Projet TP 1

Notation. On rappelle que votre note de TP correspond à 30% de votre note de 4MA006 (4MA106) et que cette note de TP est incompressible, c'est à dire sans rattrapage. Votre projet est individuel et il sera évalué comme suit :

- rapport et code : clarté, lisibilité, organisation.
- soutenance orale : aisance à utiliser le code, pertinence des explications et réponses aux questions, recul sur le lien entre résultats théoriques et observations numériques. La soutenance orale représentera une très moitié de la note finale.

Vous êtes bien sûr autorisé à discuter du projet entre vous et avec l'équipe enseignante de l'UE mais par individuel on entend que toutes similitudes trop importantes pour être considérées comme le fruit d'un heureux hasard, et ceci que ce soit au niveau du code et/ou du rapport, seront considérées comme de la triche et donc sanctionnées sévèrement au niveau de la note.

Le code. Le code doit être envoyé sous la forme d'un ou plusieurs fichiers et doit être développé en Python (extention `.py` ou `.ipynb`). Votre code doit être agréable à lire (noms de variables explicites, indentation, un minimum de commentaires,...). Pour éviter tout problème d'encodage, ne pas utiliser d'accent dans vos commentaires.

Le rapport. Le rapport doit être retourné en format `.pdf`. Dans le cas d'un rapport pdf, de préférence utiliser LaTeX mais vous pouvez également envoyer des notes manuscrites scannées (soigneuses).

Deadline. Le nom de tous vos fichiers doit débuter par `NOM prenom`. Vos fichiers, code et rapport, seront à déposer sur la page Moodle de 4M006 (4M106) **avant le 30/12/2024.**

Soutenance. La soutenance orale aura lieu la semaine des examens. Un planning sera disponible sur Moodle en temps voulu. Cette soutenance consistera à présenter et commenter votre travail. Vous disposerez de 10 minutes pour ce faire, puis s'en suivra une séance de questions. Il vous est fortement conseillé de vous entraîner à cet exercice avant votre passage.

Tout retard, ou non respect des consignes décrites ici, sera sanctionné dans votre note de TP.

Le sujet comporte des parties indépendantes. L'important n'est pas de le finir, l'évaluation portera plus sur la qualité du travail rendu que sa quantité. Pour toute question ou commentaire sur ce projet, il ne faut pas hésiter à prendre contact via Moodle ou par mail :

ruiyang.dai@sorbonne-universite.fr

1 Approximation de l'équation de transport à vitesse constante

Soit un temps final $T > 0$, nous cherchons une approximation de, $\bar{u} : \mathbb{R} \times (0,T) \to \mathbb{R}$, solution du problème suivant,

$$\begin{cases} \partial_t \bar{u}(x,t) + \ a \ \partial_x \bar{u}(x,t) = 0, & \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,T) \ , \\ \bar{u}(x,0) = u_{\text{ini}}(x), & \forall x \in \mathbb{R} \ . \end{cases} \tag{P}$$

On rappelle que la solution de (P) est donnée par $\bar{u}(x,t) = u_{\text{ini}}(x - at)$, $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,T)$. Afin de travailler sur un domaine d'espace de dimension finie, on prendra une condition initiale u_{ini} 1-périodique.

Exercice 1 Montrer que, puisque u_{ini} est 1-périodique, alors $\bar{u}$ est également 1-périodique en espace, i.e. $\bar{u}(x+1,t) = \bar{u}(x,t)$, $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,T)$.

Exercice 2 On considère la donnée initiale, $u_{\text{ini}}(x) = \sin(2\pi x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Vérifier qu'elle est bien 1-périodique.

On définit une solution numérique discrète de l'équation comme une suite de valeurs u_j^n à double indice approchant la solution exacte $\bar{u}(x,t)$ au sens où $u_j^n \approx \bar{u}(x_j, t_n)$ avec $x_j = j\Delta x$ et $t_n = n\Delta t$, pour $j \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. On nomme Δx le pas d'espace et Δt le pas de temps. On pose $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$.

Commençons par quelques exemples de schémas explicites pour l'équation de transport.

1. **Schéma centré.** Ce schéma est obtenu en utilisant une approximation centrée de la dérivée spatiale.
$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\lambda a}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n).$$
2. **Schéma décentré à gauche.** Il est obtenu en utilisant une approximation décentrée (à gauche) de la dérivée spatiale.
$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda a(u_j^n - u_{j-1}^n).$$
3. **Schéma décentré à droite.** Il est obtenu en utilisant une approximation décentrée (à droite) de la dérivée spatiale.
$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda a(u_{j+1}^n - u_j^n).$$
4. **Schéma de Lax-Friedrichs.** On reconnaît une modification du schéma centré dans lequel u_j^n est remplacé par la moyenne de u_{j-1}^n et u_{j+1}^n.
$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \frac{\lambda a}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n).$$
5. **Schéma de Lax-Wendroff.** On reconnaît une modification du schéma centré dans lequel on a rajouté un terme étrange qui contient une discrétisation de la dérivée seconde en espace alors qu'il n'y a pas de dérivée seconde dans l'EDP considérée.
$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\lambda a}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{\lambda^2 a^2}{2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n).$$

On peut les écrire sous la forme

$$u_j^{n+1} = H(u_{j-L}^n, \cdots, u_{j+L}^n) = \sum_{l=-L}^{+L} c_l u_{j+l}^n, \tag{1}$$

où on a introduit une fonction H appelée “solution discrète”. Tous les schémas présentés sont des schémas à 3 points, c'est-à-dire qu'ils n'utilisent qu'au plus, les valeurs aux trois points x_{j-1}, x_j et x_{j+1} pour avancer en temps (sous la forme , $L = 1$).

Exercice 3 On va donc implémenter le schéma de sorte à ce qu'il soit lui aussi 1-périodique. La discrétisation en espace doit donc couvrir au minimum un intervalle de la forme $[S, 1+S[$, avec $S \in \mathbb{R}$. Le plus naturel est de prendre $S = 0$ et donc l'intervalle $[0, 1[$.

1. On se fixe $J \in \mathbb{N}^*$ et on pose $\Delta x = \frac{1}{J}$. Définir une suite de points $x_j = j\Delta x$ adaptée à la discrétisation de l'intervalle $[0, 1[$. On pose $\lambda = \Delta t/\Delta x$.
   (**Conseil** : Vous pouvez compléter une fonction **espaceDiscretise** dont les entrées et sorties :
   `Input :` J, λ.
   `Output :` Δx, Δt, $(x_j)_j$, M.)

2. Coder la fonction qui s'appelle **schema** en utilisant la fonction discrète H dont voici les entrées/sorties :
   `Input :` Δx, Δt, $(x_j)_j$, M, c_{-1}, c_0, c_1
   `Output :` $(u_j^M)_j$, $(\bar{u}_j^M)_j$
   Dans le code, $t_M \leq T$ correspond au temps final de simulation et $\bar{u}_j^M = \bar{u}(x_j, t_M)$, $\forall j$.

3. Déterminer c_{-1}, c_0 et c_1 tel que chaque schéma se réécrive sous la forme,

$$u_j^{n+1} = c_{-1}u_{j-1}^n + c_0 u_j^n + c_1 u_{j+1}^n \ ,$$

   et tracer la solution analytique et numérique. Pour la discrétisation en espace déterminée dans la première étape de cet exercice, réfléchir à la prise en compte de la périodicité en espace au niveau du schéma à chaque itération en temps $t_n \to t_{n+1}$ pour $n \geq 0$. **Dans ce cas, on prend** $T = 0.75$**,** $a = 1$**,** $J = 20$**,** $\lambda = 0.8$.

2 Analyse des schémas

L'analyse numérique des schémas a pour objectif d'étudier leur convergence, dans une norme appropriée, et lorsqu'ils convergent, d'estimer l'erreur, calculée (souvent) dans la même norme, entre la solution exacte et la solution approchée. Comme nous l'avons déjà vu pour l'équation de la chaleur, deux propriétés importantes entrent en jeu : la stabilité et la consistance, dont on déduit la convergence.

Commençons par l'étude de consistance. Comme pour l'équation de la chaleur, on adopte la notation suivante.

Définition 2.1 *On appelle erreur de consistance du schéma* (1) *au point x_j et à l'instant t_n, le réel*

$$\kappa_j^n = \frac{1}{\Delta t}\left(u(x_j, t_{n+1}) - H\left(u(x_{j-L}, t_n), \ldots, u(x_{j+L}, t_n)\right)\right).$$

L'erreur de consistance du schéma à l'instant t_n est le vecteur K_h^n dont les composantes sont les κ_j^n, et qui vérifie donc

$$\overline{U}_h^{n+1} = Q\overline{U}_h^n + \Delta t K_h^n. \tag{2}$$

Définition 2.2 *On dit qu'un schéma est stable pour une norme vectorielle $\|\cdot\|$ si et seulement si il existe une constante C_0 (qui peut dépendre de T), telle que*

$$\sup_{n\Delta t \leq T} \|Q^n\| \leq C_0.$$

Exercice 4 Nous allons étudier la stabilité du schéma. Calculer numériquement la norme matricielle pour chaque schéma. **Dans ce cas, on prend** $T = 0.75$**,** $a = 1$**,** $J = 20$**,** $\lambda = 0.8$. Qu'observez-vous? Ensuite, Trouver la condition en écrivant à la main pour chaque schéma (si possible) afin de déterminer sa stabilité.

Exercice 5 Nous devons étudier la convergence pour chaque schéma. On calcul la vitesse à laquelle l'erreur décroit lors qu'on diminue Δx (en aumentant J, le nombre des points). On dit que la méthode est d'ordre $p \in \mathbb{R}^+$ s'il existe une constante $C > 0$, independente de Δx, telle que $\|\overline{U}_{\Delta x}^n - U_{\Delta x}^n\| = \mathcal{O}((\Delta x)^p)$. On utilisera les normes L^q discrète. Pour différents valeurs de Δx, calculer les erreurs $\|\overline{U}_{\Delta x}^n - U_{\Delta x}^n\|_{2,\triangle}$ and $\|\overline{U}_{\Delta x}^n - U_{\Delta x}^n\|_{\infty,\triangle}$. Representer les sur une figure, en échelle log–log, en fonction de Δx et déterminer les ordres. On liste ci-dessous les expressions des normes L^q discrète

$$\epsilon_{\Delta t,\Delta x}^{(\infty)} = \max_{n\geq 0} \left(\|\overline{U}_{\Delta x} - U_{\Delta x}\|_{\infty,\triangle}\right)$$
$$\epsilon_{\Delta t,\Delta x}^{(2)} = \max_{n\geq 0} \left(\|\overline{U}_{\Delta x} - U_{\Delta x}\|_{2,\triangle}\ \right)$$

où $U_{\Delta x}^n = (u_j^n)_j$ et $\bar{U}_{\Delta x}^n = (\bar{u}(x_j, t_n))_j$. **Dans ce cas, on prend** $T = 0.75$**,** $a = 1$**,** $J = [25,\ 50,\ 100,\ 200]$**,** $\lambda = 0.8$. Qu'en observez-vous?

(**Conseil** : Vous pouvez modifier la fonction **schema** dont les nouvelles entrées/sorties :
`Input :` Δx, Δt, $(x_j)_j$, M, c_{-1}, c_0, c_1
`Output :` $(u_j^M)_j$, $(\bar{u}_j^M)_j$, $\epsilon_{\Delta t,\Delta x}^{(2)}$, $\epsilon_{\Delta t,\Delta x}^{(\infty)}$.
Une fois vous avez la nouvelle fonction **schema**, vous pouvez obtenir les erreurs avec les différents valeurs de Δx.)