# Nerovnosti a úprava na štvorec

## Ako používať tento materiál

Nerovnosti sú časťou matematiky, ktorej sa na stredných školách venuje málo pozornosti. Možno je to tým, že sú to úlohy akosi v princípe dôkazové. Drvivá väčšina dôkazov nerovností končí redukciou na nejakú známu či skôr dokázanú nerovnosť; zvyčajne postupujeme tak, že sa snažíme zbaviť rôznych „nadbytočných častí“ (väzby, požiadaviek na minimalizáciu nejakej konštanty, záporných čísel, ...) pomocou dosádzania, substitúcie, odhadov zo známych nerovností, ekvivalentnými úpravami a nakoniec dospejeme k nejakej nerovnosti ekvivalentnej s pôvodnou, ktorú sme už kedysi dokázali (alebo to spravil niekto iný).
Úprava na štvorec sa v škole vyskytuje len pri odvodzovaní vzorca na riešenie kvadratických rovníc. Sila tejto metódy zostáva nevyužitá a žiaci prichádzajú o ďalšie jej zaujímavé aplikácie. Niektoré z nich, týkajúce sa nerovností, demonštrujeme v tomto článku.
Metódy tu ukázané nevedú zaručene k cieľu. Toto je dobré si uvedomiť, prezentované úlohy nie sú technickými cvičeniami, ktoré vieme riešiť stále tou istou zaručenou efektívnou metódou, ako napríklad sústavy lineárnych rovníc. Často pri riešení zistíme, že sme v slepej uličke a treba sa o niekoľko krokov vrátiť. Preto je vhodné včas rozpoznať, či úvaha môže viesť k cieľu; to nejde bez dostatočnej praxe v riešení úloh. Keďže dôkazy nerovností zvyčajne končia redukciou na známu nerovnosť, množstvo preriešených úloh je dôležité a prax nenahraditeľná.
Obtiažnosť prezentovaných príkladov postupne stúpa a v ďalších sa bežne využívajú riešenia predošlých či metódy v nich použité, preto začať úlohou zo stredu bez predchádzajúcej prípravy môže byť neúspešné a frustrujúce. Takáto gradácia umožňuje ku koncu zaradiť aj úlohy naozaj náročné, obtiažnosťou presahujúce aj úlohy v najvyššej kategórii A slovenskej matematickej olympiády.
Dôrazne upozorňujem, že riešenie týchto úloh si vyžaduje čas. Nie sú to písomkové príklady, ktorých vyriešime za hodinu hoci aj 10. Ťažšie z nich aj pre skúsených riešiteľov matematickej olympiády predstavujú výzvu na niekoľkohodinový boj.
Skôr, než niektorú úlohu prezentujeme žiakom, by sme si ju mali prepočítať sami. A aj keď sa nám to nepodarí, budeme sa lepšie vyznať v úlohe. Uvedomíme si, v čom spočíva jej obtiažnosť a kde môžu mať žiaci problémy. Až po dostatočne dlhom čase venovanom vlastým pokusom si pozrieme riešenie. To je vhodné, aj ak sme úlohu zrátali, možno máme iné riešenie než je tu uvedené. Žiakom potom môžeme ukázať rôzne prístupy, porovnať, v čom spočíva ich sila, ktorý z nich je pre takéto úlohy efektívnejší.
Nie je nutné prejsť so žiakmi všetky úlohy, väčšinou sa vyskytujú v sériách – pribudne nejaký nový prvok v zadaní či nová metóda na riešenie a potom nasleduje niekoľko úloh na jej precvičenie. Ďalšie úlohy je možné čerpať z ročeniek matematickej olympiády, z časopisov, z kníh (napr. ŠMM) či skúsiť vlastnú tvorbu. Vynikajúcim a obsiahlym internetovým zdrojom je `http://www.kalva.demon.co.uk/`. Nachádzajú sa tam archívy úloh medzinárodnej olympiády a mnohých národných olympiád, často aj s riešeniami.
Oveľa dôležitejšie, než vyriešenie samotných úloh, je naučiť žiakov rozlišovať, čo je dôkaz, čo iba nejasná úvaha. Naučiť ich, ako vopred odhadnúť, či metóda môže viesť k cieľu alebo nie, nakoľko prácny je zvolený postup a či sa neoplatí radšej nájsť výhodnejší, než zotrvať pri tomto. Toto sú veci, ktorým sa v škole venuje príliš málo času a pritom sú užitočné vo všetkých oblastiach matematiky i života.
S pripomienkami a nápadmi sa môžete obrátiť na autora: `j.mazak@gmail.com`.

## Praktické použitie

Rozsah tohto textu výrazne presahuje bežnú hodinovú prednášku. Nie je vhodné prezentovať žiakom úlohy naraz, pretože si nezapamätajú nové prvky, ktoré sa vyskytli v zadaniach či riešeniach. Lepšie je dať im oddych a čas na samostatnú domácu prácu. Preto treba prácu s nerovnosťami z tohto textu rozdeliť na niekoľko hodín počas týždňa či dvoch.
Použité úlohy nevyžadujú žiadne náročné poznatky. Nutné je vedieť riešiť kvadratické rovnice, mať predstavu o reálnych číslach a číselnej osi. Užitočné budú základy o reálnych funkciách (monotónnosť), najmä o polynomických funkciách. Tieto veci je vhodné vopred zopakovať.
Žiaci postupujú rôznym tempom. Preto je vhodné rozdeliť ich na skupiny a podľa šikovnosti detí v skupine zvoliť primeranú náročnosť. Keď niekto vyráta príklad, môže riešenie iba ukázať učiteľovi a potom v tichosti riešiť Ďalší. Ostatní majú možnosť pracovať sami a nemajú pocit, že ich stále niekto

naháňa, neprichádzajú o radosť z vlastných objavov. Najcennejšie je riešenie, ktoré vymyslí sám žiak. Ak niektorý zo žiakov dostane zaujímavý nápad, ktorý stojí za prezentovanie ostatným, je vhodné, aby učiteľ tento nápad prezentoval pri tabuli. Väčšina žiakov sa pri tabuli necíti dobre, nie sú zvyknutí vysvetľovať niečo spolužiakom, preto toto by mal robiť učiteľ. Naučiť žiakov spolupracovať však nie je zlé, žiakom netreba brániť v spolupráci, pokiaľ nerušia ostatných. Najlepšie je ponechať to na kolektívnu domácu prácu, žiaci si navzájom pomôžu a poradia tomu, kto sa niekde zasekne. Tu však treba dať pozor na to, aby všetky domáce úlohy nezrátal ten najlepší a ostatní riešenia už len odpíšu. Deťom treba vysvetliť, že takýto prístup nemá zmysel, nevedie k ničomu pozitívnemu. Pokiaľ za domáce úlohy nebudú dostávať zlé známky, pochopia, že riešenie úloh ponúka radosť z objavovania a nie je to nutný stres, ktorý patrí k škole.

## Základy

Na začiatku si zopakujeme základné znalosti o reálnych číslach. Reálne čísla vieme usporiadať podľa veľkosti a teda aj každé dve čísla vieme porovnať. Každé reálne číslo je buď kladné, rovné 0 alebo záporné. Súčtom dvoch kladných čísel je opäť kladné číslo, súčtom dvoch záporných čísel je číslo záporné. Súčin dvoch čísel rovnakého znamienka je kladné číslo. Analogicky súčin dvoch nezáporných čísel je nezáporné číslo. Z týchto tvrdení vyplýva, že druhá mocnina reálneho čísla je nezáporná, navyše je rovná 0 iba vtedy, keď je rovné 0 samotné číslo, ktoré umocňujeme. Toto vieme aj pre súčet niekoľkých druhých mocnín:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geq 0,$$

pričom rovnosť nastáva práve vtedy, keď $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Toto tvrdenie vyzerá jednoducho, je však veľmi silným prostriedkom pri dokazovaní nerovností.

Uvedomme si rozdiel medzi nerovnosťou a nerovnicou. Napríklad „riešiť nerovnicu $2x + 1 > x$“ znamená nájsť všetky reálne čísla $x$, pre ktoré je splnená nerovnosť $2x + 1 > x$ (a dokázať, že sme našli všetky čísla s touto vlastnosťou). V ďalšom sa budeme venovať dokazovaniu nerovností.

Ako dobre vieme, pripočítanie rovnakého čísla k obom stranám nerovnosti je ekvivalentnou úpravou, takisto vynásobenie oboch strán kladným číslom. Pri násobení záporným číslom treba otočiť znamienko nerovnosti. Toto budeme odteraz používať bez ďalšieho komentára.

Väčšinu času budeme pracovať s výrazom $(x + y)^2$ v roznásobenom tvare, zaveďme si preto niekoľko pojmov. Volajme členy $x^2$ a $y^2$ v rozvoji $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ krajnými, člen $2xy$ nech je stredný.

## Úlohy

V tejto časti sú zadania všetkých úloh, bez riešení, aby čitateľ mal možnosť skúsiť si ich zriešiť sám a aby mal celkový prehľad o príkladoch vyskytujúcich sa v tomto texte.

**Príklad 1.** Pre ľubovoľné reálne čísla $x, y$ platí $(x + y)^2 \geq 4xy$, dokážte. Kedy nastáva rovnosť?

**Príklad 2.** Riešte rovnicu $x^2 - x + 1 = 0$ v reálnych číslach.

**Príklad 3.** Riešte v reálnych číslach rovnice: a) $2x^2 = x^4 + 1$, b) $4m^6 + 1 = 4m^3$.

**Príklad 4.** Dokážte, že pre reálne čísla $x, y, z$ platí $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$.

**Príklad 5.** Dokážte, že pre reálne čísla $a$, $b$, $c$ platí $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2bc + ab^2c + abc^2$.

**Príklad 6.** Dokážte, že pre reálne čísla $a, b, c$ platí $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^3b + b^3c + c^3a$.

**Príklad 7.** Určte všetky čísla $a, b$, pre ktoré platí

$$(a^2 + b^2)^3 \geq (a^3 + b^3)^2 .$$

Pre aké čísla nastane rovnosť?

**Príklad 8.** Nech $a, b, c$ sú ľubovoľné reálne čísla. Potom číslo

$$x = 4(a^2 + b^2 + c^2) - \big((a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2\big)$$

je nezáporné; dokážte. Kedy platí $x = 0$?

**Príklad 9.** Dokážte, že pre reálne čísla $a, b, c$ platí $a^2 + b^2 + c^2 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq 6abc$.

**Príklad 10.** Nájdite najväčšie reálne číslo $K$ tak, že pre všetky kladné reálne čísla $a$, $b$, $c$ platí nerovnosť

$$Kabc(a + b + c) \leq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2.$$

**Príklad 11.** Dokážte, že pre kladné reálne čísla $a$, $b$, $c$ platí $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2c + b^2a + c^2b$.

**Príklad 12.** Dokážte, že pre nezáporné reálne čísla $a, b$ platí $(a + b)(a^4 + b^4) \geq (a^2 + b^2)(a^3 + b^3)$.

**Príklad 13.** Dokážte, že pre všetky reálne čísla $a, b$ platí

$$a^2 + b^2 - ab - a + b + 1 > 0\,.$$

**Príklad 14.** Dokážte, že funkcia $f(x) = x^3 + x^2 + x$ je rastúca.

**Príklad 15.** Zistite, koľko riešení má sústava rovníc

$$\begin{aligned} x^3 - y^2 &= z^2 - x, \\ y^3 - z^2 &= x^2 - y, \\ y^3 - x^2 &= y^2 - z \end{aligned}$$

v obore reálnych čísel.

**Príklad 16.** Nech $f$ je funkcia definovaná na obore kladných reálnych čísel taká, že $f(x) - x^3$ aj $f(x) - 3x$ sú rastúce funkcie. Zistite, či funkcia $f(x) - x^2 - x$ je monotónna.

**Príklad 17.** Zistite, či existujú reálne čísla $a, b$ také, že $8a^2 + 17b^2 = 20ab$.

**Príklad 18.** Dokážte, že ak sa prirodzené čísla $A$, $B$ dajú zapísať v tvare súčtu dvoch štvorcov celých čísel, tak aj ich súčin $AB$ sa dá zapísať v tomto tvare.

**Príklad 19.** Dokážte Cauchyho-Schwarzovu nerovnosť, t. j. platnosť nerovnosti

$$(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2) \geq (x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)^2$$

pre ľubovoľné reálne čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$. Kedy nastáva rovnosť?

**Príklad 20.** Zistite, či polynóm $x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 2$ má reálny koreň.

**Príklad 21.** Dokážte, že pre všetky reálne čísla $a$, $b$, $c$ spĺňajúce nerovnosť $a^2 + c^2 \leq 4b$ a pre všetky reálne čísla $x$ platí

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 \geq 0.$$

**Príklad 22.** Nájdite minimálnu hodnotu výrazu $V = a^6 + b^2 + 2b + 1 - 2a^3b - 2a^3$, kde $a$, $b$ sú reálne čísla.

**Príklad 23.** Nech $a$, $b$, $c$ sú nezáporné reálne čísla také, že $a + b + c = 1$. Nájdite maximum výrazu

$$V = a^2 + b^2 + c^2 + \sqrt{12abc}.$$

**Príklad 24.** Dokážte pre kladné čísla $a$, $b$ spĺňajúce $a^5 + b^5 = a^3 + b^3$ platnosť nerovnosti

$$a^2 + b^2 \leq 1 + ab.$$

# Riešenia

V tejto kapitole sa nachádzajú okrem zadaní úloh aj ich riešenia. Väčšinou je uvedené úplné riešenie, niekedy dokonca aj s nevydarenými pokusmi; inde je aspoň návod, ako úlohu riešiť. V prípade úloh veľmi podobných predchádzajúcim riešenie úplne chýba, keďže neobsahuje žiadne nové prvky.

**Príklad 1.** Pre ľubovoľné reálne čísla $x, y$ platí $(x+y)^2 \geq 4xy$, dokážte. Kedy nastáva rovnosť?

*Riešenie:* Skúsme nerovnosť ekvivalentne upraviť:

$$\begin{aligned}(x+y)^2 &\geq 4xy\\ x^2+2xy+y^2 &\geq 4xy\\ x^2-2xy+y^2 &\geq 0\\ (x-y)^2 &\geq 0\end{aligned}$$

Posledná nerovnosť je však špeciálnym prípadom tvrdenia z úvodu, teda je pravdivá. Preto je pravdivá aj dokazovaná nerovnosť, ktorá je s ňou ekvivalentná.
Uvedené úpravy nie sú náhodné: často pomôže, keď si všetko prehodíme na jednu stranu a vzniknutý výraz porovnávame s nulou. Posledná úprava zase smeruje k tomu, aby sme využili nejakú známu nerovnosť a z nej dokázali tú pôvodnú.

**Príklad 2.** Riešte rovnicu $x^2 - x + 1 = 0$ v reálnych číslach.

*Riešenie:* Skúsme doplniť ľavú stranu na štvorec.

$$x^2-x+1 = x^2-x+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+1 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0,$$

preto ľavá strana je vždy väčšia ako pravá a rovnica nemá žiadne riešenie.

**Príklad 3.** Riešte v reálnych číslach rovnice: a) $2x^2 = x^4 + 1$, b) $4x^6 + 1 = 4x^3$.

**Príklad 4.** Dokážte, že pre reálne čísla $x, y, z$ platí $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$.

*Riešenie:* Na pravej strane sú výrazy v tvare $xy$, na ľavej strane štvorce. Vieme nejako odhadnúť takýto výraz zhora pomocou štvorcov? Áno, podľa jedného z predošlých príkladov. Alebo aj inak, štvorce by mohli byť krajnými členmi a $2xy$ stredným členom. Vieme, že $(x-y)^2 \geq 0$, preto aj $x^2 + y^2 \geq 2xy$. Toto je približne to, čo chceme. Len treba upraviť konštantu 2. Sčítaním nerovností $(x-y)^2 \geq 0$, $(y-z)^2 \geq 0$, $(z-x)^2 \geq 0$ dostávame po predelení dvoma a drobnej úprave dokazovanú nerovnosť.
Treba dať pozor, aby žiaci pochopili význam sčítania nerovností, zdôrazniť rozdiel, kedy má význam niečo sčítať a kedy je to nezmysel, napr. nerovnosti musia byť rovnako orientované. Čo sa stane so znamienkom, keď sčítame ostrú a neostrú nerovnosť? Môžeme nerovnosti násobiť? Za akých podmienok? A dajú sa niekedy deliť? V tomto musí mať učiteľ jasno a mal by k úvahám o týchto otázkach povzbudiť aj žiakov.

**Príklad 5.** Dokážte, že pre reálne čísla $a$, $b$, $c$ platí $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2bc + ab^2c + abc^2$.

*Riešenie:* Na pravej strane máme nejaké výrazy, ktoré by sme mohli prehodiť na ľavú stranu a potom skúsiť podobnú metódu ako v predošlom príklade. Bude vhodné vynásobiť celú nerovnosť dvomi, ako sme sa presvedčili minule.
Skúsme napríklad $b^4 - 2a^2bc$ doplniť na štvorec. Nech ľavý krajný člen je $b^4$ a stredný člen je $-2a^2bc$. Potom odmocnina z ľavého krajného člena je $b^2$ a tá by mala byť obsiahnutá v strednom člene, podobne ako $x$ je obsiahnuté v $2xy$ v rozvoji $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$. Ale stredný člen $-2a^2bc$ obsahuje iba prvú mocninu $b$, nie druhú. Takže takto to nepôjde.
Z dôvodov popísaných v predošlom odstavci bude lepšie skúsiť doplniť $a^4 - 2a^2bc$. To sa nám podarí, $a^4 - 2a^2bc + b^2c^2 = (a^2 - bc)^2$. Problém je, že používame člen $b^2c^2$, ktorý nemáme na ľavej strane. Možno to nevadí, skúsme pokračovať ďalej.
Sčítaním nerovností $(a^2 - bc)^2 \geq 0$, $(b^2 - ca)^2 \geq 0$, $(c^2 - ab)^2 \geq 0$ dostaneme

$$a^4 + b^4 + c^4 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq 2(a^2bc + ab^2c + abc^2)\,.$$

Pokiaľ vieme dokázať, že

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2, \tag{1}$$

tak platí aj

$$2(a^4 + b^4 + c^4) \geq (a^4 + b^4 + c^4) + (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \geq 2(a^2bc + ab^2c + abc^2)$$

a sme hotoví. Pozrime sa teda na nerovnosť (1).
Všetky mocniny v tejto nerovnosti sú párne, preto sa ponúka substitúcia $x = a^2$, $y = b^2$, $z = c^2$. Po prepísaní pomocou nových premenných zistíme, že je to vlastne nerovnosť z predošlého príkladu, ktorú sme už dokázali.
Dôležité je, aby učiteľ dal žiakom čas na premyslenie, aby na čo najviac nápadov prišli sami. Odhaliť riešenie skôr, než žiak pochopil význam problému a jeho podstatu, nie je veľmi užitočné, neprospieva lepšiemu zapamätaniu a pripraví žiakov o radosť z vyriešenia problému.

**Príklad 6.** Dokážte, že pre reálne čísla $a, b, c$ platí $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^3b + b^3c + c^3a$.

*Riešenie:* Použijeme metódu z predošlého príkladu a doplníme $a^4 - 2a^3b$ na štvorec $(a^2 - ab)^2$. Z nerovností

$$0 \leq (a^2 - ab)^2 + (b^2 - bc)^2 + (c^2 - ca)^2 = a^4 + b^4 + c^4 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - 2(a^3b + b^3c + c^3a),$$
$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$$

vyplýva dokazované tvrdenie. Rozmyslite si, či vieme doplniť na štvorec $a^4 - b^3c$. Prečo? A vedie to niekam?
Všimnime si naše zápisy výrazov. Všetky sú cyklické, preto by sa dalo ušetriť miesto, keby sme použili inú formu zápisu. Napríklad súčet štvrtých mocnín môžeme zapísať takto: $a^4 + b^4 + c^4 = \sum a^4$. Samozrejme, treba si pamätať, že tá sumácia je cyklicky cez $a$, $b$, $c$. Pozor, nesumujeme cez všetky permutácie premenných, ale iba cyklicky zamieňame $a$ za $b$, $b$ za $c$ a $c$ za $a$, takže takáto suma cez $k$ premenných bude mať $k$ členov, nie $k!$. Skúsme takto prepísať niekoľko ďalších výrazov:

$$\begin{aligned} a^r + b^r + c^r &= \sum a^r, \\ ab + bc + ca &= \sum ab, \\ a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 &= \sum a^2b^2, \\ a^3b + b^3c + c^3a &= \sum a^3b. \end{aligned}$$

Ako si čitatelia iste všimli, tieto sumy popisujeme len voľne a neformálne. Dal by sa samozrejme vybudovať úplný a presný popis, ale to nepovažujeme za potrebné, pretože takéto sumy sú hlavne pracovným prostriedkom na urýchlenie úpravy výrazov a zníženie rizika chyby pri ručnom rátaní.
Pre počítanie s takýmito sumami platí niekoľko jednoduchých pravidiel, ktoré nám umožnia zostručňovať výpočty, napríklad:

$$\sum (a+b)^2 = \sum a^2 + 2ab + b^2 = 2\sum a^2 + 2\sum ab,$$
$$2\sum (a+b)(a+c) - \sum (a+b)^2 = 2\sum a^2 + 6\sum ab - 2\sum a^2 - 2\sum ab = 4\sum ab.$$

Opäť nemá zmysel formálne popisovať sadu pravidiel, keďže tieto pravidlá iba zachytávajú jednoduché úvahy pri roznásobovaní.
Skúste si prepísať dôkaz pôvodného tvrdenia, dokázať z Herónovho vzorca v roznásobenom tvare nezápornosť obsahu trojuholníka či roznásobiť nejakú nerovnosť s komplikovanými menovateľmi.
Tento príklad nového zápisu ukazuje, že často na voľbe notácie veľmi záleží. Vhodná voľba môže ušetriť mnoho času a zvýšiť prehľadnosť. Príkladom inej netradičnej (v škole neučenej) notácie je označiť $s = \sin x$, $c = \cos x$, potom píšeme napr. $s^2 + c^2 = 1$. Keď vieme, že budeme dve čísla používať až do konca riešenia, je lepšie označiť ich $a$, $b$ alebo $x$, $y$ namiesto $x_1$, $x_2$ a ušetríme si kopu indexov.

**Príklad 7.** Určte všetky čísla $a, b$, pre ktoré platí

$$(a^2 + b^2)^3 \geq (a^3 + b^3)^2 \,.$$

Pre aké čísla nastane rovnosť?

**Príklad 8.** Nech $a, b, c$ sú ľubovoľné reálne čísla. Potom číslo

$$x = 4(a^2 + b^2 + c^2) - \big((a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2\big)$$

je nezáporné; dokážte. Kedy platí $x = 0$?

**Príklad 9.** Dokážte, že pre reálne čísla $a, b, c$ platí $a^2 + b^2 + c^2 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq 6abc$.

*Návod:* Dobre by bolo zachovať symetriu a pravú stranu rozdeliť na súčet troch rovnakých sčítancov, potom prehodiť doľava a skúsiť upraviť na štvorec. Výraz $2abc$ je stupňa 3 (ako polynóm). Ak toto má byť stredný člen nášho štvorca (lebo má záporné znamienko), tak aspoň jeden z polynómov, ktoré umocňujeme, musí mať stupeň aspoň 2 a jeho druhá mocnina teda má stupeň aspoň 4. Takže skúsime $a^2b^2 - 2abc$ doplniť na štvorec. Zvyšok zvládnete aj sami.

**Príklad 10.** Nájdite najväčšie reálne číslo $K$ tak, že pre všetky kladné reálne čísla $a$, $b$, $c$ platí nerovnosť

$$Kabc(a + b + c) \leq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2.$$

*Riešenie:* Najprv si rozmyslime, čo od nás chcú. Čo znamená nájsť najväčšie $K$? Treba toto $K$ nájsť, dokázať, že vyhovuje (t. j. platí tá nerovnosť pre toto $K$ a všetky kladné reálne čísla $a$, $b$, $c$) a navyše dokázať, že ak zvolíme ľubovoľné $K'$ väčšie ako nájdené $K$, tak už nebude platiť nerovnosť zo zadania. Teda že pre toto $K' > K$ vieme nájsť čísla $a$, $b$, $c$, tak, že skúmaná nerovnosť platiť nebude.
Zvoľme $a = b = c = 1$, po dosadení týchto hodnôt do našej nerovnosti dostaneme $K \leq 1$. Stačí dokázať, že $K = 1$ vyhovuje. Čím bola motivovaná naša voľba hodnôt pre $a, b, c$? Tým, že naša nerovnosť je *homogénna*, inak povedané, ak platí pre nejaké $a, b, c$, tak platí aj pre $ka, kb, kc$, kde $k$ je kladné reálne číslo – proste po dosadení hodnôt $ka, kb, kc$ do našej nerovnosti má $k$ vo všetkých členoch na oboch stranách rovnaký exponent a môžeme jeho mocninou ekvivalentne vydeliť nerovnosť. V homogénnych nerovnostiach často nastáva rovnosť práve vtedy, keď sa hodnoty všetkých premenných rovnajú. Overte si to na doteraz dokázaných nerovnostiach.
A čo dôkaz nerovnosti pre $K = 1$? Po roznásobení ľavej strany si môžeme všimnúť, že $a^2bc = ab \cdot ac$, čo vedie k substitúcii $x = ab$, $y = bc$, $z = ca$ a redukcii dokazovanej nerovnosti na už známu. Prehliadnutie tejto substitúcie nevadí, funguje metóda popísaná v predošlých príkladoch a podarí sa nám to poupravovať na súčet troch štvorcov, napríklad $0 \leq (ab - bc)^2 + (bc - ca)^2 + (ca - ab)^2$.
Úvaha zo začiatku riešenia je dôležitá. Žiaci majú často problémy s pochopením významu kvantifikátorov (aj keď tu nie sú formálne zapísané), napríklad ignorujú ich poradie. Preto majú veľké ťažkosti s funkcionálnymi rovnicami, nedokážu prijať takto zadaný problém.

**Príklad 11.** Dokážte, že pre kladné reálne čísla $a$, $b$, $c$ platí $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2c + b^2a + c^2b$.

*Riešenie:* Tu narazíme pri pokusoch o úpravu na štvorec na problém. Všetky výrazy na ľavej strane majú nepárne exponenty, preto priamo nemôžu byť súčasťou roznásobeného štvorca. Ako tomu pomôžeme? Nuž, zrejme $a^3 = (\sqrt{a})^6$ a to už má párny exponent, aj keď dvakrát väčší. Keďže s odmocninami sa pracuje nepríjemne, zavedieme si substitúciu $x = \sqrt{a}$, $y = \sqrt{b}$, $z = \sqrt{c}$. Potom už všetko funguje tak, ako sme zvyknutí a ľahko dokážeme, že

$$2\sum x^6 \geq \sum x^6 + \sum x^3z^3 \geq 2\sum x^4z^2.$$

**Príklad 12.** Dokážte, že pre nezáporné reálne čísla $a$, $b$ platí $(a + b)(a^4 + b^4) \geq (a^2 + b^2)(a^3 + b^3)$.

**Príklad 13.** Dokážte, že pre všetky reálne čísla $a$, $b$ platí

$$a^2 + b^2 - ab - a + b + 1 > 0\,.$$

*Návod:* Pozerajme sa na $b$ ako na konštantu; potom dostaneme výraz tvaru $a^2 + ka$ pre nejaké $k$ a ten sa dá doplniť na štvorec.

**Príklad 14.** Dokážte, že funkcia $f(x) = x^3 + x^2 + x$ je rastúca.

*Riešenie:* Funkcia $f$ je z definície rastúca práve vtedy, keď pre ľubovoľné reálne čísla $x$, $y$ také, že $x < y$, platí $f(x) < f(y)$. Nech teda $x < y$, máme dokázať nerovnosť $x^3 + x^2 + x < y^3 + y^2 + y$. Prehoďme všetko na ľavú stranu a skúsme to rozložiť na súčin.

$$\begin{aligned} x^3 - y^3 + x^2 - y^2 + x - y &< 0 \\ (x-y)(x^2 + xy + y^2) + (x-y)(x+y) + (x-y) &< 0 \end{aligned}$$

Z predpokladu $x - y < 0$, teda naša nerovnosť je ekvivalentná s

$$x^2 + xy + y^2 + x + y + 1 > 0.$$

Ako sme videli doteraz, je dobre, keď stredný člen v štvorci má koeficient 2, ľahšie sa potom pracuje s výrazmi a navyše niektoré veci vidno na prvý pohľad. Vynásobme preto nerovnosť dvoma a skúsme vytvoriť štvorce.

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2xy + 2y^2 + 2x + 2y + 2 &> 0 \\ (x^2 + 2x + 1) + (y^2 + 2y + 1) + (x^2 + 2xy + y^2) &> 0 \\ (x+1)^2 + (y+1)^2 + (x+y)^2 &> 0 \end{aligned}$$

Nerovnosť platí ostro, keďže pre $x = y = -1$ je $x + y = -2 \neq 0$. Možno táto úloha vyzerá samoúčelne, ale často sa niečo podobné vyskytne napríklad pri riešení sústav nelineárnych rovníc.

**Príklad 15.** Zistite, koľko riešení má sústava rovníc

$$\begin{aligned} x^3 - y^2 &= z^2 - x, \\ y^3 - z^2 &= x^2 - y, \\ y^3 - x^2 &= y^2 - z \end{aligned}$$

v obore reálnych čísel.

*Návod:* Sústava je naozaj *nesymetrická*, v zadaní nie je preklep. Po niekoľkých úpravách dostaneme nerovnosť z predošlého príkladu. Treba dať pozor na bežnú chybu žiakov, keď z nerovnosti $y^2 + y = z^2 + z$ usúdia, že $y = z$ (napr. na základe falošnej analógie s predošlým príkladom). Na záver dostaneme kubickú rovnicu, ktorá má jeden koreň, nie je však jednoduché dokázať to, pokiaľ sa chceme vyhnúť deriváciám i Cardanovým vzorcom.

**Príklad 16.** Nech $f$ je funkcia definovaná na obore kladných reálnych čísel taká, že $f(x) - x^3$ aj $f(x) - 3x$ sú rastúce funkcie. Zistite, či funkcia $f(x) - x^2 - x$ je monotónna.

*Riešenie:* Na skúmanie priebehu funkcií máme v matematickej analýze mnoho užitočných metód, avšak v našom príklade sa použiť nedajú. O funkcii $f$ nevieme takmer nič. Nemusí byť spojitá, diferencovateľná... Dokonca môže byť spojitá a pritom môže nemať v žiadnom bode svojho definičného oboru deriváciu (aj také funkcie existujú). Preto prístupy využívajúce skúmanie derivácie funkcie $f(x) - x^2 - x$ nevedú k cieľu.
Rastúcosť funkcie môžeme prepísať priamo z definície; funkcia $f$ je rastúca práve vtedy, keď pre každé $x$, $y$ z jej definičného oboru platí, že ak $x < y$, tak $f(x) < f(y)$.
Po chvíľke hry s funkciou $f(x) - x^2 - x$ zistíme, že je rastúca. (Hra by mala zahŕňať voľbu konkrétnych funkcií namiesto $f$ a dosádzanie konkrétnych hodnôt za $x$.) Toto tvrdenie dokážeme. Presnejšie, nech $a$, $b$ sú dve kladné reálne čísla s vlastnosťou $a > b$. Dokážeme, že $f(a) - a^2 - a > f(b) - b^2 - b$, inak napísané $f(a) - f(b) > a^2 + a - b^2 - b$.
Z predpokladov v zadaní vieme, že pre naše $a$, $b$ platí

$$f(a) - a^3 > f(b) - b^3 \qquad \text{a tiež} \qquad f(a) - 3a > f(b) - 3b.$$

Takže pre rozdiel $f(a) - f(b)$ máme dva dolné odhady;

$$f(a) - f(b) > a^3 - b^3, \qquad\qquad f(a) - f(b) > 3a - 3b.$$

Chceme ukázať, že aspoň jedno z čísel $a^3 - b^3$ a $3a - 3b$, ktorými sme odhadli rozdiel $f(a) - f(b)$, je väčšie ako $a^2 + a - b^2 - b = (a - b)(a + b + 1)$. Spravíme teda niekoľko porovnaní.

$$3a - 3b \geq (a - b)(a + b + 1) \iff 3 \geq a + b + 1 \iff a + b \leq 2$$

Takže stačí dokázať, že pre $a + b > 2$ platí nerovnosť

$$\begin{aligned} a^3 - b^3 &\geq (a - b)(a + b + 1) \\ a^2 + ab + b^2 &\geq a + b + 1 \\ 2a^2 + 2ab + 2b^2 - 2a - 2b - 2 &\geq 0 \\ (a - 1)^2 + (b - 1)^2 + (a + b)^2 - 4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Posledná nerovnosť je pravdivá, lebo $a+b > 2$ a štvorce sú nezáporné. Všimnite si, ako sme k nej dospeli; cieľom úprav bolo získať na ľavej strane štvorce a na pravej nulu.

**Príklad 17.** Zistite, či existujú reálne čísla $a, b$ také, že $8a^2 + 17b^2 = 20ab$.

*Riešenie:* Jedna možnosť je dívať sa na to ako na kvadratickú rovnicu $8a^2 - 20ba + 17b^2$ s neznámou $a$, jej diskriminant je $D = 400b^2 - 4 \cdot 8 \cdot 17b^2 = -144b^2 \leq 0$, takže riešenie má táto rovnica iba pre $b = 0$ a vtedy $a = 0$.
Iná možnosť je skúsiť upraviť $8a^2 - 20ba + 17b^2$ na súčet dvoch štvorcov. Nasledujúci postup nezaručuje nájdenie riešenia, je iba heuristikou. Ako sa ukáže, postačujúcou.
Tá sedemnástka by sa dala rozdeliť na súčet dvoch štvorcov ako $17 = 1 + 16 = 1^2 + 4^2$, teda skúsime rozložiť ľavú stranu do tvaru $(1 \cdot b - ka)^2 + (4 \cdot b - \ell a)^2$. Prečo práve takto? Hľadáme také štvorce, ktoré budú obsahovať po umocnení iba konštantné násobky $a^2$, $b^2$ a $ab$, práve použité naozaj také sú. Stačí nájsť vhodné konštanty $k$, $\ell$. Tieto si buď tipneme ($k = l = 2$), alebo ich môžeme dorátať zo sústavy rovníc

$$\begin{aligned} k^2 + l^2 &= 8, \\ 2k + 8l &= 20. \end{aligned}$$

Odkiaľ máme sústavu? Z porovnania koeficientov; chceme totiž rovnosť

$$8a^2 - 20ab + 17b^2 = (b - ka)^2 + (4b - \ell a)^2 = (k^2 + \ell^2)a^2 - (2k + 8l)ab + 17b^2.$$

Na precvičenie by sa mohlo hodiť niekoľko ďalších príkladov s inými konštantami.

**Príklad 18.** Dokážte, že ak sa prirodzené čísla $A$, $B$ dajú zapísať v tvare súčtu dvoch štvorcov celých čísel, tak aj ich súčin $AB$ sa dá zapísať v tomto tvare.

*Riešenie:* Máme dokázať, že $AB = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2$ sa dá zapísať ako súčet dvoch štvorcov. Máme štyri výrazy, ktoré by mohli byť krajnými členmi dvoch roznásobených štvorcov. Teda od stredných členov našich štvorcov očakávame, že budú rovnaké až na znamienko a navzájom sa zrušia. Nič nám síce nezaručuje, že toto sa dá dosiahnuť, ale ak sa nám to podarí, sme hotoví. Po chvíľke skúmania a preberania možností zistíme, že to naozaj ide a že $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2+(ad-bc)^2$. Toto je úvaha (a identita) často používaná v teórii čísel.

**Príklad 19.** Dokážte Cauchyho-Schwarzovu nerovnosť, t. j. platnosť nerovnosti

$$(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2) \geq (x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)^2$$

pre ľubovoľné reálne čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$. Kedy nastáva rovnosť?

*Riešenie:* Vľavo máme výrazy tvaru $x_i^2y_j^2$, vpravo $x_iy_ix_jy_j$ pre všetky $i$, $j$ z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Skúsime to nejako usporiadať do štvorcov, každý člen z pravej strany bude stredným členom nejakého roznásobeného štvorca a dva výrazy z ľavej strany jeho krajnými členmi. Vieme, že

$$x_i^2y_j^2 - 2 \cdot x_iy_j \cdot x_jy_i + x_j^2y_i^2 = (x_iy_j - x_jy_i)^2 \geq 0.$$

Sčítaním $n^2$ takýchto nerovností (pre všetky možné hodnoty $i$, $j$) dostaneme dvojnásobok dokazovanej nerovnosti. Skontrolujte si to.
Rovnosť nastáva jedine vtedy, keď nastane rovnosť vo všetkých sčítaných nerovnostiach, teda keď

$$x_i y_j = x_j y_i \qquad \text{pre všetky } i, j \in \{1, 2, \dots, n\}. \tag{2}$$

Pre nenulové ypsilony sa (2) dá prepísať do podielu, $x_i/y_i = x_j/y_j$. Voľbou pevného $i = 1$ dostávame, že toto nastáva práve vtedy, keď pre nejaké reálne číslo $k$ platí $x_i/y_i = k$ pre všetky prípustné $i$. Túto úvahu si rozmyslite, na prvé prečítanie môže vyzerať mätúco.
A čo, ak nejaké $y_i = 0$? Záver z predchádzajúceho odstavca zostáva v platnosti, rozmyslite si, prečo. Môže vám pomôcť nasledujúca úvaha.
Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že aspoň jedno z čísel $x_i, y_i$ je nenulové pre všetky $i$. Čo fráza „bez ujmy na všeobecnosti“ znamená? Asi toľko, že keď predpokladáme opak, neutrpíme žiadnu ujmu a naša úvaha bude fungovať; v tomto konkrétnom prípade to znamená, že ak pre nejaké $i$ je $x_i = y_i = 0$, tak sa môžeme tváriť, že túto dvojicu tam vôbec nemáme a akoby sme pracovali len s $n - 1$ dvojicami čísel.
Ukážeme si iný prístup k dôkazu tejto nerovnosti. Prehoďme všetky výrazy na jednu stranu;

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n)^2 - (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2) \le 0.$$

Čo nám to pripomína? Výraz v tvare $a^2 - bc$... Mohol by byť diskriminantom nejakej kvadratickej rovnice. Platnosť našej nerovnosti je ekvivalentná s neexistenciou riešenia tejto rovnice (okrem prípadu, keď nastáva rovnosť). Vieme takúto rovnicu nájsť? (Skúste to sami, začnite preskúmaním pre malé $n$.)
Budeme ju hľadať v takom tvare, aby sme ľahko vedeli dokázať, že nemá žiadne riešenia, okrem prípadu rovnosti. Rovnosť nastáva pre netriviálne hodnoty premenných, čo nám pomôže zostaviť hľadanú rovnicu. Pomerne ľahko zistíme, kedy nastáva rovnosť pre $n = 1$ či $n = 2$. Potom môžeme pre tieto malé $n$ skúsiť zostaviť rovnicu. Experimentovanie nechávame na čitateľa, uvedieme si len tú rovnicu v definitívnej forme: $(x_1 - xy_1)^2 + \dots + (x_n - xy_n)^2 = 0$, neznáma je $x$.
Táto nerovnosť je jednou zo základných, ktoré by mal účastník matematických súťaží poznať. Má aj názornú geometrickú interpretáciu (skalárny súčin v rovine, t. j. pre $n = 2$).

**Príklad 20.** Zistite, či polynóm $x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 2$ má reálny koreň.

*Riešenie:* Ako riešime polynomické rovnice? Kvadratické riešime štandardnou metódou cez diskriminant. Aj pre rovnice štvrtého stupňa existujú vzorce, sú však veľmi zložité. Keby náš polynóm mal racionálny koreň, vieme vyskúšať niekoľko možností a nájsť ho (aké možnosti skúšame tu teraz nebudeme rozoberať, pozrite si to v nejakej učebnici matematiky pre gymnáziá). Ani toto nám však žiadne výsledky neprinesie; tento polynóm racionálne korene nemá. Jeho derivácia je tretieho stupňa a ak nemá racionálne korene, tak ani o lokálnych extrémoch takto nič nezistíme. Vyskúšajme niekoľko hodnôt $x$. Polynóm dá všetky hodnoty kladné. Preto stojí za pokus dokázať, že je kladný pre ľubovoľné reálne číslo $x$. Ako?
Problémom sú členy, ktoré môžu nadobúdať záporné hodnoty; v našom prípade je to $-3x^3$, ostatné sú zrejme nezáporné. Vieme pomocou ostatných členov vyvážiť tento člen? Nuž... Priamo nie. Mohol by to byť stredný člen nejakého roznásobeného štvorca? Ak áno, jeden z krajných členov tohto štvorca musí mať aspoň taký exponent ako stredný člen, teda môžeme skúsiť doplniť $x^4 - 3x^3$ na štvorec. Navyše by bolo úplne skvelé, keby druhý krajný člen tohto štvorca mal párny exponent; v tom prípade totiž zostávajúci polynóm bude mať nenulové koeficienty iba pri členoch s párnym exponentom a vieme stupeň tohto polynómu zmenšiť na polovicu jednoduchou substitúciou.
Stredný člen by mal mať koeficient deliteľný dvomi, aby sa nám ľahšie pracovalo, vynásobme náš mnohočlen dvomi a skúmajme výraz

$$P = 2x^4 - 6x^3 + 6x^2 + 4.$$

Za krajný člen štvorca nie je veľmi dobre brať $2x^4$, lebo by sme museli pracovať s iracionálnymi číslami. Konkrétne s $\sqrt{2}$, čo by nemuselo byť na škodu, ale ako sa môžete presvedčiť, neviedlo by to k dôkazu, ktorý sa snažíme spraviť a s iracionálnymi koeficientmi sa pracuje horšie (neváhajte a vyskúšajte si to na práve spomenutom príklade). Navyše by sme tým stratili výhodu získanú vynásobením polynómu dvomi. Skúsme teda iba $x^4$; platí $x^4 - 6x^3 + 9x^2 = x^2(x-3)^2$ a preto

$$P = x^4 + (x^4 - 6x^3 + 9x^2) - 3x^2 + 4 = x^2(x-3)^2 + x^4 - 3x^2 + 4 \ge x^4 - 3x^2 + 4.$$

Stačí dokázať $x^4 - 3x^2 + 4 \geq 0$ a to po substitúcii $y = x^2 \geq 0$ dorazíme čímkoľvek, napr. $y^2 - 3y + 4 \geq y^2 - 4y + 4 = (y-2)^2 \geq 0$ (všimnite si, že potrebujeme nezápornosť ypsilonu pre predposlednú nerovnosť; pri zavádzaní substitúcie si treba dávať pozor, aby sme nezahodili nejakú informáciu, možno dôležitú pre ďalší postup). Sme hotoví? Nie, ešte sme nevylúčili, že vo všetkých použitých odhadoch nastane pre nejaké $x$ rovnosť. V takom prípade by však muselo platiť $0 = y$ a súčasne $2 = y$ (všimnite si posledné dva odhady), čo nie je možné.

**Príklad 21.** Dokážte, že pre všetky reálne čísla $a$, $b$, $c$ spĺňajúce nerovnosť $a^2 + c^2 \leq 4b$ a pre všetky reálne čísla $x$ platí

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 \geq 0.$$

*Riešenie:* Čo nám robí problém na ľavej strane? Členy s nepárnym exponentom, teda $ax^3$ a $cx$. Skúsme sa na ne dívať ako na stredný člen nejakého roznásobeného štvorca a rozdeliť zvyšné nezáporné členy medzi štyri potrebné krajné členy týchto dvoch roznásobených štvorcov. Ak $x^4$ je krajným členom, tak stredný obsahuje $x$ s exponentom aspoň 2, preto $x^4$ nemôžeme použiť pri odhadovaní $cx$ ako stredného člena. Podobne ak by sme pri odhade stredného člena $ax^3$ použili člen 1 ako krajný člen, tak druhý krajný člen musí mať exponent $x$ aspoň 6 (rozmyslite si, prečo), čo nie je možné, také vysoké exponenty nemáme. Záver: ideme dopĺňať na štvorec výrazy $x^4 + ax^3$ a $1 + cx$.

$$\begin{aligned} x^4 + ax^3 &= (x^2)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot \frac{a}{2}x + \left(\frac{a}{2}x\right)^2 - \left(\frac{a}{2}x\right)^2 = \left(x^2 + \frac{a}{2}x\right)^2 - \frac{a^2}{4}x^2 \\ 1 + cx &= 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot \frac{c}{2}x + \left(\frac{c}{2}x\right)^2 - \left(\frac{c}{2}x\right)^2 = \left(1 + \frac{c}{2}x\right)^2 - \frac{c^2}{4}x^2 \end{aligned}$$

Toto dosadíme do nerovnosti, ktorú máme dokázať, použijeme nezápornosť štvorcov a predpoklad zo zadania.

$$\begin{aligned} x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 &= \left(x^2 + \frac{a}{2}x\right)^2 - \frac{a^2}{4}x^2 + bx^2 + \left(1 + \frac{c}{2}x\right)^2 - \frac{c^2}{4}x^2 \geq \\ &\geq bx^2 - \frac{a^2}{4}x^2 - \frac{c^2}{4}x^2 = x^2 \cdot \frac{4b - a^2 - c^2}{4} \geq 0 \end{aligned}$$

**Príklad 22.** Nájdite minimálnu hodnotu výrazu $V = a^6 + b^2 + 2b + 1 - 2a^3b - 2a^3$, kde $a$, $b$ sú reálne čísla.

*Riešenie:* O hodnotách, ktoré môže náš výraz nadobúdať, nám nepovedali v zadaní nič. Preto o nich niečo skúsime zistiť. Ako? Môžeme dosádzať za $a$, $b$ konkrétne hodnoty. Môžeme zafixovať jednu premennú a skúmať funkciu tej druhej. Môžeme použiť nám dostupné prostriedky matematickej analýzy. Keď zafixujeme $a$, dostaneme kvadratickú funkciu premennej $b$ a minimum nájdeme už ukázanými metódami, napr. doplnením na štvorec. Ukážeme si iné riešenie.
Dosádzaním zistíme, že skúmaný výraz asi nadobúda vždy kladné hodnoty. Nie je homogénny, takže dosadením $a = b$ asi veľa nezískame. Skúsme $a = 0$. Potom $V = b^2 + 2b + 1 = (b+1)^2$, čo je nezáporné a rovné nule iba pre $b = -1$. Nech $b = 0$; potom $V = a^4 - 2a^2 + 1 = (a^3 - 1)^2 \geq 0$ s rovnosťou pre $a = 1$. Nuž, keď si myslíme, že náš výraz je nezáporný, skúsme ho upraviť na štvorec či súčet niekoľkých štvorcov. Spravíme niekoľko pokusov:

$$\begin{aligned} V &= (a^3 - b)^2 + 1 + 2b - 2a^2, \\ V &= (a^3 - 1)^2 + b^2 - 2b - 2a^3b, \\ V &= (b+1)^2 + a^6 - 2a^2b - 2a^3. \end{aligned}$$

Tieto pokusy sú neúspešné z principiálnych dôvodov; výrazy, ktoré nám zvýšili, môžu nadobúdať ľubovoľne veľkú zápornú hodnotu a teda sa na súčet štvorcov upraviť nedajú. Štvorec však nemusíme vytvárať umocnením dvoch členov, funguje to aj s tromi či viacerými,

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$$

pre všetky reálne čísla $x$, $y$, $z$. Po porovnaní pravej strany tohto s naším výrazom $V$ jasne vidíme, ktoré členy sú štvorcami a ktoré sú násobkami čísla 2. Zrejme $V = (a^3 - b - 1)^2 \geq 0$ a sme hotoví.

**Príklad 23.** Nech $a$, $b$, $c$ sú nezáporné reálne čísla také, že $a+b+c=1$. Nájdite maximum výrazu

$$V = a^2 + b^2 + c^2 + \sqrt{12abc}.$$

*Riešenie:* Táto úloha je ťažká, bola použitá na výberovom sústredení pred medzinárodnou olympiádou. Sme však dobre pripravení a preto ju zdoláme. Všimnite si, že úloha nie je jednokroková ako mnoho predošlých; toto je jedna z vlastností ťažkých úloh – musíme spraviť niekoľko krokov, o ktorých si nie sme dopredu istí, či povedú k cieľu. Vyžaduje si to vytrvalosť a aj dôveru vo vlastné schopnosti.
V zadaní tejto úlohy sa vyskytol nový prvok, *väzba*. Čísla $a$, $b$, $c$ už nemôžeme voliť ľubovoľne, ale musia spĺňať vzťah $a+b+c=1$. Ako sa riešia takéto úlohy?
Jedna možnosť je vyjadriť si $c = 1-a-b$ a dosadiť túto hodnotu všade, kam treba. Nesmieme zabudnúť, že z obmedzenia $c \geq 0$ vyplýva, že pre hodnoty $a$, $b$ musí platiť $a+b \leq 1$. Bez tohto obmedzenia by skúmaný výraz mohol stratiť pôvodné vlastnosti, napríklad ohraničenosť zhora. Tu sa nám to nestane kvôli tomu, že musíme mať definovaný výraz pod odmocninou, ale po umocnení výrazu (ak hľadáme maximum kladného výrazu, rovnako dobre môžeme hľadať maximum jeho druhej či vyššej mocniny) by nám mohlo toto obmedzenie chýbať.
Dosádzanie väzby má niekoľko slabín. Ani jedna z premenných nemusí byť z väzby vyjadriteľná v rozumnom tvare (napr. pre väzbu $a^4 + b^4 = 1 + a^5 b^5$). Aj keď jednu z premenných vyjadríme, po dosadení môže vzniknúť nezvládateľný, príliš komplikovaný výraz. A navyše dosadením väzby stratíme symetriu premenných, ktorá nám v minulosti už mnohokrát pomohla.
Preskúmajme najprv okrajové prípady pre prípustné hodnoty $a$, $b$, $c$. Jeden je $a = b = c = 1/3$, vtedy $V = 3a^2 + 2\sqrt{3a^3} = 1/3 + 2/3 = 1$. Pre $a = 1$, $b = c = 0$ (symetria, stačí skúsiť jednu možnosť z troch) je $V = 1$.
Skúsme vyriešiť jednoduchšiu úlohu, možno nájdené maximum bude aj maximom vo všeobecnom prípade. Nech $c = 0$. Potom pre nezáporné čísla $a$, $b$ so súčtom $a+b=1$ chceme maximalizovať výraz $T = a^2 + b^2$. Nuž, $T = a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 1 - 2ab \leq 1$, môže nastať aj rovnosť (tento odhad je motivovaný tým, že vieme hodnotu súčtu $a+b$, nuž sa ju tam snažíme nejako napasovať). Týmto sme našu čiastočnú úlohu vyriešili.
Z práve povedaného máme veľmi dobrú hypotézu pre hľadané maximum, skúsme dokázať, že

$$V = a^2 + b^2 + c^2 + \sqrt{12abc} \leq 1.$$

Možno by pomohla úprava použitá pri dôkaze našej jednoduchšej úlohy? Vo verzii pre tri premenné je $a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)$, po dosadení do dokazovanej nerovnosti a úprave dostávame ekvivalentnú nerovnosť

$$\sqrt{12abc} \leq 2(ab+bc+ca).$$

Teraz nasleduje niekoľko samozrejmých krokov; zbavenie sa odmocniny a vykrátenie.

$$3abc \leq (ab+bc+ca)^2$$

Platí takáto nerovnosť? Spravme rýchly test, nech $a = b = c$, potom by malo byť $3a^3 \leq 9a^4$, čo pre dostatočne malé $a$ neplatí. Ako to? Pomýlili sme sa? Nie. Iba sme zabudli na to, že stále máme väzbu; tá v tomto prípade hovorí $a \geq 1/3$ a pre takéto $a$ nerovnosť platí.
Pokračujeme v dôkaze. Ako vidíme, väzbu nemôžeme ignorovať, bez nej nerovnosť neplatí. Ale radi by sme sa jej zbavili. Preto *zhomogenizujeme* nerovnosť tak, že na vhodné miesta dosadíme väzbu: namiesto čísla 1 budeme písať $a+b+c$.

$$3abc = 3abc \cdot (a+b+c) = 3(a^2bc + ab^2c + abc^2) \leq (ab+bc+ca)^2$$

Posledná nerovnosť je homogénna a platí už pre všetky nezáporné čísla $a$, $b$, $c$. Je ľahké ju dokázať niektorou z doteraz použitých metód. (Návod: umocníme pravú stranu a odčítame od oboch strán rovnaké výrazy.)
Všimnite si, ako nám pomohlo, že sme vyriešili jednoduchšiu úlohu (s redukovaným počtom premenných a jednoduchším výrazom na minimalizáciu). Nie triviálnu, zostal v nej prvok, ktorý bol aj v pôvodnej úlohe: väzbu (resp. jej druhú mocninu) dosádzame za jednotku (tipnuté maximum) na pravej strane. Toto treba zdôrazniť aj žiakom, aby sa nebáli so zadaním manipulovať, aby si stanovili ľahší problém

a inšpirovali sa jeho výsledkom či metódou pri riešení pôvodného problému. Niekedy pomáha problém si zovšeobecniť, napr. označiť záhadné konštanty písmenkami a parametrizovať úlohu – často sa ukážu súvislosti, ktoré predtým nebolo vidieť.

**Príklad 24.** Dokážte pre kladné čísla $a$, $b$ spĺňajúce $a^5 + b^5 = a^3 + b^3$ platnosť nerovnosti

$$a^2 + b^2 \leq 1 + ab.$$

*Návod:* Upravíme nerovnosť tak, aby všetky členy na ľavej strane mali exponent 2 a všetky členy na pravej strane exponent 0; potom prenásobíme nerovnosť výrazom $a^3 + b^3$ a na pravú stranu za tento výraz dosadíme z väzby $a^5 + b^5$. Dostaneme homogénnu nerovnosť, ktorá platí aj bez väzby.