Abstrakt

¡+blablabla+¿ Modelom budú (sú) demonštrované základné javy vedenia prúdu cez PN prechod ako sú: driftový prúd, difúzny prúd, vytvorenie vyprázdnenej oblasti pri závernom pólovaní, injekcia minorítných nosičov do opačne dotovaných oblastí pri priepustnom pólovaní, volt-ampérová charateristika a jej zodpovedajúce priestorové rozloženie eletrónov a dier.

1 Úvod

2 Rovnice polovodičov

Význam použitých symbolov:

ε	permitiivta prostredia (kremíku)
ψ	elektrický potenciál
$\mathbf{E}$	intenzita elektrického poľa
q	náboj elektrónu
p, n	koncentrácie dier a elektrónov
N_D, N_A	koncentrácie donorov a akceptorov[1]
$\mathbf{J_n}, \mathbf{J_p}$	prúdy elektrónov a dier jednotkou plochy
μ_n, μ_p	pohyblivosti nosičov
D_n, D_p	difúzne konštanty (Fickov zákon)
U_n, U_p	miera generácie a rekombinácie elektrónov a dier

Poissonova rovnica[2]:

$$\nabla \cdot (\varepsilon \nabla \psi) = -q(p - n + N_D - N_A) \tag{1}$$

Prúdy:

$$\mathbf{J_n} = \overbrace{qn\mu_n\mathbf{E}}^{\text{drift}} + \overbrace{qD_n\nabla n}^{\text{difúzia}} \tag{2}$$

$$\mathbf{J_p} = qp\mu_p\mathbf{E} - qD_p\nabla p \tag{3}$$

Rovnice kontinuity (zachovanie resp. časová spojitosť náboja):

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{J_n} + U_n \tag{4}$$

[1] Pre jednoduchosť stačí uvažovať prípad, kde všetky prímesové atómy sú zionizované.

[2] Jedna z Maxwellovych rovníc v diferenciálnom tvare $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$, kde $\mathbf{D} = \varepsilon E \implies \nabla \cdot (\varepsilon \nabla \psi) = -\rho$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J_p} - U_p \tag{5}$$

Je dobré pripomenúť vzťah $\mathbf{E} = -\nabla\psi$. Prvý sčítanec na pravej strane rovníc (**??**) a (**??**) predstavuje driftový prúd (daný pohyblivosťou nábojov a intenzitou elektrického poľa), druhý sčítanec predstavuje difúzny prúd podľa prvého Fickovho zákona, teda úmerný spádu koncentrácie nábojov a difúznej konštante.

Rovnice (**??**) až (**??**) tvoria sústavu vzájomne previazaných nelineárnych rovníc s 5 neznámzmi $(\psi, \mathbf{J_n}, \mathbf{J_p}, n, p)$. Dosadením (**??**) do (**??**) a (**??**) do (**??**) je možné riešiť 3 rovnice s neznýmymi (ψ, n, p). Tento postup bude využitý v stati **??**.

3 MKP, FEniCS a stratégia riešenia

K numerickému riešeniu rovníc polovodičov použijeme diskretizáciu metódou konečných prvkov (MKP) s využitím programových nástrojov akademicko - vedeckej výpočtovej platformy FEniCS [**?**].

¡+Variacna forma+¿ ¡+Mixed formy vs decoupling+¿ ¡+Casova diskretizacia+¿

4 Implementácia

¡++¿

4.1 Matematické úpravy

¡++¿ Dosadením (**??**) do (**??**) a (**??**) do (**??**) a vyžitím vzťahu $\mathbf{E} = -\nabla\psi$ dostávame nasledovnú sústavu rovníc s 3 neznýmymi (ψ, n, p) - tj. Poissonovu rovnicu a rovnice kontinuity elektónov a dier:

$$\nabla \cdot (\varepsilon \nabla \psi) = -q(p - n + N_D - N_A) \tag{6}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \nabla \cdot (-n\mu_n \nabla\psi + D_n \nabla n) + U_n \tag{7}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \nabla \cdot (-p\mu_p \nabla\psi - D_p \nabla p) + U_p \tag{8}$$

¡+stále sú vzájomne previazané+¿ To je dosť závažná nepríjemnosť.

¡+Poissonova rovnica - varacna forma atd[3]+¿

[3] $\mathrm{d}x$ predstavuje vektor takého rozmeru, ako je rozmer priestorových súradníc riešenej úlohy

Časová diskretizácia rovnice (**??**):

$$\frac{n_i - n_{i-1}}{dt} = \nabla(-\mu_n n_{i-1} \nabla \psi_i) + \nabla \cdot (D_n \nabla n_i) + U_n \tag{9}$$

$$n_i - \nabla \cdot (dt D_n \nabla n_i) = n_{i-1} - \nabla(dt \mu_n n_{i-1} \nabla \psi_i) + dt U_n \tag{10}$$

Z toho bilineárna a lineárna forma pre MKP $a(n, v) = L(v)$ (neznámu n_i budeme ďalej označovať jednoducho n) získaná vynásobením oboch strán (**??**) testovacou funkciou v a následným integrovaním podľa $\mathrm{d}x$:

$$\begin{aligned} &\int_\Omega nv \, \mathrm{d}x + \int_\Omega dt D_n \nabla n \nabla v \, \mathrm{d}x = \\ &= \int_\Omega n_{i-1} v \, \mathrm{d}x - \int_\Omega dt \mu_n n_{i-1} \nabla \psi_i \nabla v \, \mathrm{d}x + \int_\Omega dt U_n v \, \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{11}$$

(**??**)

4.2 Okrajové podmienky

¡++¿

4.3 Scaling

Pokiaľ majú výsledky - predovšetkým elektrických veličín ako potenciál či prúdové hustoty - kvantitatívne zodpovedať realistickým hodnotám, je nutné aplikovať realistické hodnoty materiálových i rozmerových konštánt. Tým však vzniknú obrovské rozdiely v rádoch jednotlivých veličín, čo má za následok jednak zbytočne vysokú výpočtovú cenu (resp. čas výpočtov), jednak možnú stratu numerickej riešiteľnosti. Preto sa rovnice násobia ešte pred výpočtom škálovacími konštantami [**?**] [**?**] a následne sa spätne „zrozmerňujú“ až výsledky.

Účelom tohto článku je odvodenie a zostavenie výpočtového modelu s následným kvalitatívnym overením jeho funkčnosti. Pre jednoduchosť bude preto tento model bezrozmerný, tj. konštanty budú jednotkové.

4.4 Výpočtové prevednie (Python)

```
# Mesh and function space
nx = 100
ny = 1
mesh = RectangleMesh(Point(0.0, 0.0), Point(x_length, y_length)
    , nx, ny, 'crossed')
V = FunctionSpace(mesh, "CG", 1)
Vn=V
Vp=V
```