Prípravné sústredenie pred MEMO a IMO 2008

1. Nech $n \geq 5$ je dané prirodzené číslo. Určte najväčšie prirodzené číslo k, pre ktoré existuje mnohouholník s n vrcholmi, ktorý má k vnútorných pravých uhlov.

2. Nech $D_1, D_2, \ldots, D_n$ sú kruhy v rovine. Každý z bodov tejto roviny je obsiahnutý v nanajvýš 2008 kruhoch D_i. Dokážte, že existuje kruh D_k, ktorý má spoločný bod s nanajvýš $7 \cdot 2008 - 1$ kruhmi D_i.

3. a) Ak existuje trojuholník so stranami dĺžok a, b, c, existuje aj trojuholník so stranami dĺžok $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$. Platí obrátené tvrdenie?
b) Nech a, b, c, d, e sú úsečky také, že sa z každých troch z nich dá zostrojiť trojuholník. Dokážte, že aspoň jeden z takto zostrojených trojuholníkov je ostrouhlý.

4. Dokážte, že ak v trojuholníku pre dĺžku ťažnice z vrchola A platí $2t_a > a$, tak uhol pri vrchole A je ostrý.

5. Nech t_a, t_b, t_c sú dĺžky ťažníc z vrcholov A, B, C trojuholníka ABC s obvodom o a obsahom S.
a) Dokážte, že vieme zostrojiť trojuholník s dĺžkami strán t_a, t_b, t_c. Vyjadrite jeho obsah pomocou S.
b) Dokážte, že platí $3o/4 < t_a + t_b + t_c < o$.

6. Nech a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 sú dĺžky strán konvexného päťuholníka a d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 sú dĺžky jeho uhlopriečok. Dokážte, že $1 < (d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5)/(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) < 2$.

7. Nech a, b, c sú kladné reálne čísla spĺňajúce vzťah $a^2 + b^2 - ab = c^2$. Dokážte, že $(a-b)(b-c) \leq 0$.

8. Dokážte, že ak a, b, c sú veľkosti strán trojuholníka s obsahom S, platia nasledujúce nerovnosti.

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq abc$$

$$2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \geq a^4 + b^4 + c^4$$

$$4\sqrt{3}S \leq \frac{9abc}{a+b+c}$$

9. V trojuholníku ABC označíme I stred vpísanej kružnice a L, M, N priesečníky osí vnútorných uhlov pri vrcholoch A, B, C (v tomto poradí) s protiľahlými stranami. Dokážte, že

$$\frac{1}{4} < \frac{AI}{AL}\frac{BI}{BM}\frac{CI}{CN} \leq \frac{8}{27}.$$

10. Vrcholy štvoruholníka $ABCD$ ležia na kružnici s polomerom 1. Pre dĺžky jeho strán platí $|AB| \cdot |BC| \cdot |CD| \cdot |DA| \geq 4$. Dokážte, že štvoruholník $ABCD$ je štvorec.

11. Dokážte, že v rovine existuje nekonečná množina bodov taká, že žiadne tri body z tejto množiny nie sú kolineárne a vzdialenosť medzi ľubovoľnými dvoma bodmi tejto množiny je racionálne číslo.

12. Let $ABCD$ be a convex quadrilateral. A circle passing through the points A and D and a circle passing through the points B and C are externally tangent at a point P inside the quadrilateral. Suppose that $\angle PAB + \angle PDC \leq 90°$ and $\angle PBA + \angle PCD \leq 90°$. Prove that $AB + CD \geq BC + AD$.

13. Nájdite taký bod P v rovine konvexného štvoruholníka $ABCD$, že súčet $AP + BP + CP + DP$ je minimálny.

14. Nech a, b, c sú kladné reálne čísla, z ktorých c je najmenšie. Pomocou geometrickej interpretácie aj bez nej dokážte, že

$$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}.$$

15. Nech ABC je rovnostranný trojuholník a bod T leží na oblúku AB kružnice opísanej trojuholníku ABC (tom, na ktorom neleží bod C). Ukážte, že $|TC| = |TA| + |TB|$. Nájdite aspoň dva rôzne dôkazy.

16. Dokážte, že pre kladné reálne čísla a, b, c platí

$$\sqrt{a^2+ac+c^2} \le \sqrt{a^2-ab+b^2} + \sqrt{b^2-bc+c^2}.$$

17. Nech a, b, c sú dĺžky strán trojuholníka, t_a, t_b, t_c dĺžky jeho ťažníc a R polomer opísanej kružnice. Dokážte, že platia nerovnosti

$$t_a(bc-a^2)+t_b(ca-b^2)+t_c(ab-c^2) \ge 0, \qquad \frac{a^2+b^2}{t_c}+\frac{b^2+c^2}{t_a}+\frac{c^2+a^2}{t_b} \le 12R.$$

18. Vnútri každej strany jednotkového štvorca si zvolíme jeden bod. Tieto body vytvoria štvoruholník so stranami dĺžok a, b, c, d. Dokážte, že platia nerovnosti

$$2 \le a^2+b^2+c^2+d^2 \le 4, \qquad 2\sqrt{2} \le a+b+c+d \le 4.$$

19. V ostrouhlom trojuholníku ABC je AP výška a O stred opísanej kružnice. Navyše $\gamma \ge \beta + 30°$. Dokážte, že uhol s veľkosťou $|\angle BAC| + |\angle COP|$ je ostrý.

20. Nech $c > b$ v trojuholníku ABC. Dokážte, že platí $c - b < 2(t_b - t_c) < 3(c - b)$.

21. Nech ABC je trojuholník, pre ktorý existuje vnútorný bod F taký, že $\angle AFB = \angle BFC = \angle CFA$. Priamky BF a CF pretínajú strany AC a AB v bodoch D a E (v tomto poradí). Dokážte, že $AB + AC \ge 4DE$. Kedy nastáva rovnosť?

22. V rovine je daná taká konečná množina bodov, že každá priamka prechádzajúca dvomi jej rôznymi bodmi obsahuje ešte aspoň jeden ďalší bod tejto množiny. Dokážte, že všetky body tejto množiny ležia na jednej priamke.