Poznámka: Vyriešte rovnicu $x^y = 1 + 5 \cdot 3^y$ v obore prirodzených čísel. Skúste nájsť viac postupov.

Úloha č. 14: *Nech a, b, c sú kladné reálne čísla spĺňajúce vzťah $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Dokážte, že*

$$\frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b} + \frac{c}{1-c} \geq \frac{3\sqrt{3}+3}{2}.$$

Riešenie: (opravoval Mazo)
Výraz na ľavej strane nerovnosti označme V. Chceme ho zdola odhadnúť konštantou. Chceme čo najlepší odhad, takže by mala niekedy nastávať rovnosť. Rovnosť obyčajne nastáva v krajných bodoch alebo ak sú všetky premenné rovnaké. Vyskúšame, rovnosť nastáva pre $a = b = c = 1/\sqrt{3}$ a asi nikdy inokedy. Medzitým sme z väzby zistili, že čísla a, b, c sú z intervalu $(0, 1)$ a preto všetky ďalšie úvahy budeme robiť na tomto intervale.
Nemá veľký zmysel roznásobovať nerovnosť. Konštanta na pravej strane z niečoho vyjsť musí a len tak zadarmo to nebude. Navyše výraz V sa vôbec nepodobá na väzbu. Väzba $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ je stupňa 2 a niet ju kam dosadiť, aby sme zhomogenizovali nerovnosť. Takže budeme skúšať niečo iné.
Prvé riešenie: Ako sa dá použiť väzba? Ak by sa nám podarilo dokázať, že na intervale $(0, 1)$ platí

$$\frac{a}{1-a} \geq \frac{3\sqrt{3}+3}{2}\, a^2, \tag{1}$$

tak stačí sčítať takéto nerovnosti pre a, b, c a máme tvrdenie dokázané. Problém je, že nerovnosť (1) neplatí. Najľahšie sa o tom presvedčíte tak, že nájdete konkrétne a, pre ktoré neplatí.
Ale idea je to dobrá. Možno treba trocha upraviť výraz $a/(1-a)$ a už to pôjde. Z niekoľkých možných úprav vyskúšame tú, ktorá menovateľ výrazu upraví na čosi podobné väzbe. (Môže a nemusí to viesť k riešeniu.)

$$\frac{a}{1-a} = \frac{a\cdot(1+a)}{(1-a)\cdot(1+a)}\frac{a\cdot(1+a)}{(1-a)\cdot(1+a)} = \frac{a+a^2}{1-a^2}\frac{a+a^2}{1-a^2} = \frac{a}{1-a^2}+\frac{1+a^2-1}{1-a^2}\frac{a}{1-a^2}+\frac{1+a^2-1}{1-a^2} = \frac{a}{1-a^2}+\frac{1}{1-a^2}-1$$

Vyzerá to horšie ako predtým. Pozrime sa však na to po častiach. Ako nájdeme dolný odhad výrazu

$$\frac{1}{1-a^2} + \frac{1}{1-b^2} + \frac{1}{1-c^2}\,?$$

Napíšte si nerovnosť medzi harmonickým a aritmetickým priemerom pre tri čísla. Okrem iného sa dá napísať v tvare

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9.$$

Hociktorý z výrazov na ľavej strane vieme odhadnúť zdola pomocou druhého výrazu. Dosaďme $x = 1-a^2$, $y = 1-b^2$, $z = 1-c^2$ a použime väzbu. Dostaneme

$$\frac{1}{1-a^2} + \frac{1}{1-b^2} + \frac{1}{1-c^2} \geq \frac{9}{2}.$$

Vieme teda, že

$$\frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} + \frac{c}{1-c^2} + \frac{1}{1-a^2} + \frac{1}{1-b^2} + \frac{1}{1-c^2} - 3 \geq \frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} + \frac{c}{1-c^2} + \frac{3}{2}\,.$$

Teraz na odhad členov v tvare $a/(1-a^2)$ stačí metóda zo začiatku odstavca, dokážeme, že na intervale $(0, 1)$ platí

$$\frac{a}{1-a^2} \geq 3\sqrt{3}\, a^2.$$

To stačí na dôkaz celej nerovnosti. Pri dôkaze poslednej nerovnosti dostaneme kubický mnohočlen s premennou a. Ten treba rozložiť na súčin; pomôže nám pri tom, že vieme, kde nastáva rovnosť. Tá rovnosť musí nastať aj v našom odhade, takže poznáme jeden koreň nášho mnohočlena.
Druhé riešenie: Vylepšíme metódu z prvého riešenia. Na prvé prečítanie vám to možno príde komplikované, ale myšlienka je pekná a užitočná, nedajte sa odradiť.
Najprv trocha upravíme výrazy na ľavej strane, ku každému z nich pripočítame 1. Dokazovaná nerovnosť sa zmení na

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} \geq \frac{3\sqrt{3}+9}{2}.$$

Označme $f(x) = 1/(1-x)$. Skúsime funkciu f odhadnúť na intervale $(0, 1)$ zdola nejakou funkciou g. Od funkcie g budeme požadovať, aby prechádzala bodom $[1/\sqrt{3}, f(1/\sqrt{3})]$, lebo v ňom nastáva rovnosť. Navyše budeme chcieť,

aby pre $x = 1/\sqrt{3}$ mala funkcia $g(x)$ rovnakú deriváciu ako $f(x)$. Nakreslite si obrázok, je z neho jasné, že chceme, aby graf funkcie g ležal medzi grafom funkcie f a dotyčnicou k f v bode $1/\sqrt{3}$. Potom bude fungovať odhad $f(a) + f(b) + f(c) \geq g(a) + g(b) + g(c)$ a budeme navyše chcieť $g(a) + g(b) + g(c) \geq (3\sqrt{3} + 9)/2$.
Zo všetkých takých funkcií g si vyberieme takú, ktorá sa podobá na väzbu. Budeme hľadať g v tvare $g(x) = px^2 + q$. Pre čísla p, q dostaneme z podmienok kladených na funkciu $g(x)$ sústavu rovníc

$$p + 3q = \frac{3\sqrt{3} + 9}{2},$$

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = f'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = g'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2p\,\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Vyriešením tejto sústavy získame čísla p, q. Treba dokázať, že platí $f(x) \geq g(x)$ na celom skúmanom intervale. To už ponechávame na vás.
<u>Tretie riešenie:</u> Ideou tohto riešenia je využiť na odhad ľavej strany váženú Jensenovu nerovnosť. Dôležité je upraviť ľavú stranu do takého tvaru, kde sa dá táto nerovnosť použiť. Ostatné kroky sú technické. (Týmto vám okrem iného naznačujem, že je dobré poznať bežné nerovnosti a mať v ich používaní aspoň akú-takú prax.)
Dokážeme nerovnosť v tvare

$$\frac{a^2}{a(1-a)} + \frac{b^2}{b(1-b)} + \frac{c^2}{c(1-c)} \geq \frac{3\sqrt{3} + 3}{2}.$$

Nech $f(x) = 1/x(1 - x)$ pre x z intervalu $(0, 1)$. Funkcia f je konvexná, preto z Jensenovej nerovnosti máme

$$a^2 f(a) + b^2 f(b) + c^2 f(c) \geq f(a^3 + b^3 + c^3).$$

Z nerovnosti medzi mocninovými priemermi máme

$$\left(\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \geq \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Odtiaľ dostávame $a^3 + b^3 + c^3 \geq 1/\sqrt{3}$. Na intervale $(1/2, 1)$ je funkcia f rastúca, preto

$$f(a^3 + b^3 + c^3) \geq f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3\sqrt{3} + 3}{2}.$$

<u>Poznámka:</u> Vyskúšajte si predvedené metódy na nasledujúcej úlohe.
Nech $n \geq 4$ a $a_1, \ldots, a_n$ sú nezáporné reálne čísla spĺňajúce vzťah $a_1^2 + \cdots + a_n^2 = 1$. Dokážte, že platí

$$\frac{a_1}{1 - a_1} + \frac{a_2}{1 - a_2} + \cdots + \frac{a_n}{1 - a_n} \geq 4.$$