NUMERIČNE METODE 2016/17
Kolokvij iz teorije, 4. januar 2017

Ime in priimek, vpisna številka: ____

1. Znane vrednosti: $x = [1, 2, 5]$ in $y = [5, 3, 5]$ je treba aproksimirati s funkcijo $f(x) = a\sqrt{x} + b\,x^{-2}$. Za podano funkcijo pokažite, kako to izvedemo s pomočjo metode najmanjše kvadratične napake? Nastavite sistem enačb za določitev parametrov a in b! (Številčne vrednosti so podane samo kot primer, ni treba računati.) (35%)

2. Izpeljite aproksimacijo prvega odvoda z uporabo diferenčne sheme naprej (zanemarite člene drugega in višjega reda). Izpeljite aproksimacijo prvega odvoda z uporabo centralne diferenčne sheme (zanemarite člene tretjega in višjega reda). Določite in komentirajte red napake. (30%)

3. Najprej pojasnite osnove Gaussovega integracijskega pristopa. Nato za integriranje polinoma $P_3(x) = A_0 + A_1x^1 + A_2x^2 + A_3x^3$ v mejah od a do b nastavite enačbe za določitev vrednosti vozlišč x_0, x_1 in uteži w_0, w_1. (35%)

USTNA NAVODILA:

→ KOMENTIRAJTE KAJ DELATE!
(ZAKAJ)

→ UPORABLJAJTE USTREZNE TERMINE

→ NARIŠITE SLIKO (ČE POVEČA JASNOST)

ŠTUDENT A

Uspeh 45%

1. $x = [1, 2, 5]$

$y = [5, 3, 5]$

$f(x) = a\sqrt{x} + b x^{-2}$

$f(x) = a\sqrt{x} + \frac{b}{x^2}$

najmanjše kvadratične napake

$S = \sum (y_i - f(x))^2$

$= \sum \left(y_i - \left(a\sqrt{x} + \frac{b}{x^2}\right)\right)^2$

30
10
5

45

$\frac{dS}{da} \Rightarrow \sum 2\left(y_i - \left(a\sqrt{x} + \frac{b}{x^2}\right)\right) \cdot \sqrt{x} = 0$

$\sum y_i \cdot \sqrt{x} - \sum a x - \sum \frac{b}{x^2} \cdot \sqrt{x} = 0$

$\frac{dS}{db} \Rightarrow \sum 2\left(y_i - \left(a\sqrt{x} + \frac{b}{x^2}\right)\right) \cdot \frac{1}{x^2} = 0$

$a = \frac{\sum y_i \sqrt{x} - \sum \frac{b}{x^2}\sqrt{x}}{\sum x}$

$\sum \frac{y_i}{x^2} - \sum \frac{a\sqrt{x}}{x^2} - \sum \frac{b}{x^4} = 0$

$b = \left(\sum \frac{y_i}{x^2} - \sum \frac{a\sqrt{x}}{x^2}\right) \cdot \sum x^4$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \sum x & \sum x^{2} \\ \sum x & \sum x^{4} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sum y_i \sqrt{x} \\ \sum y_i \cdot x^2 \end{bmatrix}}_{\vec{b}}$$

-5 KER MANJKA KOMENTAR POSTOPKA. SISTEM LINEARNIH ENAČB NI POJASNJEN (KAJ IŠČEMO? KAKO IMENUJEMO? A, x, b, ...)

30
(OD 35)

2. ŠTUDENT A

1. dokaz cent. Diferenčna shema ~~napaj~~

$$f(h+x) = f(x) + h \cdot f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + O(h^3) + \cancel{O(\ )}$$
$$f(h-x) = f(x) - h \cdot f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) - O(h^3)$$

$+$

Diferenčna shema naprej

$$f(x+h) = f(x) \cdot \frac{f'(x)(x+h-x)^1}{1!} + O(h^2)$$

$-$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$+$

$$\varepsilon = \frac{O(h^2)}{O(h^1)} \text{ - red napake}$$

$$f(h+x) - f(h-x) = 2h\, f'(x)$$

$$f'(x) = \frac{f(h+x) - f(\ldots}{2h}$$

$$\cancel{\varepsilon = \frac{O(h^3)}{O(h^2)}} \text{ - red nap}$$

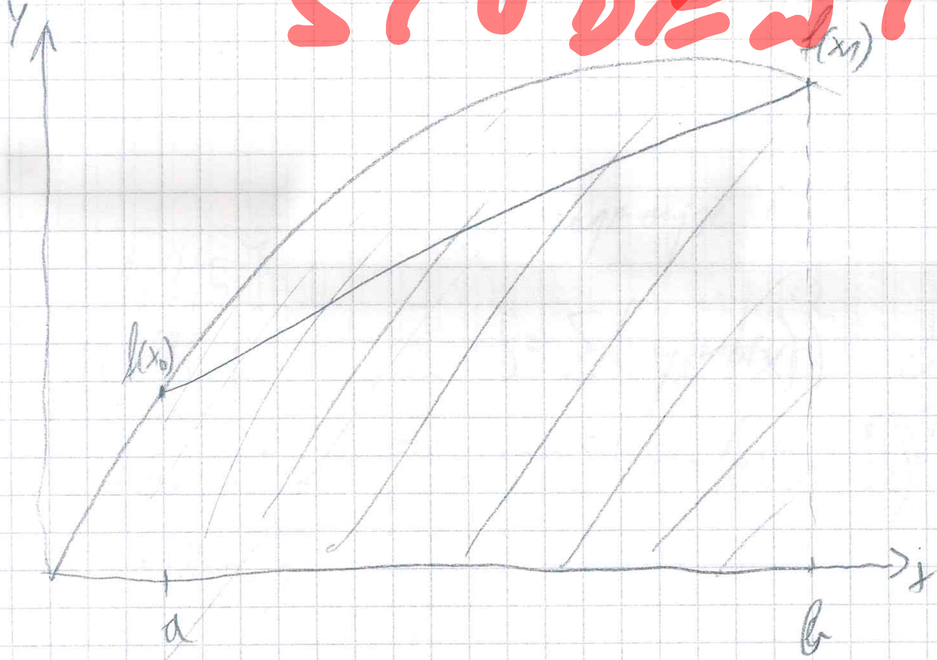
Red napake je ~~razmerje ostankov, vendar so tako majhni, da ni velike napake~~ če jih zanemarimo

10

(od 30)

NI GLAVE IN REPA, NEURAZEJAN DELI PRAVILNI, CELOTA NI JASNA.

3 ŠTUDENT A



$$P_3(x) = A_0 + A_1x^1 + A_2x^2 + A_3x^3$$

$$S = \int_a^b (A_0 + A_1x^1 + A_2x^2 + A_3x^3)\,dx = A_0x\Big|_a^b + A_1\frac{x^2}{2}\Big|_a^b + A_2\frac{x^3}{3}\Big|_a^b + A_3\frac{x^4}{4}\Big|_a^b$$

±

$$S = A_0b - A_0a + A_1\frac{b^2}{2} - A_1\frac{a^2}{2} + A_2\frac{b^3}{3} - A_2\frac{a^3}{3} + A_3\frac{b^4}{4} - A_3\frac{a^4}{4}$$

$$P(x)\cdot W_0 = A_0(b-a) + A_1\left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right) + A_2\left(\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}\right) + A_3\left(\frac{b^4}{4} - \frac{a^4}{4}\right)$$

$$P(x_0) = A_0 + A_1x^1 + A_2x^2 + A_3x^3$$

5

(OD 35)

ZELO MALO PRAVILNO,

NI RAZUMEVANJA.

NUMÉRIČNE METODE - TEORIJA

STUDENT B

Uspeh 90%

30

1.

$f(x) = a\sqrt{x} + b \cdot x^{-2}$

METODA NAJMANJŠE KVADRATIČNE NAPAKE

$$S = \sum (y_i - f(x_i))^2$$ → DA DOBIMO NAJMANJŠO NAPAKO MORA BITI ODVOD 0 („iščemo ekstreme")

27,5

32,5

$$\frac{dS}{d} = -2 \cdot \sum (y_i - f(x_i)) \cdot \frac{df}{d} = 0$$

$(x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$

- NAJPREJ ODVAJAMO PO a

$$0 = -\cancel{2}\sum (y_i - a\sqrt{x_i} + b \cdot x_i^{-2}) \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x_i}}$$

$$-\sum y_i \cdot x_i^{\frac{1}{2}} + a \sum x_i^{\frac{1}{2}} \cdot x_i^{-\frac{1}{2}} - b \cdot \sum \cdot x_i^{-\frac{1}{2}} = 0$$

PREUREDIMO

$$a \cdot \sum 1 - b \cdot \sum x_i^{-\frac{1}{2}} = \sum y_i \cdot x_i^{-\frac{1}{2}}$$

1 enačba 2 neznanki

- ODVAJAMO PO b

$$0 = +2 \cdot \sum (y_i - a\sqrt{x_i} + b \cdot x^{-2}) \cdot (+2) \cdot x_i^{-3}$$

$(x^{-2})' = -2 \cdot x^{-3}$

$$4 \cdot \sum y_i x_i^{-3} - 4a \cdot \sum x_i^{\frac{1}{2}} \cdot x_i^{-3} + 4b \cdot \sum x_i^{-2} \cdot x_i^{-3} = 0$$

PREUREDIMO

$$a \cdot +4 \cdot \sum x_i^{-\frac{5}{2}} - b \cdot 4 \sum x_i^{-5} = 4 \cdot \sum y_i \cdot x_i^{-3} \quad / :4$$

$$a \sum x_i^{-\frac{5}{2}} - b \cdot \sum x_i^{-5} = \sum y_i \cdot x_i^{-3}$$

2 enačbi, 2 neznanki

$$\begin{bmatrix} 1 & -\sum x_i^{-\frac{1}{2}} \\ \sum x_i^{-\frac{5}{2}} & -\sum x_i^{-5} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum y_i x_i^{-\frac{1}{2}} \\ \sum y_i \cdot x_i^{-3} \end{Bmatrix}$$

− 5 TOČK ZARADI NAPAKE IN POMANJKLJIVEGA KOMENTARJA

30 (OD 35)

2 ŠTUDENT B

NAPREJ:

$$f(x+h) = f(x) + h \cdot f'(x) + \sigma(h^2)$$ ✓ $\frac{h^2}{2!} f''(x) + \ldots$

$\rightarrow$ RED NAPAKE LINEARNI

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \sigma(h^2)$$ ✓ h

$$\frac{h^2}{2! \cdot \cancel{h}} \Rightarrow h$$ ✓

CENTRALNA:

NAPREJ $f(x+h) = f(x) + h \cdot f'(x) + \frac{h^2}{2} \cdot f''(x) + \sigma(h^3)$ ✓

NAZAJ $-f(x-h) = -f(x) \mp h \cdot f'(x) \pm \frac{h^2}{2} \cdot f''(x) + \sigma(h^3)$ ✓

ODŠTEVAMO

$$f(x+h) - f(x-h) = 2h \cdot f'(x) + \sigma(h^3)$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \sigma(h^3)$$ ✓

$\rightarrow$ RED NAPAKE JE KVADRATIČNI

$$\frac{h^{\cancel{3}2}}{3! \cdot 2\cancel{h}} \Rightarrow h^2$$ ✓

27,5

(OD 30)

RED NAPAKE JE BOLJŠI KOT LE PRI DIF. SHEMI NAPREJ IN NAZAJ (natančnejši)

$\rightarrow$ -2,5 TOČK

UKR MANJA

UVOD Z RAZVOJEM

V TAYLORJEVO VRSTO

3. GAUSSOVA KVADRATURA

ŠTUDENT B

TEMELJI NA TEMU DA LAHKO TOČNO IZRAČUNAMO INTEGRAL, ČE PRAVILNO IZBEREMO VOZLIŠČA, TO STORIMO Z TEM DA VSAKI VREDNOSTI PRIREDIMO UTEŽ.

$$I = \sum \underbrace{W_i}_{\text{UTEŽ}} \cdot f(x_i) \qquad I = \int_a^b P_n(x)$$

$$\sum W_i \cdot f(x_i) = \int_a^b P_n(x)$$

$$f(x) = A_0 + A_1 x^1 + A_2 x^2 + A_3 x^3$$

$$I_1 = W_0 \cdot (A_0 + A_1 \cdot x_0^1 + A_2 \cdot x_0^2 + A_3 \cdot x_0^3) + W_1 (A_0 + A_1 \cdot x_1^1 + A_2 \cdot x_1^2 + A_3 x_1^3)$$

KOMENTAR)

$$I_2 = \int_a^b f(x) = A_0 \cdot x \Big|_a^b + \frac{A_1 \cdot x^2}{2}\Big|_a^b + \frac{A_2 \cdot x^3}{3}\Big|_a^b + \frac{A_3 \cdot x^4}{4}\Big|_a^b$$

$$I_1 = I_2$$

UREDIMO TAKO DA IZPOSTAVIMO A-je

$$A_0 \underbrace{\left(W_0 + W_1 - x\Big|_a^b\right)}_{=0} + A_1 \underbrace{\left(W_0 \cdot x_0^1 + W_1 \cdot x_1^1 - \frac{x^2}{2}\Big|_a^b\right)}_{=0} + A_2 \underbrace{\left(W_0 \cdot x_0^2 + W_1 \cdot x_1^2 - \frac{x^3}{3}\Big|_a^b\right)}_{=0} + A_3 \underbrace{\left(W_0 \cdot x_0^3 + W_1 \cdot x_1^3 - \frac{x^4}{4}\Big|_a^b\right)}_{=0}$$

$$\begin{aligned} W_0 + W_1 - x\Big|_a^b &= 0 \\ W_0 \cdot x_0^1 + W_1 x_1^1 - \frac{x^2}{2}\Big|_a^b &= 0 \\ W_0 \cdot x_0^2 + W_1 x_1^2 - \frac{x^3}{3}\Big|_a^b &= 0 \\ W_0 \cdot x_0^3 + W_1 \cdot x_1^3 - \frac{x^4}{4}\Big|_a^b &= 0 \end{aligned} \quad = \quad \begin{aligned} W_0 + W_1 - (b-a) &= 0 \\ W_0 \cdot x_0^1 + W_1 x_1^1 - \frac{(b^2-a^2)}{2} &= 0 \\ W_0 \cdot x_0^2 + W_1 \cdot x_1^2 - \frac{(b^3-a^3)}{3} &= 0 \\ W_0 \cdot x_0^3 + W_1 \cdot x_1^3 - \frac{(b^4-a^4)}{4} &= 0 \end{aligned}$$

4 ENAČBE, 4 NEZNANKE

−2,5 TOČKE, KER MANJKA KOMENTAR KDAJ DOBIMO TOČEN REZULTAT

32,5

(OD 35)