1 Čo je matematická indukcia?

Indukcia — zovšeobecňovanie z malého počtu prípadov. V matematike vhodné na vytváranie hypotéz (s nejasnou platnosťou: skúste z malých prípadov zistiť, či $n^2 + n + 41$ je prvočíslo). *Matematická indukcia* (MI) — garantujeme pravdivosť na úrovni matematického dôkazu.

Základná verzia: dokážeme $T(n_0)$ aj $\forall n \geq n_0 : T(n) \Rightarrow T(n+1)$ (zväčša $n_0 \in \{0, 1\}$). Platnosť pre ľubovoľné $n \geq n_0$ je ako domino: v rade kociek niektorú zhodíme a padnú potom aj všetky nasledujúce. Predpokladu na ľavej strane implikácie v 2. kroku hovoríme indukčný predpoklad (IP).

MI možno využiť na dôkaz rovností. [Ako to zapísať? IP, $n \Rightarrow n+1$ vs. $k \Rightarrow k+1$]

- Pre každé prirodzené n platí $1 + 2 + \ldots + n = n(n+1)/2$.
- Pre každé prirodzené n platí $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

MI možno využiť na dôkaz nerovností. [Ako to zapísať?]

- Pre každé celé $n \geq 0$ platí $2^n > n$.
- Pre každé celé $n \geq 4$ platí $2^n > n^2$. [Dvojitá indukcia.]
- Existuje prirodzené n_0 také, že pre ľubovoľné celé $n \geq n_0$ platí $3^n > 7n + 8$.

Oba indukčné kroky sú potrebné. Nájdite tvrdenie, pre ktoré funguje druhý, ale nefunguje prvý krok indukcie. [Napr. $3^n > 5 \cdot 3^n$; $9 \mid 4^n + 6n$.]

Chybný dôkaz: všetky čísla sú rovnaké (v druhom kroku uvažujeme $(n-1)$-tice rovnakých čísel x_1 až x_{n-1}, x_2 až x_n).

2 Úplná indukcia

Niekedy si s indukčným predpokladom zahŕňajúcim len jeden predošlý člen nevystačíme. Úplná indukcia: dokážeme $T(n_0)$ a

$$\forall n \geq n_0 : [T(0) \wedge T(1) \wedge \ldots \wedge T(n-1)] \Rightarrow T(n),$$

resp. $[\forall k < n\ T(k)] \Rightarrow T(n)$. Indukciu možno robiť aj s podivnými skokmi hore-dole. Príklad: pri dôkaze nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom v druhom kroku $n \to 2n$, $n \to n-1$.

V ďalšom texte využívame Fibonacciho postupnosť definovanú ako $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pre $n \geq 2$.

- Každé prirodzené číslo má rozklad na prvočísla. (Nezaujímame sa o jednoznačnosť rozkladu.)
- Máme 4- a 7-centové mince (hocikoľko). Dokážte, že nimi vieme vyplatiť ľubovoľnú sumu nad 1 euro (bez vydávania). [Začiatok indukcie sa dá posunúť podľa potreby.]
- Pre každé celé $n \geq 0$ platí $F_n < 2^n$.

- Pre každé celé $n \geq 3$ platí $F_n > 1.1^n$.
- Pre ľubovoľné nezáporné celé m, n platí $F_m F_n + F_{m+1} F_{n+1} = F_{m+n+1}$. [Dá sa indukciou podľa n, alebo $m+n$.]
- Máme tabuľku čokolády tvaru $1 \times n$. Lámeme ju pozdĺž jednotlivých línií, chceme kúsky 1×1. Koľko najmenej lámaní budeme potrebovať?
- Máme tabuľku čokolády tvaru $m \times n$. Lámeme ju pozdĺž jednotlivých línií, chceme kúsky 1×1. Koľko najmenej lámaní budeme potrebovať? [MI podľa mn, čiže veľkosti čokolády, ale šlo by aj podľa $m+n$. Dôkaz cez invariant však odhalí viac o podstate problému ako MI.]
- Určte maximálny počet uhlopriečok konvexného n-uholníka, ktoré nemajú žiadne spoločné vnútorné body.
- Súčet uhlov konvexného n-uholníka je $(n-2) \cdot 180°$.

Pozorovanie: silnejší indukčný predpoklad pomáha v 2. indukčnom kroku. Použitie úplnej indukcie miesto „základnej" zosilní indukčný predpoklad úplne zadarmo, bez zmeny pravej strany implikácie, ktorú v 2. kroku dokazujeme. Neraz sa však oplatí zvýšiť silu indukčného predpokladu aj za cenu, že sa na pravej strane zjaví silnejšie tvrdenie — čiže dokazovaním silnejšieho tvrdenia (z ktorého to pôvodné vyplýva). Ukážky:

- Súčet $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$ je pre každé n druhou mocninou prirodzeného čísla. [Dokazujeme MI, že $S_n = (n(n+1)/2)^2$. Pri pôvodnom tvrdení sa zasekneme, po použití IP chceme ukázať, že $x^2 + n^3$ je štvorec, čo však pre všeobecné x neplatí.]
- Fibonacciho postupnosť nie je zhora ohraničená. [Dokazujeme napr., že je rastúca, teda pre každé $n \geq 1$ platí $F_{n+1} > F_n$ a $F_n > 0$. Alebo pre $n \geq 3$ platí $F_n > 1.1^n$.]
- Dokážte, že nekonečne veľa členov Fibonacciho postupnosti je párnych. [MI: zvyšky po delení 2 sa periodicky opakujú: $0, 1, 1, 0, 1, 1 \ldots$]
- V postupnosti danej predpisom

  $$a_{n+2} = -a_{n+1} - a_n, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 0$$

  je len konečne veľa rôznych hodnôt. [Dok., že je periodická: $1, 0, -1, 1, 0, -1, \ldots$.]

3 Čo sa indukciou dokázať nedá

Pri dôkaze implikácie v druhom kroku vôbec nemusíme využiť IP. Príklad: $\forall n \forall x : nx^2 \geq 0$, MI podľa n. Vtedy je síce dôkaz zapísaný ako MI, ale v skutočnosti robíme v 2. kroku priamo dôkaz pôvodného tvrdenia. V tomto zmysle vieme každé tvrdenie dokázať MI (stačí pred neho pridať $\forall k$ pre novú celočíselnú premennú k a robiť indukciu podľa k). Zamerajme sa však na situácie, kde indukcia nepomáha: keď záver v implikácii v druhom kroku je silnejší ako IP (a implikácia je pravdivá akosi len zato, že z pravdy vždy vyplýva pravda).

- Pre každé prirodzené číslo n platí $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} < 2$. [Fix: silnejšie tvrdenie, presný súčet ĽS.]

- Pre každé prirodzené číslo n platí $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2$. [Fix: silnejšie tvrdenie, ĽS $\leq 2-1/n$.]

MI tiež neumožňuje spraviť prechod od *ľubovoľne veľkej konečnej množiny* k *nekonečnej množine.*

- Ľubovoľná neprázdna podmnožina M prirodzených čísel má najväčší prvok. [Platí len pre konečné M, dá sa dokázať MI.]
- Ľubovoľná neprázdna podmnožina M prirodzených čísel má najmenší prvok. [Pre nekonečné M: keďže M je neprázdna, má nejaký prvok p, uvažujme podmnožinu M s prvkami nie väčšími ako p, tá musí byť konečná a preto má najmenší prvok.]

4 Dokázať vs. pochopiť podstatu

MI možno využiť v teórii čísel.

- Číslo $5^{n+1}+6^{2n-1}$ je násobkom 31 pre každé prirodzené číslo n.
- Pre každé celé $n \geq 0$ platí $9 \mid 4^n+6n-1$.
- Dokážte, že ak a a n sú nepárne kladné celé čísla, tak 2^{n+1} delí $a^{2^n}-1$. (Pozor: $x^{y^z}=x^{(y^z)}$.)

Všimnite si rozdiel: kým v poslednom prípade indukciou získame pochopenie štruktúry výrazu (rozklad na súčin), v ostatných dvoch síce tvrdenie dokážeme, ale nevidíme hlbšie dôvody, prečo platí (napr. súvis medzi 4^n a $6n$ z hľadiska deliteľnosti 9). Napr. pri postupnostiach indukcia zvyčajne priamo adresuje podstatu; pri deliteľnosti zriedka — na hlbšie pochopenie treba napr. sledovať zvyšky po delení.

Niekedy možno zachrániť dodatočným predpokladom 2. krok, ktorý „nevychádza“.

- Pre ľubovoľné prirodzené číslo n a reálne čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ platí

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2 \leq n(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2).$$

5 Postupnosti

Indukcia prirodzene funguje na postupnostiach, najmä definovaných rekurentne.

- Postupnosť spĺňa $a_0=1.01$, $a_{n+1}=a_n^2-a_n+1$. Dokážte, že $a_n \geq 1$ pre všetky n.
- Dokážte, že $F_1^2+F_2^2+\cdots+F_n^2$ sa dá vyjadriť ako súčin dvoch Fibonacciho čísel.
- Algoritmus pri usporiadaní n čísel spraví $T(n)$ krokov, pričom $T(0)=1$ a $T(n)=2T(n/2)+n$. Dokážte, že $T(n) \leq An^k+B$ pre vhodné konštanty A, B a $k=2$. Pre ktoré hodnoty k možno nájsť vhodné konštanty A, B?

- Dokážte, že
$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$
[Zaujímavé je, že hocijako pochybne sme uhádli takýto vzorec, indukciou sa dá ľahko dokázať jeho správnosť. V kombinatorickej analýze je viacero techník s otáznou matematickou korektnosťou, napr. použitie súčtov nekonvergentných nekonečných radov.]

V niektorých situáciách žiadna postupnosť zadaná nie je, ale z konečnej množiny objektov ju vieme vytvoriť.

- V rovine leží niekoľko priamok a rozdeľujú ju na oblasti. Dokážte, že vieme zafarbiť oblasti bielou a čiernou farbou tak, aby ľubovoľné dve susedné oblasti mali rôzne farby. [Priamky pridávame postupne a zakaždým zmeníme v jednej polrovine farby.]
- Na najviac koľko častí rozdelí rovinu n priamok?

6 Stromy a grafy

Indukcia dobre funguje na grafoch (vrcholy spojené hranami). Najprv krátky úvod: graf, súvislosť, cesta, kružnica, strom. MI bežne robíme podľa počtu vrcholov alebo hrán grafu (IP je, že pre menšie grafy tvrdenie platí).

Ukážka oboch spôsobov: Súčet stupňov vrcholov je v každom grafe párny.

Dôkaz robíme tak, že z daného grafu *odoberieme* vrchol či hranu a na zvyšok použijeme IP. Nie tak, že čosi pridávame ku grafu, pre ktorý tvrdenie platí podľa IP. Pozor: ak máme tvrdenie s požiadavkami na graf (napr. že je súvislý), musíme overiť, že tie menšie grafy spĺňajú tieto požiadavky.

Chybný dôkaz cez pridávanie vrcholov: V každom súvislom grafe s minimálnym stupňom 2 leží každá hrana na kružnici.

- Každý súvislý graf má *kostru* (podgraf, ktorý obsahuje všetky vrcholy, ale žiadnu kružnicu).
- Každý strom má list. [Je ľahšie indukciou dokazovať, že každý strom má listy aspoň dva. Bez indukcie: aspoň Δ listov.]
- Graf bez kružnice na n vrcholoch má nanajvýš $n-1$ hrán. (Kedy nastáva rovnosť?)
- V skupine detí má každý aspoň jedného kamaráta. Dokážte, že vieme deti rozdeliť na volejbalový turnaj a matematickú olympiádu tak, že každý má kamaráta, ktorý sa zúčastnil aktivity, ktorej sa nezúčastnil on sám.
- Ak na tenisovom turnaji (žiadne remízy) hral každý hráč s každým, vieme usporiadať hráčov do postupnosti tak, že prvý vyhral nad druhým, druhý nad tretím atď. až po výhru predposledného nad posledným.

7 Ďalšie diskrétne štruktúry a aplikácie

- Logika: Indukciou možno definovať pravdivostnú hodnotu zložitého výroku, predstavíme si operátorový strom s logickými spojkami, a hodnota v danom vrchole je určená príslušnou logickou spojkou a hodnotou pravého a ľavého podstromu.
- Množiny: Počet podmnožín danej množiny s n prvkami je 2^n.
- Informatika: Čo sa dá odvodiť pomocou danej sady pravidiel? Napr. pravidlá $A \to a$, $A \to Aa$, $B \to b$, $B \to Bb$, $Z \to AB$, aké slová z písmen a, b odvodíme zo Z? [Popíšeme formu slova po n krokoch výpočtu a MI kopíruje výpočet pri dôkaze, opäť treba silnejšie tvrdenie než podobu záverečného slova.]
- Vlastnosti algoritmu: Na vyriešenie problému hanojských veží treba aspoň $2^n - 1$ krokov.
- Správnosť algoritmu: BFS nájde vzdialenosť v neohodnotenom grafe.

8 Ďalšie úlohy

- Dokážte, že pre ľubovoľné kladné celé čísla k, n je F_{kn} násobkom F_n.
- Číslo $a^{5^n} - a$ je násobkom čísla 5 pre každé prirodzené číslo n.
- Rozhodnite, či pre ľubovoľné prirodzené n platí $33 \mid 5^{2n+1} + 11^{2n+1} + 17^{2n+1}$.
- Súčet všetkých nepárnych čísel od 1 po $2n - 1$ je druhou mocninou celého čísla.
- Zistite, koľkými spôsobmi možno vyjsť na schodisko s n schodmi, ak každým krokom stúpneme o 1 alebo 2 schody.
- Nech $x \geq -1$. Dokážte, že pre každé kladné celé n platí $(1 + x)^n \geq 1 + nx$. Kedy nastáva rovnosť?
- Nech n je prirodzené číslo a $a_1 < a_2 < \cdots < a_{2n+1}$ sú kladné reálne čísla. Dokážte, že platí

  $$(a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots - a_{2n} + a_{2n+1})^{1/n} \geq a_1^{1/n} - a_2^{1/n} + a_3^{1/n} - \cdots - a_{2n}^{1/n} + a_{2n+1}^{1/n}.$$

  (Návod: oddeľte počet čísel a_i od exponentov v nerovnosti tým, že niektoré n nahradíte m a potom skúsite MI podľa m či n.)
- Šachovnica s rozmermi $2^n \times 2^n$, z ktorej je odstránené jedno ľubovoľné pole, sa dá vždy úplne pokryť dlaždicami tvaru L pokrývajúcimi tri polia.
- Každý graf s párnym počtom hrán vieme rozdeliť na cesty dĺžky 2.
- Graf s n vrcholmi bez trojuholníkov má najviac $n^2/4$ hrán.
- Ak pre kladné reálne $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí $x_1 x_2 \ldots x_n = 1$, tak $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n$.

Literatúra:

- `https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/404193`
- `https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/403889`