Obsahy a ich využitie v planimetrii

1. Úvod

Pri práci so žiakmi na matematickom krúžku a sústredeniach korešpondenčných seminárov som si všimol, že im chýba ucelenejší pohľad na planimetriu. Prejavuje sa to najmä pri riešení úloh. Vezmime si úlohy napríklad z MO. S poznatkami, ktoré žiaci preberali v škole, by mali tieto úlohy vyriešiť. Keď im prezentujem riešenie, ľahko ho pochopia. Avšak často nedokážu riešenie samostatne objaviť. A aj keď niečo vyriešia a nechám si vysvetliť riešenie, nedokážu odpovedať na otázku „Prečo toto platí?“. Typickým príkladom je niekoľko faktov, ktoré sa v škole preberajú, deti však nevedia, odkiaľ sa vzali:

1. Súčet uhlov v trojuholníku je 180°.
2. Ťažnice (výšky, osi uhlov) trojuholníka sa pretínajú v jednom bode.
3. Trojuholníku sa vždy dá opísať práve jedna kružnica.

Žiaci nepoznajú dôkazy týchto tvrdení. Preto samotné tvrdenia často zabúdajú. Nenaučia sa dívať sa na matematiku ako na ucelený systém. Ani geometricky uvažovať, metódy dôkazov týchto tvrdení sú poučné.

Cieľom tohto textu je ukázať si na niekoľkých príkladoch súvislosti v planimetrii. Konkrétne sa pozrieme na obsahy, ich využitie a súvis s podobnosťou. Obtiažnosťou je materiál vhodný skôr pre stredoškolákov, alebo pre matematické krúžky v posledných ročníkoch ZŠ. Úlohy sú formulované stredoškolsky, ako v MO kat. A až C. Formulácie treba prispôsobiť žiakom. Napríklad: Pri práci so základoškolákmi sa skúste (aspoň spočiatku) vyhnúť formulácii „dokážte, že…“, ktorá nemá pre týchto žiakov žiaden obsah (absencia dôkazov v osnovách).

Úlohy nie sú ľahké a deťom môže ich riešenie trvať dlho (štvrťhodinu aj pri ľahkých úlohách), aj keď im trocha pomáhame. Pri riešení kladieme deťom vhodné otázky. Vhodné otázky sú *všeobecné* a zodpovedajú základným myšlienkovým pochodom pri riešení akejkoľvek úlohy (problému). Keď sa ich budeme pýtať dostatočne často, deti sa naučia klásť si takéto otázky samé od seba (možno nie na vedomej úrovni). A potom už budú vedieť riešiť samostatne. To sa samozrejme nedá dosiahnuť za krátky čas, trvá to roky.

Rozoberme si ako príklad otázku „Kde môžeš použiť Pytagorovu vetu?“ Táto otázka vôbec nespĺňa účel popísaný v predošlom odstavci a navyše je škodlivá. Vezmime si žiaka, ktorý úlohu nedokáže sám vyriešiť. Čo sa stane, keď počuje túto otázku? Prvé, čo ho zarazí, je, že odkiaľ na to učiteľ prišiel. Aká mágia za tým je? Prečo práve Pytagorova veta a nie Tálesova, Euklidova…? Žiak nevidí súvis medzi úlohou a Pytagorovou vetou, preto ani nabudúce nepríde na to, že treba použiť Pytagorovu vetu. Ak žiak Pytagorovu vetu dobre pozná, mal dostatok času úlohu riešiť a nedokázal tú vetu použiť, tak ani teraz nebude vedieť, čo s ňou. Ak žiak Pytagorovu vetu dobre nepozná, tak mu učiteľova „pomoc“ aj tak nepomôže, pretože jeho poznatok je nedostatočný (alebo formálny — potrebuje vidieť trojuholník so stranami a, b, c, aby mohol použiť vzorec $a^2 + b^2 = c^2$). Inak povedané, otázka mu nepomohla úlohu vyriešiť. Tento príklad ilustruje, prečo treba opatrnosť pri kladení otázok a pomáhaní žiakom.

Viac o kladení otázok nájdete v materiáli *Dá sa z päťuholníka poskladať štvorec?*, ktorý si môžete stiahnuť na `www.ucmeradi.sk`.

Pri čítaní si kreslite vlastné obrázky. Podobne ku kresleniu veľkých, prehľadných obrázkov nabádajte aj žiakov.

2. Obsahy

Dohodneme sa kvôli stručnosti a prehľadnosti na nasledovnom označení. Dĺžku úsečky AB budeme označovať prosto AB bez absolútnej hodnoty. Veľkosť obsahu trojuholníka ABC budeme označovať $[ABC]$, podobne pre štvoruholník $ABCD$ jeho obsah bude $[ABCD]$. Veľkosť uhla ABC označíme ABC, pokiaľ bude z kontextu jasné, o čo ide. Takéto značenie volíme kvôli stručnosti: zvislé čiary pri dĺžke úsečky sú zbytočné, pretože dĺžka úsečky je jediná rozumná vec, ktorá sa dá na úsečke merať. Výrazy bez zbytočných symbolov sa ľahšie a rýchlejšie čítajú. (Toto značenie je viacmenej štandardné, napríklad v Poľsku, Rumunsku či v anglicky hovoriacich krajinách.)

Definícia obsahu nie je jednoduchá. Viac na túto tému si môžete pozrieť napríklad na stránke `http://en.wikipedia.org/wiki/Area_%28geometry%29#How_to_define_area`. Euklides mnoho tvrdení vo svojich Základoch dokazuje pomocou obsahov, pritom pojem obsah ani nepoužíva a narába s ním intuitívne, vždy ako s pomerom obsahov. S obsahom budeme intuitívne pracovať i my, napríklad ako s plochou koberca potrebného na pokrytie rovinného útvaru.

Ukážeme si Euklidov dôkaz vety *uu* o podobnosti trojuholníkov. Táto úloha nie je vhodná pre žiakov medzi prvými na samostatné riešenie: dokazujeme ekvivalenciu a v dôkaze používame obsahy trojuholníkov, o ktorých sa v zadaní nehovorí nič. Tento dôkaz tu uvádzam ako príklad peknej súvislosti medzi spomínanými pojmami. V prípade, že chceme úlohu predložiť deťom, treba ju rozdeliť na vhodné časti. A ešte pred touto úlohou treba úvod o obsahoch.

Cieľom prednášky je priviesť žiakov k tomu, aby si vybudovali správne asociácie (medzi pomermi obsahov, vzdialeností a podobnosťou) a dokázali takéto úlohy riešiť samostatne.

Príklad 1. Daný je trojuholník ABC a body D, E na polpriamkach opačných k BA, CA (v tomto poradí). Dokážte, že priamky BC a DE sú rovnobežné práve vtedy, keď platí $BA/DA = CA/EA$.

Riešenie: Kedy sú dve priamky rovnobežné? Keď je vzdialenosť medzi nimi stále rovnaká. V našom prípade to znamená, že keď vezmeme trojuholníky BCD a BCE so spoločnou základňou BC, tak ich výška na túto základňu je rovnaká. Preto majú rovnaký obsah. Toto tvrdenie vieme aj obrátiť.

Z druhej strany *prevedieme pomer vzdialeností na pomer obsahov*. Trojuholníky ABE a ADE majú rovnakú výšku na základňu AB (resp. AD), preto pomer ich obsahov je rovný pomeru základní: $BA/DA = [ABE]/[ADE]$. Podobne platí $CA/EA = [ACD]/[AED]$. Porovnáme to s pôvodnou rovnosťou pomerov a vidíme, že dokazujeme toto: trojuholníky BCD a BCE majú rovnaký obsah práve vtedy, keď trojuholníky ACD a ABE majú rovnaký obsah. Nakoľko platí $[ABE] = [ABC] + [BCE]$ a $[ACD] = [ABC] + [BCD]$, máme dôkaz hotový.

Prednášku začneme zopakovaním školských poznatkov o obsahu. Nejde ani tak o vzorce, z tých si vystačíme so základným $S = av_a/2$. Skôr sa venujeme aplikáciám tohto vzorca a prevedením pomeru základní na pomer obsahov. Potom spolu s deťmi riešime príklady z ďalšej kapitoly.

3. Niekoľko príkladov

Príklad 2. Zistite veľkosť výšky na preponu v pravouhlom trojuholníku s odvesnami dĺžok a, b.

Riešenie: Táto úloha je dobrá na úvod, ak žiaci poznajú Pytagorovu vetu. (Inak je úplne nevhodná.)

Obsah trojuholníka zo zadania vieme určiť dvomi spôsobmi. Raz za základňu zvolíme preponu, druhýkrát jednu z odvesien. Obe tieto vyjadrenia musia dať tú istú hodnotu, preto $v_c = ab/\sqrt{a^2 + b^2}$.

Príklad 3. Zistite, v akom pomere pretína v trojuholníku os uhla protiľahlú stranu.

Samotné zadanie hovorí, že máme zistiť akýsi pomer. Nakreslíme si obrázok. Kde sa vyskytujú pomery? Pri podobnosti. Aby sme mohli spraviť výpočet pomeru, treba si zaviesť označenie. Nech teda náš trojuholník je ABC, ideme zistiť, v akom pomere delí os uhla ACB protiľahlú stranu. Nech K je priesečník osi uhla ACB s protiľahlou stranou. Úloha sa dá riešiť sínusovou vetou, skúste to sami. Takto postupujeme vtedy, keď nehľadáme v úlohe krásu, ale potrebujeme ju v krátkom čase zrátať. (Alebo overiť nejakú hypotézu bez hlbšieho geometrického vhľadu do situácie.)

Riešenie 1: Použijeme ideu z Euklidovho dôkazu a namiesto pomeru AK/BK budeme hľadať pomer $[AKC]/[BKC]$. Trojuholníky AKC a BKC majú spoločnú základňu KC, takže stačí zistiť pomer ich výšok. Nech P, Q sú v tomto poradí päty kolmíc z bodov A, B na priamku KC. Potrebujeme využiť, že CK je osou uhla ACB. Trojuholníky APC a BPC sú pravouhlé s rovnakým ostrým uhlom pri vrchole C, takže sú podobné a platí $AP/BQ = AC/BC$. Teda os uhla delí protiľahlú stranu v pomere priľahlých strán.

Riešenie 2: V ďalšom riešení tej istej úlohy skúsime hľadaný pomer pomocou podobnosti previesť na iný. Chceme podobnosť, veďme preto bodom K rovnobežku s priamkou BC a jej priesečník so stranou AC označme L. Trojuholník KLC je rovnoramenný (prečo?), takže platí $LC = LK$. Potom pre hľadaný pomer z podobnosti vhodných trojuholníkov (a na základe poslednej rovnosti) dostávame

$$\frac{AK}{BK} = \frac{AL}{CL} = \frac{AL}{LK} = \frac{AC}{BC}.$$

Ťažisko tohto riešenia spočíva v prvom kroku, musíme si dokresliť vhodnú priamku. Ako ju objaviť? Mala by prechádzať bodom K, pretože ten určuje hľadaný pomer. A malo by sa pri tom nejako využiť, že CK je osou uhla ACB. Tento uhol je určený priamkami BC a AC, preto by hľadaná priamka mohla byť rovnobežná s jednou z nich. A je to. (Podobným spôsobom sa dá dokázať Menelaova veta. Proste vedieme vhodnú rovnobežku. Pritom na tejto voľbe až tak nezáleží, dôkaz sa dá dokončiť pre niekoľko rôznych volieb rovnobežky.)

A ešte jedno riešenie tej istej úlohy. Stretol som sa s ním, keď som si myslel, že už o tejto úlohe viem všetko. Ale veru nie. Pochádza od jedného zo žiakov na krúžku a je založené na geniálnej myšlienke. [1]

Riešenie 3: Nech B_1 je obraz bodu B v osovej súmernosti podľa osi uhla ACB. Nech B_2 je taký bod na priamke KC, že $B_1K = B_1B_2$. Potom pre veľkosti uhlov platí $KBB_1 = KB_1B = B_2B_1B$. Teda priamky B_1B_2 a AB sú rovnobežné. Štvoruholník KBB_2B_1 je rovnobežník. Trojuholníky AKC a B_1B_2C sú podobné. Preto $AK/KB = AK/B_1B_2 = AC/B_1C = AC/BC$.

Príklad 4. Ťažnice trojuholníka sa pretínajú v jednom bode. Prečo je to tak?

Riešenie: Nakreslíme si obrázok. Ak doňho nakreslíme všetky tri ťažnice tak, že prechádzajú jedným bodom, tak je zle: bude nás to akurát zavádzať. Keď ich nakreslíme tak, že neprechádzajú jedným bodom a skúsime odvodiť spor, zistíme, že to nejde: čo už sa tak dá odvodiť z predpokladu, že nejaké priamky *neprechádzajú* jedným bodom? Preto do obrázka nakreslíme presne dve ťažnice. Nech ABC je trojuholník, T priesečník jeho ťažníc na strany CA a CB a nech S je priesečník priamky CT so stranou AB. Nech K, L sú stredy strán CA, CB. Priamka CT je ťažnica práve vtedy, keď $AS = SB$, teda keď $SA/SB = 1$. Prevedieme to na pomer obsahov. Nech vzdialenosti bodov A a B od priamky CS sú v_1 a v_2.

$$\frac{SA}{SB} = \frac{[ASC]}{[BSC]} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\frac{1}{2}\,CT \cdot v_1}{\frac{1}{2}\,CT \cdot v_2} = \frac{[ATC]}{[BTC]} = \frac{2[ATK]}{2[BTL]} = \frac{[ATK]}{[BTL]}$$

Ostáva dokázať, že trojuholníky ATK a BTL majú rovnaký obsah. To ponechávame na čitateľa. (Návod: Ako využijeme, že tieto trojuholníky sú určené ťažnicami?)

Pokračovaním v tejto úvahe sa dá dokázať, že ťažnice delia trojuholník na 6 častí s rovnakým obsahom a sú rozdelené ťažiskom na časti v pomere dĺžok 2 : 1. Prvá časť tejto úvahy sa použiť na dôkaz Cevovej vety, vyskúšajte si to. [2]

4. Ďalšie úlohy

Najlepšie, čo môžete pre prednášku urobiť, je venovať dostatok času riešeniu úloh. Nasledujúce úlohy sú zoradené viacmenej podľa odhadovanej obtiažnosti a náväznosti (pri riešení úlohy sa použije výsledok alebo metóda z niektorej predchádzajúcej). Pri ich riešení sa využívajú najmä obsahy a podobnosť trojuholníkov. Úlohy sú prebraté z korešpondenčného seminára, z matematickej olympiády alebo účelovo vymyslené.

---

[1] Neviem, ako na takéto riešenie prirodzenou cestou naviesť žiakov.

[2] `http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~john/MT4521/Lectures/L14.html`
Spomínaný dôkaz nájdete aj v knihe *Geometry revisited* od Coxetera a Greitzera.

Úloha 1. Daný je lichobežník $ABCD$ s priesečníkom uhlopriečok P. Obsah trojuholníka ADP je 6, obsah trojuholníka CDP je 9. Zistite obsah S lichobežníka $ABCD$.

Úloha 2. Daný je lichobežník $ABCD$ s dlhšou základňou AB. Bodom D veďme rovnobežku so stranou BC a jej priesečník s priamkou AC označme E. Dokážte, že obsahy trojuholníkov ACD a EBC sú rovnaké.

Úloha 3. V rovnobežníku $ABCD$ si na strane BC zvolíme ľubovoľne bod E. Priamka AE pretne uhlopriečku BD v bode G a priamku DC v bode F (F leží na polpriamke DC za bodom C). Dokážete zistiť veľkosť úsečky EF (v cm), ak viete iba toľko, že platí $|AG| = 6\,\mathrm{cm}$ a $|GE| = 4\,\mathrm{cm}$?

Úloha 4. Nech $ABCD$ je lichobežník. Priesečník jeho predĺžených ramien označme K, priesečník uhlopriečok je L, stred úsečky AB je M a stred úsečky CD je N. Dokážte, že body K, L, M, N ležia na priamke.

Úloha 5. Dané sú dva rovnobežníky $ABCD$ a $EFGH$ také, že bod D je totožný s bodom H, bod E leží na strane AB a bod C leží na strane FG. Dokážte, že tieto dva rovnobežníky majú rovnaký obsah.

Úloha 6. Daný je trojuholník ABC. Na strane AB leží bod D tak, že je v jednej tretine tejto strany bližšie k bodu A. Na strane BC leží bod E tak, že je v jednej štvrtine tejto strany bližšie k bodu B. Na strane AC leží bod F tak, že je v jednej polovici tejto strany. Zistite, aký je pomer obsahov trojuholníkov DEF a ABC.

Úloha 7. Nech P je bod vnútri rovnostranného trojuholníka ABC. Dokážte, že súčet vzdialeností bodu P od strán trojuholníka ABC nezávisí od polohy tohto bodu.

Úloha 8. Nech K, L, M, N sú v tomto poradí stredy strán AB, BC, CD, DA štvoruholníka $ABCD$. Nech P je priesečník uhlopriečok štvoruholníka $ABCD$.
a) Dokážte, že priesečníkom uhlopriečok štvoruholníka $KLMN$ je bod P.
b) Zistite, pre ktoré rovnobežníky $ABCD$ je útvar $KLMN$ štvorec.
c) Vyjadrite súčet obsahov trojuholníkov APD a BPC pomocou obsahu S štvoruholníka $ABCD$.

Úloha 9. Daný je trojuholník s ťažnicami dĺžok x, y, z a obsahom S. Dokážte, že z úsečiek dĺžok x, y, z sa dá zostaviť trojuholník a vyjadrite jeho obsah pomocou S.

Úloha 10. Rovnostranný trojuholník je rozdelený na dve časti priamkou, ktorá prechádza jeho ťažiskom. Dokážte, že pomer obsahov týchto častí sa nachádza medzi 4/5 a 5/4. Platí toto tvrdenie aj pre trojuholníky, ktoré nie sú rovnostranné? [3]

Úloha 11. V rovnobežníku $ABCD$ sú na uhlopriečke AC zvolené body E a F tak, že $AE = FC$. Priamka BF pretína stranu CD v bode G a priamka BE pretína stranu AD v bode H. Dokážte, že priamky GF a AC sú rovnobežné.

Úloha 12. Na strane AB obdĺžnika $ABCD$ si zvoľme bod F. Os úsečky AF pretína uhlopriečku AC v bode G. Úsečky FD a BG sa pretínajú v bode H. Dokážte, že trojuholníky FBH a GHD majú rovnaký obsah.

Úloha 13. Je daný trojuholník ABC. Vnútri jeho strán BC, CA, AB máme body K, L, M také, že úsečky AK, BL, CM sa pretínajú v bode U. Dokážte, že ak trojuholníky AMU a KCU majú obsah P a trojuholníky MBU a CLU majú obsah Q, tak $P = Q$.

[3] Áno, platí. To preto, že dokazované tvrdenie je *teorémou afinnej geometrie*. Afinita zachováva pomer obsahov aj pomer vzdialeností na priamke, preto ťažisko je afinný pojem. Keď rovnostranný trojuholník zobrazíme vhodným afinným zobrazením na daný ľubovoľný, tak ťažisko sa zobrazí na ťažisko a prenesie sa platnosť tvrdenia o pomere obsahov. Viac o afinnej geometrii sa dočítate napríklad na stránke `http://en.wikipedia.org/wiki/Affine_geometry`.

Úloha 14. Nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník, M stred strany AB a N stred strany CD. Úsečka MN rozdeľuje štvoruholník $ABCD$ na dve časti s rovnakým obsahom. Dokážte, že $ABCD$ je lichobežník.

Úloha 15. Daný je štvoruholník $ABCD$. V jeho rovine leží bod P taký, že ľubovoľná priamka prechádzajúca bodom P rozdelí štvoruholník $ABCD$ na dve časti s rovnakým obsahom. Dokážte, že $ABCD$ je rovnobežník.

Úloha 16. V rovine leží bod O a štyri body A, B, C, D, ktoré sú vrcholmi konvexného štvoruholníka. Pre vzdialenosti týchto bodov platí $OA \leq OB \leq OC \leq OD$. Dokážte, že pre obsah P štvoruholníka $ACBD$ vždy platí

$$P \leq \frac{1}{2}(OA + OD)(OB + OC).$$

Zistite, kedy nastáva rovnosť.

Úloha 17. V trojuholníku ABC je všetko označené ako obvykle. Ak je uhol α dvakrát taký veľký ako uhol β, tak $a^2 = b(b + c)$. Dokážte. Platí aj obrátená implikácia? (*Návod:* Prepíšte si vzťah zo zadania na rovnosť dvoch pomerov.)

Úloha 18. Na ramene BC lichobežníka $ABCD$ s priesečníkom uhlopriečok M leží bod P tak, že uhly APM a DPM majú rovnakú veľkosť. Dokážte, že vzdialenosť bodu B od priamky DP je rovnaká ako vzdialenosť bodu C od priamky AP.

5. Ako riešiť geometrické úlohy

Táto kapitola pochádza pôvodne z materiálu o počítaní uhlov. Ten môžete tiež nájsť na stránke `www.ucmeradi.sk`, doporučujem si ho prečítať, nakoľko ilustruje iný pohľad na geometrické úlohy. Spolu tieto materiály pokrývajú takmer všetko, čo treba na úspešné riešenie úloh MO v kategóriách nižších než A a v škole sa to neučí. Ku kategórii A sa zíde čosi navyše, napríklad tu spomínaná Cevova a Menelaova veta či kružnicová inverzia (príslušné materiály nájdete na `www.ucmeradi.sk`).

Keď dostaneme do rúk úlohu, prečítame si zadanie. Toto prvé prečítanie nám dá približný obraz o úlohe. Napríklad zistíme, že sa tam spomínajú kružnice a úloha je konštrukčná. Potom si zadanie prečítame ešte raz a tentoraz poriadne, dbáme na všetky detaily. Súčasne si popritom kreslíme obrázok, stačí náčrt. Keď sa niekde pomýlime, napríklad sa majú nejaké dve priamky pretnúť a nám akurát vyšli rovnobežné (lebo sme si nevhodne zvolili nejaké body), tak sa nebojíme začať kresliť odznova. Niektoré úlohy majú obrázok taký nepríjemný, že sa nám ho nepodarí nakresliť rukou. Vtedy neváhame použiť rysovacie pomôcky. Zrozumiteľný obrázok je dôležitý. Len málo úloh je takých, že si vieme všetko predstaviť aj bez obrázka. A so zlým obrázkom sa zle pracuje: keď tri body sú na priamke, tak nech aj na obrázku sú na priamke, inak na to zabudneme. Keď je niečo kružnica, tak to má patrične aj vyzerať, a nie ako nepodarený zemiak. Často treba obrázok skúmať a vytvárať si hypotézy, napríklad o kolmosti priamok. A ako si všimneme, že tie priamky sú na seba kolmé, ak na našom obrázku zvierajú uhol 70°? Na druhej strane keď tri body *neležia* na priamke, ani na našom obrázku to tak nemá vyzerať, lebo potom to zvádza k chybným úvahám (založeným na nesprávnych predpokladoch).

Keď už máme dobrý obrázok, prečítame si zadanie znova. Tentokrát si k obrázku napíšeme všetky dôležité fakty, ktoré sa spomínajú v zadaní. Napríklad ktoré priamky sú na seba kolmé, že BD je osou uhla ABC a podobne. Pre kolmosť priamok či rovnobežnosť máme dohodnuté značky, ktoré sa dajú kresliť do obrázka, určite ich poznáte. Takisto si treba niekam napísať, ktoré body ako vznikli, napríklad, že M je priesečník priamky AB s priamkou CD. A nakoniec si rozmyslíme a poznamenáme na papier, čo od nás v úlohe chcú. Dokázať niečo? Nájsť množinu bodov? Zostrojiť niečo? Niekedy je v zadaní chyba alebo mu nerozumieme. Treba sa spýtať toho, kto nám úlohu zadal, alebo skúsiť zadanie opraviť, nie uspokojiť sa s triviálnym pozorovaním, že tvrdenie, ktorého dôkaz požadujú, neplatí.