Jak krzywe eliptyczne chronią twoje dane?

Kryptografia krzywych eliptycznych

Jan Kocierz

5 grudnia 2025

Politechnika Krakowska
Studenckie Koło Naukowe Matematyków PK

Plan prezentacji

Motywacja - klasyczny protokół Diffiego–Hellmana

Matematyka krzywych eliptycznych

Krzywe eliptyczne nad ciałem skończonym

Bezpieczeństwo krzywych eliptycznych

Zastosowanie krzywych eliptycznych - ECDH

Krzywe stosowane w praktyce

ECC w bibliotece cryptography

Podsumowanie

Motywacja - klasyczny protokół Diffiego–Hellmana

Klasyczny protokół Diffiego-Hellmana - grupa $\mathbb{Z}_p^*$

Parametry publiczne: p, g.

Alicja

- Wybiera tajne $a \in \{1, \ldots, p-2\}$,
- Oblicza $A = g^a \pmod{p}$,
- Wysyła A,
- Odbiera B,
- **Sekret:** $K = B^a \pmod{p}$.

Bob

- Wybiera tajne $b \in \{1, \ldots, p-2\}$,
- Oblicza $B = g^b \pmod{p}$,
- Wysyła B,
- Odbiera A,
- **Sekret:** $K = A^b \pmod{p}$.

$$K = (g^b)^a = \mathbf{g^{ab}} = (g^a)^b \pmod{p}$$

Definicja

Niech g będzie generatorem grupy multiplikatywnej $\mathbb{Z}_p^*$ (gdzie p jest liczbą pierwszą). Dla danego $h \in \mathbb{Z}_p^*$, **logarytm dyskretny** z h przy podstawie g to liczba całkowita $x \in \{0, 1, \ldots, p-2\}$ taka, że

$$g^x \equiv h \pmod{p}.$$

Oznaczamy:

$$x = \log_g h \pmod{p}.$$

Matematyka krzywych eliptycznych

Krzywe eliptyczne nad $\mathbb{R}$

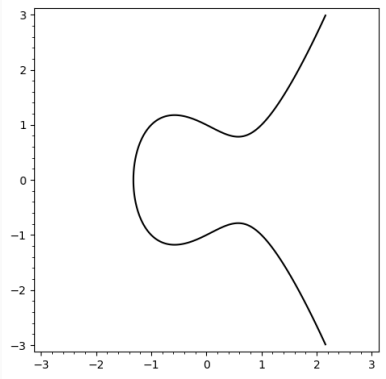
Definicja

Niech $a, b \in \mathbb{R}$ będą takie, że $4a^3 + 27b^2 \neq 0$. Krzywą eliptyczną nad $\mathbb{R}$ nazywamy zbiór $\mathcal{E}$ rozwiązań $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ równania

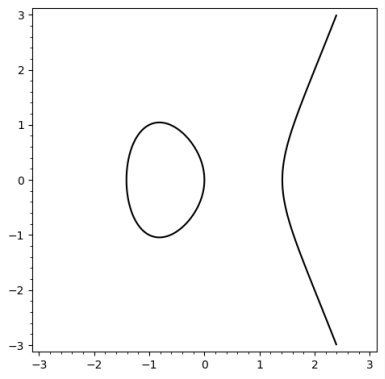
$$y^2 = x^3 + ax + b,$$

wraz ze specjalnym punktem $\mathcal{O}$ nazywanym punktem w nieskończoności.

Przykłady krzywych eliptycznych



Rysunek 1: Krzywa $y^2 = x^3 - x + 1$.
Opracowanie własne.



Rysunek 2: Krzywa $y^2 = x^3 - 2x$.
Opracowanie własne.

Dodawanie punktów — wzory algebraiczne

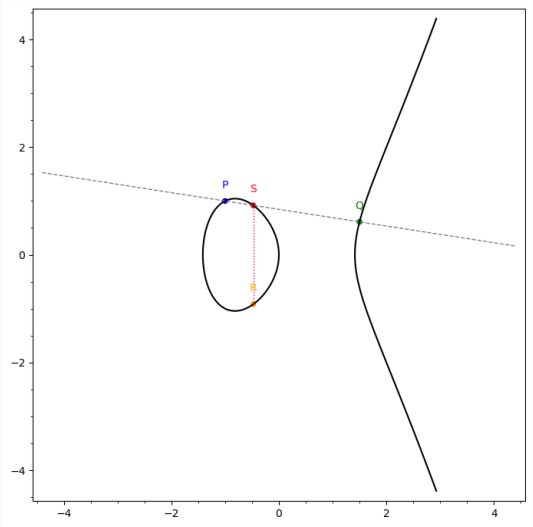
Definicja

Niech $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ będzie krzywą eliptyczną oraz $P_1, P_2 \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$, wtedy:

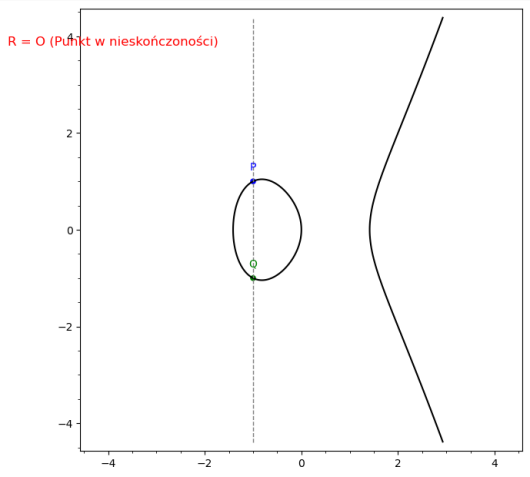
- Jeśli $P_1 = \mathcal{O}$, to $P_1 + P_2 = P_2$
- Jeśli $P_2 = \mathcal{O}$, to $P_1 + P_2 = P_1$
- W przeciwnym przypadku, niech $P_1 = (x_1, y_1)$ oraz $P_2 = (x_2, y_2)$
  - Jeśli $x_1 = x_2$ oraz $y_1 = -y_2$, wtedy $P_1 + P_2 = \mathcal{O}$
  - W przeciwnym przypadku, określmy

$$\lambda = \begin{cases} \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} & \text{dla } x_1 \neq x_2 \\ \dfrac{3x_1^2 + a}{2y_1} & \text{dla } x_1 = x_2 \end{cases}$$

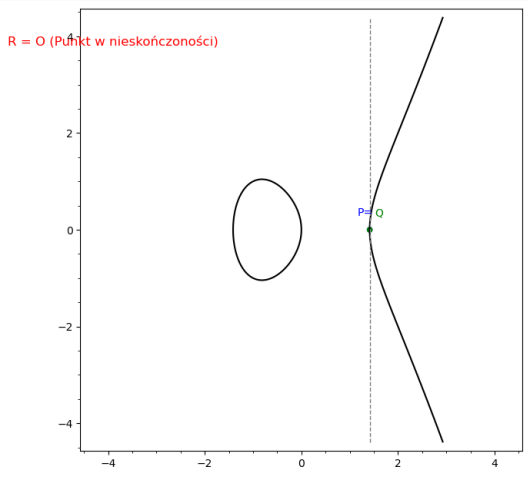
i niech $x_3 = \lambda^2 - x_1 - x_2$ oraz $y_3 = \lambda(x_1 - x_3) - y_1$. Wtedy $P_1 + P_2 = (x_3, y_3)$.



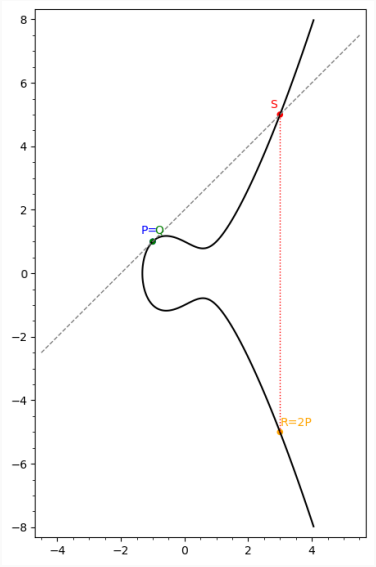
Rysunek 3: Dodawanie punktów na krzywej $y^2 = x^3 - 2x$.



Rysunek 4: Dodawanie punktów przeciwnych na krzywej $y^2 = x^3 - 2x$.



Rysunek 5: Wielokrotność punktu P na krzywej $y^2 = x^3 - 2x$.



Rysunek 6: Wielokrotność punktu P na krzywej $y^2 = x^3 - x + 1$.

Kluczowa obserwacja

Twierdzenie

$(\mathcal{E}, +)$, gdzie $\mathcal{E}$ to krzywa eliptyczna, a $+$ to dodawanie na niej punktów zdefiniowane jak na początku rozdziału, jest grupą abelową.

Krzywe eliptyczne nad ciałem skończonym

Krzywe eliptyczne nad ciałem skończonym

Definicja

Niech $p > 3$ będzie liczbą pierwszą oraz $a, b \in \mathbb{F}_p$ takie, że $4a^3 + 27b^2 \neq 0 \pmod{p}$. Krzywą eliptyczną nad ciałem $\mathbb{F}_p$ nazywamy zbiór

$$\mathcal{E}(\mathbb{F}_p) = \{(x, y) \in \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p \; y^2 = x^3 + ax + b\},$$

wraz ze specjalnym punktem $\mathcal{O}$ zwanym punktem w nieskończoności.

Twierdzenie

Zbiór $\mathcal{E}(\mathbb{F}_p)$ wraz z działaniem dodawania punktów krzywej eliptycznej jest (skończoną) grupą abelową.

Krzywe eliptyczne nad dowolnym ciałem

Definicja

Krzywą eliptyczną nazywamy zbiór rozwiązań uogólnionego równania Weierstrassa

$$y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$$

wraz z punktem w nieskończoności $\mathcal{O}$. Współczynniki $a_1, \ldots, a_6$ muszą spełniać warunek $\Delta \neq 0$, gdzie Δ definiujemy następująco

$$\Delta = -d_2^2 d_8 - 8d_4^3 - 27d_6^2 + 9d_2 d_4 d_6,$$

przy czym

$$d_2 = a_1^2 + 4a_2, \quad d_4 = 2a_4 + a_1 a_3, \quad d_6 = a_3^2 + 4a_6,$$

$$d_8 = a_1^2 a_6 + 4a_2 a_6 - a_1 a_3 a_4 + a_2 a_3^2 - a_4^2.$$

Optymalizacja obliczania nP - przykład

Chcemy obliczyć $13P$:

$$13 = (1101)_2$$

Zaczynamy od elementu neutralnego (tzn. punktu w nieskończoności): $R = \mathcal{O}$.

$$\begin{aligned}
\text{bit 1:} \quad & R = 2\mathcal{O} + P = P \\
\text{bit 1:} \quad & R = 2P + P = 3P \\
\text{bit 0:} \quad & R = 2(3P) = 6P \\
\text{bit 1:} \quad & R = 12P + P = 13P
\end{aligned}$$

Wynik:

$$\boxed{13P}$$

Bezpieczeństwo krzywych eliptycznych

Problem logarytmu dyskretnego na krzywej eliptycznej (ECDLP)

Definicja

Niech $\mathcal{E}(\mathbb{F}_p)$ będzie krzywą eliptyczną nad ciałem skończonym $\mathbb{F}_p$ oraz niech $P, Q \in \mathcal{E}(\mathbb{F}_p)$. Problemem logarytmu dyskretnego na krzywej eliptycznej nazywamy problem znalezienia liczby $n \in \mathbb{N}$ takiej, że $Q = nP$. Szukaną liczbę oznaczamy

$$n = log_P Q$$

i mówimy, że n jest dyskretnym logarytmem eliptycznym o podstawie P z Q.

Brakujące definicje

Definicja

Podgrupą cykliczną grupy punktów na krzywej eliptycznej generowaną przez punkt P nazywamy zbiór wszystkich punktów, które możemy uzyskać przez wielokrotne dodawanie P do siebie: $\langle P \rangle = \{P, 2P, 3P, ..., sP = \mathcal{O}\}$.

Definicja

Liczbę s z poprzedniej definicji nazywamy rzędem punktu P, jest to najmniejsza z liczb całkowitych dodatnich n, dla których $nP = \mathcal{O}$.

Ataki ogólnego przeznaczenia

Niech dane będą: punkt bazowy $G \in \mathcal{E}(\mathbb{F}_p)$, $P \in \langle G \rangle$, $\#\langle G \rangle = N$ oraz $Q = nP$.

- **Baby-step, Giant-step** — algorytm deterministyczny oparty na metodzie „przecięcia połówkowego". Złożoność to $O(\sqrt{N})$ - wymaga dużych zasobów pamięciowych, więc stosowany głównie teoretycznie.
- **Pollard's** ρ — metoda probabilistyczna wykorzystująca ideę spaceru losowego po grupie, aż dwa punkty dadzą kolizję. Złożoność czasowa to $O(\sqrt{N})$.
- **Pohlig–Hellman** — wykorzystuje faktoryzację liczby N. Jeśli N ma małe czynniki pierwsze, atak rozbija ECDLP na kilka mniejszych problemów w podgrupach.

Stopień zanurzeniowy i krzywe anomalne

Definicja

Niech $\mathcal{E}(\mathbb{F}_q)$ będzie krzywą eliptyczną nad ciałem $\mathbb{F}_q$, gdzie $q = p^m$ oraz p jest liczbą pierwszą. Dodatkowo niech r będzie największym dzielnikiem pierwszym liczby $\#\mathcal{E}(\mathbb{F}_q)$. Stopniem zanurzeniowym krzywej eliptycznej $\mathcal{E}(\mathbb{F}_q)$ nazywamy najmniejszą liczbę naturalną l taką, że zachodzi

$$r \mid (q^l - 1).$$

Należy zwrócić uwagę, że dla $r = p$ stopień zanurzeniowy nie istnieje.

Definicja

Krzywą eliptyczną $\mathcal{E}$ zdefiniowaną nad $\mathbb{F}_q$ nazywamy anomalną, gdy największy dzielnik pierwszy r liczby $\#\mathcal{E}(\mathbb{F}_q)$ jest równy charakterystyce ciała $\mathbb{F}_q$.

Ataki specjalne

- **MOV (Menezes–Okamoto–Vanstone)** — przenosi problem logarytmu dyskretnego na krzywej eliptycznej (ECDLP) do problemu logarytmu dyskretnego (DLP) w ciele skończonym $\mathbb{F}_{q^l}$ przy użyciu parowań dwuliniowych. Skuteczny, gdy stopień zanurzeniowy l jest mały.
- **SSA (Smart-Satoh-Araki)** — atakuje krzywe anomalne, używając logarytmu p-adycznego (po podniesieniu krzywej z $\mathbb{F}_p$ do $\mathbb{Q}_p$).

Parametry bezpiecznej krzywej - podsumowanie

Aby krzywa eliptyczna była bezpieczna, należy:

1. Zapewnić duży rząd podgrupy N (np. 256-bitowy dla 128-bitowego bezpieczeństwa),
2. Wybrać N, które jest liczbą pierwszą lub ma duży czynnik pierwszy,
3. Unikać krzywych anomalnych i supersingularnych.

Zastosowanie krzywych eliptycznych - ECDH

Protokół Elliptic-curve Diffie–Hellman

Parametry publiczne: $q, \mathcal{E}, G, N$.

Alicja

- Wybiera tajne $a \in \{1, \ldots, N-1\}$,
- Oblicza $G_A = aG$,
- Wysyła G_A (punkt na krzywej $\mathcal{E}$),
- Odbiera G_B,
- **Sekret:** $S = aG_B$.

Bob

- Wybiera tajne $b \in \{1, \ldots, N-1\}$,
- Oblicza $G_B = bG$,
- Wysyła G_B (punkt na krzywej $\mathcal{E}$),
- Odbiera G_A,
- **Sekret:** $S = bG_A$.

$$S = a(bG) = (\mathbf{ab})\mathbf{G} = b(aG)$$

Krzywe stosowane w praktyce

secp256r1 (NIST P-256): Parametry

Równanie: $y^2 = x^3 + ax + b \pmod{p}$

- **p:** `FFFFFFFF 00000001 00000000 00000000 FFFFFFFF FFFFFFFF FFFFFFFF FFFFFFFF` $= 2^{256} - 2^{224} + 2^{192} + 2^{96} - 1$
- **a:** `...FFFFFFFC` $= p - 3$
- **b:** `5AC635D8 AA3A93E7 B3EBBD55 769886BC 651D06B0 CC53B0F6 3BCE3C3E 27D2604B`
- **Gx:** `6B17D1F2 E12C4247 F8BCE6E5 63A440F2 77037D81 2DEB33A0 F4A13945 D898C296`
- **Gy:** `4FE342E2 FE1A7F9B 8EE7EB4A 7C0F9E16 2BCE3357 6B315ECE CBB64068 37BF51F5`
- **N:** `FFFFFFFF 00000000 FFFFFFFF FFFFFFFF BCE6FAAD A7179E84 F3B9CAC2 FC632551`
- **h:** `1`

secp256r1 (NIST P-256): Zastosowania

Kluczowe zastosowania (protokół ECDH)

- **TLS/SSL (HTTPS):** Najpopularniejsza krzywa do uzgadniania kluczy sesji (ECDHE).
- **JWT (JSON Web Tokens):** Często używana do podpisywania tokenów autoryzacyjnych.
- **SSH (Secure Shell):** Używana do bezpiecznej wymiany kluczy.

Rysunek 7: Wygenerowano za pomocą AI (model Google Imagen)

secp256k1: Parametry

Krzywa typu Koblitza ($a = 0, b = 7$), słynna dzięki Bitcoinowi. Zoptymalizowana pod kątem wydajności obliczeń.

Równanie: $y^2 = x^3 + 7 \pmod{p}$

- **p:** FFFFFFFF FFFFFFFF FFFFFFFF FFFFFFFF FFFFFFFF FFFFFFFF FFFFFFFE FFFFFC2F $= 2^{256} - 2^{32} - 977$
- **a:** ...00000000
- **b:** ...00000007
- **Gx:** 79BE667E F9DCBBAC 55A06295 CE870B07 029BFCDB 2DCE28D9 59F2815B 16F81798
- **Gy:** 483ADA77 26A3C465 5DA4FBFC 0E1108A8 FD17B448 A6855419 9C47D08F FB10D4B8
- **N:** FFFFFFFF FFFFFFFF FFFFFFFF FFFFFFFE BAAEDCE6 AF48A03B BFD25E8C D0364141
- **h:** 1

secp256k1: Zastosowania

Kluczowe zastosowania (protokół ECDSA)

- **Bitcoin:** Używana do generowania par kluczy i autoryzowania transakcji poprzez podpisy cyfrowe (ECDSA).
- **Ethereum:** Podobnie jak Bitcoin, używa tej krzywej do zabezpieczania kont i transakcji.

Curve25519: Parametry

Nowoczesna krzywa Montgomery'ego (postaci $y^2 = x^3 + Ax^2 + x$) zaprojektowana przez D.J. Bernsteina.

Protokół X25519 (ECDH na Curve25519)

- **p:** 7FFFFFFF FFFFFFFF FFFFFFFF FFFFFFFF FFFFFFFF FFFFFFFF FFFFFFFF FFFFFFED $= 2^{255} - 19$
- **A:** 486662
- **Gx:** 9
- **N:** Rząd podgrupy $\approx 2^{252}$
- **h:** 8

Curve25519: Zastosowania

Kluczowe zastosowania (protokół X25519)

- **Signal Protocol:** Używana do ustanawiania bezpiecznych sesji.
- **TLS 1.3:** Jeden z domyślnych mechanizmów wymiany kluczy w nowym standardzie HTTPS.
- **WireGuard:** Domyślny protokół wymiany kluczy dla tego VPN.

ECC w bibliotece cryptography

Podsumowanie

Podsumowanie

Zastosowanie kryptografii krzywych eliptycznych zapewnia ten sam poziom bezpieczeństwa co klasyczne systemy (RSA/DH) przy drastycznie krótszych kluczach (256 vs 2048 bitów). Bezpieczeństwo opiera się na trudności problemu logarytmu dyskretnego na krzywych, który jest odporny na klasyczne ataki typu *Index Calculus*. Pełne bezpieczeństwo wymaga stosowania sprawdzonych standardów, aby uniknąć ataków matematycznych. Krzywe eliptyczne są powszechnie stosowane w cyberbezpieczeństwie - od zabezpieczania stron WWW (TLS 1.3), przez kryptowaluty (Bitcoin), po komunikatory (Signal) i IoT, więc ECC jest fundamentem nowoczesnego Internetu.

Bibliografia i

- NIST SP 800-57 Part 1 Rev. 5 — Recommendation for Key Management.
- E. Rescorla, RFC 8446 — The Transport Layer Security (TLS) Protocol Version 1.3.
- D. J. Bernstein, "Curve25519: new Diffie-Hellman speed records", PKC 2006.
- L. C. Washington, "Elliptic Curves: Number Theory and Cryptography".
- SECG, "SEC 2: Recommended Elliptic Curve Domain Parameters".

Dziękuję za uwagę!

Kontakt: jan.kocierz@student.pk.edu.pl