Pravítko, kružidlo a origami

Ján Mazák

9. mája 2010

Prednáška pozostáva z niekoľkých sérií gradovaných úloh; uvedený materiál vystačí aj na tri hodiny. Cieľom prednášky je porovnať silu kružidla, pravítka a origami, teda skladania papiera. Presnejšie, sú známe tieto fakty:

A. Všetko, čo sa dá zostrojiť kružidlom a pravítkom, sa dá zostrojiť samotným kružidlom (samozrejme, s výnimkou samotných priamok; pre účely kružidlových konštrukcií pokladáme priamku za zostrojenú, ak máme zostrojené dva jej body). [Mohr-Mascheroni]

B. Samotným pravítkom nie je možné zostrojiť stred danej kružnice. [Steiner]

C. Ak máme danú jednu kružnicu a jej stred, vieme pravítkom zostrojiť všetko, čo kružidlom a pravítkom. [Steiner]

D. Kružidlom a pravítkom nie je možné spraviť trisekciu uhla.

E. Pomocou origami vieme spraviť trisekciu uhla.

1 Kružidlo

Geometrické konštrukcie využívajúce pravítko a kružidlo pozostávajú zo štyroch základných operácií: konštrukcie kružnice s daným stredom a polomerom, prieniku dvoch kružníc, prieniku priamky a kružnice, prieniku dvoch priamok. Ak máme iba kružidlo, obtiažne sú evidentne posledné dve konštrukcie. Postupne ukážeme, ako ich realizovať. (Niektoré úlohy nie sú potrebné k výslednej konštrukcii.)

1. Zostrojte úsečku dva, tri, štyri razy takú dlhú ako daná úsečka (poznáme len jej krajné body).

2. Zostrojte obraz daného bodu C v osovej súmernosti podľa danej priamky AB.

3. Daná je kružnica k, jej stred O a body A, B také, že priamka AB neprechádza bodom O. Zostrojte priesečníky priamky AB s kružnicou k.

4. Dané sú dva body A, B; zostrojte bod C tak, aby $AC \perp AB$.

5. Rozhodnite, či dané tri body A, B, C ležia na priamke.

6. Dané sú vrcholy trojuholníka ABC. Zostrojte bod D tak, aby $ABCD$ bol rovnobežník.

7. Daná je kružnica k so stredom O a na nej body A, B. Zostrojte stredy oboch oblúkov AB.[1]

8. Zostrojte priesečníky danej priamky AB s danou kružnicou k (s daným stredom O).

9. Zostrojte štvorec so stranou AB.

10. Dané sú úsečky s dĺžkami a, b, c. Zostrojte úsečku s dĺžkou ab/c.[2]

11. Zostrojte priesečník dvoch daných priamok AB a CD.

12. Zostrojte úsečku dva, tri, štyrikrát kratšiu ako AB.

13. Zostrojte stred danej kružnice.

2 Pravítko

Pomocou vhodného projektívneho zobrazenia ukážeme, že samotným pravítkom nezostrojíme stred danej kružnice. Myšlienka dôkazu je jednoduchá: projektívne zobrazenia zobrazujú priamky na priamky, preto ak v nejakej rovine našla naša konštrukcia stred kružnice, tak aj v každom obraze našej roviny v projektívnom zobrazení musí konštrukcia nájsť stred kružnice. Ak toto projektívne zobrazenie zobrazí stred kružnice

[1] Dá sa očakávať, že stredy oboch oblúkov nájdeme naraz, podobne, ako sme našli naraz priesečníky danej kružnice s danou priamkou neprechádzajúcou stredom. Hľadané stredy oblúkov dostaneme ako priesečníky kružníc, ktorých stredy ležia na rovnobežke s AB prechádzajúcej bodom O. Označme C a D také body, že $ACOB$ a $AODB$ sú rovnobežníky. Nech E je priesečník kružníc so stredmi C a D so zhodným polomerom $|AD|$. Kružnice so stredmi C a D a polomerom $|OE|$ sa pretínajú v hľadaných stredoch oblúkov. Dôkaz: cez Pytagorovu vetu.

[2] Využite mocnosť bodu ku kružnici.

mimo stredu jej obrazu, vyhrali sme: naša konštrukcia našla v jednej rovine stred a v inej zase bod, ktorý neleží v strede kružnice; máme spor.

Ostáva nájsť vhodné projektívne zobrazenie. Vezmime si klasickú strechu domu v tvare A, jej dve plochy určujú roviny, ktoré nie sú rovnobežné. Priesečnicu týchto rovín označíme p (prechádza najvyššími bodmi strechy). Nakreslime do jednej z týchto rovín kružnicu k so stredom S a zostrojme jej obraz k' v súmernosti f podľa roviny súmernosti našej strechy obsahujúcej priamku p. Označme AB priemer kružnice k taký, že $AB \perp p$. Nech A', B' sú obrazy bodov A, B v súmernosti f. Vezmime si projektívne zobrazenie, v ktorom stred projekcie je priesečník úsečiek AB' a BA'. V tomto zobrazení sa kružnica k zobrazí na k', avšak jej stred S sa nezobrazí do stredu k'.

Ukážeme si, ako sa dá pravítko využívať, ak máme danú kružnicu. (Kompletný dôkaz faktu C však uvádzať nebudeme, je pomerne komplikovaný.)

Pred pokusmi o konštrukcie je vhodné pripomenúť si nasledovný fakt.

F. Uvažujme lichobežník $ABCD$ so základňami AB a CD. Označme postupne P a Q priesečníky dvojíc priamok AC, BD a AD, BC. Ďalej nech R a S sú stredy základní AB a CD. Body P, Q, R, S ležia na priamke.[3]

14. Daná je úsečka AB a jej stred S. Zostrojte rovnobežku s AB cez daný bod C.

15. Dané sú body A, B a priamka rovnobežná s AB neprecházajúca bodom A. Zostrojte stred úsečky AB.

16. Dané sú dve rovnobežky p, q a bod A. Zostrojte rovnobežku s p prechádzajúcu bodom A.

17. Dané sú body A, B a priamka rovnobežná s AB neprechádzajúca bodom A. Zostrojte obraz bodu A v stredovej súmernosti so stredom v B.

18. Daný je rovnobežník, priamka p a bod A. Zostrojte rovnobežku s priamkou p prechádzajúcu bodom A.

19. Daná je kružnica a jej stred, priamka p a bod A. Zostrojte rovnobežku s priamkou p prechádzajúcu bodom A.

20. Dané sú dve pretínajúce sa kružnice. Zostrojte ich stredy.[4]

3 Origami

Veľmi pekne je trisekcia uhla s využitím origami vysvetlená na stránke `http://www.math.lsu.edu/~verrill/origami/trisect/`. Vzhľadom na to, že najlepší popis je obrázkový, neuvádzam ho tu.

Pomocou origami je tiež možné vyriešiť problém zdvojenia kocky (prípadne riešiť kubické rovnice vo všeobecnosti); viac nájdete na internete, napr. [4].

4 Skúsenosti, komentáre

V prednáške sa stretneme skoro so všetkým, čo sa z planimetrie preberá v škole: vlastnosti priamok a kružníc, obvodové uhly, podobnosť trojuholníkov, mocnosť bodu ku kružnici, zobrazenia (súmernosti, rovnoľahlosť), Pytagorova veta… Väčšinu úloh vyriešia geometricky zdatní poslucháči samostatne a rýchlo, s ostatnými im treba pomôcť, aby sme sa pohli ďalej.

Literatúra

[1] A. Bogomolny, `http://www.cut-the-knot.org/do_you_know/compass.shtml`

[2] A. Bogomolny, `http://www.cut-the-knot.org/impossible/straightedge.shtml`

[3] R. Courant and H. Robbins, What is Mathematics?, Oxford University Press, 1996

[4] Thomas Hull, Project origami: activities for exploring mathematics, `http://books.google.sk/books?id=HlT6Vt3CnDUC&pg=PA47&lpg=PA47&dq=angle+trisection+origami&source=bl&ots=FMXXMMWFac&sig=CSZMNOdFZ1bikxcYm2vJUyA4_4Q&hl=sk&ei=hN68S5X1FY-NOI_U1Y4I&sa=X&oi=book_result&ct=result&resnum=6&ved=0CCYQ6AEwBQ#v=onepage&q=angle%20trisection%20origami&f=false`

[5] `http://poncelet.math.nthu.edu.tw/chuan/ruler-only/ruler-only.html`

[6] `http://www.math.lsu.edu/~verrill/origami/trisect/`

[3] Dôkaz sa dá spraviť cez podobnosť dvojíc vhodných trojuholníkov. Dôkaz je oveľa kratší, ak poznáme rovnoľahlosť: úsečky AB a CD sú rovnobežné, preto existujú dve rovnoľahlosti, ktoré zobrazia jednu na druhú; ich stredmi sú body P a Q. Pritom obe tieto rovnoľahlosti zobrazujú R na S.

[4] Označme K a L priesečníky daných kružníc. Zvoľme si na jednej z nich ľubovoľné body X a Y. Označme A, B, A', B' priesečníky kružnice neobsahujúcej body X, Y s priamkami YL, XL, XK, YK (v tomto poradí). Uhly ALB a $A'KB'$ majú rovnakú veľkosť, preto $ABB'A'$ je rovnoramenný lichobežník. Stred kružnice neobsahujúcej body X, Y leží na priamke PQ precházajúcej stredmi základní lichobežníka $ABB'A'$.