

Model Lotki - Volterry z ograniczoną pojemnością środowiska dla ofiar

Jan Kocierz, Karol Strzępek, Michał Lompart

19 stycznia 2026

Wstęp

Po zakończeniu I wojny światowej w wodach Morza Adriatyckiego zaobserwowano wzrost populacji drapieżnych ryb. Uznano to za paradoks, ponieważ spodziewano się, że przez działania zbrojne ucierpi każdy gatunek. Wówczas Vito Volterra zaproponował pierwszy matematyczny model populacyjny typu drapieżnik-ofiara, który niejako tłumaczył zjawisko zaobserwowane w Adriatyku. Niezależnie od niego Alfred James Lotka stworzył równoważny model do opisu oscylacji stężeń w hipotetycznej reakcji chemicznej. W naszym referacie opiszemy model Lotki-Volterry w wersji klasycznej jak i w wersji z ograniczoną pojemnością środowiska. Głównym celem naszego referatu jest zbadanie wpływu kluczowych parametrów biologicznych na zachowanie zmodyfikowanego modelu Lotki-Volterry. Poprzez analizę stabilności punktów równowagi oraz prezentację wyników symulacji numerycznych, sprawdzimy jak zmiany we współczynnikach przyrostu populacji, efektywności drapieżnictwa, śmiertelności oraz pojemności środowiska kształtują losy obu populacji – czy prowadzą do ich koegzystencji czy wyginięcia jednej z nich.

1 Klasyczny model Lotki-Volterry

Poniższy nieliniowy układ równań różniczkowych pierwszego stopnia nazywamy równaniem lub modelem Lotki-Volterry.

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = aX - bXY \\ \frac{dY}{dt} = -cY + fXY \end{cases} \quad (1.1)$$

gdzie

- X to populacja ofiar w chwili t ,
- Y to populacja drapieżników w chwili t ,
- a to współczynnik przyrostu ofiar,
- b to częstość umierania ofiar na skutek drapieżnictwa,
- c współczynnik ubywania/umierania drapieżników,
- f to współczynnik przyrostu drapieżników (wynikający z dostępności pożywienia).

Model przyjmuje następujące założenia:

1. Kiedy brak drapieżników to wzrost populacji ofiar jest zgodny z prawem Malthusa, to znaczy, że jest on wykładniczy, przez brak dodatkowych ograniczeń środowiska,
2. Kiedy brak ofiar to populacja drapieżników spada w tempie wykładniczym,
3. Przez drapieżnictwo zmniejsza się tempo wzrostu per-capita populacji ofiar, przy czym wzrost ten jest proporcjonalny zarówno do populacji ofiar jak i drapieżników. Kiedy oba gatunki występują w środowisku, część ofiar ginie upolowana przez drapieżniki. Pożywienie dostarcza drapieżnikom energii potrzebnej chociażby do rozmnażania, a zatem liczebność ich populacji rośnie.

4. Nie uwzględniamy rozmieszczenia osobników w środowisku, rozważamy jedynie średnie ich zagęszczenie [1].

Przyjrzyjmy się poszczególnym składnikom w układzie równań. Składnik aX tak naprawdę opisuje założenie nr. 1, podobnie składnik $-fY$ opisuje założenie nr. 2. Czynniki XY możemy traktować jako współczynnik przemiany energii z jednego źródła w drugie, więc bXY opisuje energię czerpaną z populacji ofiar, a cXY przypada na populację drapieżników [1].

2 Model z ograniczoną pojemnością środowiska dla ofiar

Jednym z kluczowych uproszczeń klasycznego modelu Lotki-Volterry jest założenie nieograniczonego wzrostu populacji ofiar. W rzeczywistości, środowisko naturalne ma ograniczoną pojemność zasobów, takich jak pokarm, woda i schronienie, co narzuca limit na maksymalną liczebność populacji, jaką może utrzymać.

Z uwagi na wspomniane ograniczenia klasycznego modelu Lotki-Volterry oraz w celu lepszego odzwierciedlenia wewnętrznej dynamiki populacji ofiar i uzyskania bardziej realistycznych zachowań systemu, konieczne jest zmodyfikowanie modelu poprzez wprowadzenie ograniczonej pojemności środowiska dla ofiar. Modyfikacja ta polega na zastąpieniu wykładniczego wzrostu populacji ofiar modelem logistycznym. Ta zmiana wprowadza mechanizm samoregulacji, który odzwierciedla ograniczenia środowiskowe.

Zmodyfikowany układ równań różniczkowych, będący przedmiotem naszego referatu, przyjmuje następującą formę

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = aX \left(1 - \frac{X}{K}\right) - bXY \\ \frac{dY}{dt} = -cY + fXY \end{cases} \quad (2.1)$$

gdzie

- X to populacja ofiar w chwili t ,
- Y to populacja drapieżników w chwili t ,
- a to współczynnik przyrostu ofiar,
- b to częstość umierania ofiar na skutek drapieżnictwa,
- c współczynnik ubywania/umierania drapieżników,
- f to współczynnik przyrostu drapieżników (wynikający z dostępności pożywienia),
- K to pojemność środowiska (maksymalna populacja ofiar, którą środowisko może utrzymać).

Dla układu równań różniczkowych (2.1), przy założeniu nieujemnych warunków początkowych dla liczebności populacji, standardowe twierdzenia o równaniach różniczkowych zwyczajnych gwarantują istnienie, jednoznaczność i nieujemność rozwiązań. Jest to kluczowe dla biologicznej sensowności modelu, ponieważ liczebność populacji nie może być ujemna [2]. Ponadto, rozwiązania tego układu są ograniczone. Liczebność populacji ofiar N w żaden sposób nie przekroczy pojemności środowiska K . To wynika bezpośrednio z charakterystyki równania logistycznego. Ponadto, liczebność populacji drapieżników P również pozostaje ograniczona. Ta cecha jest pożądana w modelach biologicznych, ponieważ odzwierciedla realistyczne limity wzrostu populacji w środowisku naturalnym, w przeciwieństwie do nieograniczonego wzrostu obserwowanego w niektórych uproszczonych modelach [2].

3 Elementy teorii stabilności układów dynamicznych

Aby poprawnie przeanalizować wpływ parametrów na otrzymane wyniki oraz wysnuć wnioski, potrzeba nam wprowadzić kilka pojęć z zakresu tak zwanej teorii stabilności. Umożliwia ona formalne określenie, które punkty równowagi są stabilne, a które niestabilne. Dzięki temu możliwe jest nie tylko przewidywanie jakościowego zachowania układu, ale również jego interpretacja biologiczna. Dodatkowo, analiza lokalna z wykorzystaniem macierzy Jacobiego pozwala klasyfikować

punkty równowagi na źródła, siodła, ogniska i węzły, co znajduje bezpośrednie odzwierciedlenie w kształcie portretów fazowych.

Uwzględnienie tych elementów pozwala przejść od czysto numerycznych symulacji do głębszego zrozumienia dynamiki modelu.

Rozważmy ogólny autonomiczny układ równań różniczkowych postaci:

$$\begin{cases} x' = f(x, y), \\ y' = g(x, y), \end{cases} \quad (1)$$

gdzie f, g są funkcjami ciągłymi i różniczkowalnymi w pewnym obszarze $D \subset \mathbb{R}^2$.

Definicja 3.1 (Punkt równowagi). Punkt $(x_0, y_0) \in D$ nazywamy **punktem równowagi** (lub stacjonarnym), jeśli

$$f(x_0, y_0) = 0 \quad \text{ i } \quad g(x_0, y_0) = 0.$$

[5]

Definicja 3.2 (Stabilność w sensie Lapunowa). Punkt równowagi (x_0, y_0) jest:

- **stabilny**, jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że jeśli $\|(x(0), y(0)) - (x_0, y_0)\| < \delta$, to $\|(x(t), y(t)) - (x_0, y_0)\| < \varepsilon$ dla każdego $t > 0$,
- **asymptotycznie stabilny**, jeśli jest stabilny i dodatkowo $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (x_0, y_0)$,
- **niestabilny**, jeśli nie jest stabilny [5].

Twierdzenie 3.3 (Stabilność lokalna poprzez analizę liniową). Niech (x_0, y_0) będzie punktem równowagi. Jeśli macierz Jacobiego układu:

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}$$

w punkcie (x_0, y_0) ma różne wartości własne rzeczywiste lub zespolone o niezerowej części rzeczywistej, to typ punktu równowagi i jego stabilność określa się na podstawie tych wartości własnych:

- Jeśli części rzeczywiste wszystkich wartości własnych są ujemne, to punkt jest **asymptotycznie stabilny**.
- Jeśli istnieje wartość własna o dodatniej części rzeczywistej, punkt jest **niestabilny**.
- Jeśli części rzeczywiste są mieszane (jedna dodatnia, jedna ujemna), punkt jest **siodłowy** – zawsze niestabilny [5].

4 Równowagi stacjonarne układu i ich stabilność

Rozpocznijmy więc analizę naszego układu od wyznaczenia punktów równowagi. Są to stany w których liczebność obu populacji nie zmienia się w czasie, co oznacza, że $\frac{dX}{dt} = 0$ i $\frac{dY}{dt} = 0$. Punkty te będą reprezentować potencjalne długoterminowe zachowania systemu. Dla omawianego przez nas modelu, istnieją trzy punkty równowagi:

- $P_0 = (0, 0)$ - punkt reprezentujący stan, w którym obie populacje wymierają,
- $P_1 = (K, 0)$ - punkt w którym populacja drapieżników wymiera, a populacja ofiar stabilizuje się na poziomie pojemności środowiska K . Oznacza to, że ofiary osiągają maksymalną liczebność, jaką środowisko może utrzymać, w przypadku braku presji ze strony drapieżników.
- $P_2 = (X^*, Y^*) = \left(\frac{c}{f}, \frac{a}{b} \left(1 - \frac{c}{fK}\right)\right)$ - ten punkt reprezentuje stan koegzystencji, w którym obie populacje stabilizują się na dodatnich, niezerowych poziomach [2].

4.1 Lokalna analiza stabilności

Lokalne zachowanie rozwiązań w pobliżu punktów równowagi bada się poprzez linearyzację układu wokół tych punktów. Stabilność każdego punktu równowagi jest determinowana przez wartości własne macierzy Jacobiego (macierzy pochodnych cząstkowych) obliczonej w tym punkcie [5].

- $P_0 = (0, 0)$ - analiza macierzy Jacobiego w tym punkcie pokazuje, że jest to zawsze punkt siodłowy (niestabilny). Oznacza to, że stan wyginięcia obu gatunków jest niestabilny; każde niewielkie zaburzenie (np. pojawienie się kilku osobników) spowoduje oddalenie się od tego stanu.
- $P_1 = (K, 0)$ - stabilność tego punktu zależy od relacji między parametrami:
 - Jeśli $fK \leq c$, populacja drapieżników wymiera, a ofiary stabilizują się na poziomie pojemności środowiska K .
 - Jeśli $fK > c$, punkt P_1 jest punktem siodłowym. Oznacza to, że jeśli drapieżniki są w stanie przetrwać, to punkt, w którym drapieżniki wymierają, a ofiary osiągną K , jest niestabilny.
- $P_2 = (X^*, Y^*)$ - ten punkt koegzystencji istnieje tylko wtedy, gdy $fK - c > 0$. Gdy istnieje, jest zawsze lokalnie stabilny [2].

Wprowadzenie pojemności środowiska dla ofiar zasadniczo zmienia jakościowe zachowanie modelu drapieżnik-ofiara, prowadząc do trzech głównych scenariuszy dynamicznych, w zależności od relacji między parametrami.

1. **Wyginięcie Drapieżników (P1 stabilny):** Ten scenariusz ma miejsce, gdy iloczyn współczynnika efektywności konwersji drapieżników i pojemności środowiska dla ofiar jest mniejszy lub równy współczynnikowi śmiertelności drapieżników, czyli $fK \leq c$. W tej sytuacji, nawet jeśli populacja ofiar osiąga swoją maksymalną liczebność (K), drapieżniki nie są w stanie pozyskać wystarczającej ilości pożywienia, aby ich tempo rozrodczości przewyższało tempo śmiertelności. W efekcie, populacja drapieżników stopniowo wymiera, a populacja ofiar stabilizuje się na poziomie pojemności środowiska K . Jest to stan, w którym zasoby dla drapieżników są zbyt ograniczone, aby mogły one przetrwać [2].
2. **Stabilna Koegzystencja 1:** Ten scenariusz występuje, gdy $fK > c$ i dodatkowo wartości własne macierzy Jacobiego w punkcie P_2 są rzeczywiste i ujemne. W tym przypadku, obie populacje zbiegają monotonicznie do dodatniego punktu równowagi (P_2). Oznacza to, że interakcje międzygatunkowe są na tyle "łagodne" i efektywne, że system szybko osiąga stabilny stan równowagi, gdzie liczebność obu populacji pozostaje stała [2],[4].
3. **Stabilna Koegzystencja 2:** Ten scenariusz również wymaga warunku $fK > c$. Pojawia się, gdy wartości własne macierzy Jacobiego w P_2 są zespolone z ujemną częścią rzeczywistą. W tej sytuacji, populacje wykazują gasnące oscylacje wokół punktu równowagi P_2 , zanim ostatecznie do niego zbiegną. Oscylacje te są wynikiem opóźnień w reakcji populacji na zmiany liczebności drugiej populacji (np. populacja drapieżników rośnie dopiero po znacznym wzroście ofiar, a następnie jej wzrost prowadzi do spadku ofiar, co z opóźnieniem wpływa na spadek drapieżników). Jednakże, pojemność środowiska powoduje, że te oscylacje są tłumione i ostatecznie system stabilizuje się na stałych poziomach liczebności [4].

5 Symulacje numeryczne i zależność od parametrów

Przeprowadziliśmy analizę modelu Lotki-Volterry z logistycznym wzrostem populacji ofiar poprzez symulacje numeryczne w języku Python. W kolejnych podpunktach przedstawimy wyniki naszych eksperymentów. Najpierw zajmiemy się trzema scenariuszami wynikającymi z naszej wcześniejszej analizy z użyciem teorii stabilności.

5.1 Scenariusz 1 - wyginięcie drapieżników

- **Warunek kluczowy:** Iloczyn współczynnika przyrostu liczby drapieżników (f) oraz pojemności środowiska dla ofiar (K) jest mniejszy lub równy współczynnikowi śmiertelności drapieżników (c), czyli $fK \leq c$.

- **Parametry symulacji:** $a = 0.5$, $K = 100$, $b = 0.01$, $f = 0.005$, $c = 0.6$.
- **Obserwacja:** $f \cdot K = 0.005 \cdot 100 = 0.5 \leq c = 0.6$. Warunek spełniony.
- **Zachowanie modelu:** Populacja drapieżników stopniowo wymiera ($Y \rightarrow 0$), ponieważ nie są w stanie pozyskać wystarczającej ilości pożywienia, aby ich tempo rozrodczości przewyższyło tempo śmiertelności. Populacja ofiar stabilizuje się na poziomie pojemności środowiska ($X \rightarrow K$). Układ dąży do punktu równowagi $P_1 = (K, 0)$.
- **Implikacje biologiczne:** Jeśli drapieżniki są mało efektywne w polowaniu i konwersji biomasy lub ich naturalna śmiertelność jest wysoka w stosunku do dostępnych zasobów, nie są w stanie przetrwać w danym środowisku.

5.2 Scenariusz 2 - Stabilna koegzystencja 1

- **Warunek kluczowy:** $fK > c$, co pozwala na istnienie punktu koegzystencji $P_2 = (X^*, Y^*)$. Dodatkowo, wartości własne macierzy Jacobiego w punkcie P_2 są rzeczywiste i ujemne.
- **Parametry symulacji:** $a = 0.5$, $K = 1000$, $b = 0.01$, $f = 0.01$, $c = 0.5$.
- **Obserwacja:** $f \cdot K = 0.01 \cdot 1000 = 10 > c = 0.5$. Punkt równowagi P_2 istnieje: $X^* = \frac{c}{f} = 50$, $Y^* = \frac{a}{b} \left(1 - \frac{c}{fK}\right) = \frac{0.5}{0.01} \left(1 - \frac{0.5}{10}\right) = 50 \cdot 0.95 = 47.5$.
- **Zachowanie modelu:** Obie populacje, ofiar i drapieżników, zbiegają monotonicznie do dodatnich, stałych poziomów równowagowych (X^*, Y^*). Brak oscylacji.
- **Implikacje biologiczne:** System osiąga stabilny stan równowagi, w którym obie populacje współistnieją w stałej liczebności. Interakcje są "łagodne", a system szybko stabilizuje się bez fluktuacji.

5.3 Scenariusz 3: Stabilna koegzystencja 2

- **Warunek kluczowy:** $fK > c$. Wartości własne macierzy Jacobiego w P_2 są zespolone z ujemną częścią rzeczywistą.
- **Parametry symulacji:** $a = 1$, $K = 1000$, $b = 0.03$, $f = 0.01$, $c = 0.5$.
- **Obserwacja:** $f \cdot K = 0.01 \cdot 1000 = 10 > c = 0.5$. Punkt równowagi P_2 istnieje: $X^* = \frac{c}{f} = \frac{0.5}{0.01} = 50$, $Y^* = \frac{a}{b} \left(1 - \frac{c}{fK}\right) = \frac{1.0}{0.03} \left(1 - \frac{0.5}{10}\right) \approx 33.\bar{3} \cdot 0.95 \approx 31.67$.
- **Zachowanie modelu:** Populacje ofiar i drapieżników wykazują gasnące oscylacje wokół punktu równowagi P_2 , zanim ostatecznie się na nim ustabilizują.
- **Implikacje biologiczne:** Oscylacje są wynikiem opóźnień w reakcji populacji na zmiany liczebności drugiej populacji (np. wzrost drapieżników po wzroście ofiar). Ograniczona pojemność środowiska działa stabilizująco, tłumiąc te oscylacje.

Sprawdźmy w następnych trzech eksperymentach wpływ zmian parametrów K, c, a, f na przebieg symulacji.

5.4 Scenariusz 4: Wpływ zmniejszonej pojemności środowiska i śmiertelności drapieżników na koegzystencję typu 2

- **Parametry symulacji:** $a = 1.0$, $K = 100$, $b = 0.02$, $f = 0.01$, $c = 0.1$.
- **Obserwacja:** $f \cdot K = 0.01 \cdot 100 = 1 > c = 0.1$. Punkt równowagi P_2 istnieje: $X^* = \frac{c}{f} = 10$, $Y^* = \frac{a}{b} \left(1 - \frac{c}{fK}\right) = \frac{1.0}{0.02} \left(1 - \frac{0.1}{1}\right) = 50 \times 0.9 = 45$
- **Zachowanie modelu:** Mimo znacznie niższej pojemności środowiska w porównaniu do Scenariusza 3 oraz niższego współczynnika śmiertelności drapieżników, system nadal dąży do punktu koegzystencji poprzez tłumione oscylacje.
- **Implikacje biologiczne:** Zmniejszona pojemność środowiska prowadzi do niższej równowagowej liczebności ofiar ($X^* = 10$). Jednak niższa śmiertelność drapieżników pozwala na utrzymanie stosunkowo wysokiej populacji drapieżników ($Y^* = 45$), nawet przy mniejszej "bazowej" dostępności ofiar. System nadal wykazuje naturalne cykle, ale są one tłumione.

5.5 Scenariusz 5: Wpływ zwiększonego współczynnika wzrostu ofiar na koegzystencję typu 2

- **Parametry symulacji:** $a = 1.5, K = 1000, b = 0.02, f = 0.01, c = 0.2$.
- **Obserwacja:** $f \cdot K = 0.01 \cdot 1000 = 10 > c = 0.2$. Punkt równowagi P_2 istnieje: $X^* = c/f = 20$, $Y^* = \frac{1.5}{0.02} (1 - 0.02) = 75 \times 0.98 = 73.5$.
- **Zachowanie modelu:** Układ stabilizuje się w punkcie P_2 poprzez tłumione oscylacje (ognisko).
- **Implikacje biologiczne:** Zwiększony współczynnik naturalnego przyrostu ofiar, w połączeniu ze zmniejszonym współczynnikiem drapieżnictwa i niższą śmiertelnością drapieżników, prowadzi do punktu równowagi z niższą liczbą ofiar ($X^* = 20$ w porównaniu do $X^* = 50$ w Scenariuszu 3) ale znacznie wyższą liczbą drapieżników ($Y^* = 73.5$ w porównaniu do $Y^* \approx 31.67$). Wyższy przyrost ofiar może początkowo prowadzić do większych amplitud oscylacji, zanim system osiągnie stabilność. To pokazuje, jak kombinacja parametrów wpływa na równowagowe zagęszczenie obu populacji.

5.6 Scenariusz 6: Wpływ zwiększonego współczynnika efektywności drapieżników (f)

- **Warunek kluczowy:** $fK > c$, wartości własne macierzy Jacobiego w punkcie $P_2 = (X^*, Y^*)$ są zespolone z ujemną częścią rzeczywistą (ognisko).
- **Parametry symulacji:** $a = 1.0, K = 1000, b = 0.02, f = 0.015, c = 0.2$.
- **Obserwacja:** $f \cdot K = 0.015 \cdot 1000 = 15$, co jest $> c = 0.2$. Punkt równowagi P_2 istnieje: $X^* = \frac{c}{f} = \frac{0.2}{0.015} \approx 13.33$, $Y^* = \frac{a}{b} \left(1 - \frac{c}{fK}\right) = \frac{1.0}{0.02} \left(1 - \frac{0.2}{0.015 \cdot 1000}\right) = 50 \left(1 - \frac{0.2}{15}\right) \approx 50 \times 0.9867 \approx 49.33$.
- **Zachowanie modelu:** Populacje ofiar i drapieżników wykazują tłumione oscylacje, stabilizując się w punkcie równowagi ($X^* \approx 13.33, Y^* \approx 49.33$).
- **Implikacje biologiczne:** Zwiększenie efektywności drapieżników (f) (np. z $f = 0.01$ do $f = 0.015$, przy zachowaniu $a = 1.0, K = 1000, b = 0.02, c = 0.2$) prowadzi do obniżenia równowagowej liczebności ofiar (X^*) potrzebnych do utrzymania populacji drapieżników. Dzieje się tak, ponieważ drapieżniki efektywniej przekształcają upolowane ofiary w biomasę. Równowagowa liczebność drapieżników (Y^*) może nieznacznie wzrosnąć lub pozostać na podobnym poziomie, gdyż mniejsza liczba ofiar jest kompensowana przez wyższą efektywność ich wykorzystania. System nadal oscyluje, ale wokół nowego punktu równowagi.

6 Wnioski

Analiza modelu Lotki-Volterry z logistycznym wzrostem populacji ofiar, wsparta symulacjami numerycznymi, wyraźnie demonstruje, jak wprowadzenie ograniczonej pojemności środowiska (K) prowadzi do bardziej realistycznych scenariuszy dynamicznych niż w modelu klasycznym. Symulacje potwierdziły przewidywania teoretyczne, ukazując trzy główne możliwe długoterminowe zachowania systemu: wyginięcie drapieżników, gdy nie są oni w stanie efektywnie wykorzystać dostępnych ofiar ($fK \leq c$), oraz dwa scenariusze stabilnej koegzystencji ($fK > c$), gdzie populacje dążą do punktu równowagi P_2 albo monotonicznie, albo poprzez tłumione oscylacje. Eksperymenty z modyfikacją parametrów w scenariuszach koegzystencji (4-6) dostarczyły dalszych, istotnych wniosków. Wykazały one, że poziomy równowagowe obu populacji (X^*, Y^*) oraz charakter dynamiki są wrażliwe na zmiany poszczególnych współczynników. Na przykład, zmniejszenie pojemności środowiska przy jednoczesnym obniżeniu śmiertelności drapieżników może nadal pozwalać na utrzymanie znaczącej populacji drapieżników mimo mniejszej liczby ofiar. Z kolei zwiększony współczynnik przyrostu ofiar może, wbrew intuicji, skutkować niższą równowagową populacją ofiar, ale znacznie wyższą drapieżników, co odzwierciedla efektywną kontrolę ofiar przez drapieżniki. Podobnie, wzrost efektywności drapieżników prowadzi do obniżenia liczebności ofiar niezbędnych do ich utrzymania. Te obserwacje mają głębokie implikacje biologiczne: pokazują, że stabilność i struktura populacji w ekosystemach drapieżnik-ofiara są wynikiem złożonych interakcji, a nie prostych zależności. Model, mimo swej względnej prostoty, dobrze ilustruje, jak naturalne mechanizmy ograniczające,

takie jak limit zasobów dla ofiar, oraz cechy biologiczne gatunków (tempo reprodukcji, śmiertelność, efektywność polowań) kształtują obserwowaną w przyrodzie dynamiczną równowagę, często charakteryzującą się tłumionymi fluktuacjami wokół stabilnych poziomów.

Bibliografia

- [1] J.D Murray *Wprowadzenie do biomatematyki*, , Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2006, str:84-90.
- [2] Urszula Foryś, Jan Poleszczuk *Modelowanie matematyczne w biologii i medycynie* <https://mst.mimuw.edu.pl/wyklady/mbm/wyklad.pdf> Dostęp: 4.03.2024.
- [3] Wikipedia *Równanie Lotki-Volterry* https://pl.wikipedia.org/wiki/R%C3%B3wnanie_Lotki-Volterry Dostęp: 4.03.2024.
- [4] Ryszard Rudnicki, *Dynamika populacyjna* <https://im0.p.lodz.pl/~jbanasiak/MB/BiolPopRRudnicki.pdf> Dostęp: 19 stycznia 2026.
- [5] Henryk Żołądek *Jakościowa Teoria Równań Różniczkowych Zwyczajnych* <https://mst.mimuw.edu.pl/wyklady/rrj/wyklad.pdf> Dostęp: 19 stycznia 2026.
- [6] Paweł Matejek, Urszula Foryś *O pewnym ciekawym zastosowaniu modelu Lotki-Volterry* <https://czasopisma.uph.edu.pl/mp/article/view/21/7> Dostęp: 4.03.2024.