Prípravné sústredenie pred IMO a MEMO 2013, `mazo@kms.sk`

Úprava na štvorec

1. Zapíšte $8a^2 - 20ab + 17b^2$ ako súčet štvorcov.

2. Pre reálne čísla a, b, c platí $a^2 + c^2 \leq 4b$.
Dokážte, že $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 \geq 0$.

3.** Dokážte, že $\sum a^4 + 2\sum a^2b^2 \geq 3\sum ab^3$.

AG-nerovnosť

1.25 Dokážte, že $(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz$.

4. Nájdite minimum $a^2 + b^2 + c^2 + 1/abc$, ak $a + b + c \geq 5$.

1.30 Dokážte, že $x^2 + y^2 + z^2 \geq x\sqrt{y^2+z^2} + y\sqrt{x^2+z^2}$.

1.31 Dokážte, že $x^4 + y^4 + 8 \geq 8xy$.

M18. Dokážte, že $a^4b + b^4c + c^4a \geq abcd(a+b+c+d)$.

1.3.2* Nájdite maximum výrazu $x(1-x^3)$ pre $x \in [0,1]$.

5.* Nájdite maximum výrazu $a^2 + ab$, ak $a^2 + b^2 = 1$.

6. Dokážte, že $\sum \frac{3a^2}{b+c+d} \geq a + b + c + d$.

7.* Dokážte, že $\sum \frac{3a^3}{b^2+bc+c^2} \geq a + b + c$.

V1.28* Ak $x + y + z = 1$, tak $\sum \frac{xy}{\sqrt{z+xy}} \leq 1/2$.

1.6.3* Ak $abc = 1$, tak $\sum \frac{1}{a^3(b+c)} \geq 3/2$.

V1.40* Dokážte, že $\sum \frac{x^3}{y^3} \geq \sum \frac{xz}{y^2}$.

Jensen

1.5.11* Dokážte, že $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+x_i} \geq \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1 \dots x_n}}$.

1.80 Maximalizujte $\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$, $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$.

8.* Ak $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, tak $2\sum \frac{a}{1-a} \geq 3\sqrt{3} + 3$.

Cauchy-Schwarz

M5. Minimalizujte $(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d}\right)$.

V2.14 Nech $x + y = 1$. Maximalizujte $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x}$.

V2.15* Ak $x^2 + y^3 \geq x^3 + y^4$, tak $x^3 + y^3 \leq x^2 + y^2 \leq x + y \leq 2$.

M14. Dokážte, že

$$\frac{x}{ay+bz} + \frac{y}{az+bx} + \frac{z}{ax+by} \geq \frac{3}{a+b}.$$

1.6.3* Ak $abc = 1$, tak $\sum \frac{1}{a^3(b+c)} \geq 3/2$.

1.6.6 Dokážte, že $\sum \frac{a}{b+2c} \geq 1$.

V2.29* Ak $\sum x_i = 1$, tak $\sum \frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} \geq \sqrt{\frac{n}{n-1}}$.

Ďalšie

1.55 Dokážte, že $x^4 + y^4 + z^2 \geq \sqrt{8}xyz$.

V1.1 Ak a, b, c sú strany $\triangle$, tak $\sum \sqrt{a+b-c} \geq \sum \sqrt{a}$.

M8.* Ak $a + b + c = 1$, tak $a^3 + b^3 + c^3 + 6abc \geq 1/4$.
Kedy nastáva rovnosť?

1.47 Ak $\sum a_i = \sum b_i$, tak $2\sum \frac{a_i^2}{a_i+b_i} \geq \sum a_i$.

9.* Ak $\sum x_i^2 = 1$, tak $\sum \frac{x_i}{1-x_i} \geq 4$.

1.41* Ak $\sum (1+x_i)^{-1} = 1$, tak $x_1x_2 \dots x_n \geq (n-1)^n$.

1.42 Ak $abc = 1$, tak $\sum \frac{1+ab}{1+a} \geq 3$.

V2.17 Ak $a + b + c = 1$, tak $\frac{4}{a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq 39$.

V1.27* Ak $xy + yz + zx = 1$, tak $\sum \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \leq 3/2$.

V1.23* Ak $a, b, c \in [0,1]$, tak

$$(1-a)(1-b)(1-c) + \sum \frac{a}{b+c+1} \leq 1.$$

M3. Ak P je polynóm s klad. koef., tak $P(1/x) \geq 1/P(x)$.

V1.42 Ak $abc = 1$, tak

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1.$$

V2.31* Dokážte, že

$$\sum \frac{a}{\sqrt{b^2 + \frac{1}{4}bc + c^2}} \geq 2.$$

V1.51* Dokážte, že

$$\sum \frac{a^3}{a+b} \geq \frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2) - \frac{1}{4}(ab+bc+ca).$$

V1.55* Ak $abc = 8$, tak $\sum \frac{1}{\sqrt{1+a^3}} \geq 1$.

V1.65** Dokážte, že $\sum \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geq 1$.

M19. Ak $a^2+b^2+c^2+abc = 4$, tak $0 \leq ab+bc+ca-abc \leq 2$.

1.5.12 Ak $x_i \in (0,1)$ a $\sum x_i = 1$, tak

$$\sqrt{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} \geq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i}.$$