

A n a l y s i s III

Wintersemester 20²⁴/25 Prof. Dr. Marcel Griesemer

Version: 18. Dezember 2024

Janne Paul Liebig (st187650@stud.uni-stuttgart.de)

Diese Zusammenfassung enthält nicht alles, was in der Vorlesung vorgetragen wurde. Der Fokus liegt vor allem auf Definition, Sätzen und einigen wenigen Bemerkungen. Für Hinweise auf Fehler und Kritik bin ich stets dankbar.

Inhaltsverzeichnis

1	Implizite Funktionen und Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^d	2
1.1	Der Satz über die Umkehrabbildung	2
1.2	Der Satz über implizite Funktionen	3
1.3	Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n	4
1.4	Extrema unter Nebenbedingungen	5
2	Integration in \mathbb{R}^d	6
2.1	Grundlegende Definitionen	6
2.2	Der Satz von Fubini	8
2.3	Nullmengen	9
2.4	Messbare Mengen	10
2.5	Integration über allgemeine Bereiche	10
2.6	Eigenschaften des Volumens	12
2.7	Die Transformationsformel	13
3	Integration über Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^d	15
3.1	Das Volumen eines k -Spats	15
3.2	Karten und Parameterdarstellungen von Untermannigfaltigkeiten . .	16
3.3	Integration über ein Kartengebiet	17
3.4	Zerlegung der Eins	18
3.5	Integration über kompakte Untermannigfaltigkeiten	19
3.6	Der Satz von Gauß	20
3.7	Laplace-Operator und harmonische Funktionen	22
3.8	Der Satz von Stokes	23

1 Implizite Funktionen und Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^d

1.1 Der Satz über die Umkehrabbildung

Sei $f: \emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine beliebige Abbildung. Ein Punkt $x^* \in D$ heißt **Fixpunkt von f** , wenn

$$f(x^*) = x^*.$$

Falls $L < 1$ existiert, so dass $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$, dann hat f höchstens einen Fixpunkt.

Satz 1.1. Sei $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^d$ abgeschlossen und $f: M \rightarrow M$ mit

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

für alle $x, y \in M$, wobei $L < 1$. Dann hat f genau einen Fixpunkt.

Dieser Satz lässt sich auf beliebige vollständige metrische Räume (M, d) verallgemeinern (\rightarrow Funktionalanalysis).

Wir erinnern uns an Satz 7.5 der Analysis 1. Ist $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton und differenzierbar in x_0 mit $f'(x_0) \neq 0$, dann ist f^{-1} in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar und

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Das verallgemeinern wir zu

Theorem 1.2. Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Ist $a \in D$ ein Punkt, in dem $f'(a)$ invertierbar ist, dann existieren offene Umgebungen U von a und V von $f(a)$ so, dass gilt

- (a) $f: U \rightarrow V$ ist bijektiv,
- (b) $f^{-1}: V \rightarrow U$ ist stetig differenzierbar.

Insbesondere ist $f'(x)$ invertierbar für alle $x \in U$ und wenn $y = f(x)$, dann gilt

$$(f^{-1})'(y) = f'(x)^{-1}.$$

Korollar 1.3. Ist $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und $f'(x)$ invertierbar für alle $x \in D$, dann ist $f(D)$ offen.

Sind $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \rightarrow V$ bijektiv und sowohl f als auch f^{-1} von der Klasse \mathcal{C}^k , dann nennt man f einen

- **\mathcal{C}^k -Diffeomorphismus**, wenn $k \geq 1$,
- **Homöomorphismus**, wenn $k = 0$.

Theorem 1.2 verallgemeinert sich zu

Theorem 1.4. Ist $D \subset \mathbb{R}^d$ offen, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^d$ von der Klasse \mathcal{C}^k und $f'(a)$ invertierbar, dann existieren offene Umgebungen U von a und V von $f(a)$, so dass $f: U \rightarrow V$ ein \mathcal{C}^k -Diffeomorphismus ist.

1.2 Der Satz über implizite Funktionen

Wir wollen $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ lokal durch den Graphen einer Funktion $y = g(x)$ beschreiben, so dass $f(x, g(x)) = 0$. Das ist nur möglich in der Nähe einer Lösung (a, b) , wo die Tangente nicht vertikal ist, d. h. $\nabla f(a, b)$ nicht horizontal bzw. $\partial_2 f(a, b) \neq 0$. Falls $\partial_2 f(a, b) \neq 0$, dann erwarten wir die Existenz einer Funktion

$$g: (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$$

mit $f(x, g(x)) = 0$. Falls g differenzierbar ist (und f auch), dann bekommen wir

$$0 = \frac{d}{dx} f(x, g(x)) = \partial_1 f(x, g(x)) + \partial_2 f(x, g(x)) g'(x) \quad \Rightarrow \quad g'(x) = -\frac{\partial_1 f(x, g(x))}{\partial_2 f(x, g(x))}.$$

Allgemein betrachten wir nun ein Gleichungssystem

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) &= 0 \\ &\vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) &= 0 \end{aligned}$$

in der Nähe einer Lösung $(a, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Für x nahe a wollen wir diese Gleichungen nach den m Unbekannten y_1, \dots, y_m auflösen. D.h. wir suchen eine Funktion

$$g: \mathbb{B}_\varepsilon(a) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad x \mapsto y = g(x)$$

mit $f(x, g(x)) = 0$ für $x \in \mathbb{B}_\varepsilon(a)$, wobei $f = (f_1, \dots, f_m)^\top$. Für $(h_1, h_2)^\top \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ gilt

$$f'(x, y) \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \partial_1 f(x, y) h_1 + \partial_2 f(x, y) h_2.$$

Theorem 1.5. Sei $D \subset \mathbb{R}^{m+n}$ offen und $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine \mathcal{C}^k -Abbildung ($k \geq 1$). Falls $f(a, b) = 0$ und die $m \times m$ -Matrix $\partial_2 f(a, b)$ invertierbar ist, dann gibt es offene Umgebungen $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ von a und b und eine \mathcal{C}^k -Abbildung $g: U \rightarrow V$, so dass für $(x, y) \in U \times V$ gilt

$$f(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = g(x).$$

Bemerkung. Die Jacobi-Matrix $g'(x)$ bekommt man durch implizite Differentiation aus $f(x, g(x)) = 0$. D.h. man nutzt $f(x, g(x)) = 0$ und leitet nach x ab. Es folgt

$$g'(x) = -\partial_2 f(x, g(x))^{-1} \partial_1 f(x, g(x)).$$

Hinweis: Für alle $h \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$0 = \frac{d}{dt} f(x + th, g(x + th)) = \dots$$

1.3 Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n

Eine Menge $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^n$ heißt **k -dimensionale Untermannigfaltigkeit** von \mathbb{R}^n , falls es zu jedem Punkt $p \in M$ eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von p und eine \mathcal{C}^1 -Abbildung

$$\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$$

existiert mit

- (a) $M \cap U = \{x \in U \mid \varphi(x) = 0\}$
- (b) $D\varphi(p): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ ist surjektiv.

Ist φ von der Klasse \mathcal{C}^m , so heißt M eine **k -dimensionale Untermannigfaltigkeit der Klasse \mathcal{C}^m** . $(n-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeiten heißen **Hyperflächen** und eindimensionale Untermannigfaltigkeiten heißen **Kurven**.

Bemerkung. (1) *Surjektivität von $D\varphi(p)$ ist äquivalent dazu, dass $\varphi'(p)$ Rang $n-k$ hat.*

- (2) *Ist $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ linear und surjektiv, dann ist*

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$$

ein linearer Unterraum von \mathbb{R}^n der Dimension $n - (n-k) = k$ (Rang-Defekt-Formel).

Theorem 1.6. *Sei $\varphi: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ von der Klasse \mathcal{C}^1 , $a \in \mathbb{R}^{n-k}$ und*

$$M := \{x \in D \mid \varphi(x) = a\}.$$

Falls $D\varphi(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ surjektiv ist für alle $x \in M$, dann ist M eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n (oder leer).

Bemerkung. $x \in D$ heißt **regulärer Punkt** von φ , wenn $D\varphi(x)$ surjektiv ist. Der Punkt a heißt **regulärer Wert** von φ , da alle $x \in \varphi^{-1}(\{a\})$ reguläre Punkte von φ sind.

Jede Untermannigfaltigkeit ist der Graph einer \mathcal{C}^1 -Abbildung.

Satz 1.7. *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit und $p \in M$. Nach Umnummerierung der Koordinaten gibt es eine offene Umgebung $U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ von p und eine \mathcal{C}^1 -Abbildung $g: U_1 \rightarrow U_2$, so dass*

$$M \cap (U_1 \times U_2) = \{(x_1, x_2) \in U_1 \times U_2 \mid p = g(x)\}$$

Jede k -dimensionale Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ ist lokal diffeomorph zu einem Stück der k -dimensionalen Ebene

$$E_k := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_{k+1} = \cdots = x_n = 0\}$$

Satz 1.8. Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine k -dim. Untermannigfaltigkeit, wenn es zu jedem Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ und einen Diffeomorphismus $F: U \rightarrow V$ gibt mit

$$F(M \cap U) = V \cap E_k.$$

F heißt **Flachmacher** von M um p .

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit und $p \in M$. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt **Tangentialvektor** an M im Punkt p , wenn es eine \mathcal{C}^1 -Kurve $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ gibt mit

$$\gamma(0) = p \quad \text{und} \quad \dot{\gamma}(0) = v.$$

Die Menge $T_p M$ der Tangentialvektoren an M im Punkt p heißt **Tangentialraum von M in p** . Wir stellen uns die Vektoren $v \in T_p M$ im Punkt $p \in M$ angeheftet vor.

Satz 1.9. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit, $p \in M$ und $F: U \rightarrow V$ ein Flachmacher von M um p . Dann gilt

$$T_p M = DF(p)^{-1} E_k.$$

Insbesondere ist $T_p M$ ein Vektorraum der Dimension k .

Satz 1.10. Sei $M = \varphi^{-1}(\{a\}) \subset \mathbb{R}^n$ wobei $\varphi: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ eine \mathcal{C}^1 -Abbildung mit regulärem Wert $a \in \mathbb{R}^{n-k}$ ist. Dann gilt für alle $p \in M$

$$(a) \quad T_p M = \ker D\varphi(p),$$

$$(b) \quad (T_p M)^\perp = \text{span}\{\nabla \varphi_1(p), \dots, \nabla \varphi_{n-k}(p)\}.$$

1.4 Extrema unter Nebenbedingungen

Seien $f, \varphi_1, \dots, \varphi_m: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ gegeben und sei

$$M = \{x \in D \mid \varphi_1(x) = a_1, \dots, \varphi_m(x) = a_m\}.$$

Wir suchen die Punkte $x_0 \in M$ wo $f \upharpoonright M$ lokal extremal ist, d.h. wo für alle $x \in M \cap \mathbb{B}_\varepsilon(x_0)$ gilt

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \text{oder} \quad f(x_0) \geq f(x)$$

für ein $\varepsilon > 0$. Man sagt dann, f sei in x_0 bedingt lokal extremal oder lokal extremal unter den Nebenbedingungen $\varphi_1 = a_1, \dots, \varphi_m = a_m$. Der Punkt $x_0 \in M$ heißt lokaler Extrempunkt unter den Nebenbedingungen $\varphi_1 = a_1, \dots, \varphi_m = a_m$.

Theorem 1.11. Sei $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und seien $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in \mathcal{C}^1(D)$. Ist f im Punkt $x_0 \in D$ lokal extremal unter den Nebenbedingungen $\varphi_1 = a_1, \dots, \varphi_m = a_m$ und sind $\nabla \varphi_1(x_0), \dots, \nabla \varphi_m(x_0)$ linear unabhängig, dann existieren $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ mit

$$\nabla f(x_0) = \sum_{k=1}^m \lambda_k \nabla \varphi_k(x_0).$$

2 Integration in \mathbb{R}^d

2.1 Grundlegende Definitionen

Ein d -dim. **Quader** $Q \subset \mathbb{R}^d$ ist eine Menge der Form

$$Q = \prod_{k=1}^d [a_k, b_k]$$

mit $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ und $a_k < b_k$. Der Inhalt $|Q|$ von Q ist das Produkt der Zahlen

$$|Q| = \prod_{k=1}^d (b_k - a_k).$$

Eine **Partition** $P = (P_1, \dots, P_d)$ eines Quaders Q ist ein d -Tupel von Partitionen P_k der Intervalle $[a_k, b_k]$. Durch P wird Q in endlich viele **Teilquader** zerlegt. Mit P bezeichnen wir auch die Familie der Teilquader. Es gilt für jede Partition P von Q

$$|Q| = \sum_{A \in P} |A|.$$

Die **Feinheit** einer Partition P ist die Zahl

$$\Delta P = \max_{A \in P} \left(\max_{x, y \in A} |x - y| \right).$$

Sind P, P' zwei Partitionen von Q , wobei jeder Teilquader von P' Teilmenge eines Quaders von P ist (d.h. $P_i \subset P'_i$ für alle i), dann heißt P' **feiner** als P .

Die **gemeinsame Verfeinerung** P'' zweier Partitionen P, P' von Q ist definiert durch $P'' = P_i \cup P'_i$. Sie ist feiner als P und feiner als P' .

Die **Unter-** und **Obersumme** von f zu Partition P sind definiert durch

$$\begin{aligned} \underline{S}(f, P) &= \sum_{A \in P} m_A(f) |A| \\ \overline{S}(f, P) &= \sum_{A \in P} M_A(f) |A|, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} m_A(f) &:= \inf_{x \in A} f(x), \\ M_A(f) &:= \sup_{x \in A} f(x). \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt

$$\underline{S}(f, P) \leq \overline{S}(f, P)$$

Lemma 2.1. *Ist P' feiner als P , dann gilt*

$$\underline{S}(f, P) \leq \underline{S}(f, P'), \quad \overline{S}(f, P') \leq \overline{S}(f, P).$$

Lemma 2.2. Sind P, P' zwei Partitionen von Q , dann gilt

$$\underline{S}(f, P) \leq \overline{S}(f, P').$$

Nach Lemma 2.2 gilt

$$\sup_P \underline{S}(f, P) \leq \inf_{P'} \overline{S}(f, P').$$

Wenn diese Zahlen endlich und gleich sind, dann heißt f **Riemann-integrierbar** auf Q und der gemeinsame Wert heißt **Integral** von f auf Q . Er wird mit

$$\int_Q f dV \quad \text{oder} \quad \int_Q f(x) dx$$

bezeichnet. Wir schreiben dafür auch $I(f)$.

Ist f unbeschränkt, dann ist $\underline{S}(f, P)$ oder $\overline{S}(f, P)$ unendlich, also f nicht integrierbar.

Die **maximale Schwankung** (Oszillation) von f in A ist die Zahl

$$o(f, A) := \sup_{x, y \in A} |f(x) - f(y)|.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} M_A(f) - m_A(f) &= \sup_{x \in A} f(x) - \inf_{y \in A} f(x) = \sup_{x, y \in A} (f(x) - f(y)) \\ &= \sup_{x, y \in A} |f(x) - f(y)| = o(f, A) \end{aligned}$$

Satz 2.3. Eine beschränkte Funktion $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Partition P existiert mit

$$\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \varepsilon$$

bzw.

$$\sum_{A \in P} o(f, A) |A| < \varepsilon.$$

Satz 2.4. Sind $f, g: Q \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und ist $\lambda \in \mathbb{R}$, dann sind auch $f + g, \lambda f, |f|, f \cdot g$ und (falls $|g| \geq c > 0$) f/g integrierbar. Es gilt

$$(a) \quad \int_Q (f + g) dV = \int_Q f dV + \int_Q g dV \quad \text{und} \quad \int_Q \lambda f dV = \lambda \int_Q f dV.$$

$$(b) \quad \left| \int_Q f dV \right| \leq \int_Q |f| dV \leq \|f\|_\infty |Q|.$$

$$(c) \quad f \leq g \quad \Rightarrow \quad \int_Q f dV \leq \int_Q g dV.$$

Satz 2.5. Sei $f_n: Q \rightarrow \mathbb{R}$ eine Folge integrierbarer Funktionen $f_n \rightarrow f$ gleichmäßig für $n \rightarrow \infty$. Dann ist f integrierbar und

$$\int_Q f dV = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_Q f_n dV.$$

Korollar 2.6. Jede Regelfunktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist integrierbar und

$$\int_{[a,b]} f dV = \int_a^b f(x) dx.$$

Satz 2.7. Ist $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf dem Quader $Q \subset \mathbb{R}^d$, dann ist f integrierbar und zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$\Delta P < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| \sum_{A \in P} f(\xi_A) |A| - \int_Q f dV \right| < \varepsilon.$$

2.2 Der Satz von Fubini

Für jede beschränkte Funktion $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$, integrierbar oder nicht, sei

$$\begin{aligned} \overline{\int_Q f dV} &:= \inf_P \overline{S}(f, P) \\ \underline{\int_Q f dV} &:= \sup_P \underline{S}(f, P) \end{aligned}$$

Theorem 2.8. Seien $Q_1 \subset \mathbb{R}^n, Q_2 \subset \mathbb{R}^m$ abgeschlossene Quader und sei $f: Q_1 \times Q_2 \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar. Dann sind auch die Funktionen

$$\begin{aligned} x &\mapsto \overline{\int_{Q_2} f(x, y) dy}, \quad \underline{\int_{Q_2} f(x, y) dy} \\ y &\mapsto \overline{\int_{Q_1} f(x, y) dx}, \quad \underline{\int_{Q_1} f(x, y) dx} \end{aligned}$$

integrierbar und

$$\begin{aligned} &\int_{Q_1 \times Q_2} f dV \\ &= \int_{Q_2} dy \overline{\int_{Q_1} dy f(x, y)} = \int_{Q_2} dy \underline{\int_{Q_1} dx f(x, y)} \\ &= \int_{Q_1} dx \overline{\int_{Q_2} dy f(x, y)} = \int_{Q_1} dx \underline{\int_{Q_2} dy f(x, y)}. \end{aligned}$$

Bemerkung. Die Funktionen $x \mapsto \overline{\int_{Q_2} f(x, y) dy}$ auf Q_1 und $y \mapsto \overline{\int_{Q_1} f(x, y) dx}$ auf Q_2 sind im Allgemeinen nicht integrierbar. Wenn sie es sind, dann gilt

$$\int_{Q_1 \times Q_2} f dV = \int_{Q_1} dx \int_{Q_2} dy f(x, y) = \int_{Q_2} dy \int_{Q_1} dx f(x, y).$$

Wenn f nicht beschränkt und damit nicht integrierbar, dann gilt das nicht.

Korollar 2.9. Ist $f: [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann gilt

$$\int_Q f dV = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \cdots \int_{a_n}^{b_n} dx_n f(x_1, \dots, x_n),$$

wobei die Reihenfolge der Integrationen keine Rolle spielt.

Beispiel. Wir integrieren die Funktion $f(x, y, z) = \cos(x + y + z)$ über den Würfel $Q = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]^3 \subset \mathbb{R}^3$.

$$\int_Q f dV = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dy \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dz \cos(x + y + z),$$

wobei

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x + y + z) dy &= \sin(x + y + z) \Big|_{z=-\frac{\pi}{2}}^{z=\frac{\pi}{2}} \\ &= \sin\left(x + y + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(x + y - \frac{\pi}{2}\right) = 2 \cos(x + y). \end{aligned}$$

Also

$$\int_Q f dV = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dy \cos(x + y) = 4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx \cos(x) = 8$$

2.3 Nullmengen

Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^d$ heißt d -dim. **Nullmenge** (oder Jordan-Nullmenge), wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele Quader $Q_1, \dots, Q_N \subset \mathbb{R}^d$ existieren mit

$$M \subset \bigcup_{i=1}^N Q_i \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^N |Q_i| < \varepsilon.$$

Bemerkung. • Ist M eine Nullmenge, dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Quader Q_i mit

$$M \subset \bigcup_{i=1}^N Q_i^\circ, \quad \sum |Q_i| < \varepsilon.$$

- Jede endliche Punktmenge $M \subset \mathbb{R}^d$ ist eine Nullmenge.
- Eine endliche Vereinigung von Nullmengen ist wieder eine Nullmenge.

Satz 2.10. Ist $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und $f(x) = 0$ für $x \in Q \setminus M$, wobei M eine Nullmenge ist, dann ist f integrierbar und

$$\int_Q f dV = 0.$$

Korollar 2.11. Ist $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, $g: Q \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und $g = f$ bis auf eine Nullmenge, dann ist auch g integrierbar und

$$\int_Q g dV = \int_Q f dV.$$

Theorem 2.12. Ist $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und stetig bis auf eine Nullmenge, dann ist f integrierbar.

Korollar 2.13. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und sei $\partial\Omega$ eine Nullmenge. Dann ist $\chi_\Omega: Q \rightarrow \mathbb{R}$ für einen Quader Q integrierbar.

2.4 Messbare Mengen

Nach Korollar 2.13 können wir das Volumen einer beschränkten Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ definieren durch

$$|Q| := \int_Q \chi_\Omega dV,$$

für einen Quader $Q \supset \Omega$, sofern $\partial\Omega$ eine Nullmenge ist. Das ist unabhängig von der Wahl von Q . Das motiviert die Definition:

Eine beschränkte Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ heißt (Jordan)-**messbar**, wenn $\partial\Omega$ eine d -dim. Nullmenge ist.

- Jede Nullmenge $M \subset \mathbb{R}^d$ ist messbar.
- Sind $A, B \subset \mathbb{R}^d$ messbar, dann auch $A \cup B, A \cap B$ und $A \setminus B$.
- Jeder Quader $Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ ist messbar.
- Für $\Omega = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ ist $\partial\Omega = [0, 1]$ keine Nullmenge. Also ist Ω nicht messbar.

Wir brauchen weitere Kriterien für Messbarkeit:

Satz 2.14. *Sei $K \subset \mathbb{R}^{d-1}$ kompakt ($d \geq 2$) und $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist der Graph $\Gamma(f) \subset \mathbb{R}^d$ eine d -dimensionale Nullmenge.*

Eine Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ heißt **Normalbereich** bezüglich der d -Achse, wenn es eine kompakte, messbare Menge $\Omega' \subset \mathbb{R}^{d-1}$ und stetige Funktionen $\alpha, \beta: \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit

$$\Omega = \{(x', x_d) \mid x' \in \Omega', \alpha(x') \leq x_d \leq \beta(x')\}.$$

Normalbereiche bezüglich anderer Achsen werden analog definiert.

Satz 2.15. *Jeder Normalbereich ist messbar.*

Folgerung. *Jedes beschränkte Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, das sich als endliche Vereinigung von Normalbereichen schreiben lässt, ist messbar.*

2.5 Integration über allgemeine Bereiche

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt. Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \supset \Omega$ heißt **über Ω integrierbar**, wenn die Funktion

$$\chi_\Omega f(x) := \begin{cases} f(x) & x \in \Omega \\ 0 & x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases}$$

über einen (und dann jeden) Quader $Q \supset \Omega$ integrierbar ist. Das Integral von f über Ω

$$\int_Q f dV := \int_Q \chi_\Omega f dV$$

ist unabhängig von der Wahl von Q . Für messbare $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ gilt

- (1) Ist f definiert und integrierbar auf einem Quader $Q \supset \Omega$, dann ist f über Ω integrierbar. (Denn $\chi_\Omega f$ ist integrierbar über Q (Satz 2.4))

- (2) Sind f, g über Ω integrierbar und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann sind auch $f + g, \lambda f, |f|, f \cdot g$ und f/g (falls $|g| \geq c > 0$ auf Ω) über Ω integrierbar und es gelten **(a)** bis **(c)** von Satz 2.4 mit $Q \rightarrow \Omega$.
- (3) Sind die Funktionen $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$ über Ω integrierbar und $f_n \rightarrow f$ gleichmäßig auf Ω , dann ist f über Ω integrierbar und

$$\int_{\Omega} f dV = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n dV.$$

- (4) Ist f auf Ω beschränkt und $f(x)$ für $x \in \Omega \setminus M$ mit einer Nullmenge M , dann ist f über Ω integrierbar und

$$\int_{\Omega} f dV = 0.$$

- (5) Ist f auf Ω beschränkt und stetig bis auf eine Nullmenge, dann ist f über Ω integrierbar.

Für beliebige $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ definieren wir

$$\begin{aligned}\Omega_x &:= \{y \in \mathbb{R}^m \mid (x, y) \in \Omega\}, \\ \Omega' &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \Omega_x \neq \emptyset\}.\end{aligned}$$

Sei $f_x(y) = f(x, y)$.

Theorem 2.16 (Fubini). *Sei $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ über $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ integrierbar. Falls f_x für jedes $x \in \Omega'$ über Ω_x integrierbar ist, dann gilt*

$$\int_{\Omega} f dV = \int_{\Omega'} dx \int_{\Omega_x} dy f(x, y)$$

Korollar 2.17 (Prinzip von Cavalieri). *Sind $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ und $\Omega_x \subset \mathbb{R}^m$ messbar für alle $x \in \mathbb{R}^n$, dann ist $x \mapsto |\Omega_x|$ über Ω' integrierbar und*

$$|\Omega| = \int_{\Omega'} |\Omega_x| dx.$$

Zwei Mengen $A, B \subset \mathbb{R}^d$ nennt man **nicht-überlappend**, wenn $A \cap B$ eine Nullmenge ist.

Satz 2.18. *Sind $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^d$ messbar und nicht-überlappend, dann gilt*

$$\int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f dV = \int_{\Omega_1} f dV + \int_{\Omega_2} f dV$$

sofern einer der beiden Seiten existiert.

2.6 Eigenschaften des Volumens

Wir wollen eine mehrdimensionale Version der Substitutionsformel

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) du = \int_a^b f(\varphi(u)) \varphi'(u) du$$

herleiten. Dazu müssen wir zuerst studieren, wie sich das Volumen einer messbaren Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ unter differenzierbaren und insbesondere linearen Abbildungen verhält. Per Definition

$$|\Omega| = \int_Q \chi_\Omega dV = \sup_P \underline{S}(\chi_\Omega, P) = \inf_P \overline{S}(\chi_\Omega, P)$$

wobei

$$\begin{aligned} \underline{S}(\chi_\Omega, P) &= \sum_{A \in P, A \subset \Omega} |A| \\ \overline{S}(\chi_\Omega, P) &= \sum_{A \in P, A \cap \Omega \neq \emptyset} |A| \end{aligned}$$

Also

$$|\Omega| = \sup_P \sum_{A \in P, A \subset \Omega} |A| = \int_P \sum_{A \in P, A \cap \Omega \neq \emptyset} |A|$$

und Ω ist genau dann messbar, wenn diese beiden Zahlen gleich sind.

Bemerkung. 1. Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ messbar und $a \in \mathbb{R}^d$, dann ist auch $\Omega + a = \{x + a \mid x \in \Omega\}$ messbar und $|\Omega + a| = |\Omega|$.

2. Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ messbar und $L: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ linear, dann ist auch $L\Omega$ messbar.

Sei $W = [0, d]^d \subset \mathbb{R}^d$ und $L: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine lineare Abbildung. Sei

$$\chi_L := |LW|.$$

Wenn L nicht invertierbar ist, dann ist LW eine Nullmenge (Übung). Sonst ist LW messbar.

Satz 2.19. Für jede messbare Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ gilt

$$|L\Omega| = \chi_L |\Omega|.$$

Satz 2.20.

$$\chi_L = |\det L|.$$

Theorem 2.21. Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ messbar und $L \in M(d \times d, \mathbb{R})$, dann ist $L\Omega$ messbar und $|L\Omega| = |\det L| |\Omega|$.

2.7 Die Transformationsformel

Aus der Analysis 2 ist bekannt, dass

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(u)) \varphi'(u) du.$$

Ist φ *monoton* und $I = [a, b]$, dann ist obige Gleichung äquivalent zu

$$\int_{\varphi(I)} f(x) dx = \int_I f(\varphi(u)) |\varphi'(u)| du. \quad (1)$$

Lemma 2.22. Sei $\varphi: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismus und sei $M \subset D$ kompakt. Dann gilt:

$$(a) \quad |M| = 0 \quad \Rightarrow \quad |\varphi(M)| = 0.$$

$$(b) \quad \varphi(\partial M) = \partial \varphi(M).$$

$$(c) \quad M \text{ messbar} \quad \Rightarrow \quad \varphi(M) \text{ messbar}.$$

Satz 2.23. Sei $\varphi: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismus und sei $Q \subset D$ ein (kompakter) Quader. Dann ist $\varphi(Q)$ messbar und

$$|\varphi(Q)| = \int_Q |\det \varphi'(u)| du.$$

Theorem 2.24. Sei $\varphi: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine \mathcal{C}^1 -Abbildung, $A \subset D$ eine kompakte messbare Menge und $N \subset A$ eine Nullmenge mit

$$(a) \quad \varphi(A) \text{ ist messbar}.$$

$$(b) \quad \varphi \text{ ist injektiv auf } A \setminus N.$$

$$(c) \quad \varphi'(u) \text{ ist invertierbar für } u \in A \setminus N.$$

Dann gilt für jede stetige Funktion $f: \varphi(A) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_{\varphi(A)} f(x) dx = \int_A f(\varphi(u)) |\det \varphi'(u)| du.$$

Bemerkung. (b) und (c) garantieren, dass φ auf jeder offenen Menge $U \subset A \setminus N$ ein Diffeomorphismus $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$ ist (Theorem 1.2, Korollar 1.3).

Kugelkoordinaten. Die Abbildung $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\phi(r, \vartheta, \varphi) := \begin{bmatrix} r \sin \vartheta \cos \varphi \\ r \sin \vartheta \sin \varphi \\ r \cos \vartheta \end{bmatrix}$$

ist stetig differenzierbar und bildet $Q_R = [0, R] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ auf B_R ab. Es gilt

$$\begin{aligned}\phi'(r, \vartheta, \varphi) &= (\partial_r \phi, \partial_{\vartheta} \phi, \partial_{\varphi} \phi) \\ &= \begin{bmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & r \cos \vartheta \cos \varphi & -r \sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi & r \cos \vartheta \sin \varphi & r \sin \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta & -r \sin \vartheta & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

und

$$\det \phi'(r, \vartheta, \varphi) = r^2 \sin \vartheta \neq 0$$

in $Q_R \setminus \partial Q_R$. Also gilt

$$\begin{aligned}\int_{B_R} f dV &= \int_{Q_R} f(\phi(r, \vartheta, \varphi)) r^2 \sin \vartheta d(r, \vartheta, \varphi) \\ &= \int_0^R dr \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi f(\phi(r, \vartheta, \varphi)) r^2 \sin \vartheta.\end{aligned}$$

3 Integration über Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^d

3.1 Das Volumen eines k -Spats

Das k -Spat oder k -dim. Parallelotop aufgespannt durch k Vektoren $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ ($k \leq n$) ist die Menge

$$P(v_1, \dots, v_k) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \left| x = \sum_{i=1}^k t_i v_i, t_i \in [0, 1] \right. \right\}.$$

Für $k = n$ hat $P(v_1, \dots, v_n)$ das Volumen $|\det(v_1 \dots v_n)|$ (Theorem 2.21). Für $k < n$ ist $P(v_1, \dots, v_k)$ eine n -dim. Nullmenge. Wir definieren nun einen k -dimensionalen Inhalt

$$|P(v_1, \dots, v_k)|_k := |\det(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n)|$$

wobei v_{k+1}, \dots, v_n orthonormiert (d.h. paarweise orthogonal und normiert) und \perp zu $\{v_1, \dots, v_k\}$ sind.

Satz 3.1. Ist $A \in M(n \times k)$ die Matrix mit Spalten $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$, dann gilt

$$|P(v_1, \dots, v_k)|_k = \sqrt{\det(A^\top A)}$$

wobei $(A^\top A)_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$.

Die Formel

$$|P(v_1, v_2)|_2 = |v_1 \wedge v_2|$$

für $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ wollen wir jetzt auf den \mathbb{R}^n verallgemeinern. Seien $v_1, \dots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$. Dann ist die Abbildung

$$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto \det(v, v_1, \dots, v_{n-1})$$

linear. Somit existiert ein eindeutig bestimmter Vektor $w \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\det(v, v_1, \dots, v_{n-1}) = \langle v, w \rangle$$

für alle $v \in \mathbb{R}^n$. Man definiert

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_{n-1} := w.$$

Dann gilt $v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_{n-1} \perp \{v_1, \dots, v_{n-1}\}$, denn

$$\det(v, v_1, \dots, v_{n-1}) = \langle v, v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_{n-1} \rangle.$$

Mit dem Entwicklungssatz für die Determinante folgt

$$\sum_{k=1}^n v_k w_k = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} v_k \det(A_k)$$

wobei wir A_k durch Streichen der k -ten Zeile/Spalte von A bekommen. Es gilt also

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1} = \sum_{k=1}^n w_k e_k = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} e_k \det A_k.$$

Satz 3.2. Für $n - 1$ Vektoren $v_1, \dots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$|P(v_1, \dots, v_{n-1})|_{n-1} = |v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1}|.$$

Korollar 3.3. Ist $A \in M(n \times k)$ und $Q \subset \mathbb{R}^k$ ein Quader, dann gilt

$$|AQ|_k = \sqrt{\det(A^\top A)} |Q|_k$$

.

3.2 Karten und Parameterdarstellungen von Untermannigfaltigkeiten

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige Menge. $U \subset M$ heißt relativ offen in M , wenn zu jedem $p \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existiert mit

$$\mathbb{B}_\varepsilon(p) \cap M \subset U.$$

Lemma 3.4. U ist genau dann offen in M , wenn eine offene Menge $U' \subset \mathbb{R}^n$ existiert mit $U = U' \cap M$.

Sei M eine k -dim. Untermannigfaltigkeit. Eine **lokale Parameterdarstellung von M** ist eine \mathcal{C}^1 -Abbildung

$$\gamma: \Omega \subset \mathbb{R}^k \rightarrow M$$

mit Ω offen, die regulär ist (d.h. $\gamma'(u)$ hat vollen Rang für alle $u \in \Omega$). Für $k = 1$ ist γ eine reguläre Kurve. Die Menge Ω heißt **Parameterbereich** und die Variablen u_1, \dots, u_k heißen **Parameter**. Die Spur $\gamma(\Omega)$ von γ ist offen in M (siehe Später). Falls $\gamma: \Omega \rightarrow U = \gamma(\Omega) \subset M$ ein Homöomorphismus ist, dann heißt die Umkehrung $\gamma^{-1}: U \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^k$ eine **Karte von M** . U heißt **Kartenbereich**. Die Zahlen $\gamma^{-1}(P)_1, \dots, \gamma^{-1}(P)_k \in \mathbb{R}$ heißen **lokale Koordinaten von P** . Die Abbildungen $(\gamma_1^{-1}, \dots, (\gamma^{-1})_k$ heißen auch **Koordinatensystem**.

Beispiel. 1. In $M = \mathbb{R}^2$ haben wir z. B. die kartesischen Koordinaten (Karte), $p \mapsto (x_1(p), x_2(p)) \in \mathbb{R}^2$ sowie die Polarkoordinaten $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \leq 0\}$, $p \mapsto (r, \varphi) \in \mathbb{R}^2$.

2. Für $M = \mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = 1\}$ ist

$$\gamma: (0, \pi) \times \mathbb{R} \rightarrow M, \quad (\vartheta, \varphi) \mapsto \begin{bmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \end{bmatrix}$$

eine lokale Parameterdarstellung von M , denn der Rang von $\gamma'(\vartheta, \varphi)$ ist 2. γ ist nur injektiv, wenn \mathbb{R} mit $(0, 2\pi)$ ersetzt wird. γ eingeschränkt auf $\Omega := (0, \pi) \times (0, 2\pi)$ ist ein Homöomorphismus, also $\gamma^{-1}: \gamma(\Omega) \rightarrow \Omega$ eine Karte von \mathbb{S}^2 .

Satz 3.5. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ offen und $\gamma: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine \mathcal{C}^1 -Abbildung, die regulär ist. Dann gibt es zu jedem Punkt $u_0 \in \Omega$ eine offene Umgebung $\Omega_0 \subset \Omega$, so dass $\gamma(\Omega_0)$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n und

$$\gamma: \Omega_0 \rightarrow \gamma(\Omega_0)$$

ein Homöomorphismus ist.

Theorem 3.6. *Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit, wenn zu jedem Punkt $p \in M$ eine Umgebung $U \subset M$, offen in M , existiert und eine Parameterdarstellung*

$$\gamma: \Omega \subset \mathbb{R}^k \rightarrow M$$

existiert, die Ω homöomorph auf U abbildet.

Satz 3.7 (Kartenwechsel/Koordinatentransformation). *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale Untermannigfaltigkeit und seien*

$$\gamma_i^{-1}: U_i \rightarrow \Omega_i, \quad i = 1, 2$$

zwei Karten mit $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Dann ist $V_i = \gamma_i^{-1}(U_1 \cap U_2)$ offen in \mathbb{R}^k und

$$\gamma_2^{-1} \circ \gamma_1: V_1 \rightarrow V_2$$

ist ein Diffeomorphismus.

3.3 Integration über ein Kartengebiet

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dim. Untermannigfaltigkeit und $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Wir wollen $\int_M f dS$ definieren. Das geschieht mittels Karten. Zur Motivation der folgenden Definition untersuchen wir erst, wie der k -dim. Inhalt unter eine Parameterdarstellung verändert wird. Sei

$$\gamma: \Omega \subset \mathbb{R}^k \rightarrow M$$

eine lokale Parameterdarstellung und sei $W \subset \Omega$ ein kleiner Würfel mit Eckpunkt $u_0 \in W$. Dann gilt für $u \in W$

$$\gamma(u) \cong \gamma(u_0) + \gamma'(u_0)(u - u_0)$$

(\cong bedeutet *ungefähr*). In diesem Sinn

$$\gamma(W) \cong \gamma(u_0) + \gamma'(u_0)(W - u_0).$$

Als Approximation für den zu definierenden Inhalt von $\gamma(W)$ nehmen wir den k -dim. Inhalt des k -Spats $\gamma'(u_0)(W - u_0)$. Es ist

$$|\gamma'(u_0)(W - u_0)|_k = \sqrt{\det \gamma'(u_0)^\top \gamma'(u_0)} |W - u_0|_k = \sqrt{g(u_0)} |W|_k$$

mit der Gram'schen Determinante $g(u_0) = \gamma'(u_0)^\top \gamma'(u_0)$. Die Matrix $\gamma'(u_0)^\top \gamma'(u_0)$ hat bezüglich der Standard-ONB e_1, \dots, e_k von \mathbb{R}^k die Komponenten

$$g_{ij}(u) = \langle e_i, \gamma'(u)^\top \gamma'(u) e_j \rangle = \langle \gamma'(u) e_i, \gamma'(u) e_j \rangle = \langle \partial_i \gamma(u), \partial_j \gamma(u) \rangle.$$

Für $k = n - 1$ ist

$$\sqrt{g(u)} = |\partial_1 \gamma(u) \wedge \dots \wedge \partial_{n-1} \gamma(u)|$$

nach Korollar 3.3.

M ist k -dim. Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n , γ homöomorphe Parameterdarstellung

$$\gamma: \Omega \rightarrow U \subset M \subset \mathbb{R}^n$$

und g die Gram'sche von γ . Ω offen in \mathbb{R}^k .

$$\int_U f dS = \int_\Omega f(\gamma(u)) \sqrt{g(u)} du$$

für $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, für welche $f \circ \gamma \sqrt{g}$ über Ω integrierbar ist. Ist \sqrt{g} über Ω integrierbar, dann

$$|U|_k = \int_U dS = \int_\Omega \sqrt{g(u)} du.$$

Bemerkung. 1. Ist f stetig und der Träger von f

$$\text{supp}(f) := \overline{\{x \in U | f(x) \neq 0\}}^{\mathbb{R}^n}$$

(Abschluss in \mathbb{R}^n) eine kompakte Teilmenge von U ist. Dann ist $f \circ \gamma \sqrt{g}$ integrierbar über Ω .

2. Die Abbildung $f \mapsto \int_U f dS \in \mathbb{R}$ ist linear.

3. Das Integral $\int_U f dS$ ist unabhängig von der Wahl der h . P. γ .

Satz 3.8. Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $R > 0$. Dann ist

$$\int_{|x| \leq R} f dV = \int_0^R dr \int_{\mathbb{S}_r^{n-1}} f(x) dS(x) = \int_0^R dr r^{n-1} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(rx) dS(x).$$

Für f identisch 1 bekommt man

$$|\mathbb{B}_R(0)| = |\mathbb{S}^{n-1}| \frac{R^n}{n}$$

also $n|\mathbb{B}_1(0)| = |\mathbb{S}^{n-1}|$.

3.4 Zerlegung der Eins

Bisher können wir über Kartengebiete integrieren. D. h.

$$\int_U f dV = \int_\Omega (f \circ \gamma) \sqrt{g} du$$

für $U \subset M \subset \mathbb{R}^n$ und $\gamma(\Omega) = U$.

Theorem 3.9. Folgende Aussagen über $K \subset \mathbb{R}^n$ sind äquivalent

- (a) K ist (folgen-) kompakt.
- (b) K ist abgeschlossen und beschränkt.
- (c) Zu jeder Familie $(U_i)_{i \in I}$ von offenen Mengen $U_i \subset \mathbb{R}^n$ mit

$$K \subset \bigcup_{i \in I} U_i$$

gibt es endliche viele Indices $i_1, \dots, i_N \in I$, so dass

$$K \subset \bigcup_{k=1}^N U_{i_k}.$$

Für (c) sagt man auch: Jede offene Überdeckung von K hat eine endliche Teilüberdeckung.

Der Träger (*support*) einer Funktion $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ ist die Menge

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in D \mid f(x) \neq 0\}} \subset \bar{D}.$$

Für $k \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen definiert man

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_0^k(D) &:= \{f \in \mathcal{C}^k(D) \mid \text{supp}(f) \subset D \wedge \text{supp}(f) \text{ kompakt}\} \\ \mathcal{C}_0^\infty &:= \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{C}_0^k(D) \end{aligned}$$

Theorem 3.10. Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge und \mathcal{O} eine offene Überdeckung von K . Dann gibt es endlich viele Funktionen $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

$$(a) \quad 0 \leq \alpha_i \leq 1.$$

$$(b) \quad \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 \text{ auf } K.$$

$$(c) \quad \text{supp}(\alpha_i) \subset U \text{ für ein } U \in \mathcal{O}.$$

3.5 Integration über kompakte Untermannigfaltigkeiten

Lemma 3.11. Zu jeder kompakten Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ gibt es eine Überdeckung

$$M = \bigcup_{i=1}^N U_i$$

durch endlich viele Kartengebiete U_i sowie zugehörige Funktionen $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\text{supp}(\alpha_i) \cap M \subset U_i$ und $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$ auf M .

Ist $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf der kompakten Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$, dann definiert man

$$\int_M f dS := \sum_{i=1}^N \int_{U_i} (f \alpha_i) dS,$$

wobei $U_i \subset M$ und $\alpha_i \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $i = 1, \dots, N$ durch Lemma 3.11 gegeben sind. Der Wert des Integrals ist unabhängig von der Wahl der Zerlegung der Eins.

Satz 3.12. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Untermannigfaltigkeit, $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ offen und messbar, $\gamma: \Omega \rightarrow \gamma(\Omega) \subset M$ eine h. P., welche auf einer offenen Umgebung von $\bar{\Omega}$ definiert und stetig differenzierbar ist. Falls $\gamma(\bar{\Omega}) = M$, dann gilt für jede stetige Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_M f dS = \int_{\bar{\Omega}} (f \circ \gamma)(u) \sqrt{g(u)} du.$$

3.6 Der Satz von Gauß

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Die **Divergenz** von F ist die Funktion $\operatorname{div} F: D \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$(\operatorname{div} F)(x) = \sum_{i=1}^n \partial_i F_i(x) =: \nabla \cdot F(x).$$

Wir berechnen jetzt den *Fluss* von F durch den Rand ∂Q eines Quaders $Q \subset \mathbb{R}^2$, d.h. wir integrieren $\langle F, N \rangle$ über ∂Q mit $|N| = 1$ (siehe Vorlesung). Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{\partial Q} \langle F, N \rangle dS &= \int_c^d F_1(b, y) dy - \int_c^d F_1(a, y) dy + \int_a^b F_2(x, d) dx - \int_a^b F_2(x, c) dx \\ &= \int_c^d F_1(b, y) - F_1(a, y) dy + \int_a^b F_2(x, d) - F_2(x, c) dx \\ &= \int_c^d \left(\int_a^b \partial_1 F_1(x, y) dx \right) dy + \int_a^b \left(\int_c^d \partial_2 F_2(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_Q (\partial_1 F_1 + \partial_2 F_2) d(x, y) \\ &= \int_Q (\operatorname{div} F) dV. \end{aligned}$$

(Eine Art Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung.)

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. A hat **glatten Rand**, wenn zu jedem $p \in \partial A$ eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ und eine \mathcal{C}^1 -Funktion $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}$ existiert mit

- (a) $A \cap U = \{x \in U \mid \varphi(x) \leq 0\}$,
- (b) $\nabla \varphi(x) \neq 0$.

Es gilt

$$\partial A \cap U = \{x \in U \mid \varphi(x) = 0\}.$$

Daraus folgt, dass ∂A eine $(n-1)$ -dim. Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n ist.

Satz 3.13. *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt mit glattem Rand. Dann gibt es zu jedem Punkt $p \in A$ genau einen Vektor $N(p) \in \mathbb{R}^n$ mit*

- (a) $N(p) \perp T_p(\partial A)$,
- (b) $|N(p)| = 1$,
- (c) $p + tN(p) \notin A$ für $t \in (0, \varepsilon)$ und $\varepsilon > 0$ klein genug.

Das Vektorfeld $p \mapsto N(p)$ ist stetig und heißt **äußeres Einheitsnormalenfeld**.

Lemma 3.14. *Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld mit $\operatorname{supp}(F) \subset U$, dann gilt*

$$\int_U \operatorname{div} F dV = 0.$$

Lemma 3.15. Sei $U = W \times (\alpha, \beta)$ wobei $W \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen ist. Sei $h: W \rightarrow (\alpha, \beta)$ eine \mathcal{C}^1 -Funktion. Wenn

$$A := \{(x', x_n) \in U \mid x_n \leq h(x')\}$$

$$M := \{(x', x_n) \in U \mid x_n = h(x')\},$$

dann gilt für jedes Vektorfeld $F \in \mathcal{C}_0^1(U)$

$$\int_A \operatorname{div} F dV = \int_M \langle F, N \rangle dS.$$

Theorem 3.16. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ mit glattem Rand und sei $N: \partial A \rightarrow \mathbb{R}^n$ das äußere Einheitsnormalenfeld auf ∂A . Dann gilt für jedes \mathcal{C}^1 -Vektorfeld $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf einer offenen Menge $U \supset A$

$$\int_A \operatorname{div} F dV = \int_{\partial A} \langle F, N \rangle dS.$$

Bemerkung. 1. Der Satz gilt im Allgemeinen nicht, wenn A nicht kompakt ist. Er gilt aber auch für viele kompakte Mengen mit Ecken und Kanten (z.B. Quader) (nachzuschlagen in Königsberger oder Blatter).

2. Man schreibt auch manchmal

$$\int_{\partial A} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

Bemerkung. Aus Theorem 3.16 folgt für $F \in \mathcal{C}^1$

$$\operatorname{div} F(x) = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{|\mathbb{B}_R(x)|} \int_{\mathbb{B}_R(x)} \operatorname{div} F dV = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{|\mathbb{B}_R(x)|} \int_{\partial \mathbb{B}_R(x)} \langle F, N \rangle dS,$$

was den Namen Quellstärke von F für $\operatorname{div} F$ erklärt.

Satz von Green. Sei $A \subset \mathbb{R}^2$ kompakt mit glattem Rand und sei $F: \partial A \rightarrow \mathbb{R}^2$ stetig. Wir definieren das Kurvenintegral von F längs des **positiv orientierten Randzyklus** von A durch

$$\int_{\partial A} F dx := \int_{\partial A} \langle F, T \rangle,$$

wobei $T = JN$ und

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Theorem 3.17 (Satz von Green). Sei $A \subset \mathbb{R}^2$ kompakt mit glattem Rand und sei $F: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein \mathcal{C}^1 -Vektorfeld auf $U \supset A$. Dann gilt

$$\int_{\partial A} F \cdot dx = \int_A (\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1) dV.$$

Anwendung:

$$|A| = \int_{\partial A} x dy = - \int_{\partial A} y dx$$

Bemerkung. Bei erfüllter Integrabilitätsbedingung $\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 = 0$ reduziert sich die Aussage von Theorem 3.17 auf Theorem 13.9, 13.8 oder 13.10 aus der Analysis 2.

Folgerung.

$$|A| = \int_{\partial A} x dy = - \int_{\partial A} y dx$$

folgt aus Theorem 3.17 mit $F(x, y) = \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix}$ bzw. $F(x, y) = \begin{bmatrix} -y \\ 0 \end{bmatrix}$ und

$$\int_{\partial A} F \cdot dx := \int_{\partial A} F_1 dx + F_2 dy.$$

3.7 Laplace-Operator und harmonische Funktionen

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in \mathcal{C}^2(D)$. Dann ist Δf (sprich Laplace von f) die Funktion

$$\Delta f = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} = \operatorname{div}(\nabla f): D \rightarrow \mathbb{R}$$

und $\Delta = \sum_{k=1}^n \partial_k^2$ heißt **Laplace-Operator**. Falls $\Delta f = 0$, dann heißt f **harmonisch**. Jede lineare Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \langle a, x \rangle + b, a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}$ ist harmonisch. Auch

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln |x| \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \\ f(x) &= \frac{1}{|x|^{n-2}} \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Im Folgenden ist $B_R := \overline{\mathbb{B}_R(0)}$ und $S_R := \partial \mathbb{B}_R(0)$.

Theorem 3.18. Sei $f \in \mathcal{C}^2(D)$ harmonisch und $\overline{\mathbb{B}_R(0)} \subset D \subset \mathbb{R}^n$, wobei $n \geq 2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(p) &= \frac{1}{|S_R|} \int_{S_R} f(p+x) dS(x) \\ &= \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} f(p+x) dV(x) \end{aligned}$$

Korollar 3.19. Ist $f \in \mathcal{C}^2(D)$ und $p \in D \subset \mathbb{R}^n$, dann gilt

$$\Delta f(p) = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{2n}{R^2} \frac{1}{|S_R|} \int_{S_R} [f(p+x) - f(p)] dS(x).$$

Bemerkung. Die rechte Seite verschwindet, wenn f die Mittelwerteigenschaft aus Theorem 3.18 hat. Eine \mathcal{C}^2 -Funktion ist also genau dann harmonisch, wenn sie die Mittelwerteigenschaft hat.

Eine Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt Gebiet, wenn Ω offen und zusammenhängend ist.

Theorem 3.20 (Maximumsprinzip). Sei $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ harmonisch und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Falls $p \in \Omega$ existiert mit

$$f(p) = \sup_{x \in \Omega} f(x),$$

dann ist f konstant.

Korollar 3.21. Eine harmonische Funktion $f \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ auf einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nimmt ihr Maximum und ihr Minimum auf dem Rand an.

Theorem 3.22. Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und hat $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ die Mittelwerteigenschaft aus Theorem 3.18, dann ist $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

Folgerung. Eine harmonische Funktion ist beliebig oft differenzierbar (siehe Bemerkung zu Korollar 3.19).

Dirichlet-Problem. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und seien $\rho \in \mathcal{C}(\Omega)$ und $f \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$ gegebene Funktionen. Wir betrachten das Randwertproblem

$$\begin{cases} \Delta u = \rho & \text{in } \Omega \\ u = f & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

mit gesuchter Funktion $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ - das **Dirichlet-Problem**.

Satz 3.23. Das Dirichlet-Problem hat höchstes eine Lösung.

3.8 Der Satz von Stokes

Der Satz von Stokes ist die räumliche Version des Satzes von Green:

$$\underbrace{\int_{\partial A} F \cdot dx}_{\text{Zirkulation von } F \text{ längs } \partial A} = \int_A \underbrace{\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1}_{\text{Wirbeldichte von } F} dV.$$

Beispiel. (1) Für $F(x, y) = \frac{1}{2}(-y, x)^\top$ ist die Wirbeldichte gerade $\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 = 1$.

(2) Für

$$F(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{bmatrix} = \nabla \varphi,$$

mit dem Polarwinkel φ , $\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 = \partial_1 \partial_2 \varphi - \partial_2 \partial_1 \varphi = 0$.

Sei $F: D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein \mathcal{C}^1 -Vektorfeld. Die **Rotation** (englisch: *curl*) von F ist das Vektorfeld

$$\text{rot} F(x) = \begin{bmatrix} \partial_2 F_3 - \partial_3 F_2 \\ \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3 \\ \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \nabla \wedge F.$$

- $\text{rot} F(x)$ heißt **Wirbeldichte** von F im Punkt $x \in D$.
- Falls $F = \nabla f$, dann ist $\text{rot} F \equiv 0$.

Lemma 3.24. Sei $F: D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein \mathcal{C}^1 -Vektorfeld und $a \in \mathbb{R}^3$. Dann gilt

$$(F'(x) - F'(x)^\top)a = \text{rot} F(x) \wedge a.$$

Der Satz von Stokes für ein Parallelogramm. Sei

$$P = \{x_0 + ta + sb \mid t, s \in [0, 1]\} \subset \mathbb{R}^3$$

mit $x_0, a, b \in \mathbb{R}^3$ fest. Sei ∂P die ein Mal im positiven Sinn (Gegenuhrzeigersinn von „oben“ betrachtet) durchlaufene Kurve bestehend aus den vier Kanten von P . Wir berechnen die Zirkulation

$$\int_{\partial P} F \cdot dx$$

von F längs ∂P für ein \mathcal{C}^1 -Vektorfeld $F: D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $D \supset P$. Es gilt

$$\int_{\partial P} F dx = \dots = \int_P \langle \operatorname{rot} F, N \rangle dS. \quad (2)$$

In Worten: „Die Zirkulation von F längs ∂P ist gleich der Fluss von $\operatorname{rot} F$ durch P .“

N definiert dabei die positive Flussrichtung und den positiven Umlaufsinn von ∂P . Falls $P \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ und $\langle a \wedge b, e_3 \rangle$, dann ist $N = e_3$ und

$$\langle \operatorname{rot} F, N \rangle = \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1.$$

Also reduziert sich (2) auf den Satz von Green.

Korollar 3.25. Ist $F: U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein \mathcal{C}^1 -Vektorfeld, $a, b \in \mathbb{R}^3$, $N = a \wedge b$, $x \in U$ und $P_\varepsilon(x) = \{x + t\varepsilon a + s\varepsilon b \mid s, t \in [0, 1]\}$, dann gilt

$$\langle \operatorname{rot} F(x), N \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|P_\varepsilon|} \int_{\partial P_\varepsilon(x)} F \cdot dx$$

wobei ∂P_ε im positiven Sinn durchlaufen wird.

Korollar 3.25 rechtfertigt die Bezeichnung *Wirbeldichte* für $\operatorname{rot} F$.

Lemma 3.26. Sei $\gamma: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Parameterdarstellung der Klasse \mathcal{C}^2 , $F: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld und $U \supset \gamma(\Omega)$. Wird $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f_k(u) := \langle \operatorname{rot} F(\gamma(u)), \partial_1 \gamma(u) \wedge \partial_2 \gamma(u) \rangle.$$

Lemma 3.27. Ist $f: H^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein \mathcal{C}^1 -Vektorfeld mit kompakten Träger, dann gilt

$$\int_{H^2} \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 du = \int_{\mathbb{R}} f_2(0, u_2) du_2,$$

wobei $H^2 := \{(u_1, u_2) \mid u_1 \leq 0\}$.