Prípravné sústredenie pred IMO 2005, Mexiko

16. 6. 2005, Ján Mazák

1. Nech ABC je trojuholník so štandardným označením strán, nech L je priesečník osi uhla BAC s so stranou BC; R je polomer opísanej kružnice a v_c veľkosť výšky na stranu C. Dokážte, že $ab = 2Rv_c$ a $|AL|^2 = bc(1 - a^2/(b+c)^2)$. Vyjadrite veľkosti jeho ťažníc pomocou veľkostí strán. Aký obsah má trojuholník, ktorého strany majú rovnaké veľkosti ako ťažnice trojuholníka ABC (existuje vždy takýto trojuholník)? Dokážte, že ak má trojuholník dve rovnako dlhé osi uhlov, tak je rovnoramenný.

2. Kružnice k, ℓ sa pretínajú v bodoch M, N. Nech AB je priamka dotýkajúca sa týchto kružníc po poradí v bodoch A, B tak, že bod M leží k AB bližšie než bod N. Nech CD je priamka rovnobežná s AB prechádzajúca cez bod M, pričom C leží na k a D leží na ℓ. Priamky AC a BD sa pretínajú v bode E; priamky AN a CD sa pretínajú v bode P; priamky BN a CD sa pretínajú v bode Q. Dokážte, že $EP = EQ$. Dokážte, že priamka NE je osou uhla CND.

3. V rovine sú dané dve kružnice pretínajúce sa v bodoch X a Y. Dokážte, že existujú štyri body s nasledujúcou vlastnosťou: Pre každú kružnicu dotýkajúcu sa daných kružníc v bodoch A a B a pretínajúcu priamku XY v bodoch C a D každá z priamok AC, AD, BC, BD prechádza jedným z tých štyroch bodov.

4. Kružnica k má stred O a priemer BC. Nech A je bod kružnice k taký, že $|\angle AOB| < 120°$. Nech D je stred toho oblúka AB, ktorý neobsahuje bod C. Priamka prechádzajúca bodom O rovnobežná s DA pretína priamku AC v bode I. Os úsečky OA pretína kružnicu k v bodoch E a F. Dokážte, že I je stred kružnice vpísanej do trojuholníka CEF.

5. Nech ABC je ostrouhlý trojuholník a T jeho vnútorný bod taký, že $|\angle ATB| = |\angle BTC| = |\angle CTA|$. Nech M, N, P sú kolmé priemety bodu T po rade na strany BC, CA, AB. Kružnica opísaná trojuholníku MNP pretína priamky BC, CA, AB druhýkrát po rade v bodoch M', N', P'. Zistite vnútorné uhly trojuholníka $M'N'P'$.

6. Žiadne tri z bodov A, B, C, D nie sú kolineárne. Priamky AB a CD sa pretínajú v bode E, priamky BC a DA sa pretínajú v bode F. Dokážte, že kružnice s priemermi AC, BD, EF sa buď pretínajú v spoločnom bode alebo žiadne dve z nich nemajú spoločný bod.

7. Daná je kružnica k a na nej tri rôzne body A, B, C. Zostrojte na kružnici k bod D tak, aby sa štvoruholníku $ABCD$ dala vpísať kružnica.

8. V rovnobežníku $ABCD$ na stranách AB a BC sú po rade body E a F tak, že $|AE| = |CF|$. Dokážte, že priesečník priamok AF a CE leží na osi uhla ADC.

9. Nech A_1 je stred štvorca vpísaného do ostrouhlého trojuholníka tak, že dva jeho vrcholy ležia na strane BC. Body B_1, C_1 sú definované podobne. Dokážte, že priamky AA_1, BB_1, CC_1 prechádzajú jedným bodom.

10. Daný je trojuholník ABC a body X, Y, Z také, že $|\angle ABZ| = |\angle XBC|$, $|\angle BCX| = |\angle YCA|$, $|\angle CAY| = |\angle ZAB|$. Dokážte, že priamky AX, BY, CZ prechádzajú jedným bodom.

11. Nech ABC je trojuholník a D, E, F sú po rade body na jeho stranách BC, CA, AB také, že ceviány AD, BE, CF prechádzajú jedným bodom. Nech M, N, P sú body na úsečkách EF, FD, DE (v tomto poradí). Dokážte, že priamky AM, BN, CP prechádzajú jedným bodom práve vtedy, keď priamky DM, EN, FP prechádzajú jedným bodom.

12. Nech O je stred opísanej kružnice a H ortocentrum ostrouhlého trojuholníka ABC. Dokážte, že existujú body D, E, F po rade na stranách BC, CA, AB tak, že $OD + DH = OE + EH = OF + FH$ a priamky AD, BE, CF prechádzajú jedným bodom.

13. Nech M je vnútorný bod strany AB trojuholníka ABC. Dokážte, že platí (Stewartova veta)

$$AB \cdot (MC^2 + BM \cdot AM) = BC^2 \cdot AM + AC^2 \cdot BM.$$

14. Vrcholy štvoruholníka $ABCD$ ležia na kružnici s polomerom 1. Pre dĺžky jeho strán platí $|AB| \cdot |BC| \cdot |CA| \cdot |AD| \geq 4$. Dokážte, že štvoruholník $ABCD$ je štvorec.

15. Dokážte, že v rovine existuje nekonečná množina bodov taká, že žiadne tri body tejto množiny nie sú kolineárne a vzdialenosť medzi ľubovoľnými dvoma z týchto bodov je racionálne číslo.

16. Nech ABC je trojuholník, pre ktorý existuje vnútorný bod F taký, že $\angle AFB = \angle BFC = \angle CFA$. Priamky BF a CF pretínajú strany AC a AB v bodoch D a E (v tomto poradí). Dokážte, že $AB + AC \geq 4DE$. Kedy nastáva rovnosť?

17. Nech $A_1A_2 \dots A_n$ je konvexný mnohouholník, $n \geq 4$. Dokážte, že $A_1A_2 \dots A_n$ je tetivový práve vtedy, keď ku každému vrcholu A_j vieme priradiť dvojicu (b_j, c_j) reálnych čísel tak, že

$$A_iA_j = b_jc_i - b_ic_j \qquad \text{pre všetky } i, j \text{ také, že } 1 \leq i < j \leq n\,.$$

18. Nech ABC je trojuholník s ťažiskom G. Nájdite taký bod P v rovine trojuholníka ABC, že výraz $AP \cdot AG + BP \cdot BG + CP \cdot CG$ má minimálnu hodnotu. Vyjadrite túto hodnotu pomocou strán trojuholníka ABC.

19. Nájdite taký bod P v rovine konvexného štvoruholníka $ABCD$, že súčet $AP+BP+CP+DP$ je minimálny.

20. Nech ABC je ostrouhlý trojuholník. Nech DAC, EAB, FBC sú rovnoramenné trojuholníky ležiace mimo trojuholníka ABC, pričom $DA = DC$, $EA = EB$, $FB = FC$ a $\angle ADC = 2\angle BAC$, $\angle BEA = 2\angle ABC$, $\angle CFB = 2\angle ACB$. Nech D' je priesečník priamok DB a EF, E' je priesečník EC a DF, F' je priesečník FA a DE. Nájdite hodnotu výrazu

$$\frac{DB}{DD'} + \frac{EC}{EE'} + \frac{FA}{FF'}\,.$$

21. Nech ABC je trojuholník a P jeho vonkajší bod (v rovine trojuholníka). Nech AP, BP, CP pretínajú strany (resp. ich predĺženia) BC, CA, AB v bodoch D, E, F. Predpokladajme, že obsahy trojuholníkov PBD, PCE, PAF sú rovnaké. Dokážte, že potom sú všetky rovné obsahu trojuholníka ABC.

22. Daný je dotyčnicový štvoruholník. Dokážte, že úsečky, ktoré spájajú dotykové body oproti ležiacich strán s vpísanou kružnicou, prechádzajú priesečníkom uhlopriečok.

23. V priestore je daná taká konečná množina bodov, že každá priamka prechádzajúca dvomi jej bodmi obsahuje ešte aspoň jeden ďalší bod tejto množiny. Dokážte, že všetky body takejto množiny ležia na jednej priamke.

24. V rovine je daných $n \geq 3$ bodov, pričom tieto body neležia na jednej priamke. Potom možno nájsť kružnicu, ktorá obsahuje aspoň tri z daných bodov, pričom ani jeden z daných bodov neleží vnútri tejto kružnice.

25. V rovine je daná množina $n \geq 3$ bodov, každé dva z nich sú spojené úsečkou. Označme d dĺžku najdlhšej z týchto úsečiek. *Priemerom* danej množiny nazveme každú z týchto úsečiek, ktorá má dĺžku d. Zistite, koľko najviac môže mať množina priemerov.

26. Dané sú kladné čísla a, b, c, d ako dĺžky strán AB, BC, CD, DA štvoruholníka $ABCD$. Zostrojte taký štvoruholník $ABCD$, že jeho obsah je čo najväčší.

27. Vnútri strán AB, BC, CA trojuholníka ABC zvolíme v tomto poradí ľubovoľné body K, L, M. Dokážte, že obsah aspoň jedného z trojuholníkov MAK, KBL, LCM je menší alebo rovný štvrtine obsahu trojuholníka ABC.