Aufgabenblatt 3 in der Übung für Optimierung im Maschinellen Lernen

Abgabedatum: 20.12.2023 23:59 Uhr via ILIAS.

(Abgabe bitte als Jupyter Notebook. In Markdown-Zellen kann auch LaTeX geschrieben werden, um die mathematischen Ausdrücke zu formatieren. Geben Sie auch ihren Lösungsweg an, um möglicherweise Teilpunkte bei falschem Ergebnis zu erhalten! Alternativ können Sie die mathematischen Aufgaben auf dem Papier lösen und eine eingescannte Version hochladen. Dann bitte auf Lesbarkeit achten.)

Aufgabe	1	2	Σ	bestanden
Punkte	8	8	16	
erreichte Punkte				

Name: ______________________ **Matrikelnummer:** ______________________

Aufgabe 1 Nochmal Rosenbrock-Funktion.

Gegeben sei nochmals die Rosenbrockfunktion $f(x, y) = 100(y - x^2)^2 + (1 - x)^2$. Sie dürfen Ihre Implementierung von Aufgabenblatt 1 verwenden.

a) Zeigen Sie, dass die Funktion an der Stelle $(1, 1)^T$ ein Minimum besitzt. (1 Punkt)

b) Implementieren Sie eine Funktion, die für f an einer beliebigen Stelle (x, y) die Hessematrix zurück gibt. (1 Punkt)

c) Implementieren Sie eine Funktion, die f ausgehend von einem Startwert (x, y) mit dem Gradientenabstiegsverfahren (mit gleichbleibender Schrittweite) minimiert. Starten Sie an der Stelle $(0.5, 0.5)^T$ und experimentieren Sie mit der Anzahl der Iterationen und der Schrittweite. (2 Punkte)

d) Implementieren Sie eine Funktion, die f ausgehend von einem Startwert (x, y) mit dem Newton-Verfahren minimiert. Wenden Sie die Funktion auf den Startwert $(0.5, 0.5)^T$ an. Experimentieren Sie dabei mit der Anzahl der Iterationen und der Schrittweite, beginnen Sie mit der Schrittweite 1. (2 Punkte)

e) Implementieren Sie eine Funktion, die f ausgehend von einem Startwert (x, y) mit dem Levenberg-Marquart minimiert. Starten Sie mit $\lambda = 0.001$ und erhöhen Sie λ im Fall einer Verschlechterung um den Faktor 10, andernfalls reduzieren Sie λ um den Faktor 10. Wenden Sie die Funktion auf den Startwert $(0.5, 0.5)^T$ an. Experimentieren Sie dabei mit der Anzahl der Iterationen und der Schrittweite. (2 Punkte)

Aufgabe 2 (je 2 Punkte pro Teilaufgabe) Approximation von Kreisen.

a) Implementieren Sie eine Funktion, die 50 Punkte auf einem Kreis mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius $r = 2$ erzeugt, auf die normalverteiltes Rauschen mit einer Varianz von 0.1 addiert wurde:

$$(x_i, y_i) = (r \cos \varphi_i + \varepsilon, r \sin \varphi_i + \varepsilon)$$

wobei die Winkel φ_i zufällig gleichverteilt aus dem Intervall $[0, 2\pi)$ gezogen sein sollen und $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, 0.1)$. Plotten Sie die Daten.

b) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial E}{\partial m_x}$, $\frac{\partial E}{\partial m_y}$, sowie $\frac{\partial E}{\partial r}$ für die Kostenfunktion:

$$E(m_x, m_y, r) = \sum_{i=1}^{50} \left(\sqrt{(x_i - m_x)^2 + (y_i - m_y)^2} - r \right)^2$$

c) Implementieren Sie eine Funktion, die den Gradienten der Kostenfunktion aus Teilaufgabe b) berechnet.

d) Implementieren Sie eine Funktion, die f ausgehend von einem Startwert (m_x, m_y, r) mit dem Gradientenabstiegsverfahren minimiert. Wenden Sie die Funktion an und starten Sie an der Stelle $(0.5, 0.1, 0.9)$. Experimentieren Sie mit der Anzahl der Iterationen und der Schrittweite.

e) Freiwillig aber aufschlussreich: Plotten Sie die Daten, den Kreis mit $(0, 0, 2)$, den Kreis mit den Startwerten und einige Kreise der Iterationsschritte (etwa für jede 5. oder jede 10. Iteration), sowie den Verlauf der Restfehler, etwa wie folgt: