Dá sa z päťuholníka poskladať štvorec?

Venujte nasledujúcej úlohe aspoň pár minút.

Úloha 1. Zožeňte si list papiera a skúste z neho poskladať štvorec.

Podarilo sa vám splniť úlohu? Pozrite si jej riešenie v poslednej kapitole (aj vtedy, ak ste ju vyriešili, možno sa v ňom dočítate niečo zaujímavé).

Táto úloha sa dala splniť ľahko, pretože jej znenie pripúšťalo veľa rôznych interpretácií. Poďme si upresniť, čo vlastne budeme robiť. Začneme vždy s kusom ideálneho papiera — to je papier nulovej hrúbky. Keďže taký nezoženieme, skúsime to s obyčajným. Príliš tenký papier nie je dobrý, zle sa s ním pracuje. Okrem papiera máme obyčajné rovné nožnice. Nožnicami môžeme kúsky papiera strihať na menšie kúsky. A z týchto nastrihaných kúskov budeme skladať mnohouholníky. Kúsky papiera sa pri skladaní nesmú prekrývať, ani medzi nimi nesmú byť medzery, musia tesne doliehať. Poďme na to.

Úloha 2. Zožeňte si list papiera a skúste z neho poskladať štvorec.

A teraz? Podarilo sa vám splniť úlohu za sťažených podmienok? Možno nie, ale to nevadí. Čo sa dá robiť, keď si nevieme rady s úlohou? Položíme si niekoľko správnych otázok[1] a skúsime na ne nájsť odpovede.

1. Videli sme už niekedy niečo podobné?

Určite ste sa už stretli s rôznymi vystrihovačkami, bežnými napríklad v škôlke. Napríklad keď preložíme papier pozdĺž priamky a potom vystrihneme rovnoramenný pravouhlý trojuholník, ktorého prepona leží na našej priamke, po roztvorení papiera v ňom bude štvorcová diera. Dajú sa vymyslieť ešte všelijaké iné finty. My si však podmienky sťažíme a všetky podobné finty zakážeme[2]. Papier nebudeme ohýbať a ak budeme strihať pozdĺž nejakej úsečky, tak budeme strihať pozdĺž celej priamky, na ktorej táto úsečka leží. Toto posledné obmedzenie v skutočnosti nie je obmedzením: iba prestrihneme niektoré kúsky na niekoľko častí, aj keď to nepotrebujeme. Rozmyslite si, že na tom nezáleží — čo sme vedeli robiť s pôvodnými celými kúskami, budeme vedieť robiť aj s ich časťami.

2. Čo od nás chcú?

Poskladať štvorec. Čo je štvorec? Štvoruholník, ktorého každé dve susedné strany sú rovnaké a navzájom kolmé. Uvedomte si, že odpovedať môžeme aj inak: štvorec je štvoruholník s kolmými, rovnako dlhými a navzájom sa rozpoľujúcimi uhlopriečkami. Táto druhá odpoveď nám však hovorí málo užitočného, pretože pri našom strihaní nás nezaujíma vnútro štvorca, ale strany pozdĺž obvodu a uhly vo vrcholoch. Preto odpovede na otázky treba formulovať s využitím pojmov, ktoré sú zaujímavé pre konkrétnu situáciu, ktorú máme pred sebou.

Vieme štvorec nakresliť? Áno, učili nás to v škole, treba k tomu pravítko a kružidlo[3]. O tieto nástroje teda rozšírime náš arzenál.

Upresnenie pojmu štvorca dáva tušiť, že potrebujeme z nášho listu papiera nastrihať nejaké kúsky, ktoré majú pravé uhly.

3. Čo máme zadané? Za akých predpokladov máme nájsť, zostrojiť náš štvorec?

Začíname listom papiera. Ak je list papiera nevhodný, štvorec sa nám z neho poskladať nepodarí. Napríklad ak máme papier v tvare kruhu, nezbavíme sa oblúkov. Počas nášho strihania rozdelíme obvod kruhu na konečný počet častí a oblúky zostanú oblúkmi. Preto je potrebné upresniť útvar, z ktorého začíname. Dohodneme sa, že začneme listom papiera v tvare mnohouholníka. Napríklad obdĺžnikom.

---

[1] Ďalšie dobré otázky nájdete v knihe „How to solve it“ od Gábora Pólyu.

[2] Nechávame ich na preskúmanie čitateľovi. Zatiaľ si ukážeme, že aj za sťažených podmienok sa dá spraviť veľa.

[3] V skutočnosti stačí iba kružidlo, vieme ním spraviť všetky konštrukcie, ktoré vieme spraviť kružidlom a pravítkom. Toto však prenecháme profesionálom, ktorí poznajú *kružnicovú inverziu*.

Pri strihaní môžeme používať nožnice, pri pomocných konštrukciách ceruzku, pravítko a kružidlo.

Teraz je jasné, čo môžeme robiť, ale od vyriešenia úlohy sme stále ďaleko.

4. Vieme vyriešiť úlohu aspoň čiastočne? Vieme vymyslieť jednoduchšiu úlohu, ktorá súvisí s touto a jej riešenie by nám mohlo pomôcť?

Zjednodušiť sa úloha dá z dvoch strán: zosilníme predpoklady (zavedieme nejaké podmienky obmedzujúce na počiatočný list papiera) alebo budeme požadovať niečo jednoduchšie než štvorec. Skúsme poskladať aspoň obdĺžnik. Ak začíname obdĺžnikom, tak niet čo riešiť. Ale čo ak nie?

Úloha 3. Daný je trojuholník. Poskladajte z neho obdĺžnik.

Možno je úloha stále priťažká. Aký trojuholník je súčasťou obdĺžnika? Nuž, obdĺžnik je uhlopriečkou rozdelený na dva zhodné pravouhlé trojuholníky. Vieme aspoň z *pravouhlého* trojuholníka spraviť obdĺžnik? Položme náš pravouhlý trojuholník tak, aby jeho pravý uhol ležal vpravo dole. Označme zvyšné dva vrcholy trojuholníka písmenami A, B. Uhly pri vrcholoch A, B vytvoria pravý uhol, ak sa priložia k sebe (prečo?). Odstrihnime teda kus trojuholníka pri vrchole A a priložme ho k vrcholu B. Po troche snahy prídeme na to, že sa to dá spraviť tak, aby vznikol obdĺžnik.

Poslednú úlohu by sme si uľahčili, keby sme namiesto skutočného strihania kreslili na štvorčekový papier. Vyskúšajte si to, riešenie tam hneď vidno (ak si nakreslíme počiatočný trojuholník, ktorý má strany párnych dĺžok, strany tvorené priamkami štvorcovej siete a vrcholy v mrežových bodoch).

Teraz si vezmime ostrouhlý trojuholník. Nakreslime ho na štvorčekový papier. Vieme nejako využiť predošlú úlohu? Keby sme vedeli náš trojuholník rozdeliť na pravouhlé trojuholníky, z každého z nich sa dá poskladať obdĺžnik... Ale ešte by potom bolo treba dať tie obdĺžniky dokopy. Ale to nič, skúsme to. Čo rozdelí trojuholník na dva pravouhlé trojuholníky? Kde sme to už videli? (Opäť prvá otázka.) Áno, výška. A je jasné, že dva obdĺžniky, ktoré takto dostaneme, budú mať jednu stranu rovnako dlhú (ak sme správne priložili časti), preto keď ich priložíme k sebe, vytvoria jeden obdĺžnik.

Netreba zabudnúť na tupouhlé trojuholníky. Dá sa tupouhlý trojuholník strihať a skladať spôsobom popísaným v predošlom odstavci? Áno, stačí zobrať výšku z vrchola, pri ktorom je tupý uhol. Tým sme úlohu 3 úplne vyriešili. Všimnite si, ako sme využili v druhej časti výsledok riešenia jednoduchšej úlohy s pravouhlým trojuholníkom. Namiesto výsledku môžeme použiť metódu — pravouhlý trojuholník sme rozrezali pozdĺž strednej priečky, pretože potom vieme priložiť menší kúsok k väčšiemu tak, aby sa dostali k sebe uhly vytvárajúce pravý uhol.

Úloha 4. Daný je trojuholník. Rozrežte ho na dve časti, z ktorých sa dá zložiť rovnobežník. Z toho rovnobežníka potom poskladajte obdĺžnik, opäť rozrezaním na dve časti.

Po vyriešení poslednej úlohy už máme dva rôzne spôsoby, ako z trojuholníka poskladať obdĺžnik. Porovnanie týchto postupov nás privádza k nasledujúcej úlohe:

Úloha 5. Na najmenej koľko častí treba rozrezať trojuholník, aby sa z tých častí dal poskladať obdĺžnik?

Samozrejme, odpoveď závisí od tvaru trojuholníka. Pravouhlý stačí rozrezať na dve časti, ako sme sa už presvedčili. Pri riešení úlohy pre všeobecný trojuholník (nie rovnoramenný ani pravouhlý) pravdepodobne už odpoveď nebude závisieť od konkrétneho tvaru. Nezabudnite na to, že v otázke úlohy sú skryté dve časti: treba ukázať, že na nájdený počet častí vieme rozrezať *každý* trojuholník tak, aby sa z nich dal poskladať štvorec a navyše treba dokázať, že existuje trojuholník, ktorý nestačí rozrezať na menej častí.

Na nasledujúcich úlohách si môžete precvičiť to, s čím sme sa zatiaľ oboznámili.

Pri riešení vám pomôžu otázky, ktoré sme si kládli pri riešení predošlých úloh.

Úloha 6. Daný je lichobežník. Poskladajte z neho obdĺžnik.

Úloha 7. Daný je trojuholník. Poskladajte z neho pravouhlý trojuholník.

Vidíme, že z kadečoho vieme poskladať obdĺžnik. Predstavme si, že chceme spraviť z trojuholníka štvorec. Z trojuholníka vieme spraviť obdĺžnik. Ak vieme spraviť štvorec z obdĺžnika, tak ho vieme spraviť aj z trojuholníka. Ako? Uvidíme. Rozmyslite si, že pri ďalšej konštrukcii nám nevadí, že obdĺžnik, z ktorého budeme začínať, je už nejako rozstrihaný (poskladali sme ho z kúskov trojuholníka). Môžeme sa tváriť, že je nezranený a jednoliaty.

Poďme si upresniť, ako bude vyzerať štvorec, ktorý vznikne poskladaním z daného obdĺžnika. Bez ohľadu na postup skladania to musí byť vždy taký istý štvorec, pretože papiera máme nejaké množstvo a nikde sa nám nestratí, ani nepribudne. Inak povedané, štvorec bude mať rovnaký obsah (plochu), ako má náš obdĺžnik na začiatku. Z toho vieme zistiť aj veľkosť strany štvorca. Týmto sa úloha trocha líši od predošlých: doteraz sme skladali (napríklad) z trojuholníka *nejaký* obdĺžnik, nevedeli sme presne, ako bude vyzerať. Teraz skladáme konkrétny štvorec.

Načrtli sme postup, ako zistiť stranu skladaného štvorca. V praxi by sa tento postup realizoval tak, že odmeriame strany daného obdĺžnika, vypočítame obsah a potom z neho vypočítame stranu štvorca. Ak obdĺžnik má strany s dĺžkami a, b, tak obsah štvorca je ab a jeho strana $\sqrt{ab}$. Takéto inžinierske riešenie nám však nestačí: pri meraní sa dopustíme istej chyby a pritom my chceme vedieť výsledok *presne*. Inak povedané, stranu nášho štvorca potrebujeme zostrojiť pomocou kružidla a pravítka (bez stupnice) z daného obdĺžnika.

Úloha 8. Dané sú úsečky s dĺžkami a, b. Zostrojte úsečku s dĺžkou $\sqrt{ab}$.

Načo je dobré, že vieme zostrojiť stranu skladaného štvorca? Po narezaní obdĺžnika na kúsky sa niektoré kúsky vyskytnú pozdĺž strany štvorca, a preto súčet dĺžok ich strán bude rovný dĺžke strany štvorca, ktorú sme vypočítali. To nám pomôže pri konštrukcii: budeme rezať obdĺžnik na vhodné kúsky. A čím menej kúskov, tým lepšie, lebo sa nám s tým bude ľahšie pracovať.

Úloha 9. Daný je obdĺžnik. Poskladajte z neho štvorec.

Tak, štvorec sme poskladali. Skladať niečo z trojuholníka možno nebolo ľahké, ale stále to bola príjemná hra. S väčšími mnohouholníkmi je to horšie. Skúste si pred čítaním ďalšieho textu samostatne vyriešiť nasledujúcu úlohu.

Úloha 10. Daný je štvoruholník. Poskladajte z neho obdĺžnik.

Dalo by sa povedať, že úlohu za nás vyriešia správne otázky. *Videli sme už niekedy niečo podobné?* Áno, skladali sme obdĺžniky z trojuholníkov. *Vieme rozdeliť úlohu na niekoľko ľahšie zvládnuteľných častí?* Ako môžeme využiť to, že vieme poskladať obdĺžnik z trojuholníka? Najprv treba nájsť v situácii nejaké trojuholníky. Zadaný štvoruholník je uhlopriečkou rozdelený na dva trojuholníky (aj vtedy, keď je nekonvexný). Z oboch týchto trojuholníkov vieme známym spôsobom spraviť obdĺžniky. Na dokončenie úlohy stačí z tých dvoch obdĺžnikov poskladať jediný obdĺžnik. Ak majú rovnakú stranu, tak je to jasné. Vieme tie obdĺžniky poskladať tak, aby mali jednu stranu rovnakú? Začíname z trojuholníkov, ktoré majú jednu stranu rovnakú. Túto vlastnosť vieme prípadnou úpravou postupu preniesť aj na obdĺžniky a sme hotoví. Skúste to sami, ak vám to nepôjde, pozrite si riešenie vzadu. Nasledujúca úloha súvisí s riešením tejto.

Úloha 11. Daný je štvoruholník $ABCD$. Stredy strán AB, BC, CD, DA označíme v tomto poradí K, L, M, N. Nakreslite si presný obrázok. Čo viete povedať o štvoruholníku $KLMN$? Je to tak vždy?

Vráťme sa ešte k problému spojenia dvoch obdĺžnikov do jedného. Čo vieme poskladať z obdĺžnikov? Štvorce. A vieme dva štvorce spojiť do jedného?

Úloha 12. Dané sú dva štvorce. Rozrežte ich na niekoľko kúskov tak, aby sa z kúskov dal zložiť jediný štvorec.

Keď poskladáme výsledky predošlých úvah dokopy, vidíme, že z dvoch daných trojuholníkov vieme poskladať štvorec. A nielen z dvoch, z ľubovoľného konečného počtu: vezmeme prvé dva, spravíme štvorec, pridáme ďalší trojuholník, z ktorého poskladáme štvorec, a takto pokračujeme, kým sa nám neminú trojuholníky. Toto nám umožňuje nasledovné:

Úloha 13. Dokážte, že z každého mnohouholníka vieme poskladať štvorec.

Predstavme si teraz, že máme dané dva mnohouholníky s rovnakým obsahom. Z prvého z nich poskladáme štvorec. Aj z druhého poskladáme štvorec. Tieto dva štvorce budú zhodné, každý z nich je nejakými rezmi rozdelený na časti. Čo sa stane, keď vezmeme nový jediný štvorec a spravíme v ňom všetky rezy, ktoré sú v tých dvoch štvorcoch? Zo vzniknutých kúskov budeme vedieť poskladať každý z mnohouholníkov, z ktorých sme začínali. Inak povedané, vieme z jedného daného mnohouholníka poskladať ľubovoľný iný, ktorý má rovnaký obsah!

Úloha 14. Dokážte, že z každého mnohouholníka sa dá poskladať obdĺžnik, ktorého jedna strana musí mať dĺžku rovnú danej úsečke.

Predošlá úloha popisuje trocha iný postup preskladania mnohouholníka na iný mnohouholník (ak majú rovnaký obsah). Z oboch mnohouholníkov poskladáme obdĺžnik, ktorého strana je rovná danej úsečke. Tieto obdĺžniky musia byť zhodné kvôli rovnosti obsahov. A teda vieme z daného mnohouholníka urobiť obdĺžnik a z tohto obdĺžnika druhý daný mnohouholník rovnakého obsahu (obrátením postupu).

Tento problém nezávisle od seba vyriešili F. Bolyai (1833) a Gerwin (1835). Predstavte si, že namiesto mnohouholníkov budeme rezať a skladať mnohosteny. Tento problém je neporovnateľne ťažší a patril medzi 23 problémov, ktoré Hilbert v roku 1900 predložil svetovej matematickej komunite ako zdroj podnetov pre výskum v dvadsiatom storočí. Problém úspešne vyriešil M. Dehn, ktorý dokázal, že nie je možné z mnohostenu poskladať ľubovoľný iný mnohosten s rovnakým objemom.

Na záver niekoľko úloh, na ktorých si môžete vyskúšať delenie mnohouholníkov[4]. Otvorene si povedzme, že tieto úlohy sú ťažké. Strávit' nad niektorými z nich pár hodín je primeraný čas; veľa sa pri tom naučíte.

Úloha 15. Ktoré trojuholníky sa dajú bezo zvyšku rozrezať na lichobežníky so stranami dĺžky 2, 1, 1, 1 (v centimetroch)?

Úloha 16. Ktorými pravidelnými mnohouholníkmi sa dá vydláždiť rovina?

Úloha 17. Pravidelný osemuholník rozrežeme na rovnobežníky. Dokážte, že medzi týmito rovnobežníkmi sa nachádza obdĺžnik.

Úloha 18. Zistite, pre ktoré prirodzené čísla n sa dá rovnostranný trojuholník rozdeliť na n rovnostranných trojuholníkov (nie nutne zhodných).

Úloha 19. Dané sú tri štvorce so stranami dĺžok 2, 3, 6 cm. Spravte dva rezy a zo vzniknutých 5 kúskov zložte štvorec. (Pod rezom rozumieme lomenú čiaru, ktorá rozdelí mnohouholník na dve súvislé časti.)

Úloha 20. Dokážte, že každý štvorec sa dá rozdeliť na rovnoramenné lichobežníky, ktoré nie sú pravouhlé.

---

[4]Titu Andreescu, Razvan Gelca: Mathematical Olympiad Challenges, kapitola Dissections of Polygonal Surfaces

Úloha 21. Dokážte, že každý tetivový štvoruholník sa dá rozdeliť na n tetivových štvoruholníkov pre každé prirodzené číslo $n \geq 4$.

Úloha 22. Zistite, pre ktoré prirodzené čísla n sa dá štvorec rozdeliť na n štvorcov (nie nutne zhodných).

Úloha 23. Šachovnicu $n \times n$ rozrežeme na jednotlivé políčka a každé políčko prerežeme po uhlopriečke na polovicu. Je jasné, že zo vzniknutých kúskov sa dá poskladať pôvodná šachovnica. (Ako?) Zistite, či sa dá poskladať z týchto kúskov štvorec veľkosti pôvodnej šachovnice tak, aby to nebola šachovnica, teda aby na mieste aspoň jedného pôvodného šachovnicového políčka neboli dva kúsky (trojuholníky) priložené preponou k sebe.

Úloha 24. Dokážte, že kocka sa dá rozdeliť na n kociek (nie nutne rovnakých) pre každé $n \geq 55$.

Úloha 25. Ktoré konvexné mnohouholníky sa dajú rozdeliť na rovnobežníky?

Úloha 26. Vnútri konvexného mnohouholníka je daných $2n$ rôznych bodov. Dokážte, že tento mnohouholník vieme rozdeliť na $n+1$ konvexných mnohouholníkov tak, aby tých daných $2n$ bodov ležalo na stranách mnohouholníkov.

Úloha 27. Nech v ostrouhlom trojuholníku je jeden vnútorný uhol n-násobkom druhého. Dokážte, že takýto trojuholník vieme rozdeliť na rovnoramenné trojuholníky, ktorých ramená sú všetky zhodné.

Úloha 28. Dokážte, že ak sa nejaký obdĺžnik dá rozdeliť na zhodné obdĺžniky jemu podobné, tak sa tieto obdĺžniky v rozdelení dajú preusporiadať tak, že ich zhodné strany budú všetky rovnobežné.

Úloha 29. Pravidelný $4n$-uholník je rozdelený na rovnobežníky. Dokážte, že medzi týmito rovnobežníkmi je aspoň jeden pravouholník. Nájdite súčet obsahov všetkých pravouholníkov.

Úloha 30. Nájdite všetky možné hodnoty najväčšieho uhla trojuholníka, ktorý sa dá rozdeliť na 5 trojuholníkov jemu podobných. Svoju odpoveď zdôvodnite.

Riešenia úloh

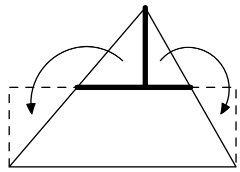
1. Vezmite si ľubovoľný štvorec, ktorý celý leží vnútri daného listu papiera (papier nemusí mať obdĺžnikový tvar, môže to byť trebárs päťuholník). Ak nejaká časť papiera trčí mimo nášho štvorca, túto časť vieme prehnúť pozdĺž jednej zo strán štvorca tak, že sa zmenší plocha trčiacej časti. Po chvíľke takéhoto prekladania netrčí mimo nášho štvorca nič.

Ľahko sa o tom presvedčíme na konkrétnom liste papiera, ťažšie je však zdôvodniť to vo všeobecnosti. Predstavte si, že prvým prehnutím sa zbavíme polovice prebytočnej (trčiacej) časti. Druhým prehnutím sa zbavíme polovice trčiaceho zvyšku, teda štvrtiny časti, ktorá trčala mimo na začiatku. Ďalším prehnutím sa zbavíme zase polovice trčiaceho zvyšku po predošlom prehnutí. A takto postupujeme ďalej. Pritom však stále zostane nejaká trčiaca časť a nikdy sa jej úplne nezbavíme.

Preto potrebujeme v dôkaze správnosti nášho postupu zdôvodniť, že situácia popísaná v predošlom odstavci nenastane. Skúste to; postačí spresniť postup prehýbania?

Nepríjemná situácia s prehýbaním pripomína jeden zo Zenónových paradoxov (apórií) o nemožnosti pohybu. Ak sa chceme niekam dostať, najprv sa musíme dostať do polovičnej vzdialenosti. Ale aby sme sa dostali do polovice, najprv sa potrebujeme dostať do štvrtiny. Ale aby sme sa dostali do štvrtiny… Takže sa nemôžeme dostať vôbec nikam. Nespochybniteľná úvaha? Ale veď stačí spraviť krok a posunuli sme sa. . .

4. Rozrežeme trojuholník pozdĺž niektorej zo stredných priečok a vzniknuté dva kúsky vhodne priložíme k sebe. Rovnobežník rozrežeme tak, aby vznikol pravouhlý trojuholník a pravouhlý lichobežník.



5. Každý trojuholník stačí rozrezať na tri časti, pozrite si obrázok. Na druhej strane dve časti sú vo všeobecnosti málo. Vezmime si nejaký trojuholník, ktorý nie je rovnoramenný ani nemá pravý uhol (tieto prípady vylučujeme kvôli tomu, že pre spomínané trojuholníky stačia dve časti). Predpokladajme, že ho vieme rozdeliť na dve časti, z ktorých sa dá zložiť obdĺžnik. Stačí nájsť jediný trojuholník, pre ktorý dostaneme spor. Preto môžeme tento trojuholník hľadať medzi ostrouhlými trojuholníkmi. Náš trojuholník nemá ani jeden vnútorný uhol pravý. Máme jediný rez. Ak tento rez nie je kolmý na žiadnu zo strán trojuholníka, dostaneme aspoň jeden kúsok, ktorý má tupý uhol. Pre vrchol tohto tupého uhla máme tri možnosti: buď bude po poskladaní obdĺžnika vnútri, alebo vo vrchole, alebo na obvode mimo vrchola. Prvé dve možnosti vylúčime ľahko. Tretia môže nastať len vtedy, keď druhý kúsok (nie ten, ktorý obsahuje vrchol s diskutovaným tupým uhlom) má uhol doplnkový k nášmu tupému (aby spolu vytvorili priamy uhol). Nakreslite si to a vylúčte aj túto možnosť.

Takže náš rez je kolmý na jednu zo strán. Potom buď prechádza vrcholom neležiacim na tejto strane, alebo ním neprechádza. Ľahko vylúčime obe tieto možnosti. Takže sme našli trojuholník (ostrouhlý, nie rovnoramenný), ktorý sa nedá rozdeliť na dva kúsky, z ktorých by sa dal zložiť obdĺžnik.

Všimnite si, že dokázať, že niečo sa nedá, je oveľa ťažšie, ako nájsť konkrétny postup pre úlohu, ktorú je možné vykonať. Je to tak kvôli tomu, že musíme vylúčiť všetky možné postupy, niekedy bez toho, aby sme ich vôbec poznali. Uvedomte si, že diskusia, ktorú robíme pri tom dôkaze sporom, musí byť naozaj dôsledná a nesmieme vynechať žiaden prípad, inak nám dôkaz nefunguje.

6. Vezmime si kratšiu základňu. Tá je stranou obdĺžnika. Z lichobežníka navyše ostanú dva pravouhlé trojuholníky, z ktorých vieme (rezom cez strednú priečku) spraviť obdĺžniky so stranou zhodnou s výškou lichobežníka.

7. Z trojuholníka sa dá spraviť obdĺžnik. Obdĺžnik rozdelíme na štyri zhodné trojuholníky (rozrežeme napoly a potom každú polovicu po uhlopriečke) a z týchto štyroch trojuholníkov zložíme trojuholník s nimi podobný, ale so stranou dvakrát väčšou.

8. Táto konštrukcia sa preberá v škole. Ale možno ste sa s ňou ešte nestretli, preto si ukážeme, ako sa dá objaviť. Potrebujeme interpretovať odmocninu geometricky.

Chceme zostrojiť úsečku s dĺžkou $x = \sqrt{ab}$, teda má platiť $x^2 = ab$. Čo? Súčin $a \cdot b$? Čo je to? Kde sme sa stretli so súčinom dĺžok? Áno, obsahy, ale teraz zostrojujeme vzdialenosti, nie obsahy. Nedá sa to len tak miešať: nevieme zostrojiť úsečku, ktorej dĺžka vyjadrená ako číselná hodnota je rovná číselnej hodnote nejakého obsahu, navyše takéto porovnanie nemá veľký zmysel (v akých jednotkách to robíme?).

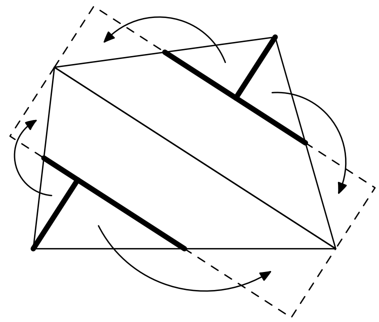
Niekoľko ďalších možností: podobnosť, mocnosť bodu ku kružnici. . . Ale pozrime sa presne na náš vzťah: $x^2 = ab$. Áno, presne ako Euklidova veta. A to už ponúka možnosť konštrukcie, či už sa na to dívame ako Euklidovu vetu o odvesne alebo o prepone. Rozmyslite si obe konštrukcie.

Nech body A, P, B ležia na priamke v tomto poradí tak, že $|AP| = a$, $|BP| = b$. Nech S je stred úsečky AB. Označme M priesečník Tálesovej kružnice nad priemerom

AB (má stred S, polomer $|AS|$) s kolmicou na priamku AB v bode P. Potom úsečka MP má dĺžku $\sqrt{ab}$.

9. Máme daný obdĺžnik $ABCD$ ($|AB| > |BC|$) a poznáme stranu s štvorca, ktorý chceme z obdĺžnika poskladať. Hodil by sa kúsok, ktorý má jednu stranu rovnú strane štvorca, ktorý skladáme. Tak si takýto kúsok vytvorme. Spravme kružnicu so stredom A a polomerom s, tá pretne úsečku CD v bode E. Z trojuholníka ADE vieme poskladať obdĺžnik, ktorého jedna strana je rovná s. Ostal nejaký päťuholník. Z rovnobežníka, ktorý má jednu stranu rovnú s, vieme poskladať obdĺžnik, ktorý má jednu stranu rovnú s. Tak teda veďme bodom C rovnobežku s priamkou AE, dostaneme na strane AB bod F. Trojuholník BFC je zhodný s trojuholníkom ADE, ostáva popísať, ako spravíme želaný obdĺžnik so stranou s z rovnobežníka $AFCE$. Pokiaľ kolmica z bodu E na priamku FC padne dovnútra úsečky FC, je to jasné (už sme to robili). Ale čo ak nie? No nič, narežeme náš rovnobežník priamkami rovnobežnými s priamkou AE na dostatočne veľa menších rovnobežníkov, z ktorých každý má stranu dĺžky s. A z tých narobíme obdĺžniky so stranou dĺžky s. Nakoniec všetky obdĺžniky so stranou s priložíme k sebe a dostaneme práve štvorec (dôvodom je rovnosť obsahov pred strihaním a po ňom).

10. Riešenie je na obrázku.



11. V predošlej úlohe využívame, že stredná priečka ML v trojuholníku BDC je rovnobežná so stranou BD. Ale aj stredná priečka NK v trojuholníku BDA je rovnobežná so stranou BD. Takže priamky ML, NK sú rovnobežné. Analogicky priamky KL, MN, AC sú rovnobežné. Preto útvar $KLMN$ je rovnobežník. Rozmyslite si, kedy je to kosoštvorec a kedy pravouholník. Aký obsah má rovnobežník $KLMN$, ak štvoruholník $ABCD$ má obsah S?

12. Z dvoch štvorcov tretí? Takže obsah tretieho štvorca je súčtom obsahov prvých dvoch. *Kde sme to už videli?* Áno, Pytagorova veta. Tá umožňuje ľahko zostrojiť ten tretí štvorec. Ostáva napchať doň tie dva dané. Nakreslite si to: pravouhlý trojuholník s odvesnami $a < b$ a preponou c a všetky tri štvorce nad stranami trojuholníka, označme ich A, B, C podľa dĺžky strany. Veľký štvorec C má stranu dĺžky c, takže bude vhodné, keď niektorý kúsok bude mať stranu dĺžky c. Takýto kúsok sa dá vytvoriť len zo štvorca B (rozmyslite si, prečo). Odrežme zo štvorca B jedným rezom trojuholník so stranami dĺžok a, b, c a umiestnime ho do štvorca C. Keby sme takéto trojuholníky umiestnili do štvorca C štyri, tak v strede ostane miesto na štvorec so stranou dĺžky $b-a$. Zo štvorca B ešte ostal päťuholník, ktorého jedna strana má dĺžku $b - a$. Nech táto strana je stranou toho štvorca, ktorý bude v strede štvorca C. Potom sa nám zo zvyšku štvorca B podarí odrezať ešte jeden trojuholník so stranami a, b, c a ostane zvyšok rozmerov $a \times (b - a)$. Tento priložíme k štvorcu A a vzniknutý obdĺžnik rozrežeme na dva zhodné trojuholníky.

Všetko toto sa dá dobre reprezentovať obrázkom. Ten som sa však rozhodol nenakresliť, pretože nie je dôležité samotné riešenie, ale spôsob, akým sa naň dá prísť. A to je jasné pri čítaní tohto textu a kreslení si vlastných obrázkov.

14. Riešenie získame zovšeobecnením riešenia úlohy 9.

Riešenia ďalších úloh neuvádzam, sú to problémy určené na vyriešenie a málokto by bol dosť trpezlivý, aby si neprečítal riešenie priskoro.

Ako použiť tento materiál

Jedna možnosť je samoštúdium: čítame si text a priebežne riešime úlohy. To by sme mali spraviť aj v prípade, že si chceme spraviť prednášku na túto tému alebo komukoľvek o nej rozprávať. Úlohy treba riešiť samostatne, aby sme sami vedeli, nakoľko sú ťažké. Riešenia na konci sú najmä na to, že mnohé úlohy sa dajú riešiť viacerými spôsobmi, takže získame možnosť porovnať svoj postup s tým uvedeným vzadu a budeme lepšie pripravení na nápady poslucháčov na prednáške.

Pre akú vekovú kategóriu je skladanie mnohouholníkov vhodné? Stredoškoláci by nemali mať problém zvládnuť text celý. Výnimku tvoria úlohy na konci, ktoré sú naozaj ťažké aj pre tých najlepších. Prednáška pre stredoškolákov (boli medzi nimi zastúpené všetky ročníky SŠ) trvala necelú hodinu, k záverečnému tvrdeniu (odstavec za úlohou 13) sme sa dostali asi za 40 minút. Pokladám za vhodné vynechať minimalizačné úlohy (5, je to skôr na doma), takisto som ani nespomenul úlohy 7 (ľahká a nepotrebná, stredoškolákom je dostatočne jasné, čo robíme) a 11, ktorá veľmi nesúvisí s podstatou. Idea triangulácie mnohouholníka (rozdelenie na trojuholníky) je stredoškolákom blízka, prišli s ňou ihneď a výsledok „z päťuholníka vieme poskladať štvorec“ ihneď zovšeobecnili.

Na druhej strane som odbehol trocha ďalej pri zdôvodňovaní, prečo je dôležité uvažovať o dĺžkach strán kúskov, s ktorými pracujeme, vyriešili sme nasledovnú úlohu: Zistite, či sa pre nejaké prirodzené číslo n dá úsečka dĺžky $n\sqrt{3}$ rozdeliť na úsečky s dĺžkami $\sqrt{2}$ a 1. Zvyšný čas prednášky sme riešili úlohu 17, ktorá sa (z pohľadu detí) ukázala pekná, zaujímavá a trocha prekvapivá.

Skladanie mnohouholníkov je dobré aj niekedy v deviatom ročníku základnej školy na preopakovanie geometrie. Stretávame sa tu s pojmami mnohouholníka, obsahu, obvodu, s trojuholníkmi a štvoruholníkmi, so strednými priečkami a výškou v trojuholníku, s geometrickými konštrukciami, s Euklidovou a Pytagorovou vetou. Myslím, že sa tu nevyskytuje žiadna idea, ktorá by nebola prístupná ôsmakom či deviatakom. Nie je však vhodné prejsť celý materiál naraz, pretože na samostatné vyriešenie úloh treba nechať žiakom dostatok času (je to vhodné ako domáca úloha). Navyše predsa len dostať sa k poslednému nápadu (skladáme z mnohouholníka obdĺžnik s pevnou stranou) vyžaduje dostatočnú prípravu a nadobudnutie skúseností (separované a univerzálne modely), inak je táto idea abstraktná a nepochopiteľná.

Úloha 12 je veľmi dobrá ako motivačná k Pytagorovej vete. Šikovnejší žiaci môžu túto vetu dokonca sami objaviť, ak ich vhodne usmerníme. (Aký veľký bude štvorec, ktorý skladáme? Nech naše dva štvorce sú rovnaké. Potom sa dajú rozrezať po uhlopriečkach a tie kúsky sú také pravouhlé trojuholníky, polovičné oproti trojuholníku, ktorý má tie dva rovnaké štvorce nad odvesnami. Treba to vhodne nakresliť. Dá sa z úsečiek s dĺžkami strán našich troch štvorcov zostaviť trojuholník? Kedy to nejde?)

Niektoré časti sa dajú použiť aj v nižších ročníkoch. Záverečné tvrdenie (z mnohouholníka vieme poskladať ľubovoľný iný) však deti nedokážu pochopiť v dostatočnej hĺbke, ani oceniť jeho krásu. Je jednoducho príliš všeobecné a abstraktné. Navyše budú natešené aj z toho, že vedia z kadečoho spraviť obdĺžnik. Skúšal som to so šiestakmi (seminár, tri pokračovania, každé necelú hodinu) a páčilo sa im hrať sa s trojuholníkmi a štvoruholníkmi. Úlohy pre nich treba rozdeliť na jednoduché kroky, napríklad neskladať priamo štvoruholník, ale najprv rovnobežník, potom lichobežník, deltoid, . . .

Úloha 3 je propedeutickou prípravou k pojmu výška v trojuholníku, tupý uhol a ku klasifikácii trojuholníkov (pravouhlé, ostrouhlé, tupouhlé). K týmto pojmom sa dostávame počas riešenia úlohy prirodzene, vidíme skutočný rozdiel, napríklad konštrukcie nefungujú pre tupouhlý trojuholník. Úloha 4 zase vedie k pojmu strednej priečky.

Úloha 5 nie je veľmi vhodná pre menšie deti, pretože je technicky náročná, už samotná idea dôkazu sporom nie je jednoduchá. Navyše deti mnohé veci považujú za očividné a je pre ne ťažké zdôvodňovať ich, keď k tomu vôbec nemajú potrebu, predsa je „jasné“, že na dve časti nestačí trojuholník rozrezať. (A niektorých nepresvedčí ani príklad pravouhlého či rovnoramenného trojuholníka, lebo ten ostrouhlý je predsa „iný“.)

Úlohy od 8 ďalej už nie sú pre malé deti vhodné, pretože vyžadujú poznatky, s ktorými sa ešte nestretli. Dajú sa však zjednodušiť, napr. nakreslením konkrétneho trojuholníka či štvoruholníka (ktorého nejaká vlastnosť uľahčuje riešenie).

Pri riešení úloh pomáha kladenie vhodných otázok. Všimnite si otázky, použité v texte (väčšinou sú zvýraznené šikmým fontom). Tieto otázky sú *všeobecné* a zodpovedajú základným myšlienkovým pochodom pri riešení akejkoľvek úlohy. Keď sa ich budeme pýtať dostatočne často, deti sa naučia klásť si takéto otázky samé od seba (možno nie na vedomej úrovni). A potom už budú vedieť riešiť samostatne. To sa samozrejme nedá dosiahnuť za krátky čas, trvá to roky.

Určite dokážete vymyslieť aj ďalšie vhodné otázky, buďte však opatrní. Rozoberme si ako príklad otázku „Kde môžeš použiť Pytagorovu vetu?“ Táto otázka vôbec nespĺňa účel popísaný v predošlom odstavci a navyše je škodlivá. Vezmime si žiaka, ktorý úlohu nedokáže sám vyriešiť. Čo sa stane, keď počuje túto otázku? Prvé, čo ho zarazí, je, že odkiaľ na to učiteľ prišiel. Aká mágia za tým je? Prečo práve Pytagorova veta a nie Tálesova, Euklidova. . . ? Žiak nevidí súvis medzi úlohou a Pytagorovou vetou, preto ani nabudúce nepríde na to, že treba použiť Pytagorovu vetu. Ak žiak Pytagorovu vetu dobre pozná, mal dostatok času úlohu riešiť a nedokázal tú vetu použiť, tak ani teraz nebude vedieť, čo s ňou. Ak žiak Pytagorovu vetu dobre nepozná, tak mu učiteľova „pomoc“ aj tak nepomôže, pretože jeho poznatok je nedostatočný (alebo formálny — potrebuje vidieť trojuholník so stranami a, b, c, aby mohol použiť vzorec $a^2 + b^2 = c^2$). Inak povedané, otázka mu nepomohla úlohu vyriešiť. Tento príklad ilustruje, prečo treba opatrnosť pri kladení otázok a pomáhaní žiakom.

Témy z tohto materiálu sa dajú ďalej rozvíjať, napríklad smerom k obsahom, ich výpočtu, odhadu, vhodné je kreslenie na štvorčekovaný papier ako propedeutika k pojmu obsah mnohouholníka pre menšie deti.