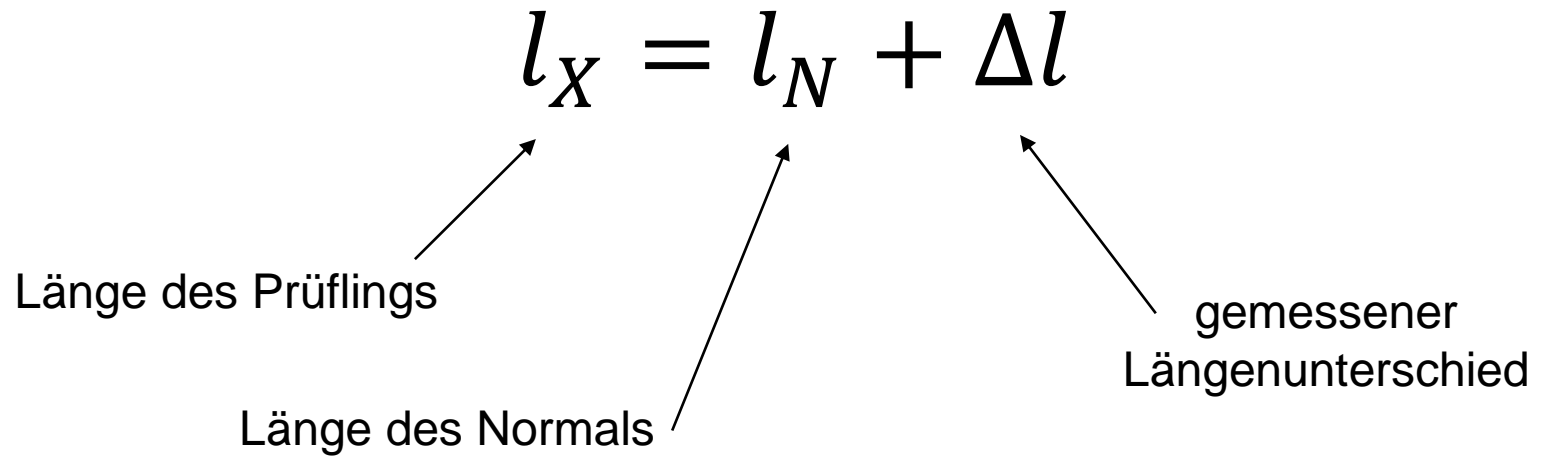
Kalibrierung eines Endmasses durch Vergleich mit einem Normalendmass



Vorgehen zur Ermittlung der Messunsicherheit U

1. **Mathematische Modellierung des Messprozesses**
2. **Identifikation der Eingangsgrößen X_i**
3. Bestimmung des Schätzwerts x_i für jede Eingangsgrösse X_i
4. Bestimmung des Empfindlichkeitskoeffizienten c_i für jede
Eingangsgrösse X_i
5. Ermittlung der Standardunsicherheit $u(x_i)$ für jeden Schätzwert x_i
6. Berechnung der kombinierten Standardunsicherheit $u_c(y)$
7. Berechnung der erweiterten Unsicherheit U

Modellierung des Messprozesses

$$l_X = l_N + \Delta l$$


Länge des Prüflings

Länge des Normals

gemessener Längenunterschied

Ausgangsgrösse:

$$Y = f(X_1, X_2) = l_X$$

Eingangsgrössen:

$$X_1 = l_N$$

$$X_2 = \Delta l$$

Vorgehen zur Ermittlung der Messunsicherheit U

1. Mathematische Modellierung des Messprozesses
2. Identifikation der Eingangsgrößen X_i
3. **Bestimmung des Schätzwerts x_i für jede Eingangsgrösse X_i**
4. Bestimmung des Empfindlichkeitskoeffizienten c_i für jede
Eingangsgrösse X_i
5. Ermittlung der Standardunsicherheit $u(x_i)$ für jeden Schätzwert x_i
6. Berechnung der kombinierten Standardunsicherheit $u_c(y)$
7. Berechnung der erweiterten Unsicherheit U


Ermittlung der Schätzwerte für x_i und y

$$\Delta l = 0.00014 \text{ mm}$$

Mittelwert aus 5 Messungen des
Längenunterschiedes

$$l_N = 50.00003 \text{ mm}$$

Wert aus einem Kalibrierzertifikat

 $l_X = 50.00017 \text{ mm}$

Vorgehen zur Ermittlung der Messunsicherheit U

1. Mathematische Modellierung des Messprozesses
2. Identifikation der Eingangsgrößen X_i
3. Bestimmung des Schätzwerts x_i für jede Eingangsgrösse X_i
4. **Bestimmung des Empfindlichkeitskoeffizients c_i für jede Eingangsgrösse X_i**
5. Ermittlung der Standardunsicherheit $u(x_i)$ für jeden Schätzwert x_i
6. Berechnung der kombinierten Standardunsicherheit $u_c(y)$
7. Berechnung der erweiterten Unsicherheit U

Bestimmung des Einflusses von X_i auf die Messgrösse Y

$$l_X = l_N + \Delta l$$

Eine Veränderung von einem Bruchteil von l_N und Δl bewirkt die gleiche Änderung der Ausgangsgrösse.

Die Empfindlichkeitskoeffizienten c_{l_N} and $c_{\Delta l}$ sind somit gleich 1.

Vorgehen zur Ermittlung der Messunsicherheit U

1. Mathematische Modellierung des Messprozesses
2. Identifikation der Eingangsgrößen X_i
3. Bestimmung des Schätzwerts x_i für jede Eingangsgrösse X_i
4. Bestimmung des Empfindlichkeitskoeffizients c_i für jede Eingangsgrösse X_i
5. **Ermittlung der Standardunsicherheit $u(x_i)$ für jeden Schätzwert x_i**
6. Berechnung der kombinierten Standardunsicherheit $u_c(y)$
7. Berechnung der erweiterten Unsicherheit U

Ermittlung der Standardunsicherheiten

Die Standardabweichung aus den 5 Messungen beträgt 0.00002 mm, die Standardunsicherheit des Mittelwertes beträgt demnach

$$u(\Delta l) = 0.00002 \text{ mm} / \sqrt{5} = 0.000009 \text{ mm}$$

Im Kalibrierzertifikat ist für l_N der Wert $(50.00003 \pm 0.00004) \text{ mm}$ angegeben, mit einem Hinweis, dass die Messunsicherheit mit $k = 2$ erweitert wurde, folglich ist

$$u(l_N) = 0.00002 \text{ mm}$$

Vorgehen zur Ermittlung der Messunsicherheit U

1. Mathematische Modellierung des Messprozesses
2. Identifikation der Eingangsgrößen X_i
3. Bestimmung des Schätzwerts x_i für jede Eingangsgrösse X_i
4. Bestimmung des Empfindlichkeitskoeffizienten c_i für jede
Eingangsgrösse X_i
5. Ermittlung der Standardunsicherheit $u(x_i)$ für jeden Schätzwert x_i
6. **Berechnung der kombinierten Standardunsicherheit $u_c(y)$**
7. Berechnung der erweiterten Unsicherheit U

Kombinierten Standardunsicherheit $u(y)$

Quadratische Addition der Standardunsicherheiten

$$u(l_X) = \sqrt{u^2(l_N) + u^2(\Delta l)}$$

$$= \sqrt{(0.00002 \text{ mm})^2 + (0.000009 \text{ mm})^2} = 0.000022 \text{ mm}$$

Vorgehen zur Ermittlung der Messunsicherheit U

1. Mathematische Modellierung des Messprozesses
2. Identifikation der Eingangsgrößen X_i
3. Bestimmung des Schätzwerts x_i für jede Eingangsgrösse X_i
4. Bestimmung des Empfindlichkeitskoeffizients c_i für jede
Eingangsgrösse X_i
5. Ermittlung der Standardunsicherheit $u(x_i)$ für jeden Schätzwert x_i
6. Berechnung der kombinierten Standardunsicherheit $u_c(y)$
7. **Berechnung der erweiterten Unsicherheit U**

Erweiterte Messunsicherheit U

Um ein Vertrauensintervall von 95% zu erhalten, wird die kombinierte Standardunsicherheit mit dem Erweiterungsfaktor $k = 2$ erweitert:

$$U = 2 \cdot u_c(lx) = 0.000044 \text{ mm}$$

Folglich

$$l_x = (50.000170 \pm 0.000044) \text{ mm}$$

oder

$$l_x = (50.00017 \pm 0.00005) \text{ mm}$$

Die angegebene Messunsicherheit ist das Produkt der kombinierten Standardunsicherheit mit einem Erweiterungsfaktor $k = 2$. Der Messwert (y) und die dazugehörige erweiterte Messunsicherheit (U) geben den Bereich ($y \pm U$) an, der den Wert der gemessenen Grösse mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 95 % enthält. Die Unsicherheit wurde in Übereinstimmung mit den Richtlinien der ISO ermittelt.

Literatur

1. Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen; Deutsche Fassung, ENV 13005:1999 (Europäische Vornorm).
2. JCGM 100:2008, Guide to the expression of uncertainty in measurement
3. EA-4/02 M: 2022, Expressions of the Uncertainty of Measurements in Calibration
4. DAkkS-DKD-3, Angabe der Messunsicherheit bei Kalibrierungen
5. W.H. Heini Gränicher, Messung beendet – was nun? Einführung und Nachschlagewerk für die Planung und Auswertung von Messungen.