

Kombinatorická analýza, 2. písomka, opravný termín A

1. Nájdite obyčajnú generujúcu funkciu pre postupnosť (a_n) , ktorá spĺňa $a_0 = 1$ a

$$a_n = 3a_{n-1} + \binom{n}{2} \quad \text{pre každé } n \geq 1.$$

2. Nájdite explicitné vyjadrenie b_n , ak $b_0 = 0$ a

$$b_{n+1} = 1 + \sum_{k=0}^n 2^{k-n} b_k \quad \text{pre každé } n \geq 0.$$

3. Dokážte, že pre nezáporné celé čísla m a n platí

$$\sum_k \binom{2n+1}{k} \binom{m+k}{2n} = \binom{2m+1}{2n}.$$

4. Odhadnite s relatívnou chybou $O(n^{-2})$ hodnotu

$$(n+1)^{H_n}.$$

5. Odhadnite s absolútnou chybou $O(n^{-4})$ hodnotu

$$\sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{n^3 + k - 1}.$$