Kružnicová inverzia

Príklad 1. V rovine sú dané dve kružnice k, ℓ s priesečníkmi A, B. Vezmime priamku p prechádzajúcu bodom B, jej druhý priesečník s kružnicou k označme C, jej druhý priesečník s kružnicou ℓ označme D. Dokážte, že veľkosť uhla CAD nezávisí od polohy priamky p.

Príklad 2. V rovine sú dané tri zhodné kružnice, ktoré prechádzajú spoločným bodom H. Označme druhé priesečníky týchto kružníc A, B, C (rôzne od H). Dokážte, že H je ortocentrum trojuholníka ABC.

Úloha 1. Apollóniove úlohy

Úloha 2. V rovine sú dané dve kružnice k, ℓ s priesečníkmi A, C. V bode A spravíme dotyčnicu ku k, tá druhýkrát pretne kružnicu ℓ v bode D. Bod B je priesečníkom kružnice k s dotyčnicou ku kružnici ℓ v bode A. Dokážte, že $|AB| \cdot |CD| = |AC| \cdot |AD|$.

Úloha 3. Kružnice k_1, k_2 sa pretínajú v bodoch A, B. Kružnica k_3 sa zvonku dotýka kružníc k_1, k_2 po poradí v bodoch C, E. Kružnica k_4 sa zvonku dotýka kružníc k_1, k_2 po poradí v bodoch D, F. Dokážte, že kružnica opísaná trojuholníku ACE sa dotýka kružnice opísanej trojuholníku ADF.

Úloha 4. Kružnica ℓ sa zvnútra dotýka kružnice k v bode A. Zvolíme bod B na kružnici ℓ. Dotyčnica ku ℓ v bode B pretne kružnicu k v bodoch D, E. Označme C stred toho oblúka DE kružnice k, ktorý neobsahuje bod A. Dokážte, že body A, B, C ležia na priamke.

Úloha 5. Kružnice k_1, k_2 sa zvonka dotýkajú v bode D. Priamka p sa dotýka kružníc k_1, k_2 po rade v (rôznych) bodoch A, B. Úsečka AC je priemerom kružnice k_1. Priamka q prechádza cez bod C a dotýka sa kružnice k_2 v bode E. Dokážte, že trojuholník ACE je rovnoramenný.

Úloha 6. Dané sú dve kružnice k, ℓ pretínajúce sa v bodoch D a A. Spoločná dotyčnica týchto kružníc bližšia k bodu A sa dotýka kružnice k v bode E a kružnice ℓ v bode F. Rovnobežka so spoločnou dotyčnicou prechádzajúca bodom D pretína kružnicu k v bode C a kružnicu ℓ v bode B (tieto body sú rôzne od bodu D). Dokážte, že druhý priesečník (rôzny od bodu D) kružníc opísaných trojuholníkom CDF a BDE leží na priamke AD.

Úloha 7. V rovine je daný trojuholník DEF a tri body A, B, C. Dokážte, že existuje kružnica taká, že keď podľa nej urobíme inverziu, tak obrazy A', B' C' bodov A, B, C vytvoria trojuholník $A'B'C'$ podobný trojuholníku DEF.

Úloha 8. Dané sú kružnice k_1, k_2, k_3, k_4 tak, že k_i sa zvonka dotýka k_{i+1} pre $i = 1, 2, 3, 4$ ($k_5 = k_1$). Dokážte, že štyri dotykové body týchto kružníc ležia na jednej kružnici.

Úloha 9. Dve kružnice sa dotýkajú zvonka v bode A. Do krivočiareho trojuholníka určeného týmito kružnicami a ich spoločnou dotyčnicou vpíšeme kružnicu so stredom O a polomerom r. Dokážte, že $|AO| \le 3r$.

Úloha 10. Kružnice k_1, k_2 sa pretínajú v bodoch A, B. Priamka rôzna od AB pretína kružnicu k_1 v bodoch C, D, kružnicu k_2 v bodoch E, F a priamku AB v bode P ležiacom mimo úsečky AB. Dokážte, že priamka spájajúca stredy kružníc opísaných trojuholníkom ACE a BDF prechádza bodom P.

$*$ **Úloha 11.** Nech ABC je trojuholník s opísanou kružnicou k a nech D je bod na strane BC. Dokážte, že kružnice dotýkajúce sa k, AD, AB a k, AD, DC sa navzájom dotýkajú práve vtedy, keď uhly BAD a CAD majú rovnakú veľkosť.

$*$ **Úloha 12.** Daná je polkružnica k s priemerom AB a stredom O a priamka, ktorá pretína polkružnicu k v bodoch C a D a priamku AB v bode M ($MB < MA$, $MD < MC$). Nech k je druhý priesečník kružníc opísaných trojuholníkom AOC a DOB. Dokážte, že uhol MKO je pravý.

Úloha 13. Nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník s kolmými uhlopriečkami pretínajúcimi sa v bode O. Dokážte, že obrazy bodu O v osovej súmernosti podľa priamok AB, BC, CD, DA ležia na kružnici. (Nájdite aj dôkaz bez inverzie.)

$*$ **Úloha 14.** Kružnica vpísaná do trojuholníka ABC sa dotýka jeho strán BC, CA, AB po poradí v bodoch D, E, F. Bod X leží vnútri trojuholníka ABC tak, že kružnica vpísaná do trojuholníka XBC sa dotýka priamky BC v bode D a priamok CX a XB v bodoch Y a Z (v tomto poradí). Dokážte, že $EFZY$ je tetivový štvoruholník.

$*$ **Úloha 15.** Nech PQ je priemer polkružnice k. Kružnica ℓ sa zvnútra dotýka polkružnice k a dotýka sa priamky PQ v bode C. Nech A je bod na k a B bod na priamke PQ tak, že priamka AB je kolmá na priamku PQ a dotýka sa kružnice ℓ. Dokážte, že AC je osou uhla PAB.

$*$ **Úloha 16.** Nech K, L, M sú dotykové body kružnice vpísanej do trojuholníka ABC so stranami BC, CA, AB (v tomto poradí). Dokážte, že ortocentrum trojuholníka KLM, stred kružnice vpísanej do trojuholníka ABC a stred kružnice opísanej trojuholníku ABC ležia na jednej priamke.

$*$ **Úloha 17.** Nech ABC je trojuholník a O stred jemu opísanej kružnice. Priamky AB a AC pretínajú kružnicu opísanú trojuholníku BOC po druhýkrát v bodoch B_1 a C_1 (v tomto poradí). Nech D je priesečník priamok BC a B_1C_1. Dokážte, že kružnica dotýkajúca sa priamky AD v bode A, ktorej stred leží na priamke B_1C_1, je kolmá na kružnicu s priemerom OD.

$*$ **Úloha 18.** Nech O je stred kružnice opísanej štvoruholníku $ABCD$, I je stred kružnice doň vpísanej a P priesečník jeho uhlopriečok. Dokážte, že body O, I, P ležia na jednej priamke. (Navyše bod P je pevný pre všetky štvoruholníky, ktoré sa dajú vpísať do danej kružnice tak, aby druhá daná kružnica bola jeho vpísanou.)

$*$ **Úloha 19.** Šesťuholník $ABCDEF$ je vpísaný do kružnice k. Kružnice $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6$ sa zvnútra dotýkajú kružnice k v bodoch A, B, C, D, E, F. Kružnica k_i sa zvonka dotýka kružnice k_{i+1} pre $i = 1, 2, \ldots, 6$ (pritom $k_7 = k_1$). Dokážte, že priamky AD, BE, CF sa pretínajú v jednom bode.

$*$ **Úloha 20.** Nech P je bod vnútri trojuholníka ABC taký, že

$$|\angle APB| - |\angle ACB| = |\angle APC| - |\angle ABC|.$$

Nech D, E sú stredy kružníc vpísaných do trojuholníkov APB a APC. Dokážte, že priamky AP, BD, CE prechádzajú jedným bodom.