Teória čísel

Máme tri základné metódy:

- *rozklad na súčin* (bežne s využitím identít platných pre polynómy všeobecne),
- *počítanie zvyškov* (najmä po delení prvočíslami, lebo sa ľahšie rátajú),
- *nerovnosti a odhady veľkosti* (o. i. ak $a \mid b$ a $b \neq 0$, tak $|a| \leq |b|$).

Symbolom (a, b) označujeme najväčšieho spoločného deliteľa čísel a a b.
Bezoutova identita: Pre ľub. celé čísla a a b existujú celé čísla x a y tak, že $ax + by = (a, b)$.
Malá Fermatova veta: Pre prvočíslo p a prir. číslo a nedeliteľné p platí $p \mid a^p - 1$.
Eulerova veta: Pre a nesúdeliteľné s n platí $n \mid a^{\varphi(n)} - 1$.
Wilsonova veta: Pre prvočíslo p platí $p \mid (p-1)! + 1$.
Bertrandov postulát: Pre každé prirodzené číslo n existuje prvočíslo p také, že $n < p \leq 2n$.
Nech $P(n)$ je polynóm s celočíselnými koeficientami. Potom pre ľub. celé a, b platí $a - b \mid P(a) - P(b)$.
Viacej nájdete napr. v `http://thales.doa.fmph.uniba.sk/sleziak/vyuka/2008/tc/tc.pdf` (v slovenčine).

Rozhodnite o platnosti nasledujúcich tvrdení.

1. Nech $(x, a) = 1$. Potom existuje y tak, že $x \mid ay + b$.

2. Nech p je prvočíslo tvaru $4k + 3$. Ak $p \mid a^2 + b^2$, tak $p \mid a$.

3. Čísla $a^p + b^p$ a $(a + b)^p$ dávajú rovnaký zvyšok po delení p.

4. Pre ľub. nepárne prirodzené čísla p a q platí $5 \mid pq^5 - p^5q$; ak navyše $|p - q| = 2$, tak $p + q \mid p^q + q^p$.

5. Zistite, pre ktoré n je aspoň jedno z čísel $n^2 - 1$ a $n^2 + 1$ mocninou dvojky.

6. Platí $343 \mid 2^{147} - 1$.

7. Nájdite všetky dvojice x, y také, že $3^x = y \cdot 2^x + 1$.

8. Nájdite najväčšie prirodzené číslo m, pre ktoré je číslo $1978^m - 1$ deliteľné číslom $1000^m - 1$.

9. Ktoré čísla zapísané v desiatkovej sústave len pomocou jednotiek sú druhými mocninami?

10. Nech $f(n) = n^4 + n^2 + 1$. Môžu byť čísla $f(n)$ a $f(n + 1)$ nesúdeliteľné?

11. Ak $2^n - 1$ je prvočíslo, tak n je prvočíslo.

12. Nech P je polynóm s celočíselnými koeficientami, pre ktorý platí $P(5) = 2005$. Môže byť číslo $P(2005)$ druhou mocninou?

13. Ak $2^n + 1$ je prvočíslo, tak n je mocnina dvojky.

14. Pre ľub. nesúdeliteľné čísla a a b existuje najväčšie celé číslo, ktoré sa nedá vyjadriť ako súčet a-čok a b-čok.

15. Pre všetky prirodzené čísla $n > 1$ je číslo $n^4 + n^2 + 1$ zložené.

16. Nech n je prirodzené číslo. Aký zvyšok dostaneme, keď číslo $n^{n+1} + (n + 1)^n$ vydelíme číslom $n(n + 1)$?

17. Nech a, b, c, $a + b - c$, $b + c - a$, $a + c - b$, $a + b + c$ je sedem rôznych prvočísel. Súčet nejakých dvoch z čísel a, b, c je 1000. Označme najväčšie, resp. najmenšie zo spomínaných siedmich čísel ako M, resp. m. Nájdite najväčšiu možnú hodnotu čísla $M - m$.

18. Určte všetky prirodzené čísla, ktoré sú nesúdeliteľné so všetkými členmi postupnosti $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$, $n \geq 1$. (Návod: uvažujte o zvyškoch po delení prvočíslami; pomôže niektorá z viet uvedených hore?)

19. Nech $a_1, a_2, \dots$ je postupnosť celých čísel, ktorá obsahuje nekonečne veľa kladných aj záporných členov. Predpokladajme, že pre každé prirodzené číslo n dávajú čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ navzájom rôzne zvyšky po delení n. Dokážte, že každé prirodzené číslo sa v postupnosti (a_n) vyskytuje práve raz.

20. Dokážte, že pre $n > 1$ nie je súčet $\sum_{i=1}^{n} 1/i$ celé číslo.

21. Číslo $n!$ je druhou mocninou len pre $n = 1$.

22. Nech p je nepárne prvočíslo. Čísla $1^2 \cdot 3^2 \cdot \dots \cdot (p-2)^2$, $2^2 \cdot 4^2 \cdot \dots \cdot (p-1)^2$ a $(-1)^{(p+1)/2}$ dávajú rovnaký zvyšok po delení p.