Geometria

Kreslite si dostatok veľkých, prehľadných obrázkov. Na nasledovných úlohách si ukážeme toto:

- Cieľavedomé počítanie uhlov.
- Práca „odzadu“ – dôkaz ťažšej implikácie s využitím ľahšej.
- Ako ukázať, že úsečka má rovnakú dĺžku ako súčet dvoch iných dĺžok – prenesieme tie dve dĺžky vedľa seba na priamku a budeme hľadať zhodné trojuholníky.

Veta o stredovom a obvodovom uhle: Nech S je stred kružnice k prechádzajúcej dvomi rôznymi bodmi A a B a nech C je bod vnútri polroviny ABS. Bod C leží na kružnici k práve vtedy, keď $|\angle ASB| = 2|\angle ACB|$.

Navzájom rôzne body A, B, C, D ležia na kružnici, ak $|\angle ACB| = |\angle ADB|$ a body C a D ležia v rovnakej polrovine vzhľadom na priamku AB.

Štvoruholník je tetivový práve vtedy, keď súčet veľkostí protiľahlých uhlov je $180°$.

Veta o úsekovom uhle: Nech TA je tetiva kružnice k. Priamka TX je dotyčnicou kružnice k práve vtedy, keď veľkosť uhla ATX je rovnaká ako veľkosť obvodového uhla nad tetivou TA.

Mocnosť bodu ku kružnici: Nech body A, B, C, D ležia kružnici k, nech M je priesečník priamok AB a CD a nech T je dotykový bod dotyčnice z bodu M ku kružnici k. Potom platí $|MA| \cdot |MB| = |MC| \cdot |MD| = |MT^2|$.

Ak pre priesečník M priamok AB a CD platí $|MA| \cdot |MB| = |MC| \cdot |MD|$ a bod M je buď vnútri úsečiek AB a CD, alebo mimo oboch týchto úsečiek, tak body A, B, C, D ležia na kružnici.

Viac: pošlem na požiadanie e-mailom (`mazak@dcs.fmph.uniba.sk`).

---

1. Dve kružnice sa pretínajú v dvoch rôznych bodoch A a B. Nech C a D sú priesečníky priamky p prechádzajúcej bodom B s daným kružnicami (rôzne od bodu B). Dokážte, že veľkosť uhla CAD nezávisí od voľby priamky p.

2. Kružnice k_1 a k_2 sa pretínajú v dvoch rôznych bodoch A, B. Bodom A prechádza priamka, ktorá pretína kružnice k_1 a k_2 po druhýkrát v bodoch C a E (v tomto poradí). Bodom B prechádza priamka, ktorá pretína kružnice k_1 a k_2 po druhýkrát v bodoch D a F (v tomto poradí). Dokážte, že priamky CD a EF sú rovnobežné.

3. V rovine je daný pravouhlý lichobežník $ABCD$ s dlhšou základňou AB a pravým uhlom pri vrchole A. Označme k_1 kružnicu zostrojenú nad stranou AD ako nad priemerom a k_2 kružnicu, ktorá prechádza bodmi B, C a dotýka sa priamky AB. Ak majú kružnice k_1, k_2 vonkajší dotyk v bode P, je priamka BC dotyčnicou kružnice opísanej trojuholníku CDP. Dokážte.

---

4. Do kružnice k je vpísaný štvoruholník $ABCD$, ktorého uhlopriečka BD nie je priemerom. Dokážte, že priesečník priamok, ktoré sa kružnice k dotýkajú v bodoch B a D, leží na priamke AC práve vtedy, keď platí $|AB| \cdot |CD| = |AD| \cdot |BC|$.

5. Dokážte, že výšky v trojuholníku sa pretínajú v jednom bode. (Návod: nech V je priesečník výšok z vrcholov A a B, cieľavedomým počítaním uhlov s využitím tetivových štvoruholníkov dokážte, že $CV \perp AB$.)

6. Nech body K, L, M ležia v tomto poradí vnútri strán BC, CA, AB trojuholníka ABC. Dokážte, že ak platí $\frac{AM}{BM} \cdot \frac{BK}{CK} \cdot \frac{CL}{AL} = 1$, tak sa priamky AK, BL, CM pretínajú v jednom bode. (Návod: využite opačnú implikáciu. Dôkaz opačnej implikácie spravte cez pomery obsahov vhodných trojuholníkov alebo si pozrite Cevovu vetu.)

---

7. Na kratšom oblúku BC kružnice opísanej rovnostrannému trojuholníku ABC zvolíme bod P. Dokážte, že $|AP| = |BP| + |CP|$.

8. Nech $ABCD$ je tetivový štvoruholník, ktorého vnútorný uhol pri vrchole B má veľkosť $60°$.
a) Ak $|BC| = |CD|$, potom platí $|CD| + |DA| = |AB|$; dokážte.
b) Rozhodnite, či platí opačná implikácia.

---

9. V rovine je daná kružnica k a tetiva AB. Po jednom z oblúkov AB kružnice K sa pohybuje bod C. Dokážte, že os uhla ACB prechádza pevným bodom nezávislým od polohy bodu C. Nájdite množiny bodov, ktoré opíšu stred vpísanej kružnice trojuholníka ABC, ťažisko trojuholníka ABC a priesečník výšok trojuholníka ABC.

10. Vnútri oblúka BC kružnice opísanej trojuholníku ABC, ktorý neobsahuje bod A, zvoľme bod P. Na polpriamkach AP, BP zvolíme postupne body X, Y tak, aby platilo $|AX| = |AC|$ a $|BY| = |BC|$. Ukážte, že každá takáto priamka XY prechádza pevným bodom, ktorého poloha nezávisí od voľby bodu P.