Kružnicová inverzia

1. Úvod

Jedným z objavov modernej geometrie je kružnicová inverzia. Tento koncept vznikol pri revízii geometrie v 19. a 20. storočí.

Sila tohto zobrazenia spočíva v tom, že dokáže previesť tvrdenia o kružniciach na tvrdenia o priamkach. Často sa komplikovaná geometrická situácia po vhodnom zobrazení inverziou zmení na jednoduchú a prístupnú klasickým metódam planimetrie. Inverzia má využitie nielen v matematických súťažiach, ale napríklad aj v algoritmoch počítajúcich prieniky kruhov.

Tento materiál kladie pomerne vysoké nároky na čitateľa. Mal by byť zbehlý v používaní bežných planimetrických metód (rovnoľahlosť, úsekové uhly, mocnosť bodu ku kružnici, analytické prístupy). Inverzia je krásna, ale pokiaľ sa nevyznáme v jednoduchších veciach, nedokážeme jej krásu oceniť. Preto tento text poslúži skôr pre matematické krúžky vo vyšších ročníkoch strednej školy, nie ako základ popularizačnej prednášky pre širšiu verejnosť.

Skôr, než si o inverzii spravíme prednášku či seminár, treba dostatok času strávit riešením úloh a skúmaním vlastností inverzie. (Keď som prvýkrát robil trojhodinový seminár, venoval som príprave asi 40 hodín.) Keď predkladáme žiakom počas prednášky úlohu, mali by sme vedieť posúdiť, ktoré cesty môžu viesť k riešeniu, a ktoré nie. (Dá sa úloha riešiť aj bez inverzie? Poznáme aspoň dve rôzne riešenia?). Pri domácich úlohách to nie je až také dôležité, nie je nutné poznať riešenie.

Pri čítaní treba mať papier, ceruzku a kresliť si vlastné obrázky. Veľké a prehľadné. Mnoho ich pokazíte, nebojte sa nakresliť si nové. So zlým obrázkom sa zle uvažuje. Nevšimneme si užitočné veci, ktoré by mohli pomôcť pri riešení: rovnobežnosti, zhodnosti úsečiek či trojuholníkov… K správnemu kresleniu obrázkov vedieme aj žiakov.

Úlohy na konci textu (s hviezdičkou) sú ťažké, dosahujú úroveň ťažších úloh z medzinárodnej matematickej olympiády. Nedá sa čakať, že ich vyriešime za krátky čas, treba si na to vyhradiť hodiny a hodiny.

2. Čo je to vlastne kružnicová inverzia?

Vezmime si nejakú rovinu, v nej ležiaci bod O a kladné reálne číslo r. Existuje práve jedna kružnica so stredom O a polomerom r a práve podľa tejto kružnice sa naše zobrazenie volá kružnicová inverzia. A čo to teda je?

Nech X je bod rôzny od bodu O (samozrejme, bod X patrí do roviny, s ktorou pracujeme, toto konštatovanie budeme v ďalšom vynechávať). Obrazom bodu X je bod X' ležiaci na polpriamke OX taký, že

$$|OX| \cdot |OX'| = r^2.$$

Zrejme takýto bod je práve jeden a teda naše zobrazenie, ktoré budeme ďalej označovať f, je korektne definované.

Aké vlastnosti má naše zobrazenie? Ak máme dva rôzne body, tak ich obrazmi budú opäť rôzne body, teda naše zobrazenie je prosté. Overte si to. Každý bod X tejto roviny okrem bodu O vieme zobraziť na nejaký bod X' (tiež rôzny od O). Obrazom bodu X' je však náš pôvodný bod X. Takže každý bod X je obrazom nejakého bodu X'. Body X, X' vytvárajú dvojicu navzájom inverzných bodov. Preto zobrazenie f je inverzné samo k sebe, platí $f^{-1} = f$. Inak sa to dá zapísať tak, že pre každý bod $X \neq O$ platí $f(f(X)) = X$.

Dohodneme sa na označovaní. Obraz bodu X v zobrazení f budeme značiť X' alebo $f(X)$, obraz priamky AB označíme $(AB)'$, obraz kružnice k označíme k'. Na tieto geometrické útvary sa dívame ako na množiny bodov; vo všeobecnosti obrazom množiny bodov M bude M'. Veľkosť úsečky AB budeme označovať AB, ak nemôže dôjsť k nedorozumeniu (je to jednoduchšie ako klasické označenie $|AB|$ a sprehľadní to zápisy). Kružnicu opísanú trojuholníku ABC budeme označovať (ABC).

Iste ste si všimli, že bod O spôsobuje problémy, je akosi „iný" než ostatné body, minimálne tým, že nemá obraz a nič sa naň nezobrazí. Tieto problémy vyriešime neskôr, zatiaľ budeme zobrazovať iba body rôzne od bodu O (vystačíme si s tým pri riešení stredoškolských úloh).

Ako sa dá zobrazenie f reprezentovať analyticky? Zvoľme karteziánsku súradnicovú sústavu tak, aby bod O mal súradnice $[0,0]$. Vezmime si bod $X = [x,y]$. Nech jeho obraz X' má súradnice $[x',y']$. Keďže bod X' leží na polpriamke OX, existuje kladné číslo k také, že $x' = kx$ a $y' = ky$. Ďalej platí $OX = \sqrt{x^2+y^2}$ a $OX' = \sqrt{x'^2+y'^2} = k\sqrt{x^2+y^2} = k \cdot OX$. Má platiť $OX \cdot OX' = r^2$, po dosadení z toho dostaneme $k = r^2/(x^2+y^2)$. Takže

$$[x,y] \qquad \text{sa zobrazí na} \qquad \left[\frac{x\cdot r^2}{x^2+y^2}, \frac{y \cdot r^2}{x^2+y^2}\right].$$

Jednoduchšie je použiť polárne súradnice alebo komplexnú rovinu. Bod X, ktorému zodpovedá komplexné číslo $x \neq 0$, sa zobrazí na $x' = r^2/|x|^2 \cdot x$.

Úloha 1. Má zobrazenie f nejaký samodružný bod?

Pri riešení tejto úlohy ste možno prišli na to, ako sa inverzia správa k bodom vnútri kružnice $k(O,r)$. Kam sa zobrazia body zvnútra? A kam body zvonku?

3. Geometrická konštrukcia obrazu bodu v inverzii

Ako zostrojíme obraz daného bodu X? Z definície tento obraz X' leží na polpriamke OX a platí $OX \cdot OX' = r^2$, teda chceme vlastne zostrojiť vzdialenosť $OX' = r^2/OX$.

Úloha 2. V rovine sú dané úsečky s dĺžkami a, b, c. Zostrojte úsečku s dĺžkou ab/c. Aplikujte túto konštrukciu na náš prípad.

Ukážeme si inú konštrukciu. Predpokladajme, že $OX > r$. Vzťah $|OX| \cdot |OX'| = r^2$ pripomína Euklidovu vetu o odvesne. Aby to fungovalo, úsečka OX by mala byť preponou v pravouhlom trojuholníku, ktorého jedna odvesna má dĺžku r. Zostrojme teda Tálesovu kružnicu nad priemerom OX, na nej leží tretí vrchol T nášho trojuholníka. Keďže má byť od bodu O vzdialený r, leží aj na kružnici $k(O,r)$. Kde leží bod X'? Podľa spomínanej Euklidovej vety je to päta výšky z vrchola T v trojuholníku OXT a tú vieme ľahko zostrojiť. Uvedený postup vieme aj obrátiť, získame tým konštrukciu obrazu pre bod X ležiaci vnútri kružnice.

4. Vlastnosti kružnicovej inverzie

Pozrieme sa na obrazy známych množín bodov. Keď sa snažíme uhádnuť, akým geometrickým útvarom je množina bodov, najlepšie je zostrojiť si podľa možnosti čo najpresnejšie obrazy čo najviac bodov. Preto treba kresliť, vezmite si papier a skúste to. Dobrú pomôcku predstavujú aj počítačové programy, ktoré umožňujú vytvárať dynamické geometrické konštrukcie, napríklad Cabri, Sketchpad alebo Kig. Z týchto obrazov sa dá takmer vždy uhádnuť, čo je obrazom: priamka, kružnica, úsečka, oblúk, elipsa… Keď už máme dobre podloženú hypotézu, môžeme prikročiť k dôkazu, teda overeniu našej hypotézy. (Všimnite si, že v matematike sa hypotézy vlastne overujú inak ako v ostatných vedách. Ak spravíme dôkaz, tak hypotéza je nezvratne potvrdená. Na druhej strane napríklad fyzici môžu hypotézy na základe experimentov iba zavrhovať, nikdy nemajú stopercentnú istotu, že hypotéza je pravdivá — možno majú iba málo experimentálnych údajov.)

Začnime priamkou, ktorá prechádza stredom inverzie O. Každý bod X tejto priamky rôzny od bodu O sa zobrazí do bodu tejto priamky a tiež je vzorom nejakého bodu z tejto priamky, preto takáto priamka je samodružná. Dôkaz využívajúci analytickú geometriu ponechávame na čitateľa.

Čo sa stane s priamkou p, ktorá neprechádza bodom O? Nech M je päta kolmice z bodu O na priamku p a nech A je bod priamky p rôzny od bodu M. (Nakreslite si obrázok.) Pozrime sa na body A', M'. Z definície inverzie vieme, že platí $OM \cdot OM' = r^2 = OA \cdot OA'$. Toto však znamená, že štvoruholník $M'MAA'$ je tetivový.[1] Preto veľkosť uhla $OA'M'$ je taká istá istá ako veľkosť uhla OMA, čo znamená, že bod A' leží na Tálesovej kružnici nad priemerom OM'. Táto úvaha funguje pre všetky body $A \in p \setminus \{M\}$. Navyše obrátením našej úvahy vieme dokázať, že každý bod kružnice nad priemerom OM' (okrem bodu O) je obrazom nejakého bodu z priamky p. Takže obrazom priamky neprechádzajúcej bodom O je kružnica prechádzajúca bodom O. Keďže $f(f(M)) = M$ pre každú množinu bodov M (neobsahujúcu bod O), vieme aj to, že obrazom kružnice prechádzajúcej bodom O je priamka neprechádzajúca bodom O.

Ukážeme aj analytický dôkaz. Od ďalších dôkazov využívajúcich metódu súradníc upustíme, veríme, že čitateľ ich zvládne aj sám. Nech p je priamka neprechádzajúca bodom O. Súradnicovú sústavu môžeme zvoliť tak, že O bude počiatkom a priamka p bude kolmá na os x. Takže p má rovnicu $x = m$ pre nejaké kladné číslo m. Namiesto obrazu tejto priamky budeme hľadať jej vzor v tej istej inverzii. Na začiatku sme si ukázali, že vzor je totožný s obrazom, lebo $M = f(f(M))$ pre každú množinu bodov neobsahujúcu bod O, teda aj pre našu priamku. Nech $A' = [x', y']$ patrí do p'. Bod $A = (A')'$ má súradnice $[x' \cdot r^2/(x'^2 + y'^2), y' \cdot r^2/(x'^2 + y'^2)]$. Bod A musí ležať na priamke p, takže platí

$$\frac{r^2}{x'^2 + y'^2} \cdot x' = m.$$

Z tohto po ekvivalentnej úprave dostaneme, že

$$\left(x' - \frac{r^2}{2m}\right)^2 + y'^2 = \left(\frac{r^2}{2m}\right)^2.$$

Inak povedané, bod A leží na kružnici so stredom $[r^2/2m, 0]$ a polomerom $r^2/2m$. Táto kružnica prechádza bodom O.

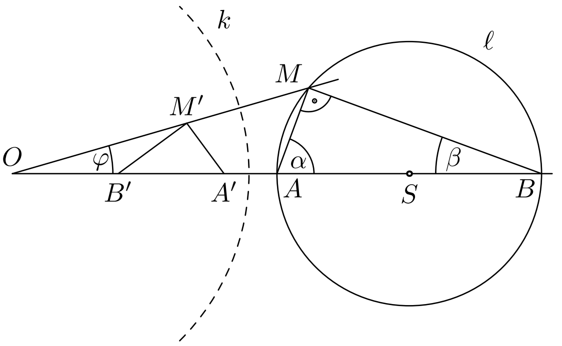
Teraz už vieme ľahko zobraziť ľubovoľnú priamku. Aj kružnicu prechádzajúcu stredom inverzie O. Čo je však obrazom kružnice neprechádzajúcej bodom O? Vezmime si kružnicu, ktorá má stred v bode O. Jednu takúto predstavuje samotná kružnica $k(O, r)$, ktorá sa zobrazí sama na seba. Ostatné kružnice so stredom O sa zväčšia či zmenšia, závisí to od ich polomeru. Vyskúšajte si to a dokážte.

Vezmime si dve rôznobežné priamky neprechádzajúce bodom O, označme ich priesečník P. Obrazy týchto priamok budú kružnice. Koľko spoločných bodov budú mať tieto kružnice? Minimálne bod O. Avšak bod P patrí obom spomínaným priamkam, preto jeho obraz patrí obom kružniciam. Na druhej strane, keby naše kružnice mali spoločný ešte nejaký ďalší bod R rôzny od O aj P, tak tento bod musí mať svoj vzor na oboch priamkach. To však nie je možné, pretože tieto priamky mali iba jediný spoločný bod P. Inak povedané, inverzia zachováva počet priesečníkov (až na bod O). Overte si to na rovnobežných priamkach (čo bude obrazom?) a nejakých iných množinách bodov.

Vezmime si kružnicu, ktorá neprechádza bodom O a bod O nie je jej stredom. Narysovaním dostatočného množstva obrázkov (áno, toto je vaša práca) prídeme k hypotéze, že obrazom tejto kružnice je kružnica. (Z už dokázaných vlastností je jasné, že nemôže prechádzať bodom O.) Túto hypotézu dokážeme. Potrebujeme na to nejaké dobré kritérium pre body

[1] Nech A'' je priesečník kružnice $(M'MA)$ s priamkou OA rôzny od bodu A. Štvoruholník $M'MAA''$ je tetivový, preto platí $OM' \cdot OM = OA \cdot OA'$. Porovnaním so vzťahom $OM' \cdot OM = OA \cdot OA''$ dostávame, že $OA' = OA''$, čo však znamená, že body A', A'' sú totožné.

ležiace na kružnici. V princípe kružnica je množina bodov rovnako vzdialených od jej stredu, avšak to je nám tu dosť nanič, pretože inverzia vzdialenosti pokazí a stred kružnice už nebude stredom jej obrazu. S iným kritériom ste sa už určite stretli: hovorí o ňom Tálesova veta.



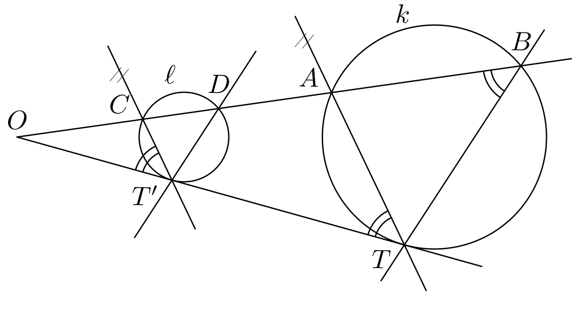
Máme teda kružnicu ℓ so stredom S. Pre jednoduchosť predpokladajme, že kružnica ℓ leží zvonka kružnice k (zvyšné prípady zvládnete vyriešiť aj sami, spraví sa to podobne ako tento). Označme A, B priesečníky polpriamky OS s kružnicou k (pozrite si obrázok, ešte lepšie bude, ak si nakreslíte vlastný). Body A, B sa zobrazia na body A', B' ležiace vnútri kružnice k. (Prečo body B, A', A, B' ležia na priamke OS v tomto poradí?) Vezmime si nejaký bod M ležiaci na kružnici ℓ (rôzny od bodov A, B). Ukážeme, že jeho obraz M' leží na Tálesovej kružnici nad priemerom $B'A'$. To je ekvivalentné s tým, že uhol $B'M'A'$ je pravý.

Označme veľkosti uhlov ABM, BAM, MOA písmenami β, α, φ. Bod M leží na kružnici nad priemerom AB, preto $\alpha + \beta = 90°$. Z definície inverzie platí $OB' \cdot OB = r^2 = OM' \cdot OM$, preto štvoruholník $B'BMM'$ je tetivový. Takže uhol $OM'B'$ má veľkosť β a preto uhol $M'B'A'$ má veľkosť $\varphi + \beta$. Zopakovaním tejto úvahy pre štvoruholník $A'AMM'$ dostaneme, že $|\angle M'A'O| = |\angle OMA| = \alpha - \varphi$ (posledná rovnosť je z trojuholníka OAM). Čo sme chceli? Veľkosť uhla $B'M'A'$. Tá je

$$|\angle B'M'A'| = 180° - (\varphi + \beta) - (\alpha - \varphi) = 180° - (\alpha + \beta) = 90°.$$

Táto úvaha platí pre ľubovoľný bod M zo spomínaného oblúka. Navyše je ľahké obrátením úvahy zdôvodniť, že každý bod Tálesovej kružnice nad priemerom $B'A'$ je obrazom nejakého bodu kružnice ℓ. Dokázali sme, že obrazom kružnice neprechádzajúcej bodom O je kružnica.

Na situáciu pri zobrazovaní kružnice sa dá dívať aj inak. Majme v rovine bod O a nejakú kružnicu k (opäť pre jednoduchosť predpokladáme, že táto kružnica je dostatočne ďaleko od bodu O). Inverziu budeme robiť s polomerom r. Chceme dokázať, že obrazom kružnice k je kružnica. Vezmime si dotyčnicu ku kružnici k prechádzajúcu bodom O, dotykový bod označme T. Kam sa zobrazí bod T? Nech jeho obraz je T'. Obrazom polpriamky OT je samotná táto polpriamka. Keďže kružnica k má s polpriamkou OT spoločný práve jeden bod, aj obraz kružnice k musí mať s obrazom polpriamky OT práve jeden spoločný bod. Takže ak obrazom kružnice k je kružnica ℓ, tak kružnica ℓ sa dotýka priamky OT v bode T' (analogicky sa dotýka tej druhej dotyčnice ku kružnici k z bodu O). Z tohto je jasné, prečo uvažujeme o dotyčnici ku k. Dokážeme, že takáto kružnica ℓ je naozaj obrazom kružnice k.



Vezmime sečnicu kružnice k, ktorá ju pretína v bodoch A, B. Táto priamka pretne kružnicu ℓ v bodoch C, D. Kružnice k a ℓ sú rovnoľahlé v istej rovnoľahlosti so stredom O. Takže máme dve dvojice rovnobežných priamok: TB, $T'D$ a TA, $T'C$. Chceme dokázať, že bod C je obrazom bodu B a bod D je obrazom bodu A, teda že platí

$$OB \cdot OC = r^2 \qquad \text{a} \qquad OA \cdot OD = r^2. \tag{1}$$

Z podobnosti trojuholníkov OTB a $OT'D$ vieme, že

$$\frac{OD}{OT'} = \frac{OB}{OT}. \tag{2}$$

Z podobnosti trojuholníkov OTA a $OT'C$ vieme, že

$$\frac{OC}{OT'} = \frac{OA}{OT}. \tag{3}$$

Navyše T' je obrazom bodu T, takže $OT \cdot OT' = r^2$. Z tohto všetkého chceme odvodiť rovnosti (1).

Vynásobením vzťahov (2) a (3) (uvedomte si, ako a prečo ich násobíme) dostaneme $OB \cdot OC = OA \cdot OD$. Z tohto je jasné, že na dôkaz rovností (1) stačí dokázať, že

$$OA \cdot OB \cdot OC \cdot OD = r^4 = OT^2 \cdot OT'^2. \tag{4}$$

Posledná rovnosť nevyplýva priamo zo vzťahov, ktoré sme si zatiaľ napísali (vyskúšajte si to). Potrebujeme ešte niečo viac. Čo ešte vieme o súčinoch dĺžok OA, OB, OC, OD? Áno, mocnosť bodu O ku kružniciam k a ℓ. Platí $OT^2 = OA \cdot OB$ a tiež $OT'^2 = OC \cdot OD$. Vynásobením posledných dvoch vzťahov dostávame priamo rovnosť (4) a sme hotoví.

Ešte sa na chvíľu vrátime k poslednému dôkazu. Vzťah $OB \cdot OC = r^2 = OT \cdot OT'$, ktorý chceme dokázať, sa dá prepísať na rovnosť dvoch pomerov

$$\frac{OC}{OT'} = \frac{OT}{OB}.$$

Táto rovnosť je ekvivalentná s podobnosťou trojuholníkov OCT' a OTB. Tieto trojuholníky sú podobné práve vtedy, keď uhly $OT'C$ a OBT majú rovnakú veľkosť. Uhol $OT'C$ je zhodný s uhlom OTA, lebo priamky CT' a AT sú rovnobežné. A uhol OBT je tiež zhodný s uhlom OTA, ako hovorí veta o úsekovom uhle[2]. Hotovo.

Vyzbrojení týmito poznatkami si môžeme trúfnuť vyriešiť niekoľko úloh.

Príklad 1. V rovine sú dané dve kružnice k, ℓ s priesečníkmi A, B. Vezmime priamku p prechádzajúcu bodom B, jej druhý priesečník s kružnicou k označme C, jej druhý priesečník s kružnicou ℓ označme D. Dokážte, že veľkosť uhla CAD nezávisí od polohy priamky p.

Riešenie: Najprv vyriešte úlohu bez použitia inverzie, nie je ťažká.

Zaujíma nás veľkosť uhla zovretého priamkami AC a AD. Obe tieto priamky prechádzajú bodom A. Navyše týmto bodom prechádzajú aj obe kružnice k, ℓ. Zobrazme teda celú situáciu v inverzii so stredom A a nejakým polomerom r. Obrazmi kružníc k, ℓ budú priamky k', ℓ' s priesečníkom B'. Obrazom priamky p je kružnica p', ktorá prechádza bodom A. Táto kružnica pretína priamku k' po druhýkrát v bode C' a priamku ℓ' po druhýkrát v bode D'. Máme tri možné poradia, ako môžu na kružnici p' ležať tieto body: A, C', B', D', alebo A, B', C', D', alebo A', C', D', B'. Vo všetkých troch prípadoch je veľkosť uhla $C'AD'$ rovná veľkosti uhla zovretého priamkami k', ℓ' (toho, v ktorom neleží bod A). A to je presne to, čo sme chceli dokázať.

Úloha 3. Daný je trojuholník ABC so stredom vpísanej kružnice I (v angličtine sa tento bod nazýva *incenter*). Dokážte, že os strany AB, os uhla CAB a kružnica opísaná trojuholníku ABC sa pretínajú v jednom bode. Označme tento bod S. Dokážte, že S je stred kružnice opísanej trojuholníku ABI.[3]

[2]Ak túto vetu nepoznáte, skúste si ju dokázať. Znenie: Nech T je dotykový bod kružnice k a priamky p. Nech A je ľubovoľný bod kružnice k rôzny od T. Potom uhol nad tetivou AT (pre body ležiace na jednom z dvoch oblúkov AT kružnice k) je rovný uhlu, ktorý zvierajú priamky AT a p. (Platí to aj naopak: ak uhol určený nejakou priamkou q prechádzajúcou bodom T a priamkou AT je rovný uhlu nad tetivou AT, tak q je dotyčnica.)

[3]Toto je známy fakt často využívaný pri riešení úloh, dokážte ho bez použitia inverzie.

Príklad 2. V rovine sú dané tri zhodné kružnice, ktoré prechádzajú spoločným bodom H. Označme druhé priesečníky týchto kružníc A, B, C (rôzne od H). Dokážte, že H je ortocentrum trojuholníka ABC.

Riešenie: Bodom H prechádzajú tri kružnice. Oplatí sa preto spraviť inverziu so stredom H, v nej sa tieto kružnice zobrazia na priamky. Vyskúšajme to a dúfajme, že úloha, ktorá vznikne, bude jednoduchšia. Ako sa zmení dokazované tvrdenie? Pokiaľ nedokážeme toto tvrdenie sformulovať pre situáciu, ktorá vznikne po zobrazení, sme na nesprávnej ceste. Je jasné, že stačí dokázať kolmosť priamok AH a BC (rovnakou úvahou získame dôkaz ostatných dvoch kolmostí). Obrazom priamky AH bude ona sama, obrazom priamky BC bude kružnica $(B'C'H)$. Ak priamky AH a BC sú na seba kolmé, tak stred kružnice $(B'C'H)$ leží na priamke $A'H$ (s týmto sme sa stretli pri dôkaze toho, že priamka BC sa zobrazí na kružnicu). Platí to aj naopak: ak stred kružnice $(B'C'H)$ leží na priamke $A'H$, tak priamky AH a BC sú na seba kolmé.

Tvrdenie úlohy neplatí bez predpokladu, že všetky kružnice majú rovnaký polomer. Ako využiť, že kružnice (AHB) a (AHC) sú zhodné? Tieto kružnice sú zhodné práve vtedy, keď sú osovo súmerné podľa priamky AH. Ich obrazmi sú priamky $A'B'$ a $A'C'$. Kružnicová inverzia zachováva osovú súmernosť podľa osi prechádzajúcej stredom inverzie (overte si to!). Preto aj priamky $A'B'$ a $A'C'$ sú osovo súmerné podľa osi $A'H$ (využívame, že priamka AH prechádza stredom inverzie a teda je samodružná). Takže uhly $C'A'H$ a $B'A'H$ sú rovnaké a $A'H$ je osou uhla $C'A'B'$. Analogicky priamky $C'H$ a $B'H$ sú osami uhlov v trojuholníku $A'B'C'$.

Stred kružnice opísanej trojuholníku $B'C'H$ je priesečník osi uhla $C'A'B'$ s kružnicou opísanou trojuholníku $A'B'C'$ (pozri predchádzajúcu úlohu), preto leží na priamke $A'H$. Tým sme dokázali tvrdenie úlohy.

Aký bol polomer inverzie r v našom riešení? Nezáležalo na ňom, mohli sme si ho zvoliť ľubovoľne. Vyskúšajte si ho zvoliť tak, aby sa kružnica $k(H, r)$ dotýkala tých troch kružníc zo zadania. Nakreslite si obrázok a preskúmajte situáciu.

V skutočnosti nám inverzia pri riešení veľmi nepomohla, skôr sme si ilustrovali jej použitie. Úloha bola ľahko riešiteľná aj bez inverzie. Vyriešte ju! Navyše platí, že kružnica opísaná trojuholníku ABC je zhodná s tými kružnicami zo zadania. Dokážte to!

5. Apollóniove úlohy

Najrozvinutejšou oblasťou matematiky v starom Grécku bola geometria. V planimetrii vyriešili Gréci v podstate všetky úlohy, ktoré sa dali vyriešiť bez použitia algebry. Jednou z najznámejších sérií konštrukčných úloh, ktoré nám Gréci zanechali, sú *Apollóniove úlohy*.

Máme v rovine daný bod, priamku a kružnicu. Úlohou je zostrojiť kružnicu, ktorá prechádza daným bodom, dotýka sa danej priamky a dotýka sa danej kružnice. Rôznymi kombináciami daných bodov, priamok a kružníc (vždy zadáme tri objekty) získame desať konštrukčných úloh.

Dve z nich sa preberajú v škole, a to zostrojenie kružnice opísanej trojuholníku (prechádza tromi danými bodmi) a zostrojenie kružnice vpísanej do trojuholníka (dotýka sa troch daných priamok). Len málo žiakov však rozumie týmto konštrukciám (prečo sa osi strán či uhlov pretínajú v jednom bode?). A bežne sa neurčuje počet riešení (poznáte pripísané kružnice?), aj keď je to súčasťou štandardného postupu pri riešení konštrukčných úloh.

Väčšinu týchto úloh vyriešime bežnými prostriedkami: rovnoľahlosťou a pomocou mocnosti bodu ku kružnici. Niektoré úlohy vieme inverziou alebo inou úvahou zredukovať na inú Apollóniovu úlohu (napríklad prípad troch kružníc na dve kružnice a bod/priamku). Najdlhšie mojim pokusom o vyriešenie odolávala úloha, keď máme daný bod, priamku a kružnicu, ktoré nemajú spoločné body. Tu pomôže inverzia podstatným spôsobom: namiesto kružnice budeme zostrojovať priamku.

Týchto desať úloh možno predložiť žiakom naraz. Treba im nechať dostatok času na samostatnú prácu, napríklad týždeň. (Samozrejme, okrem času potrebujú deti motiváciu.) Asi štyri až päť úloh vyriešia rýchlo aj bez inverzie a tie ostatné predstavujú výzvu aj pre skúsenejších.

6. Vzdialenosti

Majme dva body A, B také, že priamka AB neprechádza bodom O. Štvoruholník $ABB'A'$ je tetivový. Trojuholníky OAB a $OB'A'$ sú podobné a z toho vieme vyjadriť vzdialenosť $A'B'$ pomocou AB:

$$A'B' = \frac{r^2}{OA \cdot OB} \cdot AB.$$

Je ľahké overiť, že tento vzťah platí aj pre body A, B na priamke prechádzajúcej bodom O.

Vyzerá to dosť komplikovane, vzdialenosť obrazov závisí od OA aj OB, nevidno z toho, ako inverzia mení vzdialenosti. Napriek tomu je tento vzťah na čosi užitočný, ako uvidíme v ďalšej kapitole.

7. Ptolemaiova nerovnosť

Jednou zo známych nerovností je *Ptolemaiova nerovnosť*. Nech $ABCD$ je štvoruholník. Potom platí

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD \geq AC \cdot BD,$$

rovnosť nastáva práve vtedy, keď je štvoruholník $ABCD$ tetivový.

Ako by sa dala takáto nerovnosť dokázať? Súčet dvoch vecí má byť viac ako tretia. To je trojuholníková nerovnosť pre vhodný trojuholník. Viem o troch dôkazoch Ptolemaiovej nerovnosti a všetky sú založené na trojuholníkovej nerovnosti. Okrem nej jeden používa podobnosť, druhý Simsonovu priamku a tretí inverziu.

Dobre, máme štyri body A, B, C, D. Keď chceme robiť inverziu, tak na to treba jej stred. Máme dve možnosti. Buď je rôzny od vrcholov štvoruholníka $ABCD$, alebo je to jeden z nich. V tom druhom prípade navyše zvyšné vrcholy vytvoria trojuholník, takže azda aj trojuholníková nerovnosť sa tam nájde.

Nech A je stred inverzie. Trojuholníková nerovnosť pre trojuholník $B'C'D'$ určený obrazmi bodov B, C, D hovorí, že

$$B'C' + C'D' \geq B'D'.$$

Po dosadení výsledku z predošlej kapitoly a predelení r^2 máme

$$\frac{BC}{AB \cdot AC} + \frac{CD}{AC \cdot AD} \geq \frac{BD}{AB \cdot AD},$$

z čoho po prenásobení výrazom $AB \cdot AC \cdot AD$ dostávame Ptolemaiovu nerovnosť. Rovnosť v trojuholníkovej nerovnosti nastane, ak body B, C, D ležia na priamke v tomto poradí, teda keď body A, B, C, D ležia na kružnici.

V skutočnosti sme dokázali tvrdenie ešte všeobecnejšie, pretože naša úvaha funguje aj v priestore a pre body A, B, C, D neležiace v rovine („guľová inverzia“).

Úloha 4. Daný je rovnostranný trojuholník ABC a bod P na kratšom oblúku BC jemu opísanej kružnice. Dokážte, že $AP = BP + CP$.

8. Úlohy

Nasledujúce úlohy nie sú ťažké (väčšinou ani ľahké. . .). Podarilo sa mi ich zrátať.

Úloha 5. V rovine sú dané dve kružnice k, ℓ s priesečníkmi A, C. V bode A spravíme dotyčnicu ku k, tá druhýkrát pretne kružnicu ℓ v bode D. Bod B je priesečníkom kružnice k s dotyčnicou ku kružnici ℓ v bode A. Dokážte, že $|AB| \cdot |CD| = |AC| \cdot |AD|$.

Úloha 6. Kružnice k_1, k_2 sa pretínajú v bodoch A, B. Kružnica k_3 sa zvonku dotýka kružníc k_1, k_2 po poradí v bodoch C, E. Kružnica k_4 sa zvonku dotýka kružníc k_1, k_2 po poradí v bodoch D, F. Dokážte, že kružnica opísaná trojuholníku ACE sa dotýka kružnice opísanej trojuholníku ADF.

Úloha 7. Kružnica ℓ sa zvnútra dotýka kružnice k v bode A. Zvolíme bod B na kružnici ℓ. Dotyčnica ku ℓ v bode B pretne kružnicu k v bodoch D, E. Označme C stred toho oblúka DE kružnice k, ktorý neobsahuje bod A. Dokážte, že body A, B, C ležia na priamke.

Úloha 8. Kružnice k_1, k_2 sa zvonka dotýkajú v bode D. Priamka p sa dotýka kružníc k_1, k_2 po rade v (rôznych) bodoch A, B. Úsečka AC je priemerom kružnice k_1. Priamka q prechádza cez bod C a dotýka sa kružnice k_2 v bode E. Dokážte, že trojuholník ACE je rovnoramenný.

Úloha 9. Dané sú kružnice k_1, k_2, k_3, k_4 tak, že k_i sa zvonka dotýka k_{i+1} pre $i = 1, 2, 3, 4$ ($k_5 = k_1$). Dokážte, že štyri dotykové body týchto kružníc ležia na jednej kružnici.

Úloha 10. Daný je trojuholník ABC. Vnútri strán CA, CB ležia v tomto poradí body Y, X. Nech P je priesečník uhlopriečok štvoruholníka $ABXY$. Nech Q je priesečník kružníc opísaných trojuholníkom BYC a AXC rôzny od bodu C. Dokážte, že body P, Q, C ležia na priamke práve vtedy, keď je štvoruholník $ABXY$ tetivový.

Úloha 11. Dané sú dve kružnice k, ℓ pretínajúce sa v bodoch D a A. Spoločná dotyčnica týchto kružníc bližšia k bodu A sa dotýka kružnice k v bode E a kružnice ℓ v bode F. Rovnobežka so spoločnou dotyčnicou prechádzajúca bodom D pretína kružnicu k v bode C a kružnicu ℓ v bode B (tieto body sú rôzne od bodu D). Dokážte, že druhý priesečník (rôzny od bodu D) kružníc opísaných trojuholníkom CDF a BDE leží na priamke AD.

Úloha 12. V rovine je daný trojuholník DEF a tri body A, B, C. Dokážte, že existuje kružnica taká, že keď podľa nej urobíme inverziu, tak obrazy A', B' C' bodov A, B, C vytvoria trojuholník $A'B'C'$ podobný trojuholníku DEF.

Ostatné úlohy sú prevzaté a mali by sa dať riešiť inverziou, neskúmal som ich podrobne.

Úloha 13. Dve kružnice sa dotýkajú zvonka v bode A. Do krivočiareho trojuholníka určeného týmito kružnicami a ich spoločnou dotyčnicou vpíšeme kružnicu so stredom O a polomerom r. Dokážte, že $|AO| \leq 3r$.

Úloha 14. Kružnice k_1, k_2 sa pretínajú v bodoch A, B. Priamka rôzna od AB pretína kružnicu k_1 v bodoch C, D, kružnicu k_2 v bodoch E, F a priamku AB v bode P ležiacom mimo úsečky AB. Dokážte, že priamka spájajúca stredy kružníc opísaných trojuholníkom ACE a BDF prechádza bodom P.

$*$ **Úloha 15.** Nech ABC je trojuholník s opísanou kružnicou k a nech D je bod na strane BC. Dokážte, že kružnice dotýkajúce sa k, AD, AB a k, AD, DC sa navzájom dotýkajú práve vtedy, keď uhly BAD a CAD majú rovnakú veľkosť.

$*$ **Úloha 16.** Daná je polkružnica k s priemerom AB a stredom O a priamka, ktorá pretína polkružnicu k v bodoch C a D a priamku AB v bode M ($MB < MA$, $MD < MC$). Nech k

je druhý priesečník kružníc opísaných trojuholníkom AOC a DOB. Dokážte, že uhol MKO je pravý.

Úloha 17. Nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník s kolmými uhlopriečkami pretínajúcimi sa v bode O. Dokážte, že obrazy bodu O v osovej súmernosti podľa priamok AB, BC, CD, DA ležia na kružnici. (Nájdite aj dôkaz bez inverzie.)

$*$ **Úloha 18.** Kružnica vpísaná do trojuholníka ABC sa dotýka jeho strán BC, CA, AB po poradí v bodoch D, E, F. Bod X leží vnútri trojuholníka ABC tak, že kružnica vpísaná do trojuholníka XBC sa dotýka priamky BC v bode D a priamok CX a XB v bodoch Y a Z (v tomto poradí). Dokážte, že $EFZY$ je tetivový štvoruholník.

$*$ **Úloha 19.** Nech PQ je priemer polkružnice k. Kružnica ℓ sa zvnútra dotýka polkružnice k a dotýka sa priamky PQ v bode C. Nech A je bod na k a B bod na priamke PQ taký, že priamka AB je kolmá na priamku PQ a dotýka sa kružnice ℓ. Dokážte, že AC je osou uhla PAB.

$*$ **Úloha 20.** Nech K, L, M sú dotykové body kružnice vpísanej do trojuholníka ABC so stranami BC, CA, AB (v tomto poradí). Dokážte, že ortocentrum trojuholníka KLM, stred kružnice vpísanej do trojuholníka ABC a stred kružnice opísanej trojuholníku ABC ležia na jednej priamke.

$*$ **Úloha 21.** Nech ABC je trojuholník a O stred jemu opísanej kružnice. Priamky AB a AC pretínajú kružnicu opísanú trojuholníku BOC po druhýkrát v bodoch B_1 a C_1 (v tomto poradí). Nech D je priesečník priamok BC a B_1C_1. Dokážte, že kružnica dotýkajúca sa priamky AD v bode A, ktorej stred leží na priamke B_1C_1, je kolmá na kružnicu s priemerom OD.

$*$ **Úloha 22.** Nech O je stred kružnice opísanej štvoruholníku $ABCD$, I je stred kružnice doň vpísanej a P priesečník jeho uhlopriečok. Dokážte, že body O, I, P ležia na jednej priamke. (Navyše bod P je pevný pre všetky štvoruholníky, ktoré sa dajú vpísať do danej kružnice tak, aby druhá daná kružnica bola jeho vpísanou.)

$*$ **Úloha 23.** Šesťuholník $ABCDEF$ je vpísaný do kružnice k. Kružnice $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6$ sa zvnútra dotýkajú kružnice k v bodoch A, B, C, D, E, F. Kružnica k_i sa zvonka dotýka kružnice k_{i+1} pre $i = 1, 2, \dots, 6$ (pritom $k_7 = k_1$). Dokážte, že priamky AD, BE, CF sa pretínajú v jednom bode.

$*$ **Úloha 24.** Nech P je bod vnútri trojuholníka ABC taký, že

$$|\angle APB| - |\angle ACB| = |\angle APC| - |\angle ABC|.$$

Nech D, E sú stredy kružníc vpísaných do trojuholníkov APB a APC. Dokážte, že priamky AP, BD, CE prechádzajú jedným bodom.

$*$ **Úloha 25.** Nech body C, D ležia v jednej z polrovín určených priamkou AB. Platí

$$|AC| \cdot |BD| = |AD| \cdot |BC| \qquad \text{a súčasne} \qquad |\angle ADB| = \frac{\pi}{2} + |\angle ACB|.$$

Nájdite pomer

$$\frac{|AB| \cdot |CD|}{|AC| \cdot |BD|}$$

a dokážte, že kružnice opísané trojuholníkom ACD a BCD sú ortogonálne.

$*$ **Úloha 26.** Bod O leží v rovine trojuholníka ABC. Kružnica k prechádzajúca cez bod O je druhýkrát preťatá priamkami OA, OB, OC po rade v bodoch P, Q, R. Body K, L, M (v tomto poradí) sú druhé priesečníky kružnice k s kružnicami opísanými trojuholníkom BOC, AOC, AOB. Dokážte, že priamky PK, QL, RM prechádzajú jedným bodom.

$*$ **Úloha 27.** Daný je konvexný šesťuholník $ABCDEF$ taký, že $|\angle B| + |\angle D| + |\angle F| = 360°$ a

$$\frac{AB}{BC} \cdot \frac{CD}{DE} \cdot \frac{EF}{FA} = 1.$$

Dokážte, že

$$\frac{BC}{CA} \cdot \frac{AE}{EF} \cdot \frac{FD}{DB} = 1.$$

$*$ **Úloha 28.** Nech k je kružnica a AB priamka nepretínajúca k. K danému bodu P_0 na kružnici k definujme postupnosť $P_0, P_1, \dots$ takto: P_{n+1} je druhý priesečník kružnice k s priamkou určenou bodom B a druhým priesečníkom priamky AP_n s kružnicou k. Nech k je ľubovoľné prirodzené číslo. Dokážte, že ak platí $P_0 = P_k$ pre nejakú voľbu P_0, tak $P_0 = P_k$ pre každú voľbu P_0.

9. Návody na riešenie úloh

1. Čo je to samodružný bod? Čo to znamená v našom konkrétnom prípade (pozri definíciu inverzie)?

2. Skúste si úlohu pre konkrétne b, c, napr. ako nájdeme stred úsečky? A ako tretinu jej dĺžky? Kde v geometrii sa vyskytujú pomery?

3. Porátame vhodné uhly.

4. Čo pripomína dokazovaný vzťah?

5. Vieme sa vhodnou inverziou zbaviť nejakých kružníc?

6. Preč s kružnicami! Ako sa môže zmeniť dokazované tvrdenie, keď budeme robiť inverziu?

7. Dá sa robiť inverzia tak, aby sa kružnica k zobrazila na priamku DE?

8. Narysujte si presný obrázok a skúste čosi odpozorovať. Existuje riešenie úlohy využívajúce iba Pytagorovu vetu. Ale my chceme použiť inverziu. Ako sa to dá, aby sa dokazované tvrdenie zmenilo na čosi rozumné?

9. Preč čo najviac kružníc.

10. Body P, Q, C majú ležať na priamke. Dá sa táto priamka zafixovať inverziou? Štvoruholník ABXY má byť tetivový. To sa dá popísať mocnosťou bodu ku kružnici a z toho vieme, aký má byť polomer inverzie.

11. Preč nejaké kružnice.

10. Riešenia úloh

1. Z definície inverzie je bod samodružný práve vtedy, keď $|OX|^2 = r^2$. Preto samodružné sú všetky body ležiace na kružnici so stredom O a polomerom r a žiadne iné.

2. Pri konštrukcii využijeme podobnosť. Chceme (b/c)-krát zväčšiť úsečku dĺžky a. (Uvedomte si, že toto je trocha inak preformulovaná úloha — máme jasný cieľ, vieme, čo chceme dosiahnuť.) Zostrojíme dva podobné trojuholníky, pričom prvý bude mať stranu dĺžky a

a strany týchto trojuholníkov budú v pomere $b : c$. Dva podobné trojuholníky vieme v rovine umiestniť tak, že budú mať spoločný vrchol a strany obsahujúce tento vrchol budú ramenami uhla. Z tohto vyplýva naša konštrukcia: zostrojíme ľubovoľný ostrý uhol a na jedno jeho rameno nanesieme úsečku dĺžky a (jej koncový bod rôzny od vrchola uhla označme A). Ako dosiahnuť, aby naše trojuholníky mali strany v pomere $b : c$? No najľahšie tak, že jeden bude mať stranu dĺžky b a druhý stranu dĺžky c. Preto na druhé rameno nanesieme úsečky dĺžok b a c (analogicky ako bod A vzniknú body B a C). A už len vedieme bodom B rovnobežku s priamkou AC, jej priesečník s ramenom uhla rôzny od bodu B nám určuje úsečku dĺžky ab/c.

3. Uhly SCA a SCB sú rovnako veľké. Preto aj im zodpovedajúce tetivy SA, SB na kružnici (ABC) sú rovnako dlhé, takže S leží na osi strany AB. Uhly AIS, IAS sú rovnako veľké, preto $SA = SI$.

4. Ptolemaiova nerovnosť pre tetivový štvoruholník $ABPC$.