

## 7 Kvantily

### Teorie: Kvantily náhodné veličiny

Pro náhodnou veličinu  $X$  s distribuční funkcí je **kvantilová funkce** dána vztahem

$$F^{-1}(u) = \inf \{x \in \mathbf{R} : F(x) \geq u\}, \quad 0 < u < 1.$$

Pro  $0 < \alpha < 1$  se hodnota  $F^{-1}(\alpha)$  nazývá  **$\alpha$ -kvantil**.

Pokud je distribuční funkce spojitá, pak kvantilová funkce je totožná s obyčejnou inverzní funkcí k funkci  $F$ .

Kvantily normovaného normálního rozdělení značíme  $u_\alpha$  a platí, že  $u_\alpha = -u_{1-\alpha}$ .

Pro kvantily normálního a normovaného rozdělení platí:  $x_\alpha = u_\alpha \cdot \sigma + \mu$ .

Pomocí kvantilové funkce lze vyjádřit i často používané **kritické hodnoty**, např. kritická hodnota pro normované normální rozdělení je dána vztahem  $z(\alpha) = \Phi^{-1}(1-\alpha)$ , kde  $\Phi$  je distribuční funkce normovaného normálního rozdělení.

(7.1) Určete 10% a 95% kvantil následujících náhodných veličin

(a)  $X \sim R(-0, 5; 0, 5)$

$$[x_{10\%} = -0,4; x_{95\%} = 0,45]$$

(b)  $X \sim \text{Exp}(A = 3; \delta = 5)$

$$[x_{10\%} = 3,53; x_{95\%} = 17,98]$$

(c)  $X \sim N(\mu = -10; \sigma^2 = 25)$

$$[x_{10\%} = -16,41; x_{95\%} = -1,78]$$

(d)  $X$  daná funkcí hustoty

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{pro } x \in (-1, 1) \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

$$[x_{10\%} = -0,55; x_{95\%} = 0,68]$$

(e)  $X$  daná distribuční funkcí

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (-\infty, 0] \\ \frac{x^3}{8} & \text{pro } x \in (0, 2) \\ 1 & \text{pro } x \in [2, \infty) \end{cases}$$

$$[x_{10\%} = 0,93; x_{95\%} = 1,97]$$

**(7.2)** Předpokládejte, že veličina  $X \sim N(\mu; \sigma^2)$ . Určete parametry  $\mu, \sigma^2$ , pokud víte

(a)  $P(X \geq 3) = 0.4$  a  $P(X \leq 2) = 0.3$

$$[\mu = 2, 7; \sigma^2 = 1, 6]$$

(b)  $P(X \geq -2) = 0.6$  a  $P(X \geq 2) = 0.1$

$$[\mu = -1, 3; \sigma^2 = 6, 8]$$

(c)  $P(X \leq 10) = 0.4$  a  $P(X \geq 15) = 0.7$

[neexistuje]

(d)  $x_{0.25} = 3$  a  $x_{0.75} = 7$

$$[\mu = 5; \sigma^2 = 8, 7]$$

(e)  $x_{0.20} = -5$  a  $x_{0.90} = 10$

$$[\mu = 0, 9; \sigma^2 = 50]$$

**(7.3)** Předpokládejte, že veličina  $X \sim R(a; b)$ . Určete parametry  $a, b$ , pokud víte

(a)  $P(X \geq 5) = 0.2$  a  $P(X \leq 2) = 0.3$

$$[a = 0, 2; b = 6, 2]$$

(b)  $x_{0.20} = -11$  a  $x_{0.90} = 10$

$$[a = -17; b = 13]$$

**(7.4)** Předpokládejte, že veličina  $X \sim Exp(A; \delta)$ . Určete parametry  $A, \delta$ , pokud víte

(a)  $P(X \geq 3) = 0.5$  a  $P(X \leq 2) = 0.25$

$$[A = 1, 3; \delta = 2, 5]$$

(b)  $x_{0.10} = 5$  a  $x_{0.90} = 10$

$$[A = 4, 8; \delta = 2, 3]$$