Úvod do teórie grafov

1. Úvod

Teória grafov patrí medzi oblasti matematiky úplne zanedbané v základoškolských a stredoškolských osnovách. Pritom je to dnes jedna z najdynamickejšie sa rozvíjajúcich oblastí matematiky a ponúka mnohé praktické aplikácie. Samotné tvrdenia i dôkazy teórie grafov sú väčšinou elementárne a dostupné už základoškolákom.

Rozhodol som sa, že túto oblasť priblížim deťom na matematickom tábore určenom pre budúcich prvákov na gymnáziu. Budovať abstraktnú formálnu teóriu nemá v tomto veku význam. Lepšie je ukázať si, ako sa mnohé úlohy dajú riešiť tým, že si nakreslíme obrázok. Deti si tak vytvoria zásobu separovaných a univerzálnych modelov, ktoré sa im zídu pri výučbe algoritmov a riešení kombinatorických úloh.

Deti na tábore mali vek 13 až 16 rokov a všetky mali ukončený aspoň siedmy ročník základnej školy. Nie je to dôležité, pretože k prednáške nepotrebujeme nič z toho, čo sa preberá na základnej škole. Dôležité je však abstraktné myslenie, ktoré sa u detí vyvíja až v takomto veku.

V ďalších kapitolách popíšem obsah prednášky, teda to, čo rozprávame deťom, spolu s komentármi pre prednášateľa. (V zátvorkách.)

Nie je nutné stihnúť všetko počas jediného stretnutia. Treba nechať deti, nech idú vlastným tempom. Radšej spravíme pre záujemcov dodatočnú prednášku alebo seminár.

Naraz by na prednáške nemalo byť priveľa detí, pretože sa s nimi potom nedá pracovať. Na tábore bolo 28 detí, rozdelili sme ich na dve rovnako početné skupiny podľa veku a vedomostí.

2. Mapy a plány

Určite ste sa už stretli s mapou. Skúsme vyriešiť takúto úlohu: Máme automapu Slovenska. Chceme ísť autom z Košíc do Komárna. Aká je najkratšia cesta? Je nám jasné, že z mapy nepotrebujeme všetky informácie (napr. o pohoriach), stačí vedieť, odkiaľ kam vedie cesta a aká je táto cesta dlhá. (Kreslíme na tabuľu niekoľko slovenských miest a prepojenia medzi nimi. Vhodné pre uplatnenie detí znalých geografie, odhadujeme spolu s nimi vzdialenosti medzi mestami a píšeme ich na tabuľu.) Keďže nakreslená mapa je jednoduchá, vieme ľahko nájsť najkratšiu cestu.

Okrem mapy štátu máme plán mesta. Celkom dobre je tvar mesta vystihnutý mestskou hromadnou dopravou. Doprava chodí tam, kde ľudia žijú a pracujú, teda tam, kde sú budovy, kde je mesto. Ako sú navrhnuté zastávky MHD? Približne rovnomerne. Sú samozrejme aj výnimky, ale budeme predpokladať, že sú od seba zastávky rovnako vzdialené. (Toto som ilustroval dvoma príkladmi z Košíc, väčšina detí toto mesto poznala. Keď je v KE medzinárodný maratón mieru, nechodia električky a treba chodiť pešo. Odkrokoval som si teda električkové zastávky a sú od seba vzdialené asi 300 metrov. Druhá vec: bývam v dedine pri meste a posledná zastávka je asi štyrikrát taká dlhá, ako normálna vzdialenosť medzi zastávkami MHD. Takže túto vzdialenosť môžeme rozdeliť na 4 časti fiktívnymi zastávkami, kde autobus v skutočnosti nestojí. Tým vieme dosiahnuť, že sieť MHD má naozaj vlastnosti, ktoré od nej požadujeme.)

Poznámka k terminológii. Držíme sa pomenovaní, ktoré sa hodia ku konkrétnej úlohe, ktorou sa zaoberáme. Všímame si, ako časti grafu nazývajú deti a používame názvy, ktoré sú im blízke. Ľahko sa stane, že niekto zo žiakov sa už stretol so štandardnou terminológiou a používa napríklad pojem hrana. Vtedy sa treba dohodnúť na jednotnom pomenovaní hrán. Ak je taký vyspelý žiak jeden-dvaja, nech používa to, čo ostatní. (Ak ich je väčšina, prednáška nie je celkom vhodne zvolená.) Takýchto vyspelých žiakov treba často poveriť osobitnými úlohami, lebo tieto úvodné už poznajú. Zásobu takýchto úloh si treba pripraviť vopred, dajú sa použiť úlohy uvedené na konci tohto materiálu.

V ďalšom texte budeme používať niekoľko pojmov z teórie grafov, ktoré teraz definujeme. V prípade hlbšieho záujmu alebo nejasností odporúčam pozrieť sa na internete. Napríklad na `www.math.uni-hamburg.de/home/diestel/books/graph.theory/GraphTheoryIII.pdf` si môžete zadarmo stiahnuť knihu o základoch teórie grafov. V slovenčine môžete skúsiť `http://daloo1.szm.sk/dmm1b/dmm1b.pdf`.

Cesta je postupnosť vrcholov taká, že každé dva susedné vrcholy v nej sú spojené hranou a žiaden vrchol sa v nej nevyskytuje viac ako raz. *Vzdialenosť* dvoch vrcholov grafu je dĺžka najkratšej cesty medzi nimi. *Excentricita* vrchola je maximálna zo vzdialeností z tohto vrchola do ostatných vrcholov grafu. *Centrum* grafu je množina vrcholov s minimálnou excentricitou. *Kružnica* je cesta, ktorá začína a končí v tom istom vrchole. (Toto nie je dobrá definícia, keďže sme povedali, že v ceste sa vrchol neopakuje, ale je to ľahko pochopiteľné. Skúste poriadnu definíciu spraviť sami.)

Dobre, máme sieť MHD s popísanými vlastnosťami. (Nakreslíme nejaký neohodnotený graf na tabuľu. Vhodný je graf, ktorý má centrum obsahujúce aspoň dva vrcholy, zíde sa to neskôr.) Kam by sme umiestnili požiarnickú stanicu? (Dohodneme sa, čo je najvýhodnejšie: „aby nikam nebolo ďaleko".) Deti najprv tipujú jednu zo stredných zastávok, treba od nich požadovať zdôvodnenie. Rýchlo objavia algoritmus, ako miesto pre požiarnikov nájsť: pre každú zastávku zrátame excentricitu. (Samozrejme, exaktné pojmy ako excentricita pred deťmi nepoužívame, píšem ich sem, aby bolo jasné, čo presne myslím. Navyše mi samé prichádzajú na jazyk... Pozor pred deťmi.) Tento algoritmus zároveň dokazuje existenciu aspoň jedného miesta pre požiarnikov. Máme také miesta aspoň dve (lebo sme taký graf nakreslili na začiatku), takže môžeme postaviť aj nemocnicu. Viete nájsť mesto, kde je len jedno jediné miesto pre požiarnikov? A čo mesto, kde môže požiarnická stanica stáť hocikde? (Necháme deti, nech sa hrajú a hľadajú.)

3. Stromy

Sú prázdniny, víkend, sviatok. Načo by chodilo toľko autobusov? Stačí, keď sa budeme vedieť dostať hocikam. Dopravný podnik sa preto rozhodol zrušiť všetky zbytočné linky. (Chvíľka dohadovania, zbytočné linky sú tie, ktoré sú súčasťou kružnice.) Ako to má spraviť, aby musel prevádzkovať čo najmenej liniek? Treba čo najviac liniek zrušiť. Tento náročný problém na chvíľku odložíme a pozrieme sa na čosi jednoduchšie.

Niektoré zastávky sú špeciálne. Sú to konečné zastávky, napríklad tam, kde sa otáčajú električky. Samozrejme, takáto zastávka je drahšia než obyčajná. Najmenej koľko konečných zastávok môže byť v meste s redukovanou MHD? (Čas pre deti, ak si niekto nekreslí, treba ho k tomu primäť.) Dve. Začiatok a koniec. Lebo keby nie, tak začneme, a vždy sa dá pokračovať, takže nakoniec dostaneme okruh, a to nemôže byť.

Čo sa stalo s požiarnikmi? Koľko najvýhodnejších miest pre požiarnikov môžeme mať teraz? Kto nájde mesto, v ktorom ich je čo najviac? (Na tabuľu píšeme hodnoty, ktoré deti našli. Raz-dva sa tam objavia čísla 1 a 2, avšak žiadne ďalšie. Toto teraz dokážeme.) No, tak ani tri sa nám nedarí spraviť, nieto viac. Skúsme predpokladať, že máme tri zastávky najvýhodnejšie pre požiarnikov. Ako vyzerá zvyšok mesta? Ľahšie sa nám bude pracovať, ak dáme tie tri zastávky vedľa seba (spojené hranami), označme ich A, B, C. Môže byť medzi A a C cesta? Zo zastávok idú nejaké vetvy. (Kreslíme na tabuľu vlnitou čiarou niekoľko vetiev z jednotlivých zastávok.) Môžu byť tieto vetvy prepojené? (Deti: nie, lebo potom by sme mali okruh.) Takže nás vlastne nezaujíma, ako vetvy vyzerajú, stačí vedieť dĺžku najdlhšej. Označme x, y, z maximálne dĺžky vetiev z A, B, C. Potom excentricita zastávky A je maximum z x, $y+1$, $z+2$. Analogicky pre B, C. (Píšeme na tabuľu.) Teraz máme pre každý vrchol tri možnosti. Koľko možností bude treba rozobrať? Prinajhoršom 27. Ale skúsime to robiť lepšie. (Toto si skúste spraviť dopredu, lebo pri tabuli sa môžete zamotať. Najprv porovnáme krajné zastávky A, C a potom postupne pokračujeme ďalej, až dostaneme spor. Niektoré deti sa pravdepodobne v tých nerovnostiach stratia, aj keď prikyvujú... Nemal som čas to presne zistiť, dá sa to však, ak je účastníkov napríklad do päť. Tak či tak, pochopenie všetkých detailov rozboru nie je podstatou prednášky a netreba ho pre pokračovanie.) Dobre, vieme zdôvodniť, že nemôžu byť vedľa seba tri miesta pre požiarnikov. (Možno nejaká vsuvka o dôkaze sporom na jednoduchšom konkrétnom príklade, ak deti neakceptujú toto ako dôkaz.) Čo ak by boli ďalej od seba? No, budú mať nejaké vzdialenosti a, b a môžeme zopakovať celý postup s nerovnosťami, len namiesto 1, 1 bude a, b.

Dobre. A teraz sa vrátime k tomu, ako zrušiť v meste čo najviac liniek (hrán). Vezmime si mesto, ktoré má 10 zastávok. Nakreslite si svoje vlastné a nech je v ňom dostatok liniek, aby bolo čo rušiť. Niekto skúste aj mesto s málo linkami. Skúste zrušiť čo najviac liniek, na tabuľu budeme písať, čo sa nám podarilo dosiahnuť. (Chvíľa práce, na tabuľu píšeme do troch stĺpcov počet liniek na začiatku, počet zrušených liniek a počet liniek, ktoré ostali. Postupne pribúdajú výsledky pre rôzne počty hrán na začiatku, na konci ostane vždy 9 liniek. Objavia sa aj chybné výsledky, tie treba skontrolovať. Väčšinou je chyba v zlom spočítaní počtu hrán na začiatku.)

Vyzerá to tak, že vždy ostane 9 liniek. Prečo? (Teraz je čas nechať deti premýšľať. Existuje veľa rôznych dôkazov, popíšem tu dva, na ktoré sme prišli na prednáške.)

Vezmime si hada s desiatimi zastávkami. Zrejme má 9 hrán. Majme teraz iný strom, vezmime nejakú cestu v ňom a prehlásme ju za hada. Had má prívesky a tie postupne poprepájame na jeho začiatok či koniec, čím hada predlžujeme. Raz skončíme a počet hrán sa zachoval.

Druhý dôkaz. Máme tu guľôčky a paličky. Chceme ukázať, že paličiek je o jedna menej, než guľôčok. Ku každej guľôčke patrí palička, takže nám to stačí rozdeliť na dvojice. (Deti nejasne popisovali, ako to delia. Zaviedol som plesňovú terminológiu a deťom sa páčila: máme pleseň a z nej trčia hlavičky.) Nech je tam 10 hlavičiek a x paličiek. Vieme, že nejaké hlavičky pleseň mať musí, lebo to je ako s tými konečnými zastávkami, vždy aspoň dve. Tak odrežme z plesne dve hlavičky, zároveň ubudli dve paličky. Ostalo 8 hlavičiek a $x-2$ paličiek. (Zapisujeme do tabuľky a kreslíme rezy na konkrétnom grafe.) Takto pokračujeme, až ostanú dve hlavičky a medzi nimi jedna palička. Ale vieme, že tých paličiek má byť $x-8$. Takže $x-8=1$ a $x=9$.

4. Mnohosteny

(Nakreslíme na tabuľu kocku, ako sa bežne kreslí.) Čo sme vlastne nakreslili? Vrcholy a hrany, vrcholov je 8 a hrán 12. Steny sú také štvoruholníky. A čo štvorsten? Vieme nakresliť štvorsten? Áno, vieme. Ale aha, prekrývajú sa mu hrany. Dá sa nakresliť bez prekrývania? (Deti na to prídu hneď.) A čo kocka? Vieme bez prekrývania hrán nakresliť kocku? (Toto je už ťažšie a úlohu nevyriešia všetky deti, s dobrým nápadom príde chytrejší jednotlivec. Niekoľko detí bude treba presvedčiť, že ten malý štvorec vo veľkom naozaj predstavujú kocku: má 8 vrcholov, 12 hrán a 6 štvoruholníkových stien.)

Odtiaľto pochádzajú iné pomenovania pre zastávky a linky. Máme vrcholy a hrany. A sieť MHD sa nazýva graf. Ako nazveme redukovanú MHD? Niektorým pripomína strom, má vetvy a listy. (Ujasníme pojmy.) Tak, a teraz máme stromy, jeden, druhý, tretí... Čo je to? (Deti: les.) Presne tak, veľa stromov tvorí les. (Ja som sa s nimi ešte chvíľku porozprával o lesoch, ktoré neobsahujú žiadne stromy. Že v takom lese je každý strom jabloň. A zároveň každý strom je slivka. To aby neboli zmätení, keď sa stretnú s prázdnou množinou a kvantifikátormi.)

5. Vzťahy medzi ľuďmi

Čo sa dá ešte kresliť pomocou grafov? Vzťahy medzi ľuďmi. Vezmime si človeka (vrchol). A jeho spolužiaka. Vzťah medzi nimi môžeme zakresliť tak, že ich spojíme a pridáme písmenko popisujúce druh vzťahu. (K hrane pripíšeme S.) Ten má kamaráta, ktorý je zároveň jeho spolužiakom. (K hrane K, S.) A ten má rodičov (R). A tak ďalej, vieme zakresliť hocijaký vzťah medzi *dvoma* ľuďmi. Nevieme však zakresliť napríklad to, že títo traja ľudia chodia spolu do triedy, musíme len medzi každými dvoma nakresliť, že sú spolužiaci.

Máme šesť ľudí, každí dvaja z nich sa navzájom buď poznajú, alebo nepoznajú. Je pravda, že nejakí traja sa navzájom poznajú alebo nejakí traja sa navzájom nepoznajú?

Toto je jedna z najznámejších úloh o vzťahoch medzi ľuďmi. Nečakal som však, že by ju niekto z detí poznal. (Správne očakávanie. Na samostatné vyriešenie je dosť ťažká, preto treba riešiť spolu s deťmi. Niekoľko minút treba venovať ujasneniu zadania, najmä dokazovaného tvrdenia, ktoré je zložité. Deti nevedia pracovať so spojkou alebo: akceptujú až tvrdenie v podobe „buď tam sú traja, čo sa poznajú, alebo traja, čo sa nepoznajú, alebo sú tam aj takí, aj takí“.)

Skúsme si to nakresliť. (Ľubovoľný graf na šiestich vrcholoch. Overíme platnosť tvrdenia. Potom dáme každému nakresliť si vlastný graf a overiť platnosť.) Ako súvisia čísla 6 a 3 v zadaní? No, keby sme mali jedného, dvoch či troch ľudí, tvrdenie nemusí platiť. A keby boli štyria? (Deti samostatne hľadajú protipríklad.) A ak sú piati? (Toto už je ťažšie, existuje jediný protipríklad, a to kružnica s 5 vrcholmi. Niektorí ju nedokážu objaviť. Môžeme ilustrovať hľadanie na tabuli a pri tom ukázať bežné postupy: nech najdlhšia cesta má dĺžku 3, potom… A keď má dĺžku 4, potom… Vysvetlíme úvahy typu „bez ujmy na všeobecnosti“.)

A teraz si predstavme, že máme milión ľudí. Toto je prvý. (Jeden vrchol hore, ostatné v jednom riadku. Pomocou troch bodiek ukážeme, ako vyjadriť sto či milión bez toho, aby sme museli vypisovať všetky čísla: $1, 2, 3, \ldots, 100, 101, \ldots, 1\,000\,000$.) Koľkých pozná prvý? No, môžeme si tých v druhom riadku zoradiť. Najprv dáme tých, čo ich prvý pozná, potom ostatných. (Nakreslíme, prvý pozná aspoň 5 ľudí.) Ako kreslíme, že sa dvaja nepoznajú? (Vlnkovaná čiara. Pomenovali sme si vzťahy na čierne (poznajú sa) a oranžové (nepoznajú sa), kreslené obyčajnou a vlnkovanou čiarou.)

Teraz druhý človek. Môže poznať tretieho? (Nie, lebo by sme mali čierny trojuholník.) A štvrtého? Tiež nie, ani piateho… Ale o tých, čo prvý nepozná, nevieme povedať nič, druhý ich môže poznať aj nepoznať. A teraz z pohľadu tretieho. Môže poznať štvrtého? Nie. Piateho? Nie. (Niekedy v tejto chvíli si ktosi všimol, že už máme oranžový trojuholník tvorený druhým, tretím a štvrtým. Celý dôkaz zopakujeme ešte raz, aby si to všetci ujasnili. A vrátime sa k pôvodnému zadaniu so 6 ľuďmi, funguje táto úvaha aj pre tak málo ľudí?)

6. Farbenia máp a grafov

Politická mapa, každý štát je súvislý, nie ako Aljaška a USA. Chceme mapu zafarbiť tak, aby susedné štáty (hranou, nestačí vrchol!) mali rôznu farbu. Koľko farbičiek si vezmeme? (Chvíľa hry, deti si kreslia. Treba ich vyzvať, aby našli mapu, na ktorú treba čo najviac farbičiek. Nájdu takú, že treba 4 farby. Opäť môžeme upozorniť na to, že vlastne netreba vnímať tvar štátov, ale farbíme *planárny* graf. Vrcholmi sú štáty a hrany zodpovedajú susednosti.)

Tak, a teraz nejdeme farbiť mapu, ale naozajstné štáty. Tie neležia v rovine, ale na guli. Zmení sa niečo? Treba viac či menej farieb?

Cieľom tejto časti je porozprávať sa s deťmi, nie formálne dôkazy. Ako rozlíšime, či sme v rovine alebo na guli? Veď sami viete, že veľká guľa Zem vyzerá pri pohľade z jej povrchu ako rovina. Toto sa dá použiť aj v intuitívnom dôkaze toho, že počet farieb na guli a v rovine je rovnaký. Ak by sme mali štáty len na polguli, tak tú ľahko vyrovnáme do roviny. V rovine máme okolie štátov, ktoré sme doteraz akosi považovali za more, ale môžeme ho prehlásiť za jeden neohraničený štát. A ten vieme priradiť štátu na guli a potom odrezať z tohto štátu malý vrchlík a celý zvyšok gule deformovať do roviny iba naťahovaním bez rezania. Toto sa dá ďalej rozvíjať k topológii, napríklad koľko farieb treba na pneumatike (tóruse)?

7. Úlohy za čokoládu

Chcel som nechať deťom nejaké úlohy na riešenie, avšak aby si ich vôbec pozreli, potrebujú motiváciu. Preto som sa rozhodol, že dostanú čokoládu. (Keď oznámime na konci prednášky, že bude za úlohu čokoládu, zrazu skoro všetci pripravia zošity a perá a sústredene počúvajú zadania úloh.) Za každú z týchto úloh (priamo nadväzujúcich na odprednášané veci o stromoch a vzťahoch medzi ľuďmi) je jedna čokoláda a každý, kto úlohu vyrieši do jedného dňa, dostane svoj diel z čokolády. Viac ako jeden-dva dni na úlohy netreba, zbytočne by sa to naťahovalo, na tábore je dostatok voľna na riešenie aj počas jedného dňa.

Zadania treba poriadne vysvetliť, hoci aj pomocou alternatívnych pojmov (zastávky, linky, oranžové hrany…). Riešenia jednej úlohy sa odovzdávajú jednému človeku, aby bol jednotný meter pre hodnotenie riešení. Od žiakov vyžadujeme podrobné zdôvodnenie, pýtame sa ich, nech vysvetlia jednotlivé kroky v riešení, nech si uvedomia, kde používajú predpoklady zo zadania.

Úloha 1. Každé dve najdlhšie cesty v strome majú spoločný vrchol.

Úloha 2. Máme 17 ľudí, ktorí si dopisujú o troch rôznych témach (každá dvojica o práve jednej téme). Dokážte, že vieme nájsť trojicu, ktorá si dopisuje o tej istej téme.

8. Ďalšie úlohy

Úloha 3. Turnaja vo futbale sa zúčastnilo 18 tímov. V každom kole hrá každý tím práve jeden zápas. Odohralo sa zatiaľ osem kôl. Dokážte, že existujú tri tímy, z ktorých žiadne dva spolu ešte nehrali.

Úloha 4. Na stretnutie prišlo 2002 ľudí, medzi nimi pán Abdul. Okrem nich je tam aj jeden novinár, ktorý hľadá pána Abdula. Novinár vie, že pán Abdul pozná každého, ale pána Abdula nepozná nikto. (Konečne príklad, v ktorom známosti nie sú vzájomné.) Novinár môže ukázať na nejakého človeka a spýtať sa niekoho iného, či pozná toho, na koho práve ukazuje a ten pravdivo odpovie áno alebo nie.
a) Zistite, či dokáže novinár za každých okolností nájsť Abdula na menej ako 2002 otázok.
b) Koľko najmenej otázok by potreboval novinár na nájdenie Abdula, ak by mal obrovské šťastie?

Úloha 5. V spoločnosti nazývame niekoho bojazlivým, ak má maximálne troch známych. (Známosti sú vzájomné, t.j. ak Janko pozná Ferka, tak aj Ferko pozná Janka.) V istej spoločnosti pozná každý aspoň troch bojazlivých ľudí. Ukážte, že sú všetci v tejto spoločnosti bojazliví. Koľko členov môže mať táto spoločnosť?

$*$ **Úloha 6.** Na pingpongovej súťaži sa hralo systémom každý s každým práve raz. Súťažiaci A dostal cenu, ak každého súpera B buď porazil, alebo porazil niekoho, kto vyhral nad B. Ukážte, že ak iba jeden súťažiaci dostal cenu, tak porazil každého hráča.

$*$ **Úloha 7.** V krajine je niekoľko miest a medzi nimi obojsmerné letecké linky (medzi každými dvoma mestami nanajvýš jedna). Medzi každými dvoma mestami sa dá letecky prepraviť tak, že využijeme nanajvýš d liniek. Najkratšia okružná cesta, ktorá sa dá podniknúť, prechádza cez práve $2d + 1$ miest. (Táto veta hovorí, že obvod grafu je $2d + 1$.) Dokážte, že z každého mesta v krajine vychádza rovnaký počet liniek.