Prípravné sústredenie pred IMO 2007 Vietnam

1. Máme n rôznych objektov. Koľkými spôsobmi sa dajú rozdeliť do nerozlíšiteľných škatuliek tak, aby a_i škatuliek obsahovalo i objektov pre $i = 1, 2, \ldots, n$ a žiadna škatuľka nebola prázdna?

2. Zistite počet podmnožín množiny $\{1, 2, 3 \ldots, 2n\}$, ktoré majú rovnaký počet párnych a nepárnych prvkov.

3. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = 3^k, \qquad \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}^2 = \frac{n}{2} \binom{2n}{n}.$$

4. Koľko je postupností z n čísel 1 a n čísel -1 takých, že každý ich čiastočný súčet je nezáporný?

5. Pri stole sedia štyria rytieri. Vstanú, popresúvajú sa a opäť sa posadia. Koľkými spôsobmi sa môžu posadiť tak, aby rytieri A a B nesedeli na pôvodných miestach?

6. Koľko je permutácií n prvkov bez pevných bodov?

7. Rozdeľme $n \geq 1$ označených guľôčok medzi deväť osôb A, B, C, D, E, F, G, H, I. Koľkými spôsobmi to vieme spraviť, ak osoba A má dostať rovnaký počet guľôčok ako osoby B, C, D, E dokopy?

8. Máme šachovnicu $2 \times n$. Koľkými spôsobmi je možné vydláždiť ju dominovými kockami veľkosti 2×1? (Šachovnicu neotáčame.)

9. Uvažujme slová nad abecedou $\{a, b, c\}$. Nech A_n je množina slov dĺžky n takých, že neobsahujú tri po sebe idúce rovnaké čísla. Nech B_n je množina slov dĺžky n neobsahujúcich dve po sebe idúce písmená a. Dokážte, že $|A_{n+1}| = 3|B_n|$.

10. V obdĺžniku 4×3 je šesť bodov. Dokážte, že nejaké dva z nich sú od seba vzdialené nanajvýš $\sqrt{5}$.

11. Žiadny z deviatich účastníkov vedeckého sympózia neovláda viac ako tri jazyky. Aspoň dvaja z každých troch účastníkov ovládajú spoločný jazyk. Dokážte, že existuje jazyk, ktorým hovoria aspoň traja účastníci.

12. Na stretnutí je $2n$ ľudí. Dokážte, že vieme zvoliť dvoch z nich tak, že aspoň $n - 1$ z ostatných $2n - 2$ ľudí buď pozná oboch zvolených, alebo ani jedného z nich.

13. Zistite, koľko najviac hrán môže mať graf bez trojuholníkov.

14. V miestnosti je 9 ľudí. Z každej trojice sa aspoň jedna dvojica pozná (známosti sú symetrické). Dokážte, že v miestnosti vieme nájsť štyroch ľudí takých, že sa každí dvaja z nich poznajú.

15. Nech k-klika je množina k ľudí, z ktorých sa každí dvaja poznajú. O istom stretnutí vieme povedať toto: každé dve 3-kliky majú aspoň jedného človeka spoločného a neexistujú žiadne 5-kliky. Dokážte, že na stretnutí sú nejakí nanajvýš dvaja ľudia, po odchode ktorých neostane žiadna 3-klika.

16. Na konečnom grafe môžeme robiť nasledovnú operáciu: zvolíme si ľubovoľnú hranu ľubovoľného 4-cyklu tohto grafu (ak existuje) a zvolenú hranu odstránime. Pre dané $n \geq 4$ nájdite najmenší možný počet hrán grafu, ktorý vznikne z kompletného grafu K_n niekoľkonásobným opakovaním tejto operácie.

17. V rovine je daných $n \geq 3$ bodov, pričom tieto body neležia na jednej priamke. Potom možno nájsť kružnicu, ktorá obsahuje aspoň tri z daných bodov, pričom ani jeden z daných bodov neleží vnútri tejto kružnice.

18. Minulý piatok školskú knižnicu navštívilo veľa študentov. Každý prišiel a odišiel iba raz. Ak si vezmeme ľubovoľnú trojicu študentov, aspoň jedna dvojica z nich bola v knižnici prítomná súčasne. Dokážte, že vieme zvoliť dva okamihy tohto dňa tak, že každý študent bol v knižnici prítomný počas aspoň jedného z nich.

19. Nech $D_1, D_2, \ldots, D_n$ sú kruhy v rovine. Žiaden bod tejto roviny nie je obsiahnutý vo viac ako 2003 kruhoch D_i. Dokážte, že existuje kruh D_k, ktorý má neprázdny prienik s nanajvýš $7 \cdot 2003$ kruhmi D_i.

20. V priestore je daná taká konečná množina bodov, že každá priamka prechádzajúca dvomi jej bodmi obsahuje ešte aspoň jeden ďalší bod tejto množiny. Dokážte, že všetky body takejto množiny ležia na jednej priamke.

21. V rovine je daná množina $n \geq 3$ bodov, každé dva z nich sú spojené úsečkou. Označme d dĺžku najdlhšej z týchto úsečiek. *Priemerom* danej množiny nazveme každú z týchto úsečiek, ktorá má dĺžku d. Zistite, koľko najviac môže mať množina priemerov.

22. Nájdite počet podmnožín množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ takých, že ich najväčší prvok je nepárne číslo, ich druhý najväčší prvok párne číslo, a takto striedavo ďalej.

23. Dokážte, že pre ľubovoľné prirodzené čísla m, n spĺňajúce vzťah $n \geq m$ platí

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m} 2^{n-m}.$$

24. Koľko slov dĺžky n vieme vytvoriť nad abecedou $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, ak sa každé dve susedné číslice v slove líšia presne o 1?

25. Nech n je prirodzené číslo. Každý bod (x, y) v rovine, kde x a y sú nezáporné celé čísla s vlastnosťou $x+y < n$, je zafarbený červenou alebo modrou tak, aby bola splnená nasledujúca podmienka: ak bod (x, y) je červený, tak sú červené aj všetky body (x', y'), kde $x' < x$ a $y' < y$. Nech A je počet spôsobov voľby n modrých bodov s rôznou x-ovou súradnicou a B je počet spôsobov voľby n modrých bodov s rôznou y-ovou súradnicou. Dokážte, že $A = B$.

26. Nech p je nepárne prvočíslo. Nájdite počet p-prvkových podmnožín A množiny $\{1, 2, \ldots, 2p\}$ takých, že súčet všetkých prvkov v A je deliteľný p.

27. Na reálnej osi máme zvolených n^2+1 intervalov. Dokážte, že alebo vieme nájsť $n+1$ intervalov takých, že pre každú dvojicu intervalov jeden z dvojice je vnorený do druhého, alebo vieme nájsť $n+1$ intervalov takých, že žiaden z nich nie je obsiahnutý v žiadnom z ostatných n intervalov.

28. Nech p je prvočíslo tvaru $4k+3$. Dokážte, že ak $p \mid x^2 + y^2$, tak $p \mid x$.

29. Dokážte, že každé číslo, ktoré má v prvočíselnom rozklade len prvočísla tvaru $4k+1$, sa dá zapísať ako súčet dvoch štvorcov. Dokážte, že existuje nekonečne veľa prirodzených čísel, ktoré sa nedajú zapísať ako súčet troch štvorcov.

30. Dokážte, že n je prvočíslo práve vtedy, keď $n \mid (n-1)! + 1$.

31. Dokážte, že n je prvočíslo práve vtedy, keď pre všetky celé čísla a a x platí

$$(x+a)^n \equiv x^n + a \pmod{n}.$$

32. Nech a je prirodzené číslo. Zložené číslo n sa nazýva Fermatovo pseudoprvočíslo pri báze a, ak platí $n \mid a^n - a$. Zložené číslo n spĺňajúce $n \mid a^n - a$ pre každé prirodzené číslo a sa nazýva Carmichaelovo.
a) Dokážte, že existuje nekonečne veľa Fermatových pseudoprvočísel pre ľubovoľnú bázu a. (Návod: uvažujte o čísle $(a^{2p} - 1)/(a^2 - 1)$.)
b) Dokážte, že číslo n je Carmichaelovo práve vtedy, keď pre každé prvočíslo p platí, že ak $p \mid n$, tak $p^2 \nmid n$ a $p - 1 \mid n - 1$. Overte, že číslo 561 je Carmichaelovo.

33. Nech p je prvočíslo väčšie ako 5. Nech $n = \dfrac{4^p+1}{4+1}$. Dokážte, že číslo n je zložené a že preň platí $2^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$.

34. Nech d_k je najmenší spoločný násobok čísel $1, 2, 3, \ldots, k$. Dokážte, že $d_k \geq 2^{k-2}$.