Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

1.1 Aussagen und Mengen

Eine **Aussage** ist ein Satz in Worten oder in Zeichen, der eindeutig als wahr oder falsch bezeichnet werden kann. Beispielsweise ist „5 ist eine Primzahl.“ wahr, „$2 \cdot 3 = 7$“ ist aber falsch. „Schokolade schmeckt gut“ ist keine Aussage.
Eine **Aussageform** ist ein Satz, welcher mindestens eine Variable enthält und bei jeder zulässigen Belegung der Variablen zu einer Aussage wird.
Aussagen und Aussageformen können modifiziert und verknüpft werden. Seien A, B Aussagen.

$\neg A$	nicht A
$A \vee B$	A oder B
$A \wedge B$	A und B

$A \to B$ wird als Subjunktion bezeichnet (wenn A, dann B). $A \leftrightarrow B$ wird als Bijunktion bezeichnet (A genau dann, wenn B).
$(A \to B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$. Weiter ist $(A \leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to A)$.
$A \Rightarrow B$ (Implikation) bedeutet, dass die Subjunktion immer wahr ist, analog dazu $A \Leftrightarrow B$ (Äquivalenz).

Satz 1.1.

(a) $\wedge, \vee$ *sind kommutativ*

(b) $\wedge, \vee$ *sind assoziativ*

(c) $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

(d) $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

Der Beweis der beiden letzten Beziehungen erfolgt über eine Wahrheitstafel.

Satz 1.2 (De Morgan'sche Gesetze)**.** *Es gilt* $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$ *und* $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$. *Der Beweis erfolgt wiederum über Wahrheitstafel.*

Axiome sind Aussagen, die gemäß Vereinbarung wahr sind. **Lemma**, **Satz**, **Theorem**, **Korollar** bezeichnen wahre Aussagen, die aus den Axiomen hergeleitet werden können. Ein **Beweis** ist eine fehlerfreie Herleitung einer mathematischen Aussage(form), bei der nur Axiome und bereits bewiesene Aussagen verwendet werden. Grundlegende Techniken sind der **direkte Beweis** ($A \Rightarrow B$), der **indirekte Beweis** ($\neg B \Rightarrow \neg A$) und der **Widerspruchsbeweis** ($\neg B \Rightarrow (\neg A \wedge A)$).

Existenz- und Allquantoren: Sei $A(x), x \in I$ Aussageform. Dann bedeuten:

$$\begin{array}{ll} \underset{x\in I}{\forall} A(x) \Leftrightarrow \bigwedge\limits_{x\in I} A(x) & \text{Für alle } x \in I \text{ gilt } A(x). \\ \underset{x\in I}{\exists} A(x) \Leftrightarrow \bigvee\limits_{x\in I} A(x) & \text{Für mindestens ein } x \in I \text{ gilt } A(x). \end{array}$$

Mengen: Eine Menge ist eine Zusammenfassung von unterschiedlichen Objekten, genannt Elemente, zu einem Ganzen.

$$\begin{aligned} m \in M &:\Leftrightarrow m \text{ ist ein Element von } M \\ m \notin M &:\Leftrightarrow m \text{ ist kein Element von } M \end{aligned}$$

Die leere Menge $\emptyset$ enthält kein Element.
Definition durch Aufzählen der Elemente:

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\} \qquad \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Operationen auf Mengen:

$$\begin{aligned} A \subset B &:\Leftrightarrow x \in A \Rightarrow x \in B && \text{(A ist Teilmenge von B)} \\ A = B &:\Leftrightarrow x \in A \Leftrightarrow x \in B && \text{(Mengengleichheit)} \\ A \cap B &:= \{x \in A \mid x \in B\} && \text{(Schnitt von A und B)} \\ A \cup B &:= \{x \mid x \in A \vee x \in B\} && \text{(Vereinigung von A und B)} \\ A \setminus B &:= \{x \in A \mid x \notin B\} && \text{(Differenz von A und B)} \end{aligned}$$

Man sagt A und B sind disjunkt $:\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$. Falls eine Grundmenge X fest steht, dann heißt $A^{\complement} := X \setminus B$ das **Komplement** von A.

Satz 1.3. *Der Schnitt und die Vereinigung von Mengen sind kommutativ und assoziativ.*

Eine Menge $\{A_i \mid i \in I\}$ von Mengen, wobei I eine beliebige Indexmenge sei, nennt man auch Familie von Mengen. Man schreibt $(A_i)_{i \in I}$. Wir definieren

$$\begin{aligned} \bigcup_{i \in I} A_i &:= \{x \mid \exists i \in I : x \in A_i\}, \\ \bigcap_{i \in I} A_i &:= \{x \mid \forall i \in I : x \in A_i\}. \end{aligned}$$

Satz 1.4. *Für beliebige Mengen $B, (A_i)_{i \in I}$ gilt*

(a) $B \setminus \bigcup\limits_{i \in I} A_i = \bigcap\limits_{i \in I} (B \setminus A_i)$

(b) $B \setminus \bigcap\limits_{i \in I} A_i = \bigcup\limits_{i \in I} (B \setminus A_i)$

Die Menge aller Teilmengen einer Menge M heißt **Potenzmenge** von M und wird mit $\mathfrak{P}(M)$ bezeichnet.

1.2 Relationen

Eine (binäre) Relation auf einer Menge M ist eine Teilmenge $\mathcal{R} \subset M \times M$. Sei $(a, b) \in \mathcal{R}$.

$$aRb :\Leftrightarrow (a, b) \in \mathcal{R}$$

Eine Relation R heißt

- **reflexiv**, falls $\forall a \in M : a\mathcal{R}a$

- **symmetrisch**, falls $aRb \Rightarrow b\mathcal{R}a$
- **antisymmetrisch**, falls $a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}a \Rightarrow a = b$
- **transitiv**, falls $a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c \Rightarrow aRc$
- **total**, falls $a\mathcal{R}b \vee b\mathcal{R}a$

Eine Relation $\mathcal{R}$ auf M heißt **Äquivalenzrelation**, falls sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Man schreibt dann meist $a \sim b$ statt $a\mathcal{R}b$. Das heißt

(a) $a \sim b$,

(b) $a \sim b \Rightarrow b \sim a$,

(c) $a \sim b \wedge b \sim c \Rightarrow a \sim c$.

Die Menge $[a] := \{b \in M \mid b \sim a\}$ wird Äquivalenzklasse von A genannt.

Satz 1.5. *Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M. Dann gilt:*

(a) $\forall a, b \in M : [a] = [b] \dot{\vee} [a] \cap [b] = \emptyset$,

(b) $M = \bigcup\limits_{a \in M} [a]$

Beweis.

(a) Seien $a, b \in M$. Annahme: $c \in [a] \cap [b]$. Dann gilt

$$\begin{aligned} &(c \sim a) \wedge (c \sim b) \\ \Rightarrow &(a \sim c) \wedge (c \sim b) \\ \Rightarrow &a \sim b \end{aligned}$$

Sei $c \in [b] \Rightarrow [a] \subset [b]$. Aus den gleichen Gründen ist $[b] \subset [a]$, daraus folgt, dass $[a] = [b]$.

(b) Wegen $a \sim a$ ist $a \in [a]$.

$$M = \bigcup_{a \in M} \{a\} \subset \bigcup_{a \in M} [a] \subset M$$

Somit ist $M = \bigcup\limits_{a \in M} [a]$.

■

Jedes Element $b \in [a]$ heißt Repräsentant der Klasse, dann $[b] = [a]$. Die Menge der Äquivalenzklassen wird mit

$$M/\sim \; := \{[a] \mid a \in M\}$$

bezeichnet und wird auch Quotientenmenge genannt.

Bemerkung. *Man kann eine Äquivalenzrelation auch durch Äquivalenzklassen definieren. Sei $M = \bigcup\limits_{i \in I} E_i$, wobei $E_i \neq \emptyset$ und $E_i \cap E_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Dann wird durch*

$$a \sim b :\Leftrightarrow \exists i \in I : (a \in E_i) \wedge (b \in E_i$$

eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf M definiert. (Beweis: Übung)

Eine Relation $\leq$ auf M heißt **Ordnung** (oder Halbordnung), falls sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist. Wir schreiben dann

(a) $a \leq a$,

(b) $a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b$,

(c) $a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$.

Beispiel.

- $\leq$ definiert eine totale Ordnung auf $\mathbb{R}$. ($<$ ist eine Relation auf $\mathbb{R}$, aber keine Ordnung.)
- $\subset$ definiert eine Ordnung auf $\mathfrak{P}(M)$. Sie ist nicht total, es sei denn M hat weniger als zwei Elemente.
- Ist $\leq$ eine totale Ordnung auf M, dann wird
$$(n_1, m_1) \leq (n_2, m_2) :\Leftrightarrow (n_1, n_2) \vee (n_1 = n_2 \wedge m_1 \leq m_2)$$
eine (totale) Ordnung auf $M \times M$. (Lexikographische Ordnung)

Ist $\leq$ eine Ordnung auf M, so kann man eine Relation $<$ durch
$$a < b :\Leftrightarrow [a \leq b \wedge a \neq b]$$
definieren. Diese Relation ist transitiv (Übung), aber nicht reflexiv, also keine Ordnung. Wir definieren zur Abkürzung
$$b \geq a :\Leftrightarrow a \leq b \text{ und } b > a :\Leftrightarrow a < b.$$
Ist $\leq$ eine totale Ordnung auf M, dann gilt für jedes Paar $(a, b) \in M \times M$ genau eine der Relationen.
$$a < b,\ a = b \text{ oder } a > b \text{ Trichotomie-Satz}$$
Beweis. Sei $(a, b) \in M \times M$. Dann gilt $a \leq b$ oder $b \leq a$ (Totalität von $\leq$). Also $a < b$, $a = b$ oder $a > b$. Per Definition von $<$ sind $(a < b \wedge a = b) \wedge (a = b \wedge b < a)$ nicht möglich. Falls $a < b \wedge b < a$, dann gilt wegen der Transitivität
$$\begin{aligned} &(a \leq b) \wedge (b \leq a) \wedge (a \neq b) \\ \Rightarrow &(a = b) \wedge (a \neq b). \text{ Widerspruch!} \end{aligned}$$
■

1.3 Abbildungen

Seien A, B beliebige Mengen. Eine Abbildung von A nach B
$$f \colon A \to B$$
ist eine Vorschrift, welche jedem Element $a \in A$ genau ein $b \in B$ zuordnet. Man schreibt $b = f(a)$ oder $f : a \mapsto b$.
Alternativ: Eine Abbildung von A nach B ist eine Teilmenge $\Gamma \subset A \times B$ mit der Eigenschaft
$$\forall a \in A \exists^! b \in B : (a, b) \in \Gamma.$$
Der Zusammenhang zwischen beiden Definitionen wird hergestellt durch
$$(a, b) \in \Gamma \Leftrightarrow b = f(a).$$
Wir schreiben $\Gamma(f) := \{(a, b) | a \in A, b = f(a)\}$. Das ist der Graph von f.

f	Name der Abbildung
$f(a)$	Das Bild von a
A	Definitionsmenge
B	Bildbereich
$f(A) := \{f(a) \mid a \in A\}$	Das Bild von A unter f
$f^{-1}(B) := \{a \in A \mid f(a) \in B\}$	Das Urbild von B

Bemerkung.

- *Ein Punkt $b \in B$ kann mehr als ein, eines oder gar kein Urbild haben.*
- *Für zwei Abbildungen $f\colon A \to B$, $g\colon C \to D$ gilt:*

$$f = g :\Leftrightarrow A = C \wedge B = D \wedge \forall a \in A = C f(a) = g(a).$$

- *Abbildungen in einem Zahlenbereich, das heißt $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$ heißen in der Regel Funktion.*

Einige Abbildungen:

1. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, x \mapsto [x]$ (Gauß-Klammern).
2. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 + y^2$
   $\Gamma(f)$ ist eine Rotationsparaboloid $\subset \mathbb{R}^3$
3. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (\cos t, \sin t)$
   $\Gamma(f)$ heißt Schraubenlinie.

Standard-Abbildungen:

1. $\mathrm{id}_A\colon A \to A, a \mapsto a$
2. Ist $M \subset A$, dann heißt

$$\chi\colon A \to \{0, 1\} \qquad \chi(a) = \begin{cases} 1, & a \in M \\ 0, & a \notin M \end{cases}$$

   charakteristische Funktion von M.
3. Ist $f\colon A \to B$ und $M \subset A$, dann ist $f \restriction M := f|_M$ die Einschränkung von f auf M. Das ist die Abbildung $f|_M : M \to B, a \mapsto f(a)$.
4. Eine Abbildung $f : \{1, \ldots n\} \to X$ heißt n-Tupel. Sie ist vollständig beschrieben durch die Bildpunkte $(x_1, \ldots x_n), x_k = f(k) \in x_n$. D. h. man kann X^n auffassen als die Menge aller Abbildungen von $\{1, \ldots n\}$ nach X.
5. Eine Abbildung von $f\colon \mathbb{N} \to X$, X beliebig, heißt Folge in X. Man schreibt f_k statt $f(k)$ und statt $f : \mathbb{N} \to X$ schreibt man in der Regel $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $(f_k)_{k \geq 1}$, $(f_k), (f_1, f_2, \ldots)$. Ein Beispiel ist die Fibonacci-Folge: $(1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots)$.

Komposition von Abbildungen: Die Komposition / Verknüpfung / Zusammensetzung von zwei Abbildungen

$$f\colon A \to B \text{ und } g : B \to C$$

ist die Abbildung

$$g \circ f\colon A \to C, a \mapsto (g \circ f)(a) := g(f(a))$$

Beispiel. $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ ist die Verknüpfung von

$$f\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x} \quad \text{und} \quad g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin x$$

Dann ist $g \circ f = h$.

Satz 1.6. *Die Verknüpfung von Abbildungen ist assoziativ. Seien $f : A \to B$, $g : B \to C$ und $h : C \to D$ Abbildungen. Dann gilt*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Beweis. Behauptung: $\forall a \in A : (h \circ (g \circ f))(a) = ((h \circ g) \circ f)(a)$. Sei $a \in A$.

$$\begin{aligned} (h \circ (g \circ f))(a) &= h((g \circ f)(a)) \\ &= h(g(f(a))) \quad (1) \\ ((h \circ g) \circ f)(a) &= (h \circ g)(f(a)) \\ &= h(g(f(a))) \quad (2) \end{aligned}$$

Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. ■

Injektiv, Surjektiv, Bijektiv: Eine Abbildung $f\colon A \to B$ heißt **injektiv** (engl. one-to-one), falls

$$\forall a, b \in A : f(a) = f(b) \Rightarrow a = b \text{ bzw. } \forall a, b \in A : a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$$

Für injektive Abbildungen ist auch die Schreibweise

$$f\colon A \hookrightarrow B$$

gebräuchlich. f heißt **surjektiv** (engl. onto), falls $f(A) = B$, also:

$$\forall b \in B \exists a \in A : f(a) = b.$$

Eine surjektive Abbildung wird auch mit

$$f\colon A \twoheadrightarrow B$$

bezeichnet. Schließlich heißt sie **bijektiv**, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

Bemerkung.

1. *Man kann jede Abbildung surjektiv machen, durch die Wahl des neuen Bildbereichs, d. h. man definiert $\tilde{f}\colon A \to f(A), x \mapsto f(x)$.*

2. *Man kann jede Abbildung injektiv machen, indem man definiert*

$$a_1 \sim a_2 :\Leftrightarrow f(a_1) = f(a_2)$$

Dann ist $\tilde{f} : A/\sim \to B, [a] \mapsto f(a)$ injektiv.

Ist $f\colon A\to B$ bijektiv, so kann man die Umkehrabbildung $f^{-1}\colon B\to A$ definieren.

$$f^{-1}(b)=a :\Leftrightarrow f(a)=b$$

Es gilt dann: $f^{-1}\circ f=\mathrm{id}_A$, $f\circ f^{-1}=\mathrm{id}_B$ und $\Gamma(f^{-1})=\{(b,a)\mid (a,b)\in\Gamma(f)\}$

Satz 1.7. *Für jede Abbildung $f\colon A\to B$ gilt*

*(a) f ist injektiv $\Leftrightarrow \exists g : B\to A$ mit $g\circ f=\mathrm{id}_B$ (**Linksinverse**)*

*(b) f ist surjektiv $\Leftrightarrow \exists h : B\to A$ mit $f\circ h=\mathrm{id}_A$ (**Rechtsinverse**)*

(c) f ist bijektiv $\Leftrightarrow \exists g,h : B\to A$ mit $g\circ f=\mathrm{id}_B$ und $f\circ h=\mathrm{id}_A$. Dann gilt $g=h=f^{-1}$.

Beweis.

(a) Falls $g\circ f=\mathrm{id}_A$ und $a_1,a_2\in A$ mit $f(a_1)=f(a_2)$.

$$a_2=\mathrm{id}_A(a_2)=(g\circ f)(a_2)=g(f(a_2))=g(f(a_1))=(g\circ f)(a_1)=\mathrm{id}_A(a_1)=a_1$$

Umgekehrt, ist $f : A\to B$ injektiv, dann ist $\widetilde{f} : A\to f(A)$ mit $\widetilde{f}(a)=f(a)$ bijektiv. Also definieren wir $g : B\to A$ durch

$$g(b)=\begin{cases}\widetilde{f}(b), & \text{wenn } b\in f(A)\\ a_0, & \text{wenn } b\notin f(A),\ a_0 \text{ beliebig}\end{cases}$$

Dann gilt $\forall a\in A :$

$$g(f(a))=g(\widetilde{f}(a))=\widetilde{f}^{-1}(\widetilde{f}(a))=a$$

also $g\circ f=\mathrm{id}_A$.

(b) **„$\Leftarrow$“:** Aus $f\circ h=\mathrm{id}_B$ folgt:

$$\forall b\in B : f(h(b))=\mathrm{id}_B(b)=b$$

Somit ist f surjektiv.
„$\Rightarrow$“: Sei jetzt $f : A\to B$ surjektiv, dann gilt für $b\in B$, dass

$$A_b=\{a\in A\mid f(a)=b\}\neq\emptyset.$$

Zu jedem $b\in B$ wählen (Auswahl-Axiom!) wir ein $a\in A_b$. Das definiert eine Abbildung

$$h : B\to A, b\mapsto a\in A_b$$

mit der Eigenschaft $f(h(b))=b$. Also $f\circ h=\mathrm{id}_B$.

(c) Falls $f : A\to B$ bijektiv, dann ist $h=f^{-1}$ und $g=f^{-1}$ eine Wahl, welche die Anforderungen erfüllt. Umgekehrt, wenn

$$\mathrm{id}_A=g\circ f \text{ und } f\circ h=\mathrm{id}_B,$$

dann ist f bijektiv ((a), (b)) und

$$h=\mathrm{id}_A\circ h=(g\circ f)\circ h=g\circ(f\circ h)=g\circ\mathrm{id}_B=g\Rightarrow h=g$$

■

Beispiel. $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto n+1$. Dann ist f injektiv, aber nicht surjektiv. $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, g(1) = 1, g(n) = n-1$ für $n \geq 2$ ist eine Linksinverse.
$f\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$, $x \mapsto x^2$ ist surjektiv, aber nicht injektiv. Eine mögliche Rechtsinverse ist $g\colon [0,\infty)$, $y \mapsto g(y) = \sqrt{y}$. Es gilt auf jeden Fall

$$f(g(y)) = f(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y$$

also $f \circ g = \mathrm{id}_B$.

Satz 1.8. *Sind $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ bijektiv, so auch $g \circ f\colon A \to C$. Es gilt:*

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Beweis.

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ \underbrace{(g^{-1} \circ g)}_{\mathrm{id}_B} \circ f = \mathrm{id}_A$$

Ebenso gilt: $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = \mathrm{id}_B$. Sind die Linksinverse und die Rechtsinverse eine Abbildung gleich, so ist die Abbildung bijektiv. ■

Abbildung von Mengen: Sei $f\colon A \to B$, $U \subset A$, $V \subset B$.

$$f(U) := \{f(a) \mid a \in U\} \subset B \text{ und } f^{-1}(V) := \{a \in A \mid f(a) \in V\} \subset U$$

Beispiel. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin x$. Dann ist $f([0,\pi]) = [0,1]$ und $f^{-1}([0,1]) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}[n2\pi, (2n+1)\pi]$.

Satz 1.9. *Sei $f\colon A \to B$, $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von Teilmengen von A und $(N_j)_{j\in J}$ eine Familie von Teilmengen von B. Dann gilt:*

(a) $f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} N_j\right) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(N_j)$

(b) $f^{-1}\left(\bigcap_{j\in J} N_j\right) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(N_j)$

(c) $f\left(\bigcup_{i\in I} M_i\right) = \bigcup_{j\in J} f(M_i)$

(d) $f\left(\bigcap_{i\in I} M_i\right) \subset \bigcap_{j\in J} f(M_i)$

Beweis auf Blatt 2.

2 Reelle Zahlen

Die reellen Zahlen bilden einen archimedisch angeordneten vollständigen Körper.

2.1 Körperaxiome

Ein Körper (engl. field) ist eine Menge $\mathbb{K} \neq \emptyset$ mit zwei Abbildungen

$$+ \colon \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K},\ (a,b) \mapsto a+b$$
$$\cdot \colon \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K},\ (a,b) \mapsto a \cdot b$$

welche folgende Eigenschaften erfüllen.

(A1) Addition ist assoziativ und kommutativ.

$$\forall a,b,c \in \mathbb{K} : a + (b+c) = (a+b) + c \text{ und } a+b = b+a$$

(A2) Es gibt ein neutrales Element bezüglich der Addition, genannt Null ($0 \in \mathbb{K}$).

$$\forall a \in \mathbb{K} : 0 + a = a$$

(A3) Zu jedem a im Körper gibt es ein $b \in \mathbb{K}$ mit $a + b = 0$ (Inverse bezüglich Addition).

(M1) Die Multiplikation ist assoziativ und kommutativ.

(M2) Es gibt $1 \in \mathbb{K} \backslash \{0\} : 1 \cdot a = a$. (Einselement)

(M3) Für jedes Element $a \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$ gibt es ein $b \in \mathbb{K} : a \cdot b = 1$. b heißt Inverse bezüglich Multiplikation.

(D) Distributivgesetz: $\forall a,b,c \in K : a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Beispiel.

1. Der kleinste Körper ist $\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$ mit:

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

2. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sind Körper.

3. $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}$ sind keine Körper.

Bemerkung. *Die neutralen Elemente bezüglich Addition und Multiplikation sind eindeutig.*

$$0' = 0 + 0' = 0$$

Die Inversenelemente bezüglich Addition und Multiplikation sind ebenfalls eindeutig.

Man schreibt, wie gewohnt, $-a$ für das additive Inverse von a und man schreibt a^{-1} für das multiplikative Inverse. Außerdem setzt man $a - b := a + (-b)$.

Satz 2.1. *In einem Körper* $\mathbb{K}$ *gilt:*

(a) $a + x = b$ *eindeutig lösbar durch* $x = b - a$

(b) $ax = b$*,* $a \neq 0$ *eindeutig lösbar durch* $x = \frac{b}{a}$

Beweis.

(a)

$$\begin{aligned} x &= x + 0 = x + (a - a) \\ &= (a + x) - a \\ &= b - a \end{aligned}$$

Umgekehrt, falls $x = b - a$, dann

$$\begin{aligned} a + x &= a + (b - a) \\ &= (b - a) + a \\ &= b + (-a + a) \\ &= b + 0 = b \end{aligned}$$

(b) Übung.

■

Satz 2.2. *In jedem Körper* $\mathbb{K}$ *gilt:*

(a) $-(-a) = a$ *und* $(a^{-1})^{-1} = a$*.*

(b) $-a + (-b) = -(a + b)$ *und* $a^{-1} \cdot b^{-1} = (ab)^{-1}$

(c) $a \cdot 0 = 0$ *und* $a \cdot (-1) = -a$

(d) $(-1) \cdot (-1) = 1$ *und* $(-a)^{-1} = -(a^{-1})$

(e) $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$

Beweis.

(a) $(-a) + a = 0 \Rightarrow a = -(-a)$ und $(a^{-1}) \cdot a = 1 \Rightarrow a = (a^{-1})^{-1}$

(b)

$$\begin{aligned} &(-a + (-b)) + (a + b) \\ &= (-a + (-b)) + (b + a) \\ &= (-a + (-b) + b) + a \\ &= -a + a = 0 \\ &\Rightarrow (-a) + (-b) = -(a + b) \end{aligned}$$

(c) $a \cdot 0 + a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 \Rightarrow a \cdot 0 = (a \cdot 0) - (a \cdot 0) = 0.$
$a \cdot (-1) + a = a \cdot (-1) + a \cdot 1 = a \cdot (-1 + 1) = 0$

(d) $(-1) \cdot (-1) = -(-1) = 1$

(e) Falls $a, b \neq 0$: $(a \cdot b) \cdot (b^{-1} \cdot a^{-1}) = 1 \Rightarrow a \cdot b \neq 0$

Der Rest ist Übung. ■

Statt $a \cdot b$ schreibt man auch ab.

Folgerung. $b, d \neq 0$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \ \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \ \frac{ab^{-1}}{cd^{-1}} = \frac{ad}{bc} \ (c \neq 0)$$

Beweis. Übung.

Beispiel (Der Körper der komplexen Zahlen)**.**

$$\begin{aligned} +&: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \ ((a,b),(c,d)) \mapsto (a+d, b+d) \\ \cdot&: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \ ((a,b),(c,d)) \mapsto (ac - bd, ad + bc) \end{aligned}$$

$\mathbb{R}^2$ versehen mit $+, \cdot$ wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet. Die Elemente von $\mathbb{C}$ heißen komplexe Zahlen.

Satz 2.3. $\mathbb{C}$ *ist ein Körper.*

Beweis.

- $(0,0)$ ist neutrales Element bezüglich Addition.
- $(1,0)$ ist neutrales Element bezüglich Multiplikation.
- Die Inversen sind $-(a,b) = (-a,-b)$ und $(a,b)^{-1} = (\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2})$.

Beweis der Körperaxiome ist Übung auf Blatt 3. ■

Die Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $a \mapsto (a,0)$ ist injektiv. $(a,0)+(c,0) = (a+c,0)$ und $(a,0)\cdot(c,0) = (ac,0)$. Daher können wir $\mathbb{R}$ mit $\mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{C}$ identifizieren. Man schreibt a statt $(a,0)$ und $\mathrm{i} := (0,1)$. Dann gilt $(a,b) = a + \mathrm{i}b$ und $\mathrm{i}^2 = -1$. a wird Realteil und b Imaginärteil von $a + \mathrm{i}b$ genannt.

Rekonstruktion des Multiplikationsgesetzes:

$$\begin{aligned} (a + \mathrm{i}b) \cdot (c + \mathrm{i}d) &= ac + \mathrm{i}ad + \mathrm{i}bc + \mathrm{i}b\mathrm{i}d \\ &= ac + \mathrm{i}(ad + bc) - bd \\ &= ac - bd + \mathrm{i}(ad + bc) \end{aligned}$$

2.2 Die Anordnung der reellen Zahlen

Ein Körper $\mathbb{K}$ heißt **angeordnet**, wenn eine Ordnung $\leq$ auf der Menge $\mathbb{K}$ gegeben ist, welche **total** ist und mit der Körperstruktur verträglich ist. D. h. $\forall a, b, c \in \mathbb{K}$:

(O1) $a < b \Rightarrow a + c < b + c$

(O2) $a > 0, b > 0 \Rightarrow a \cdot b > 0$

In einem angeordneten Körper $\mathbb{K}$ gilt die **Trichotomie**. Ein Element $a \in \mathbb{K}$ heißt positiv (negativ), wenn $a > 0$ $(a < 0)$.

Satz 2.4. *In einem angeordneten Körper gelten folgende Rechenregeln:*

1. $a > 0 \wedge b > 0 \Rightarrow a + b > 0$
2. $a < b \Leftrightarrow b - a > 0$
3. $a < b \Rightarrow -a > -b$
4. $a < b \wedge c > 0 \Rightarrow ac < bc$ *und* $a < b \wedge c < 0 \Rightarrow ac > bc$
5. $a > 0 \wedge b < 0 \Rightarrow a \cdot b < 0$
6. $a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$. *Insbesondere* $1 > 0$.
7. $a > 0 \Rightarrow a^{-1} > 0$ *und* $a < 0 \Rightarrow a^{-1} < 0$
8. $0 < a < b \Rightarrow \frac{a}{b} < 1 < \frac{b}{a},\ \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$
9. $a < b \wedge 0 < \lambda < 1$, *dann* $a < \lambda a + (1 - \lambda)b < b$

Beweis.

1. $a > 0 \wedge b > 0 \overset{O1}{\Rightarrow} a + b > b > 0 \overset{\text{Transitiv}}{\Rightarrow} a + b > 0$
2. $a < b \Rightarrow 0 = a - a < b - a$ und $b - a > 0 \Rightarrow b - a + a > 0 + a \Rightarrow b > a$
3. $a < b \Rightarrow b - a > 0 \Rightarrow b - a - b > 0 - b \Rightarrow -a > -b$
4. $a < b$ und $c > 0 : b - a > 0 \wedge c > 0 \Rightarrow c(b - a) > 0 \Rightarrow cb - ca > 0 \Rightarrow ac > bc$
   $a < b$ und $c < 0 \Rightarrow ca > cb$ (Übung).
5. $a > 0$ und $b < 0 \Rightarrow ab < 0$ folgt aus 4.
6. $a \neq 0 : a > 0$ oder $a < 0 \Rightarrow a > 0$ oder $-a > 0 \Rightarrow a^2 \overset{O2}{>} 0$ und $a^2 = (-a)^2 \overset{O1}{>} 0$
7. Sei $a > 0$. Dann $a^{-1} > 0$ oder $a^{-1} < 0$. Falls $a^{-1} > 0$, dann $a \cdot a^{-1} = 1 < 0$. Widerspruch zu $1 > 0$ (6.).
8. Übung.
9. Übung. Hinweis: $\lambda a + (1 - \lambda)b = a + (1 - \lambda)(b - a)$.

■

Folgerung. $\mathbb{C}$ *lässt nicht anordnen, denn* $i^2 = -1 < 0$. *Widerspruch zu* $i^2 > 0$.

Definition. In jedem angeordneten Körper ist der Betrag $|a|$ von $a \in \mathbb{K}$ definiert durch

$$|a| = \begin{cases} a & \text{, wenn } a \geq 0 \\ -a & \text{, wenn } a < 0 \end{cases}.$$

Satz 2.5.

1. $|a| \geq 0$ *und* $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$.
2. $|-a| = |a|$ *und* $|-a| \leq a \leq |a|$

3. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
4. $|a + b| \leq |a| + |b|$
5. $||a| - |b|| \leq |a - b|$

Beweis.

1. Durch Fallunterscheidung:

$$
\begin{aligned}
a > 0 &\Rightarrow |a| = a > 0 \\
a = 0 &\Rightarrow |a| = a = 0 \\
a < 0 &\Rightarrow |a| = -a > 0
\end{aligned}
$$

   Falls $|a| = 0$, dann $a = 0$ oder $-a = 0$. Also $a = 0$.

2. $a > 0 :\Rightarrow |a| = a = -(-a) = |-a|$. Weiter gilt für $a > 0 : |a| = a > 0 > -a = -|a|$. $a < 0 \Rightarrow |a| = -a = |-a|$ und weiter gilt: $|a| > 0 > a = -|a|$
3. Übung.
4. $a + b \geq 0 \Rightarrow |a + b| = a + b \leq |a| + |b|$
   $a + b < 0 \Rightarrow |a + b| = -(a + b) = -a - b \leq |a| + |b|$
5.

$$
\begin{aligned}
|a| = |(a - b) + b| &\leq |a - b| + |b| \\
\Leftrightarrow |a| - |b| &\leq |a - b| \\
a \leftrightarrow b, \text{ dann folgt:} & \\
|b| - |a| &\leq |b - a| = |a - b| \\
\text{Also: } \pm (|a| - |b|) &\leq |a - b| \\
\Rightarrow ||a| - |b|| &\leq |a - b|
\end{aligned}
$$

■

Erweiterte Zahlengerade und Intervalle: Man definiert $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, wobei gemäß Vereinbarung $\forall x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty$. Man kann auch Addition und Multiplikation auf $\overline{\mathbb{R}}$ ausdehnen, aber $\overline{\mathbb{R}}$ wird dadurch nicht zu einem Körper und $\pm\infty \notin \mathbb{R}$.
Eine Teilmenge $I \in \mathbb{R}$ heißt Intervall, wenn für alle $\forall a, b \in I : a \leq c \leq b \Rightarrow c \in I$ gilt. Es gibt

- Abgeschlossene Intervalle (auch kompakte Intervalle genannt):

  $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

- Halboffene Intervalle:

  $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
  $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

- Offene Intervalle:

$$(a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

- Unbeschränkte Intervalle:

$$\begin{aligned}
(-\infty, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\} \\
[a, +\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\} \\
(-\infty, b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\} \\
(a, +\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} \\
(-\infty, +\infty) &:= \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Auch $\emptyset \subset \mathbb{R}$ ist ein Intervall und $\{a\} = [a, a]$ ist auch ein Intervall.

2.3 Natürliche Zahlen, Induktion und Rekursion

Eine Teilmenge M von $\mathbb{R}$ heißt **induktiv**, falls $1 \in M$ und $m \in M \Rightarrow m+1 \in M$. Beispielsweise sind $\mathbb{R}, [a, \infty), \mathbb{Q}, \ldots$ induktiv. Man definiert $\mathbb{N}$ als die kleinste induktive Teilmenge von $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{N} := \bigcap_{\substack{M \subset \mathbb{R} \\ M \text{ ist induktiv}}}$$

$\mathbb{N}$ ist induktiv, denn $1 \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N} \Rightarrow m + 1 \in \mathbb{N}$.

Satz 2.6 (Induktionsprinzip)**.** *Falls $M \subset \mathbb{N}$ mit $1 \in M$ und $n \in M \implies n + 1 \in M$, dann $M = \mathbb{N}$.*

Beweis. Nach Annahme ist M induktiv, d. h. $M \supset \mathbb{N}$. Da $M \subset \mathbb{N}$ folgt $M = \mathbb{N}$. ■

Satz 2.7 (Prinzip der vollständigen Induktion)**.** *Sei $A(n)$ eine Aussageform, welche für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert ist und*

1. *$A(1)$ sei wahr (Induktionsverankerung)*
2. *$A(n) \Rightarrow A(n+1)$ (Induktionsschritt)*

Dann ist $A(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$. Beweis folgt aus dem Induktionsprinzip, denn $M = \{n | A(n)\} \subset \mathbb{N}$ ist induktiv. In der Tat $1 \in M$ und $n \in M \Rightarrow n + 1 \in M$. Somit ist $M = \mathbb{N}$, dann ist $A(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$.

Satz 2.8. $\forall n, m \in \mathbb{N}$:

(a) $n \geq 1$

(b) $n + m \in \mathbb{N}$ *und* $n \cdot m \in \mathbb{N}$

(c) $n = 1 \vee n - 1 \in \mathbb{N}$

(d) $m < n \Rightarrow n - m \in \mathbb{N}$

(e) $n < m \leq n + 1 \Rightarrow m = n + 1$

Beweis.

(a) $A(n) = n \leq 1$.
Induktionsverankerung: $A(1) : 1 \leq 1$ ist wahr.
Induktionsannahme: Gelte $A(n)$ für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$.
Induktionsschritt (Beweis von $A(n+1)$):

$$n \geq 1 \Rightarrow n + 1 \geq 1 + 1 > 1 + 0 = 1$$

(b) $n + m \in \mathbb{N}$: Sei $m \in \mathbb{N}$ fest.
Induktionsverankerung: $A(n) : 1 + m \in \mathbb{N}$
Induktionsannahme: $n + m \in \mathbb{N}$ für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$.
Induktionsschritt:

$$(n+1) + m = \underbrace{(n+m)}_{n \in \mathbb{N}} + 1 \quad \underbrace{\in \mathbb{N}}_{\mathbb{N} \text{ ist induktiv}}$$

Analog beweise man $n \cdot m \in \mathbb{N}$.

(c) $A(n) : n = 1 \vee n - 1 \in \mathbb{N}$.
Induktionsverankerung: $A(1) : 1 = 1 \vee 1 - 1 \in \mathbb{N}$ ist wahr.
Induktionsannahme: $n = 1 \vee (n-1) \in \mathbb{N}$.
Induktionsschritt:
Sei $n = 1 \Rightarrow (n+1) - 1 = n = 1 \in \mathbb{N}$.
Sei $n - 1 \in \mathbb{N}$. Dann ist $(n+1) - 1 = (n-1) + 1 \in \mathbb{N}$. Das heißt, es gilt $A(n+1)$.

(d) Übung.

(e) Übung.

■

Satz 2.9 (Wohlordnungsprinzip). *Jede nichtleere Teilmenge $M \subset \mathbb{N}$ hat ein kleinstes Element. D. h. es existiert eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ mit $\forall k \in M : m \leq k$.*

Beweis. Sei $U \subset \mathbb{N}$ die Menge der unteren Schranken von M. D.h.

$$U := \{n \in \mathbb{N} | \forall k \in M : n \leq k\}$$

Annahme: $U \cap M = \emptyset$.
Wir zeigen $M = \emptyset$ im Widerspruch zur Annahme, dass $M \neq \emptyset$.
$1 \in U$, denn $n \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (Verankerung). Wenn $n \in U$, dann ist $n \notin M$, also $n < k$ für alle $k \in M$, da $U \cap M = \emptyset$. Also ist $k - n \in \mathbb{N}$ und damit $k - n \geq 1$. D. h. $k \geq n + 1$ für alle $k \in M$. Somit ist $n + 1 \in U$. D. h. U ist induktiv und daher $U = \mathbb{N}$, also ist $M = \emptyset$. Widerspruch zu $M \neq \emptyset$. ■

Satz 2.10 (Bernoullische Ungleichung). *$\forall x > -1, n \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

Beweis. I.-Verankerung: $A(1) : 1 + x \geq 1 + x$ ist wahr.
I.-Annahme: Gelte $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$ und ein $x > -1$.
I.-Schritt: Sei $x \geq -1$. Dann ist

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n \cdot (1+x) \geq (1+nx)(1+x) \\ &= 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x\end{aligned}$$

■

Satz 2.11. *Sei $A(n)$ eine Aussage, die für alle natürlichen Zahlen definiert ist und gilt*

1. *$A(1)$ ist wahr*
2. *$\forall n \in \mathbb{N} : A(1) \wedge A(2) \wedge \ldots \wedge A(n) \Rightarrow A(n+1)$*

Dann gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Die Menge $M = \{n \in \mathbb{N} | A(1) \wedge \ldots \wedge A(n)\}$ enthält $n = 1$ und $n \in M \Rightarrow (A(1) \wedge \ldots \wedge A(n))$. Aus 2) folgt $A(n+1)$ gilt und somit gilt $(A(1) \wedge \ldots \wedge A(n)$, d. h. $n+1 \in M$. Aus dem Induktionsprinzip folgt $M = \mathbb{N}$. ∎

Bemerkung. *Man kann die Verankerung bei einem beliebigen Punkt $n_0 \in \mathbb{Z}$ machen. $\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0$ macht man den Schritt. Dann folgt die Aussage für alle $n \geq n_0$.*

Rekursion: Ein typisches Beispiel einer rekursiv definierten Folge ist die wohlbekannte Fibonacci-Folge.

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = 1, \qquad a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$

Die Summen- und Produktzeichen:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \ldots + a_n \qquad \prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$$

werden (genauer!) definiert durch

$$\sum_{k=1}^{1} a_k = a_1, \qquad \sum_{k=1}^{n+1} a_k := \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) + a_{n+1}$$

$$\prod_{k=1}^{1} a_k = a_1, \qquad \prod_{k=1}^{n+1} a_k := \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) + a_{n+1}$$

Insbesondere: $a^{n+1} = a^n \cdot a, \qquad a^0 := 1$, auch $0^0 := 1$

Satz 2.12. *In jedem Körper gilt:*

(a) $\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum\limits_{k=1}^{n} b_k = \sum\limits_{k=1}^{n} (a_k + b_k)$

(b) $\lambda \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda a_k$

(c) $\left(\prod\limits_{\ell=1}^{n} a_\ell\right) \left(\prod\limits_{k=1}^{n} a_k\right) = \left(\prod\limits_{\ell=1}^{n} a_\ell b_\ell\right)$

(d) $\left(\sum\limits_{\ell=1}^{n} a_\ell\right) \left(\sum\limits_{k=1}^{m} b_k\right) = \sum\limits_{\ell=1}^{n} \left(\sum\limits_{k=1}^{m} a_\ell b_k\right) = \left(\sum\limits_{k=1,\ell=1}^{n,m} a_\ell b_k\right)$

Die **Existenz und Eindeutigkeit einer rekursiv definierten Folge** beweist man per Induktion (Analysis 1, Amann & Escher, Kap. I.5).

Binomialkoeffizient und Fakultät: Die Fakultät $n!$ von $n \in \mathbb{N}_0$ ist definiert durch $n! = n(n-1)!$ und $1! = 0! = 1$. Es gibt $n!$ bijektive Abbildungen von $\{1, \dots, n\}$ auf sich (Bspw. Mächtigkeit der symmetrischen Gruppe). Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$ definiert man:

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$$

Außerdem gilt: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ und $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ und man rechnet leicht nach, dass

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

Eine Menge A hat n Elemente, wenn eine bijektive Abbildung

$$\Phi \colon A \to \{1, \dots, n\}$$

gibt.

Satz 2.13. *Es gibt $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, aus einer n-elementigen Menge eine k-elementige Teilmenge auszuwählen (engl. n choose k). Beweis per Induktion (Vortragsübung).*

Satz 2.14. *Für beliebige reelle oder komplexe Zahlen z, w gilt, dass*

$$(z+w)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^n w^{n-k}$$

Beweis. per Induktion (Vortragsübung). Es gibt $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten beim Ausmultiplizieren von $(z+w)(z+w)\dots(z+w)$ den Faktor z k-mal auszuwählen. ∎

Für $z = w = 1$ bekommen wir

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Das ist die Anzahl aller verschiedenen Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$. Also $|\mathfrak{P}(\{1, \dots, n\})| = 2^n$. Seien z, w reell oder komplex und $n \in \mathbb{N}$.

$$z^{n+1} - w^{n+1} = (z-w) \sum_{k=0}^{n} z^k w^{n-k}$$

Beweis durch Ausmultiplizieren der rechten Seite.

2.4 Archimedisches Axiom

In jedem angeordneten Körper $\mathbb{K}$ kann man natürliche Zahlen einführen

$$0 < 1 < 2 < 3 < 4 < \dots$$

$\mathbb{K}$ heißt archimedisch angeordnet, wenn es zu jedem $x \in \mathbb{K}$ eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ gibt mit der Eigenschaft, dass

$$n > x.$$

Es gibt angeordnete Körper, die nicht archimedisch angeordnet sind.

Axiom: $\mathbb{R}$ ist archimedisch angeordnet.

Folgerung.

1. *Für alle positiven reellen Zahlen x und y gibt es eine natürliche Zahl n mit $nx > y$, denn es existiert ein n mit $n > \frac{y}{x} \Leftrightarrow nx > y$*

2. *Zu jedem $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon \in \mathbb{R}^+ := (0, \infty)$) gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$.*

   Beweis. Denn nach dem archimedischen Axiom existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \varepsilon > \frac{1}{n}$. ■

Satz 2.15. *Sei $a > 0$ reell. Dann gilt:*

(a) $a > 1$, dann gibt es zu jedem $K \in \mathbb{R}$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a^n > K$.

(b) $0 < a < 1$, $\varepsilon > 0$, dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a^n < \varepsilon$.

Beweis.

(a) Sei $a > 1$ und $x = a - 1 > 0$. Dann ist nach Bernoulli und dem Archimedischen Axiom:

$$a^n = (1 + x)^n \geq 1 + nx > K$$

für $n \in \mathbb{N}$ groß genug.

(b) Sei $b = \frac{1}{a} > 1$. Nach a) existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $b^n > \frac{1}{\varepsilon}$. ($\varepsilon$ spielt die Rolle von K). D. h.

$$a^n = \left(\frac{1}{b}\right)^n = \frac{1}{b^n} < \varepsilon$$

■

2.5 Ganze und rationale Zahlen

$$\mathbb{Z} := \{m - n \mid m, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$$
$$\mathbb{Q} := \left\{\frac{m}{n} \;\middle|\; m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\} \subset \mathbb{R}$$

$\mathbb{Z}$ ist ein kommutativer Ring mit Eins (d.h. alle Körperaxiome außer M3 sind erfüllt). $\mathbb{Q}$ ist ein angeordneter Körper.
$M \subset \mathbb{Z}$ heißt nach unten bzw. oben beschränkt, falls ein $n \in \mathbb{Z}$ existiert mit $n \leq m$ für alle $m \in M$ bzw. $m \leq n$ für alle $m \in M$.

Satz 2.16. *Jede nichtleere Teilmenge und nach unten/oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{Z}$ hat ein Minimum/Maximum.*

Beweis. Übung auf Blatt 4. ■

Die Gauß-Klammer

$$[\,\cdot\,] \colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$$

ist definiert durch $[x] := \max\{n \in \mathbb{Z} | n \leq x\}$. Dann gilt $[x] \in \mathbb{Z}$ und $[x] \leq x < [x] + 1$.

Satz 2.17 (Division mit Rest). *Sei $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $q \in \mathbb{Z}$, $r \in \{0, \dots, n-1\} \subset \mathbb{N}$ mit $m = qn + r$, wobei $q = [\frac{m}{n}]$.*

Beweis. Sei $q := [\frac{m}{n}]$. Dann wissen wir, dass $q \leq \frac{m}{n} < q + 1$. Also

$$nq \leq m < nq + n \Rightarrow 0 \leq m - nq < n$$

mit $r = m - nq$ gilt also $m = nq + r$, wobei $0 \leq r \leq n-1$, $r \in \mathbb{N}$. Beweis der Eindeutigkeit mit Widerspruch ist Übung. ■

Satz 2.18. *Zu jedem Paar $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gibt es ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $a < q < b$. Man sagt, $\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$.*

Beweis. Da $b - a > 0$, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < (b - a)$.

$$\begin{aligned} m :=& \min\left\{k \in \mathbb{Z} \;\middle|\; \frac{k}{n} > a\right\} \\ =& \min\{k \in \mathbb{Z} \mid k > na\} \end{aligned}$$

m existiert nach Satz 2.16.

$$\frac{m}{n} > a \wedge \frac{m-1}{n} \leq a \Rightarrow a < \frac{m}{n} \wedge \frac{m}{n} \leq a + \frac{1}{n} < b$$

Somit ist $a < \frac{m}{n} < b$ ■

2.6 Vollständigkeit

Definition. Eine Intervallschachtelung ist eine Folge

$$(I_n)_{n \geq 1}$$

von abgeschlossenen Intervallen $I_n = [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft:

1. $I_n \supset I_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$
2. $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N}$ mit $|I_n| := b_n - a_n < \varepsilon$

Vollständigkeitsaxiom: Zu jeder Intervallschachtelung (I_n) gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ mit

$$\bigcap_{n \geq 1} I_n = \{x\}$$

$\mathbb{Q}$ ist nicht vollständig.

Satz 2.19. *(Existenz der Wurzel) Zu jeder reellen Zahl $a > 0$ gibt es genau ein $x > 0$ mit $x^2 = a$. $\sqrt{2}$ ist irrational, also kann $\mathbb{Q}$ nicht vollständig sein.*

Beweis. Eindeutigkeit folgt aus Aufgabe 3.5 a).

$${x_1}^2 = {x_2}^2 \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ für } x_1, x_2 > 0$$

Existenz: Wir nehmen an: $a > 1$. Außerdem ist $\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a}}} = \sqrt{a}$. Wir konstruieren rekursiv eine Intervallschachtelung $(I_n)_{n \geq 1}$ mit $I_n = [a_n, b_n]$ und

1. ${a_n}^2 < x \leq {b_n}^2$

2. $|I_{n+1}| = \frac{|I_n|}{2}$

Wir setzen $a_1 = 1$, $b_1 = x$ und wenn $m = \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$, dann definieren wir

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] = \begin{cases} [a_n, m], \text{ wenn } m^2 \geq x \\ [m, b_n], \text{ wenn } m^2 < x \end{cases}$$

Dann sind 1. und 2. erfüllt. $I_{n+1} \subset I_n$ und $|I_n| = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot |I_1|$. Zu $\varepsilon > 0$ existiert nach Satz 2.15 ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|I_n| = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot |I_1| < \varepsilon$.
Aus der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ folgt die Existenz von $t \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} a_n &\leq t \leq b_n \\ \Rightarrow {a_n}^2 &\leq t^2 \leq {b_n}^2 \\ \Rightarrow {a_n}^2 &< x^2 \leq {b_n}^2 \end{aligned}$$

Annahme: $t^2 \neq x$. Dann ist ${b_n}^2 - {a_n}^2 \geq |t^2 - x|$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wähle

$$\frac{|t^2 - x|}{2x} \text{ und } n \in \mathbb{N} \text{ mit } b_n - a_n < \varepsilon$$

Wegen $a_n \leq b_n$ und $b_n \leq b_1 = x$ folgt

$$2x\varepsilon > 2a(b_n - a_n) \geq (b_n + a_n)(b_n - a_n) = {b_n}^2 - {a_n}^2 \geq |t^2 - x| = 2x\varepsilon$$

Widerspruch! Also ist $t^2 = x$. ■

$\sqrt{0} := 0$, $\forall a \in \mathbb{R} : |a| = \sqrt{a^2}$.

Definition. Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ heißt nach oben (unten) beschränkt, wenn $t \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$x \in A \Rightarrow x \leq t \qquad (x \in A \Rightarrow t \leq x)$$

Dann heißt t obere (untere) Schranke von A. A heißt beschränkt, wenn A nach oben und nach unten beschränkt ist. Eine obere (untere) Schranke von A, die in A liegt, heißt Maximum (Minimum) von A. Man schreibt

$$\max A \qquad (\min A)$$

Die kleinste obere (untere) Schranke , wenn sie existiert, heißt Supremum (Infimum) von A. Man schreibt:

$$\sup A \qquad (\inf A)$$

Beispiel.

1. $A := \{q \in \mathbb{Q} \mid 1 \leq q \leq 2\}$
   $\max A = 2 = \sup A$
   $\min A = 1 = \inf A$

2. $A := \{q \in \mathbb{Q} \mid 1 < q < 2\}$
   $\sup A = 2$ und $\inf A = 1$
   $\max A$ und $\min A$ existieren nicht.

3. $A := \{q \in \mathbb{Q} \mid q \leq \sqrt{2}\}$
   $\sup A = \sqrt{2} \notin A$ und $\max A$ existiert nicht.

Allgemein gilt:

1. $\sup A \in A \Leftrightarrow \max A$ existiert und $\sup A = \max A$.
   $\inf A \in A \Leftrightarrow \min A = \inf A$.

2. Falls $t < \sup A$, dann existiert $a \in A, a > t$, sonst wäre t eine obere Schranke von A im Widerspruch zu $t < \sup A$.

3. $A \subset \mathbb{R}$ ist genau dann nach unten beschränkt, wenn $-A := \{-a \mid a \in A\}$ nach oben beschränkt ist und $\inf A = -\sup A$. (Beweis: Vortragsübung).

   Man schreibt $\sup A = \infty$ (und $\inf A = -\infty$), wenn A nicht nach oben (unten) beschränkt ist.

Satz 2.20. *Ist $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ nach oben (oder unten) beschränkt, dann existiert $\sup A \in \mathbb{R}$ (oder $\inf A \in \mathbb{R}$).*

Beweis. Sei $A \neq \emptyset$ nach oben beschränkt. Wir konstruieren eine Intervallschachtelung (I_n) mit $I_n = [a_n, b_n]$, wobei b_n obere Schranke von A und a_n keine obere Schranke von A ist. Wir definieren I_n rekursiv. $I_1 = [a_1, b_1]$ (b_1 beliebige obere Schranke von A) und $a_1 = a - 1$ mit $a \in \mathbb{R}$. Sei I_n konstruiert. Dann definieren wir

$$I_{n+1} := \begin{cases} [a_n, m] & m \text{ ist obere Schranke von } A \\ [m, b_n] & m \text{ ist keine obere Schranke von } A \end{cases}$$

$m := \frac{1}{2}(a_n + b_n)$. Es gilt: $I_{n+1} \subset I_n$ und $|I_n| = \frac{1}{2^{n-1}}|I_n| < \varepsilon$ für alle ε, wenn n groß genug.
Aus dem Vollständigkeitsaxiom folgt, dass ein $s \in \mathbb{R}$ existiert mit $\{s\} = \bigcap\limits_{n \geq 1} I_n$.
Behauptung: s ist obere Schranke von A. Sei $a \in A$ und $a > s$. Dann gilt $b_n \geq a$, da b_n obere Schranke von A ist. Außerdem gilt $s \geq a_n$, denn $s \in [a_n, b_n]$.
Also ist $b_n - a_n \geq a - s > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $\varepsilon = a - s$, dann existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $|I_n| = b_n - a_n < \varepsilon = a - s$. Widerspruch! Somit ist s eine obere Schranke. Nun prüfen wir die Behauptung, dass s die kleinste obere Schranke ist.
Sei $s' < s$ eine obere Schranke. Dann gilt $b_n \geq s$, denn $s \in [a_n, b_n]$ und $a_n \leq s'$, denn a_n ist keine obere Schranke. Also ist $b_n - a_n \geq s - s' > 0$. Sei $\varepsilon = s - s' > 0$. Dann existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $b_n - a_n < \varepsilon = s - s' < b_n - a_n$. Widerspruch! Also ist s die kleinste obere Schranke. ■

Bemerkung. *Aus Satz 2.6.5 folgt das Vollständigkeitsaxiom: Ist $(I_n) = [a_n, b_n]$ eine Intervallschachtelung und $s = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \leq b_1$. Dann ist $\{s\} = \bigcap\limits_{n \geq 1} I_n$.*

(Existenzbeweis von Amann-Escher)

2.7 $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar

Seien A und B Mengen. Dann heißen A, B gleichmächtig, $A \sim B$, wenn es eine bijektive Abbildung $\Phi\colon A \Rightarrow B$ gibt (oder $A = B = \emptyset$).
Eine Menge A heißt endlich, wenn sie gleichmächtig ist wie $\{1, \ldots, n\}$. D. h. wenn

$$A \sim \{1, \ldots, n\}$$

Sie heißt abzählbar, wenn sie endlich oder $A \sim \mathbb{N}$. Überabzählbar heißt sie, wenn sie nicht abzählbar ist.

Beispiel.

$$\{2,4,6,\dots\} \sim \mathbb{N}, \text{ denn } \Phi\colon \mathbb{N} \to \{2,4,6,\dots\}, n \mapsto 2n$$
$$\{1,3,5,\dots\} \sim \mathbb{N}, \text{ denn } \Phi\colon \mathbb{N} \to \{1,3,5,\dots\}, n \mapsto 2n-1$$

$\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}, \Phi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, \Phi(n) := \begin{cases} \frac{n}{2} & n \text{ gerade} \\ \frac{-(n-1)}{2} & n \text{ ungeade} \end{cases}$ ist bijektiv.
$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist abzählbar und $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$. (Diagonallauf durch die Ebene)

Satz 2.21. *Jede Teilmenge einer abzählbaren Menge ist ebenfalls abzählbar.*

Beweis. Sei X abzählbar und $M \subset X$. Falls X endlich, also $X \sim \{1,\dots,n\}$, dann ist auch M endlich (Induktion in n).
Sei X abzählbar unendlich, also $X \sim \mathbb{N}$. O.B.d.A können wir annehmen $X = \mathbb{N}$ und $M \subset \mathbb{N}$. Wenn M endlich ist, ist nichts zu beweisen. Sei also M unendlich. Wir konstruieren

$$\Phi\colon \mathbb{N} \to M \text{ durch } \Phi(1) = \min M \text{ und } \Phi(n+1) = \min\{m \in M \mid m > \Phi(n)\}$$

Es gilt: $\Phi(n+1) \geq \Phi(n) + 1$ und somit $\Phi(n+k) \geq \Phi(n) + k$ für $n, k \in \mathbb{N}$. Also ist Φ injektiv.
Surjektivität:
Sei $m_0 \in M$. Wegen $\Phi(n) \geq n$ existiert $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} \mid \Phi(n) \geq m_0\}$. Es gilt $\Phi(n_0) \geq m_0$ und $\Phi(n_0 - 1) < m_0$. Aber, per Definition von $\Phi(n_0)$

$$\Phi(n_0) = \min\{m \in M \mid m \geq \Phi(n_0 - 1)\} \leq m_0$$

Da auch $\Phi(n_0) \geq m_0$ folgt $\Phi(n_0) = m_0$ und somit ist Φ surjektiv. ■

Satz 2.22.

(a) Sind A, B abzählbar, dann ist auch das Kreuzprodukt $A \times B$ abzählbar.

(b) Ist $(A_k)_{k\geq 1}$ eine abzählbare Familie abzählbarer Mengen A_k, dann ist

$$\bigcup_{k\geq 1} A_k$$

abzählbar.

Beweis.

(a) Sei $A \sim M, B \sim N$ mit $M, N \subset \mathbb{N}$. Dann ist $(A \times B) \sim (M \times N) \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Da $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar ist, ist $M \times N$ abzählbar und somit ist auch $A \times B$ abzählbar.

(b) Wir betrachten erst den Fall, wo alle A_k paarweise disjunkt sind. Dann

$$A_k := \{a_{k,l} \mid 1 \leq l < N_k\}$$

mit $N_k \leq \infty$. Die Abbildung

$$\Phi\colon \bigcup_{k\geq 1} A_k \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}, a_{kl} \mapsto (k, l)$$

ist injektiv und somit bijektiv auf einer Teilmenge von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Da $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar ist, folgt aus Satz 2.21, dass

$$\bigcup_{k \geq 1} A_k$$

abzählbar ist. Im allgemeinen Fall definieren wir $\tilde{A}_k$ durch

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_1 &:= A_1 \\
\tilde{A}_2 &:= A_2 \setminus A_1 \\
&\vdots \\
\tilde{A}_{n+1} &:= A_1 \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k
\end{aligned}$$

dann sind diese Mengen paarweise disjunkt und die Vereinigung

$$\bigcup_{k \geq 1} A_k = \bigcup_{k \geq 1} \tilde{A}_k$$

Da $\bigcup_{k \geq 1} \tilde{A}_k$ abzählbar ist nach obigem, ist auch $\bigcup_{k \geq 1} A_k$ abzählbar.

∎

Satz 2.23. $\mathbb{Q}$ *ist abzählbar.*

Beweis. Jede rationale Zahl $q \in \mathbb{Q}$ lässt sich eindeutig schreiben als $q = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ mit minimalem n. Wir definieren

$$\Phi \colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, q = \frac{m}{n} \mapsto (m, n)$$

Diese Abbildung ist injektiv. Somit ist $\mathbb{Q} \sim \Phi(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. D.h. $\Phi(\mathbb{Q})$ und $\mathbb{Q}$ sind abzählbar. ∎

Satz 2.24. $\mathbb{R}$ *ist nicht abzählbar.*

Beweis. Sei $\Phi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ injektiv. Wir zeigen, dass Φ nicht surjektiv ist. Sei

$$x_n := \Phi(n)$$

Wir konstruieren eine Intervallschachtelung (I_n) mit

$$x_n \notin I_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

Sei

$$I_1 := [x_1 + 1, x_1 + 2] \not\ni x_1$$

Seien $I_1, \ldots, I_n$ konstruiert, dann zerlegen wir I_n in drei Drittel. Sei $m = \frac{1}{2}(b_n + a_n)$.

$$I_{n+1} := \begin{cases} [a_n, \frac{3a_n + b_n}{4}] & \text{falls } x_{n+1} \geq m \\ [\frac{3a_n + b_n}{4}, b_n] & \text{falls } x_{n+1} < m \end{cases}$$

Dann ist $x_{n+1} \notin I_{n+1}$. Sei $s \in \mathbb{R}$ der Punkt mit $\{s\} = \bigcap_{n \geq 1} I_n$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt dann

$$s \in I_n \text{ und } x_n \notin I_n$$

Es gilt $s \neq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daher kann Φ nicht surjektiv sein. ∎

3 Komplexe Zahlen

$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ versehen mit der üblichen Vektoraddition und der Multiplikation

$$(a,b)\cdot(c,d) := (ac - bd, ad + bc)$$

bildet einen Körper. Statt (a,b) schreibt man $a+\mathrm{i}b$ und $\mathrm{i} := (0,1)$. Die zu $z = a+\mathrm{i}b$ **konjugiert komplexe Zahl** ist

$$\overline{z} := a - \mathrm{i}b$$

Satz 3.1. *Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:*

1. $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$
2. $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
3. $\mathbf{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$ *und* $\mathbf{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$
4. $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = z$
5. $z = a + \mathrm{i}b$. *Dann ist* $\overline{z}\cdot z = a^2 + b^2$.

Beweis.

1. Übung.
2. $z = a + \mathrm{i}b$, $w = c + \mathrm{i}d$. Dann

$$\begin{aligned} zw &= ac - bd + \mathrm{i}(ad + bc) \\ \overline{zw} &= ac - bd - \mathrm{i}(ad + bc) \\ \overline{z}\cdot\overline{w} &= (a - \mathrm{i}b)\cdot(c - \mathrm{i}d) \\ \overline{z}\cdot\overline{w} &= (ac - bd) - \mathrm{i}(ad + bc) \\ \overline{z}\cdot\overline{w} &= \overline{zw} \end{aligned}$$

3. $z = a + \mathrm{i}b$. Dann

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(z+\overline{z}) &= \frac{1}{2}(2a) \; = a = \mathbf{Re}(z) \\ \frac{1}{2i}(z-\overline{z}) &= \frac{1}{2\mathrm{i}}(2\mathrm{i}b) = b = \mathbf{Im}(z) \end{aligned}$$

4. $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathbf{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow z = \overline{z}$
5. $z = a + \mathrm{i}b$. Dann ist $\overline{z}\cdot z = (a - \mathrm{i}b)(a + \mathrm{i}b) = a^2 + b^2$.

■

Der **Betrag** $|z|$ von $z = a + \mathrm{i}b$ ist definiert durch

$$|z| := \sqrt{\overline{z}z} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Es gilt $|\overline{z}| = |z|$.

Satz 3.2. *Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:*

1. $|z| \geq 0$ *und* $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
2. $|zw| = |z||w|$
3. $|\mathbf{Re}(z)|, |\mathbf{Im}(z)| \leq |z| \leq |\mathbf{Re}(z)| + |\mathbf{Im}(z)|$
4. $|z+w| \leq |z| + |w|$

Beweis.

1. $|z| = \sqrt{a^2+b^2} \geq 0$ ist klar und $|z| = 0$, genau dann wenn $a = 0$ und $b = 0$.
2. $$\begin{aligned} |zw|^2 &= \overline{zw} \cdot zw \\ &= \overline{z}\overline{w}zw \\ &= \overline{z}z\overline{w}w \\ &= |z|^2|w|^2 \end{aligned}$$
   Wurzelziehen ergibt $|zw| = |z||w|$.
3. Übung.
4. $$\begin{aligned} |z+w|^2 &= \overline{(z+w)} \cdot (z+w) \\ &= (\overline{z}+\overline{w}) \cdot (z+w) \\ &= \overline{z}z + \overline{w}w + \overline{z}w + z\overline{w} \\ &= |z|^2 + |w|^2 + 2\mathbf{Re}(\overline{z}w) \\ &\leq |z|^2 + |w|^2 + 2|\overline{z}w| \\ &= |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| \\ &= (|z|+|w|)^2 \\ \Rightarrow |z+w| &\leq |z| + |w| \end{aligned}$$

■

Korollar 3.3. *Für* $z_1, \dots, z_n, w, z \in \mathbb{C}$ *gilt:*

1. $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \sum\limits_{k=1}^{n} |z_k|$
2. $||z| - |w|| \leq |z-w|$

Beweis.

1. Folgt aus der Dreiecksungleichung Satz 3.2 per Induktion nach n.
2. Es gilt:
   $$\begin{aligned} |z| = |z-w+w| &\leq |z-w| + |w| \\ \Rightarrow |z| - |w| &\leq |z-w| \\ \Rightarrow |w| - |z| &\leq |w-z| = |z-w| \\ \text{D. h. } \pm(|z|-|w|) &\leq |z-w| \\ \Rightarrow ||z|-|w|| &\leq |z-w| \end{aligned}$$

■

Argument einer komplexen Zahl: Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ hat $\frac{z}{|z|}$ den Betrag 1. Also $\frac{z}{|z|} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi \Rightarrow z = |z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$. Diese Darstellung nennt man **Polardarstellung**. φ heißt **Argument** von z und ist nur bis auf ein Vielfaches von 2π bestimmt. Falls

$$w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$$

dann folgt aus den Additionstheoremen für Kosinus und Sinus, dass

$$zw = |z||w|(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi))$$

(Prof. Griesemer sagt dazu: *Eine erstaunliche Identität. Es grenzt an ein Wunder.*)
Insbesondere gilt:

$$w^2 = |w|^2(\cos(2\psi) + i\sin(2\psi))$$

Wenn also $w^2 = z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ mit $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ gegeben, richtig sein soll, muss $|w|^2 = |z|$ und $2\psi = \phi + n\cdot 2\pi, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \psi = \frac{\varphi}{2} + n\cdot\pi$.
Somit sind die Lösungen von $w^2 = z$ die Zahlen

$$w_n = \sqrt{|z|}\cdot\left[\cos\left(\frac{\varphi}{2} + n\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\varphi}{2} + n\pi\right)\right] \text{ mit } n \in \mathbb{Z}$$

Es gilt

$$w_n = \begin{cases} w_0 & n \text{ gerade} \\ -w_0 & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Satz 3.4. *Eine komplexe Zahl $z \neq 0$ mit Polardarstellung $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ hat die beiden Wurzeln*

$$\pm\sqrt{|z|}\cdot\left[\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right].$$

Entsprechend hat jede quadratische Gleichung

$$az^2 + bz + c = 0 \text{ mit } a,b,c \in \mathbb{C}, a \neq 0$$

zwei Lösungen, die übereinstimmen können, die man durch quadratisches Ergänzen findet.

$$\begin{aligned} z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \\ \Leftrightarrow z + \frac{b}{2a} &= \pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} \\ \Leftrightarrow z &= -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} \end{aligned}$$

Satz 3.5. *(Fundamentalsatz der Algebra) Jede Gleichung*

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$$

mit $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ und $n \geq 1$ hat mindestens eine Lösung. (Wird später bewiesen.)

Negative Potenzen: Für $z = a + ib$ gilt $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$. Wir definieren noch $z^{-n} := (z^n)^{-1}$ für $z \neq 0, n \in \mathbb{N}$.

Satz 3.6. *Für $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, n, m \in \mathbb{Z}$ gilt:*

(a) $(z \cdot w)^n = z^n \cdot w^n$, $(z^{-1})^n = z^{-n}$

(b) $z^n z^m = z^{n+m}$

(c) $(z^n)^m = z^{n \cdot m}$

Beweis. $(z^{-1})^n \cdot z^n = (z^{-1} \cdot z)^n = 1 \Rightarrow (z^n)^{-1} = (z^{-1})^n$. Man beweist (b) und (c) mit (a), wobei die vier Fälle $\pm n, \pm m \in \mathbb{N}$ getrennt betrachtet werden. ■

4 Zahlenfolgen

4.1 Folgen und Konvergenz

Eine Folge $(z_n)_{n\geq 1}$ komplexer oder reeller z_n ist eine Abbildung

$$z\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}, n \mapsto z_n$$

Die Zahlen z_n heißen Glieder der Folge. Auch eine Abbildung

$$z\colon \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq k, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{C}$$

heißt Folge.

Beispiel.

1. $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$, $x_0 = x_1 = 1$ (Fibonacci-Folge)
2. $n! = n(n-1)!$, $0! = 1$
3. Die Folgen $(a_n), (b_n)$ der Ränder einer Intervallschachtelung $I_n = [a_n, b_n]$
4. Die konstante Folge $z_n = z$ für alle n.
5. $z_n = (1+\mathrm{i})^n$, $z_1 = 1+\mathrm{i}, z_2 = 2\mathrm{i}, z_3 = 2\mathrm{i}(1+\mathrm{i}) = 2(\mathrm{i}-1), \ldots$

Eine Folge z_n heißt konvergent gegen ein $z \in \mathbb{C}$, in Zeichen

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \text{ oder } z_n \to z (n \to \infty)$$

falls zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl N_ε existiert mit

$$n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |z_n - z| < \varepsilon$$

Mit Quantoren ausgedrückt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_\varepsilon : |z_n - z| < \varepsilon$$

Die Zahl heißt z heißt **Limes** oder **Grenzwert** der Folge. Eine Folge (z_n) heißt **konvergent**, wenn ein $z \in \mathbb{C}$ existiert mit $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$. Sonst heißt sie **divergent**. Die Menge

$$\mathbb{B}_\varepsilon(z) := \{w \in \mathbb{C} \mid |w - z| < \varepsilon\}$$

heißt ε-Umgebung von z. Konvergenz $z_n \to z$ bedeutet, dass jede ε-Umgebung von z alle bis auf endlich viele („**fast alle**“) Glieder der Folge enthält. Divergent bedeutet, dass $z_n \not\to z$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Also für alle $z \in \mathbb{C}$:

$$\exists \varepsilon > 0 \forall N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \exists n \geq N_\varepsilon : |z_n - z| \geq \varepsilon$$

In Worten: Es gibt $\varepsilon > 0$, so dass $z_n \notin \mathbb{B}_\varepsilon(z)$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$.
Für eine reelle Folge (x_n) und $a \in \mathbb{R}$ ist

$$|x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

Beispiel.

1. Jede konstante Folge ist konvergent.
2. Die Folge $x_n = \frac{1}{n}$ ist konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Beweis:

   Sei $\varepsilon > 0$, wir wählen $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Dann ist $\frac{1}{N} < \varepsilon$, also $n \geq N$. Daraus folgt $\frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$, d.h. $\frac{1}{n} \in (0, \varepsilon) \subset (-\varepsilon, \varepsilon)$.
3. Die Folge $(-1)^n$ ist divergent.
4. Die Folge $x_n = n$ ist divergent.

Eine Folge (z_n) heißt Nullfolge, wenn sie gegen 0 konvergiert. Sie heißt beschränkt, falls $\{|z_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist. D.h., wenn $R \in \mathbb{R}$ mit $|z_n| \leq R$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Satz 4.1.

(a) Der Grenzwert einer Folge ist eindeutig.

(b) Die Aussagen $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$, $\lim\limits_{n\to\infty} (z_n - z) = 0$ *und* $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n - z| = 0$ *sind äquivalent.*

(c) $z_n \to z, (n \to \infty)$ *ist äquivalent zu* $\mathbf{Re}(z_n) \to \mathbf{Re}(z)$ *und* $\mathbf{Im}(z_n) \to \mathbf{Im}(z)$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = |z|$ *und* (z_n) *ist beschränkt.*

Beweis.

(a) Falls $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$ und $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = w$ mit $z \neq w$, dann wähle man $\varepsilon = \frac{1}{2}|z - w|$.
Dann existieren $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned} n \geq N_1 &\Rightarrow |z_n - z| < \varepsilon \\ n \geq N_2 &\Rightarrow |z_n - w| < \varepsilon \end{aligned}$$

Also gilt $n \geq \max\{N_1, N_2\} \Rightarrow |z - w| = |z - z_n + z_n - w| \leq |z - z_n| + |z_n - w| < 2\varepsilon$. Widerspruch!

(b) Folgt unmittelbar aus der Definition von Konvergenz.

(c) Sei $z_n \to z$ $(n \to \infty)$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert $N_\varepsilon \in \mathbb{N} : |z_n - z| < \varepsilon$.
Also $n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |\mathbf{Re}(z_n) - \mathbf{Re}(z)| = |\mathbf{Re}(z_n - z)| \leq |z_n - z| < \varepsilon$
und $n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |\mathbf{Im}(z_n) - \mathbf{Im}(z)| = |\mathbf{Im}(z_n - z)| \leq |z_n - z| < \varepsilon$.
Falls: $\mathbf{Re}(z_n) \to \mathbf{Re}(z), \mathbf{Im}(z_n) \to \mathbf{Im}(z)$. Dann existieren $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ mit:

$$\begin{aligned} n \geq N_1 &\Rightarrow |\mathbf{Re}(z_n) - \mathbf{Re}(z)| < \frac{\varepsilon}{2} \\ n \geq N_2 &\Rightarrow |\mathbf{Im}(z_n) - \mathbf{Im}(z)| < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Also $N \geq \max\{N_1, N_2\}$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} |z_n - z| &\leq |\mathbf{Re}(z_n - z)| + |\mathbf{Im}(z_n - z)| \\ &= |\mathbf{Re}(z_n) - \mathbf{Re}(z)| + |\mathbf{Im}(z_n) - \mathbf{Im}(z)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Also $z_n \to z$ $(n \to \infty)$.

(d) Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |z_n - z| < \varepsilon$$

Also

$$n \geq N_\varepsilon \Rightarrow ||z_n| - |z|| \leq |z_n - z| < \varepsilon$$

Aus $\lim_{n\to\infty} |z_n| = |z|$ folgt die Existenz von $N \in \mathbb{N}$ mit $|z_n| \in \mathbb{B}_1(|z|)$, insbesondere ist $|z_n| < |z| + 1$ für $n \geq N$. Sei $R := \max\{|z_1|, |z_2|, \dots, |z_{n-1}|, |z| + 1\}$. Dann gilt

$$|z_n| \leq R \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

■

Satz 4.2.

(a) Falls $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *und* $|z_n| \leq a_n$ *für* ***fast alle*** n. *Dann ist* $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$.

(b) Ist (z_n) *eine Nullfolge und* (w_n) *eine beschränkte Folge, dann ist* $(z_n w_n)$ *eine Nullfolge.*

Beweis.

(a) Sei $\varepsilon > 0$, dann existiert $N_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$n \geq N_1 \Rightarrow a_n = |a_n - 0| < \varepsilon$$

und es existiert $N_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$n \geq N_2 \Rightarrow |z_n| \leq a_n$$

Also $n \geq \max\{N_1, N_2\}$, dann folgt:

$$|z_n - 0| = |z_n| \leq a_n < \varepsilon$$

D.h. $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$.

(b) Sei $\varepsilon > 0$ und $R \in \mathbb{R}$, so dass

$$|z_n| < \frac{\varepsilon}{R} \text{ für } n \geq N$$
$$|w_n| \leq R \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

Also gilt $n \geq 0 \Rightarrow |z_n w_n| = |z_n||w_n| < \frac{\varepsilon}{R} = \varepsilon$. D.h.

$$\lim_{n\to\infty} (z_n w_n) = 0$$

■

Beispiel.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{n + \sqrt{n}} = 0$$

denn $|\mathrm{i}^n| = |\mathrm{i}|^n = 1$ und $\frac{1}{n+\sqrt{n}} < \frac{1}{n} \to 0$ $(n \to \infty)$. Also $\frac{1}{n+\sqrt{n}} \to 0$ und schließlich $\frac{\mathrm{i}^n}{n+\sqrt{n}} \to 0$ $(n \to \infty)$.

Satz 4.3. *Falls* $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ *und* $\lim_{n\to\infty} w_n = w$*, dann gilt:*

(a) $\lim_{n\to\infty}(z_n + w_n) = z + w$

(b) $\lim_{n\to\infty}(z_n \cdot w_n) = z \cdot w$

(c) Falls $w \neq 0$*, dann ist* $w_n \neq 0$ *für fast alle* n *und* $\lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{w_n} = \frac{z}{w}$

Beweis.

(a) Sei $\varepsilon > 0$. Dann existieren $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$n \geq N_1 \Rightarrow |z_n - z| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$n \geq N_2 \Rightarrow |w_n - w| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Also $n \geq \max\{N_1, N_2\} \Rightarrow |z_n + w_n - (z + w)||z_n - w_n| + |w_n - w| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

(b) Wir zeigen, dass $(z_n w_n - zw)$ eine Nullfolge ist.

$$z_n w_n - zw = \underbrace{z_n}_{\text{beschränkt}} \cdot \underbrace{(w_n - w)}_{\to 0} + \underbrace{(z_n - z)}_{\to 0} \cdot w$$

(Eine übrigens sehr nützliche Umformung.) Also ist $(z_n w_n - zw) \to 0$ $(n \to \infty)$.

(c) Da $(w_n) \to w$ und $|w| > 0$ existiert $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$n \geq N \Rightarrow |w_n - w| < \frac{|w|}{2}$$

Also $n \geq N \Rightarrow |w_n| = |w - (w_n - w)| \geq |w| - |w - w_n| > \frac{|w|}{2}$.
<u>Behauptung:</u> $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{w_n} = \frac{1}{w}$. Beweis.

$$\frac{1}{w} - \frac{1}{w_n} = \frac{w_n - w}{w_n w} \to 0 \ (n \to \infty)$$

Denn $w_n - w \to \infty$ und $|\frac{1}{w_n w}| = \frac{1}{|w||w_n|} < \frac{2}{|w|^2}$ für $n \geq N$. Also: $\lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{w_n} = \lim_{n\to\infty} z_n \cdot \frac{1}{w_n} = \frac{z}{w}$.

■

Beispiel.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(n+1)(3n^2 - n + 4)}{(2n+5)^3} \\ &= \frac{(1 + \frac{1}{n})(3 - \frac{1}{n} + \frac{4}{n^2})}{(2 + (\frac{5}{n})^3)} \\ &\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

Satz 4.4. *Seien* $(a_n), (b_n), (c_n)$ *reelle Folgen. Dann ist*

(a) Falls $a_n \leq b_n$ *für fast alle* $n \in \mathbb{N}$ *und* $a_n \to a$*,* $b_n \to b$ *für* $(n \to \infty)$*, dann* $a \leq b$*.*

(b) (Sandwich-Kriterium/Quetschlemma/Einschließungssatz): Falls $a_n \le b_n \le c_n$ für fast alle n und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$. Also ist $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$.

Beweis.

(a) Annahme: $a > b$. Sei $\varepsilon := \frac{(a-b)}{2} > 0$. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$ mit

$$n \ge N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$
$$n \ge N \Rightarrow |b_n - b| < \varepsilon$$

Also $n \ge N \Rightarrow a_n > a - \varepsilon = b + \varepsilon > b_n$. Im Widerspruch zu $a_n \le b_n$ für fast alle n.

(b) Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$ mit

$$n \ge N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$
$$n \ge N \Rightarrow |c_n - L| < \varepsilon$$

Also gilt $n \ge N \Rightarrow L - \varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < L + \varepsilon$. D.h. $|b_n - L| < \varepsilon$.

■

Satz 4.5.

(a) $|z| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} z^n = 0$

(b) $|z| < 1$ *und* $p \in \mathbb{N} \Rightarrow n^p z^n \to 0$ *für* $n \to \infty$.

(c) $\sqrt[n]{n} \to 1$ *für* $(n \to \infty)$.

(d) $a > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} \to 1$ *für* $(n \to \infty)$.

Bemerkung. *Die Existenz der n-ten Wurzel wird später bewiesen.*

Beweis.

(a) Aus $|z| < 1 \Rightarrow \frac{1}{|z|} > 1$. Sei $a = \frac{1}{|z|} - 1 > 0$. Dann gilt nach Bernoulli:

$$\left(\frac{1}{|z|}\right)^n = (1+a)^n \ge 1 + na$$

Also $|z|^n \le \frac{1}{1+na} < \frac{1}{na}$ und $|z|^n \to 0$ für $n \to \infty$.

(b) Wir zeigen, dass $a_n = |n^p z^n|$ eine Nullfolge ist. Es gilt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^p}{n^p} \cdot \frac{|z|^{n+1}}{|z|^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p \cdot |z| < 1 \text{ für } n \to \infty$$

Wir wählen $\varepsilon = \frac{1-|z|}{2}$. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$ mit

$$n \ge N \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < |z| + \varepsilon = 1 - \varepsilon$$

d.h. $a_{n+1} < (1-\varepsilon) a_n$ für $n \ge N$.

Induktiv folgt $a_{N+K} < (1-\varepsilon)^K a_N$ für alle $K \in \mathbb{N}$. Für $n > N$:

$$a_n < (1-\varepsilon)^{n-N} a_N = (1-\varepsilon)^n \cdot (1-\varepsilon)^{-N} a_N \to 0 \text{ für } n \to \infty$$

(c) Sei $\varepsilon > 0$. Aus (b) folgt, dass

$$\frac{n}{(1+\varepsilon)^n} \to 0 \text{ für } n \to \infty$$

$\exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : \frac{n}{(1+\varepsilon)^n} < 1 \Leftrightarrow n < (1+\varepsilon)^n$. Daraus folgt:

$n \geq N \Rightarrow 1 < \sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon$. Wir haben die Monotonie von $\sqrt[n]{\cdot}$ verwendet (später).

(d) Sei $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N} < a < N$. Dann gilt für $n \geq N$ ebenfalls:

$$\frac{1}{n} < a < N$$

Somit $n \geq N \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{n}} < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{n}$. Alle drei Folgen konvergieren gegen 1. Jetzt befinden wir uns in der Sandwich-Situation.

■

4.2 Monotone Folgen und Wurzeln

(In diesem Unterkapitel sind alle Folgen reellwertig.)

Eine Folge (a_n) reeller Zahlen heißt **monoton wachsend**, falls $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sie heißt **monoton fallend**, falls $a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sie heißt monoton, falls sie monoton wachsend oder monoton fallend ist. Gilt $a_{n+1} > a_n$ (bzw. $a_{n+1} < a_n$) für alle $n \in \mathbb{N}$, dann ist die Folge **streng monoton wachsend** (**streng monoton fallend**).

Beispiel.

- $a_n = \sqrt{n}$ ist monoton wachsend.
- $a_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$ ist monoton wachsend.
- $a_n = \frac{1}{2^n}$ ist monoton fallend.
- $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ ist nicht monoton.

Satz 4.6. *Jede beschränkte monotone Folge (a_n) ist konvergent. Es gilt:*

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, *wenn die Folge (a_n) monoton wachsend ist.*

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, *wenn die Folge (a_n) monoton fallend ist.*

Beweis.

(a) $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, A ist beschränkt und $A \neq \emptyset$. Also existiert $L = \sup A \in \mathbb{R}$.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $L - \varepsilon$ keine obere Schranke von A. Also existiert $N \in \mathbb{N}$ mit

$$a_N > L - \varepsilon$$

D.h. $n \geq N \Rightarrow L - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq L$. D.h. $|L - a_n| < \varepsilon$.

(b) (a_n) ist monoton fallend un beschränkt, dann ist $(-a_n)$ monoton wachsend und beschränkt. Also nach (a)

$$-a_n \to \sup\{-a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = -\inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

d.h. $a_n \to \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

$\blacksquare$

Beispiel. Die Folge

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

ist streng monoton wachsend, denn

$$s_{n+1} = s_n + \frac{1}{(n+1)!} > s_n.$$

Die Folge (s_n) ist beschränkt, denn

$$\begin{aligned} s_n &= 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \\ &< 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} \end{aligned}$$

Wobei

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} &= \sum_{k=2}^{n} (\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \\ &= 1 - \frac{1}{n} < 1 \end{aligned}$$

Also $2 < s_n < 3$. Nach Satz 4.6 ist (s_n) konvergent.

$$\mathrm{e} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} =: \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

Es gilt also $2 \leq \mathrm{e} \leq 3$. Numerisch: $\mathrm{e} = 2,71828\ldots$. e ist nicht rational (Beweis später).

Wurzelberechnung: Sei $a > 0$. Gesucht ist $\sqrt{a}$, d.h. die Seitenlänge eines Quadrats mit Fläche a. Sei $x_1 > 0$ unsere erste Schätzung. Wenn $x_1 > \sqrt{a}$ (d.h ${x_1}^2 > a$), dann wird $\frac{a}{x_1} < \sqrt{a}$, also wählen wir

$$x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + \frac{a}{x_1})$$

als zweiten verbesserten Schätzwert, usw.

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{a}{x_1}\right) \\ x_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \end{aligned}$$

Frage: $x_n \to \sqrt{a}$ $(n \to \infty)$?

Beispiel. $a = 3, x_1 = 2$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{3}{2}\right) = 1.75$$
$$x_3 = \frac{1}{2}\left(1.75 + \frac{3}{1.75}\right) = 1.73214$$
$$x_4 = \frac{1}{2}\left(x_3 + \frac{3}{x_3}\right) = 1.73205081\mathbf{0}$$

Offenbar gilt: $x_1 > x_2 > x_3 > x_4$. Für $x_1 = 1 : x_2 = 2 > x_3 > x_4$.

Dieses Verfahren wird auch Heron-Verfahren/Babylonisches Wurzelziehen genannt.

3. Wurzel: d.h. $a^{\frac{1}{3}}$ approximativ berechnen. Sei $x_1 > 0$ erste Schätzung. Dann ist $x_2 = \frac{1}{3}\left(2x_1 + \frac{a}{{x_1}^2}\right)$.

Satz 4.7. *Sei $k \geq 2$ eine natürliche Zahl. Dann gibt es zu jeder reellen Zahl $a > 0$ eine eindeutig bestimmte Zahl $x > 0$ mit $x^k = a$. Für jeden Startwert $x_1 > 0$ konvergiert die rekursiv definierte Folge*

$$x_{n+1} := \frac{1}{k}\left((k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}\right)$$

gegen x und zwar monoton fallend für $n \geq 2$.

Beweis.

1. Aus $0 < a < b$ folgt $a^k < b^k$, denn

$$b^k - a^k = (b-a)\sum_{\ell=0}^{k-1} b^\ell a^{k-1-\ell} \tag{3}$$

   Also gibt es höchstens eine k-te Wurzel.

2. Falls $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ existiert, dann folgt aus (3)

$$\begin{aligned} k \cdot x_{n+1}x_n^{k-1} &= (k-1)x_n^k + a \\ \Rightarrow kx^k &= (k-1)x^k + a \\ \Rightarrow x^k &= a \end{aligned}$$

3. Konvergenz der Folge: Aus $x > 0, a > 0$ und (3) folgt induktiv, dass alle Glieder positiv sind für alle n. Aus

$$x_{n+1} = x_n\left(\frac{k-1}{k} + \frac{a}{kx_n^k}\right) = x_n\left(1 + \frac{1}{k}\left(\frac{a}{x_n^k - 1}\right)\right) \tag{4}$$

   und Bernoulli folgt

$$x_{n+1}^k = x_n^k\left(1 + \frac{1}{k}\left(\frac{a}{x_n^k - 1}\right)\right) \geq x_n^k\left(1 + \left(\frac{a}{x_n^k} - 1\right)\right) = x_n^k \cdot \frac{a}{x_n^k} = a$$

für alle n. Das heißt $x_n^k \geq 2$ für alle $n \geq 2$. Zusammen mit (4) folgt, dass

$$x_{n+1} \leq x_n \text{ für } n \geq 2$$

Die Folge $(x_n)_{n\geq 2}$ ist also monoton fallend und wegen $0 < x_n \leq x_2$ auch beschränkt. D.h.

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n$$

existiert.

■

4.3 Der Satz von Bolzano und Weierstraß

Eine Zahl $z \in \mathbb{C}$ heißt Häufungspunkt (HP) der Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn jede ε-Umgebung von z unendlich viele Glieder der Folge enthält. D.h. für alle $\varepsilon > 0$ ist die Menge aller $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in \mathbb{B}_\varepsilon(z)\}$ nicht endlich (also unendlich).

Beispiel.

1. Der Limes einer konvergenten Folge ist ein Häufungspunkt der Folge.
2. $(-1)^n$ hat die Häufungspunkte $1, -1$. Die Folge $(-1)^n$ hat die Häufungspunkte $1, -1$.
3. Die Folge $z_n = i^n$ hat die Häufungspunkte $\pm 1, \pm i$.
4. Die Folge aller rationalen Zahlen (q_n) hat alle reellen Zahlen als Häufungspunkt.
5. $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$.

Ist $(n_k)_{k\geq 1}$ eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen (Auswahlfolge), dann heißt

$$(z_{n_k})_{k\geq 1}$$

Teilfolge der Folge (z_n). Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$, dann gilt auch $\lim\limits_{k\to\infty} z_{n_k} = z$.

Satz 4.8. *Eine Zahl $z \in \mathbb{C}$ ist genau dann ein Häufungspunkt der Folge (z_n), wenn z Grenzwert einer Teilfolge von (z_n) ist.*

Beweis. Falls $\lim\limits_{k\to\infty} z_{n_k} = z$ für eine Teilfolge (z_{n_k}), dann ist z ein Häufungspunkt von (z_{n_k}), also auch Häufungspunkt von (z_n).
Sei z ein Häufungspunkt der Folge $(z_n)_{n\geq 1}$. Wir konstruieren rekursiv eine Auswahlfolge $(n_k)_{k\geq 1}$ mit

$$|z_{n_k} - z| < \frac{1}{k} \;, \; k \in \mathbb{N}$$

Wir setzen

$$n := \min\{n \in \mathbb{N} \mid |z_n - z| < 1\}$$

und

$$n_{k+1} := \min\{n \in \mathbb{N} \mid n > n_k : |z_n - z| < \frac{1}{k}\}$$

Da z Häufungspunkt ist, existiert n_k für alle $k \in \mathbb{N}$. Es gilt also wie gewünscht

$$|z_{n_k} - z| < \frac{1}{k}$$

und somit $(z_{n_k} - z) \to 0$ $(k \to \infty)$ bzw. $\lim\limits_{k\to\infty} z_{n_k} = z$. ■

Satz 4.9 (Bolzano u. Weierstraß für reelle Zahlenfolgen)**.** *Jede beschränkte Folge reeller Zahlen hat mindestens einen Häufungspunkt und somit eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Sei (x_n) eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ (also: $\forall n \in \mathbb{N} : -R \leq x_n \leq R$). Wir konstruieren rekursiv eine Intervallschachtelung mit

$$I_k = [a_k, b_k], \ k \in \mathbb{N}$$

mit $x_n \in I_k$ für unendlich viele n und $x_n \leq b_k$ für fast alle n.
Sei $I_1 := [-R, R] = [a_1, b_1]$ und wenn $I_1, \ldots, I_k$ konstruiert sind, dann

$$I_{k+1} := \begin{cases} [a_k, m] & \text{falls } x_n \leq m \text{ für fast alle } n \\ [m, b_k] & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei wie üblich $m := \frac{1}{2}(a_k + b_k)$. Die Eigenschaften von I_k übertragen sich per Konstruktion auf I_{k+1} und $|I_k| \to 0$ $(k \to \infty)$.
Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\{\alpha\} = \bigcap\limits_{k \geq 1} I_k$. Dann ist α ein Häufungspunkt der Folge. Ist $\varepsilon > 0$ und $k \in \mathbb{N}$ so groß, dass $|I_k| < \varepsilon$, dann $\alpha \in I_k$ und daher $I_k \subset \mathbb{B}_\varepsilon(\alpha)$, wobei I_k und somit $\mathbb{B}_\varepsilon(\alpha)$ unendlich viele Glieder enthält. ∎

Bemerkung. *Der im obigen Beweis konstruierte Häufungspunkt ist der größte Häufungspunkt der Folge.*

Theorem 4.10. *Jede beschränkte Folge komplexer Zahlen hat einen Häufungspunkt und somit eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Sei $z_n = a_n + \mathrm{i} b_n, \ a_n, b_n \in \mathbb{R}$ eine beschränkte Folge. Dann ist (a_n) eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Also existiert nach Satz 4.9 eine konvergente Teilfolge (a_{n_k}). (b_{n_k}) ist wie (b_n) eine beschränkte Folge reeller Zahlen. Also existiert eine Folge (n'_k) von (n_k) so dass $(b_{n'_k})$ konvergent ist. D.h.

$$a = \lim_{k \to \infty} a_{n_k} = \lim_{k \to \infty} a_{n'_k}$$

und

$$b = \lim_{k \to \infty} b_{n'_k}$$

existieren und somit $z_{n'_k} = a_{n'_k} + \mathrm{i} b_{n'_k} \to a + \mathrm{i} b$. ∎

4.4 Das Cauchy-Kriterium

Sei (z_n) eine Folge komplexer Zahlen mit Grenzwert $z \in \mathbb{C}$. Sei $\varepsilon > 0$, dann existiert $N \in \mathbb{N}$ mit

$$n \geq N \Rightarrow |z_n - z| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{5}$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt aus (5), dass

$$n, m \geq N \Rightarrow |z_m - z_n| < \varepsilon \tag{6}$$

denn $|z_m - z_n| = |z_n - z + z - z_m| \leq |z_n - z| + |z_m - z| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
Eine Folge heißt **Cauchy-Folge**, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass (6) gilt. Wir haben gezeigt, dass jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge ist.

Lemma 4.11. *Jede Cauchy-Folge ist beschränkt.*

Beweis. Sei (z_n) eine Cauchy-Folge. Dann ex. $N \in \mathbb{N}$, so dass $|z_n - z_m| < 1$ für alle $n, m \geq N$. Also wenn $m \geq N \Rightarrow |z_m - z_N| < 1$. Für $m \geq N$ gilt:

$$\begin{aligned} |z_m| &= |z_m - z_N + z_N| \\ &\leq |z_m - z_N| + |z_N| \\ &< 1 + |z_N| \end{aligned}$$

Sei $R := \max\{|z_1|, |z_2|, \ldots, |z_{n-1}|, 1 + |z_N|\}$. Dann gilt $|z_m| \leq R$ für alle $m \in \mathbb{N}$. ■

Theorem 4.12 (Cauchy-Kriterium)**.** *Eine Folge komplexer Zahlen ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.*

Beweis. Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. (z_n) ist beschränkt. Nach Bolzano-Weierstraß existiert eine Teilfolge (z_{n_k}) und $z \in \mathbb{C}$ mit $z_{n_k} \to z$ $(n \to \infty)$. Wir zeigen $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$. Sei $\varepsilon > 0$. Da (z_n) eine Cauchy-Folge ist, existiert $N \in \mathbb{N}$, so dass $n, m \geq N \Rightarrow |z_n - z_m| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Da $z_{n_k} \to z$ $(n \to \infty)$ hat es in $\mathbb{B}_{\frac{\varepsilon}{2}}(z)$ unendlich viele Glieder der Teilfolgen. Wähle $k \in \mathbb{N}$ mit $n_k \geq N$ und $z_{n_k} \in \mathbb{B}_{\frac{\varepsilon}{2}}(z)$. Dann gilt

$$n \geq N \Rightarrow |z_n - z| \geq |z_n - z_{n_k}| + |z_{n_k} - z| < \varepsilon$$

■

Beispiele dazu finden sich im Kapitel über Reihen.

4.5 Uneigentliche Konvergenz

Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen. Falls zu jeder noch so großen Zahl $M \in \mathbb{R}$ ein Index $N \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$n \geq N \Rightarrow a_n > M$$

dann schreibt man

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

Man sagt, die Folge (a_n) hat den **uneigentlichen Grenzwert** ∞, oder sie **divergiert gegen Unendlich**.
Falls $\lim\limits_{n\to\infty}(-a_n) = \infty$, dann schreibt man $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$. Die Intervalle (M, ∞) heißen **Umgebungen** von ∞. Also

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \text{Jede Umgebung von } \infty \text{ enthält fast alle Glieder der Folge.}$$

Beispiel.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (5n - n^2) = -\infty$

Satz 4.13. *Seien $(a_n), (b_n)$ reelle Folgen und sei (z_n) eine komplexe Folge. Dann gilt*

(a) Aus $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ und $b_n \geq c$ für fast alle n folgt $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \infty$.

(b) Aus $\lim\limits_{n\to\infty}$ und $b_n \geq c > 0$ für fast alle n folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$.

(c) Aus $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0,\ a_n > 0$ *für alle* n*, folgt* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \infty$.

(d) Aus $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = \infty$ *folgt* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{z_n} = 0$.

Beweis.

(a) Sei $M \in \mathbb{R}$. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$, so dass $a_n \geq M - c$, für $n \geq N$, also $a_n + b_n \geq (M - c) + c = M$ für alle $n \geq \max\{N, N'\}$, wobei $N' \in \mathbb{N}$ so gewählt ist, dass $b_n \geq c$ für $n \in \mathbb{N}$.

(b) Wähle $N' \in \mathbb{N}$ mit $b_n \geq c > 0$ für alle $n \geq N'$. Sei $M \in \mathbb{R}$ und $N \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $a_n \geq \frac{M}{c}$ für $n \geq N$. Dann gilt

$$n \geq \max\{N, N'\} \Rightarrow a_n b_n \geq \frac{M}{c} \cdot c = M$$

(c) Sei $M > 0$. Da $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N \Rightarrow \frac{1}{a_n} > M$, wenn $M \leq 0$, dann ist $\frac{1}{a_n} > 0 \geq M$ für alle n.

(d) Sei $\varepsilon > 0$. Da $|z_n| \to \infty$ $(n \to \infty)$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N \Rightarrow |\frac{1}{z_n}| = \frac{1}{|z_n|} < \varepsilon$. Also $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{z_n} = 0$.

■

Beispiel. $a_n = \frac{n^3-n+5}{2n+1} = \frac{n^3}{n} \cdot \frac{1-\frac{1}{n^2}+\frac{5}{n^3}}{2+\frac{1}{n}} = n^2 \cdot b_n$, wobei $b_n \to \frac{1}{2}$ $(n \to \infty)$. Also ist $b_n \geq \frac{1}{4}$ für fast alle n. Also ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (n^2 \cdot b_n) = \infty$.

Satz 4.14. *Für jede monotone Folge existiert* $\lim\limits_{n\to\infty}$ *als eigentlicher Grenzwert. Es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \in \overline{\mathbb{R}}$$

wenn (a_n) *monoton wachsend ist und*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \in \overline{\mathbb{R}}$$

wenn (a_n) *monoton fallend ist.*

Beweis. Für beschränkte monotone Folgen ist das genau die Aussage aus dem Theorem *Cauchy-Kriterium.*
Falls a_n monoton wachsend und **unbeschränkt** ist, dann gibt es zu jedem $M \in \mathbb{R}$ ein a_N mit $a_N > M$. Also gilt $a_n \geq a_N > M$, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

Ist (a_n) monoton fallend und unbeschränkt, dann ist $(-a_n)$ monoton wachsend und unbeschränkt, also

$$\lim_{n\to\infty} -a_n = \infty \text{ und somit } \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

■

Eine reelle Zahlenfolge (a_n) hat den **uneigentlichen Häufungspunkt** ∞, wenn jede Umgebung (M, ∞) von ∞ unendlich viele Glieder der Folge enthält. Das ist genau dann der Fall, wenn eine Teilfolge (a_{n_k}) existiert mit $a_{n_k} \to \infty$.

Beispiel. $a_n = (-1)^n \cdot n$ hat die uneigentlichen Häufungspunkte $\pm\infty$.

Satz 4.15 (Bolzano-Weierstraß in $\overline{\mathbb{R}}$). *Jede reelle Zahlenfolge hat mindestens einen eigentlichen oder uneigentlichen Häufungspunkt in* $\overline{\mathbb{R}}$.

Beweis. Wenn weder $+\infty$ noch $-\infty$ ein Häufungspunkt ist, dann existieren $M_+, M_- \in \mathbb{R}$, so dass $(-\infty, M_-) \cup (M_+, \infty)$ nur endlich viele Glieder der Folge enthält. D.h. es existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$n \geq N \Rightarrow M_- \leq a_n \leq M_+$$

für die Glieder a_n der Folge. D.h. $(a_n)_{n \geq N}$ ist eine beschränkte reelle Zahlenfolge, die nach Bolzano-Weierstraß einen Häufungspunkt in $\mathbb{R}$ hat. Das ist dann auch ein Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n \geq 1}$. ∎

4.6 Limes superior und Limes inferior

Sei (a_n) eine reelle Zahlenfolge. Dann ist die Folge

$$n \mapsto \sup_{k \geq n} a_k = \sup\{a_k \mid k \geq n\} \in \overline{\mathbb{R}}$$

monoton fallend und

$$n \mapsto \inf_{k \geq n} a_k = \inf\{a_k \mid k \geq n\} \in \overline{\mathbb{R}}$$

ist monoton wachsend. Also existiert der **Limes superior**

$$\limsup_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} (\sup_{k \geq n} a_k) \in \overline{\mathbb{R}}$$

und der **Limes inferior**

$$\liminf_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} (\inf_{k \geq n} a_k) \in \overline{\mathbb{R}}$$

als eigentliche oder uneigentliche Grenzwerte in $\overline{\mathbb{R}}$. Man schreibt statt $\limsup\limits_{n \to \infty} a_n$ auch $\varlimsup\limits_{n \to \infty} a_n$ und statt $\liminf\limits_{n \to \infty} a_n$ auch $\varliminf\limits_{n \to \infty} a_n$.
Es ist offensichtlich, dass $\varliminf\limits_{n \to \infty} a_n \leq \varlimsup\limits_{n \to \infty} a_n$.

Beispiel. Sei (a_n) die Folge $0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \ldots$. Diese hat die Häufungspunkte $0, 1, -1$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sup_{k \geq n} a_k = 1 \text{ und } \inf_{k \geq n} a_k = -1$$

D.h. $\limsup\limits_{n \to \infty} a_n = 1$ und $\liminf\limits_{n \to \infty} a_n = -1$.

Satz 4.16. *Für jede Folge reeller Zahlen* (a_n) *gilt:*

(a) $\limsup\limits_{n \to \infty} a_n$ *ist der größte Häufungspunkt. Falls* $\limsup\limits_{n \to \infty} a_n \in \mathbb{R}$ *und* $\varepsilon > 0$*, dann gilt*

$$a_n < \left(\limsup_{n \to \infty} a_n\right) + \varepsilon$$

für fast alle n.

(b) $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ *ist der kleinste Häufungspunkt. Falls* $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$ *und* $\varepsilon > 0$*, dann gilt*

$$a_n > \left(\liminf_{n\to\infty} a_n\right) - \varepsilon$$

für fast alle n*.*

Beweis.

(a) Falls $\limsup_{n\to\infty}$, dann $a_n \leq \sup\limits_{k\geq n} a_k \to -\infty$. D.h. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ ist der einzige Häufungspunkt.

Annahme: ∞ sei kein Häufungspunkt. Dann ex. $M \in \mathbb{R}$, so dass (M, ∞) nur endlich viele Glieder der Folge enthält. D.h. $\exists N \in \mathbb{N} : a_k \leq M$ für $k \geq N$. Daraus folgt $\sup\limits_{k\geq N} a_k \leq M$. Also $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n \leq M < \infty$.

Kontraposition: Wenn $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, dann ist ∞ ein Häufungspunkt (der größte). Sei $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ und sei $\varepsilon > 0$. D.h. es existiert $n \in \mathbb{N}$, so dass $\sup\limits_{k\geq n} a_k < a + \varepsilon$.

D.h nur endlich viele a_k sind größer als $a + \varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt, dass es keinen Häufungspunkt größer als a geben kann.

Noch zu zeigen: a ist kein Häufungspunkt. Also $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\varepsilon > 0$ folgt die Existenz eines $N \in \mathbb{N}$: $n \geq N \implies \sup\limits_{k\geq n} a_k \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Wäre a kein Häufungspunkt, dann gäbe es ein $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(a)$ nur endlich viele Glieder der Folge enthält. Da nur endlich viele Glieder größer als $a + \varepsilon$ sind, würde folgen, dass nur endlich viele Glieder in $B_\varepsilon(a) \cup (a + \varepsilon, \infty) = (a - \varepsilon, \infty)$ sind. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$k \geq N \implies a_k \leq a - \varepsilon \implies \limsup_{k\to\infty} a_k = \lim_{N\to\infty}\left(\sup_{k\geq N}\right) \leq a - \varepsilon$$

Im Widerspruch zu $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

(b) Analog.

■

Satz 4.17. *Sei* (a_n) *eine reelle Zahlenfolge und sei* $a \in \overline{\mathbb{R}}$*. Dann sind äquivalent:*

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

(b) $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n = a$

Beweis. (a) $\implies$ (b): Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, dann ist a der einzige Häufungspunkt, also ist a auch der kleinste und der größte Häufungspunkt. D. h. (b) folgt aus Satz 4.16.
(b) $\implies$ (a): Sei $I_n = \inf\limits_{k\geq n} a_k$ und $S_n = \sup\limits_{k\geq n} a_k$. Dann gilt $I_n \to a$, $S_n \to a$ und wegen $I_n \leq a_n \leq S_n$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ nach Satz 4.4 (gilt auch für $L \in \overline{R}$). ■

Mandelbrotmenge: Sei $c \in \mathbb{C}$. Man definiert rekursiv eine Folge (z_n) durch

$$z_{n+1} := z_n^2 + c \text{ und } z_0 := 0$$

Die Menge

$$M := \{c \in \mathbb{C} \mid (z_n) \text{ ist beschränkt}\}$$

heißt **Mandelbrotmenge**.

c	0	-1	-2	i	1
z_1	0	-1	-2	i	1
z_2	0	0	2	$-1+\mathrm{i}$	2
z_3	0	-1	2	$-\mathrm{i}$	5
z_4	0	0	2	$-1+\mathrm{i}$	26

Man sieht leicht, dass M symmetrisch ist bzgl. komplexer Konjugation $z \mapsto \overline{z}$ und dass $M \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 2\}$.

5 Reihen

Reihen sind Folgen (s_n), die mit Hilfe der Zuwächse $a_n = s_n - s_{n-1}$ angeschrieben werden. Ihre Verwendung in der Analysis beginnt mit der Aufstellung der Logarithmusreihe durch Mercator (1620-1687) und der Exponentialreihe durch Newton (1642-1727). Sie sind eines der wichtigsten Mittel zur Darstellung und Konstruktion von Funktionen.

5.1 Elementare Eigenschaften und Beispiele

Sei (z_n) eine Folge komplexer oder reeller Zahlen und sei

$$\begin{aligned}
s_1 &= z_1 \\
s_2 &= z_1 + z_2 \\
s_3 &= z_1 + z_2 + z_3 \\
&\vdots \\
s_n &= z_1 + \ldots + z_n = \sum_{k=1}^{n} z_k \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Die Folge (s_n) heißt **Reihe**. Die Folgenglieder s_n heißen dabei **Partialsummen** und die Zahlen z_n heißen **Glieder** der Reihe. Wenn die Folge (s_n) konvergent ist, dann heißt

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} z_k = \lim_{n\to\infty} s_n$$

Summe der Reihe. Das Symbol $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ wird oft auch zur Bezeichnung der Folge der Partialsummen verwendet. Man sagt, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ sei konvergent / divergent, wenn das für die Folge

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$$

zutrifft.

Die geometrische Reihe: Für $z \in \mathbb{C}$ und $|z| < 1$ gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots = \frac{1}{1-z} \tag{7}$$

Für $|z| \geq 1$ ist die Reihe divergent. Für die Partialsummen gilt

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z} \qquad (z \neq 1) \tag{8}$$

Beweis. (8) folgt aus der verallgemeinerten dritten binomischen Formel oder aus

$$\begin{aligned}(1-z)\sum_{k=0}^{n} z^k &= \sum_{k=0}^{\infty}(z^k - z^{k+1})\\ &= (1-z) + (z-z^2) + (z^2-z^3) + \ldots + (z^n - z^{n+1})\\ &= 1 - z^{n+1}\end{aligned}$$

(7) für $|z| < 1$ folgt aus (2) und Satz 4.5 (a). Für $|z| \geq 1$ gilt: $|z^k| = |z|^k \geq 1$ also ist die Reihe divergent nach Satz 5.1. ■

Die harmonische Reihe: ist divergent.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots = \infty$$

denn die Partialsummen sind monoton wachsend und unbeschränkt.

$$\begin{aligned} s_1 &= 1\\ s_2 &= 1 + \frac{1}{2}\\ s_3 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\\ s_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{>2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}}\\ s_4 &> 1 + 2\cdot\frac{1}{2}\\ &\vdots\\ s_8 &= s_4 + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{>4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}} > 1 + \frac{3}{2}\vdots \end{aligned}$$

und so weiter. So zeigt man induktiv

$$s_{2^n} > 1 + n\cdot\frac{1}{2}$$

Also $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$.

Die teleskopierende Reihe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots = 1$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \to 1 \quad (n\to\infty)\end{aligned}$$

Satz 5.1. *Wenn die Reihe* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ *konvergent ist, dann gilt* $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = 0$.

Beweis. Sei $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} z_k$ und $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$. Dann gilt

$$z_n = s_n - s_{n-1} \to s - s = 0 \quad (n \to \infty)$$

■

Nach Satz 5.1 gilt: Wenn $\lim\limits_{k\to\infty} z_k \neq 0$, dann ist die Reihe divergent. Die Bedingung $z_k \to 0$ $(k \to \infty)$ ist **notwendig**, aber nicht **hinreichend**.

Satz 5.2. *Sind die Reihen* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} w_k$ *konvergent, so ist auch*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda z_k + \mu w_k)$$

mit $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ *und*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda z_k + \mu w_k) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} z_k + \mu \sum_{k=1}^{\infty} w_k$$

Beweis. Folgt aus Satz 4.3 angewandt auf die Folge der Partialsummen. ■

Beispiel.

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} - 7\mathrm{e}^{-n} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} \right) - 7 \sum_{n=0}^{\infty} (\mathrm{e}^{-1})^n \\
&= \frac{3}{2} - \frac{7}{1 - \mathrm{e}^{-1}}
\end{aligned}$$

denn $\mathrm{e} \geq 2 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-1} < 1$

Satz 5.3 (Cauchy-Kriterium)**.** *Eine Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ *ist genau dann konvergent, wenn zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $N \in \mathbb{N}$ *existiert mit*

$$n, m \geq N \implies \left| \sum_{k=m+1}^{n} z_k \right| < \varepsilon$$

Beweis. Folgt aus dem Cauchy-Kriterium für Folgen (Theorem 4.12) angewandt auf die Partialsummen $s_n = \sum\limits_{k=m+1}^{n} z_k$, denn

$$|s_n - s_m| = \left| \sum_{k=1}^{n} z_k \right| \qquad \text{o. B. d. A. } n > m$$

Wegen $\left| \sum\limits_{k=m+1}^{n} z_k \right| \leq \sum\limits_{k=m+1}^{n} |z_k|$. ■

5.2 Reihen mit nichtnegativen Gliedern und Dezimalbrüchen

Für jede Reihe mit nichtnegativen Gliedern $a_n \geq 0$ existiert die Summe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \leq \infty$$

immer als eigentlicher oder uneigentlicher Grenzwert (Satz 4.14). Konvergenz liegt genau dann vor wenn

$$\sum_{k=0}^{\infty} < \infty$$

d.h. wenn die Folge der Partialsummen (nach oben) beschränkt ist.

Satz 5.4 (Verdichtungskriterium)**.** *Sei (a_k) eine monoton fallende Folge nichtnegativer Zahlen. Dann sind die Reihen $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ beide konvergent oder beide divergent.*

Beweis. Wegen der Monotonie gilt:

$$\begin{aligned}
a_1 &\geq a_2 & &\geq a_2\\
2a_2 &\geq a_3 + a_4 & &\geq 2a_4\\
4a_4 &\geq a_5 + a_6 + a_7 + a_8 & &\geq 4a_8\\
8a_8 &= a_9 + \ldots & &\geq 8a_{16}\\
&\vdots & &\vdots\\
2^n a_{2^n} &\geq a_{2^n+1} + \ldots + a_{2^{n+1}} & &\geq 2^n a_{2^{n+1}}
\end{aligned}$$

Durch Aufsummieren dieser Ungleichungen bekommen wir

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k a_{2^k} \geq \sum_{k=2}^{2^{n+1}} a_k \geq \sum_{k=0}^{n} 2^k a_{2^{k+1}} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} 2^{k+1} a_{2^{k+1}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n+1} 2^k a_{2^k}$$

Also sind die Partialsummen von $\sum\limits_{k\geq 1} a_k$ genau dann beschränkt, wenn die Partialsummen der verdichteten Reihe $\sum\limits_{k\geq 0} 2^k a_{2^k}$ beschränkt sind. ■

Satz 5.5. *Für $s > 0$ gilt:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \begin{cases} = \infty & s \leq 1 \\ < \infty & s > 1 \end{cases}$$

Bemerkung. *Potenzen n^s mit beliebigem $s > 0$ werden später definiert. Wir nehmen vorweg, dass $n^s \geq 1$, dass $n \mapsto n^s$ monoton wachsend ist und dass $(2^n)^s = (2^s)^n$.*

Beweis. $\frac{1}{n^s} \geq 0$ und monoton fallend als Funktion von n. Also können wir Satz 5.4 anwenden. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \left(\frac{1}{2^n}\right)^s \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \left(\frac{1}{2^s}\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(2^{1-s}\right)^n < \infty \Leftrightarrow 2^{1-s} < 1 \Leftrightarrow s > 1
\end{aligned}$$

■

Beispiel.

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots = \infty$
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < \infty$
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (Euler)

Dezimalbrüche: Sei $g \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} a &= \sum_{k=-n}^{\infty} a_k g^{-k} \\ &= a_{-n} g^n + a_{-n+1} g^{n-1} + \ldots + a_0 + a_1 g^{-1} + \ldots \end{aligned}$$

mit $a_k \in \{0, \ldots, g-1\}$, dann schreibt man

$$a = a_{-n} a_{-n+1} \ldots a_0{,}a_1 a_2 a_3 \ldots$$

und nennt das die g-adische Entwicklung von a. Für $g = 10$ spricht man von der Dezimalbruchdarstellung, bei $g = 2$ von der Dualbruchdarstellung. Die g-adische Entwicklung ist **nicht** eindeutig, denn

$$0{,}99999\ldots = \sum_{k=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-k} = \frac{9}{10} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 1$$

Satz 5.6. *Jede reelle Zahl $a \geq 0$ hat eine g-adische Entwicklung*

$$a = a_{-n} \ldots a_0{,}a_1 a_2$$

mit $a_{-n} \neq 0, a_k \in \{0, \ldots, g-1\}$. Sie ist eindeutig bestimmt, wenn man verbietet, dass $a_k = g-1$ für fast alle k.

Beweis. Sei $a \in [0, 1)$. Wir definieren rekursiv

$$\begin{aligned} a_1 &= [ag] \qquad \text{(Gauß-Klammer)} \\ a_2 &= \left[\left(a - a_1 \cdot \frac{1}{g}\right) g^2\right] \\ &\vdots \\ a_{n+1} &= \left[\left(a - \sum_{k=1}^{n} a_k g^{-k}\right) g^{n+1}\right] \end{aligned}$$

Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$a_1, \ldots, a_n \in \{0, \ldots, g-1\} \text{ und } 0 \leq a - \sum_{k=1}^{n} a_k g^{-k} < g^{-n} \tag{9}$$

Beweis per Induktion: Für $n = 1 : 0 \leq a < 1 \implies 0 \leq ag < g - 1 \implies 0 \leq [ag] \leq g - 1$. Also $a_1 = [ag] \in \{0, \ldots, g-1\}$ und $0 \leq ag - [ag] < 1$. Dividieren durch g ergibt $0 \leq a - a_1 \frac{1}{g} < \frac{1}{g}$.

Ind.-Ann.: Es gelte (9) für ein $n \in \mathbb{N}$.
Ind. Schritt: Aus (9) folgt

$$0 \leq \left(a - \sum_{k=1}^{n} a_k g^{-k} \right) g^{n+1} < g$$

Also

$$0 \leq \left[\left(a - \sum_{k=1}^{n} a_k g^{-k} \right) g^{n+1} \right] < g - 1$$

D.h.

$$a_{n+1} = \left[\left(a - \sum_{k=1}^{n} a_k g^{-k} \right) g^{n+1} \right] \in \{0, \dots, g-1\}$$

und

$$0 \leq \left(a - \sum_{k=1}^{n} a_k g^{-k} \right) g^{n+1} - a_{n+1} < 1$$

Daraus folgt

$$0 \leq \underbrace{a - \sum_{k=1}^{n} a_k g^{-k} - a_{n+1} g^{-(n+1)}}_{a - \sum_{k=1}^{n+1} a_k g^{-k}} < g^{-(n+1)}$$

Aus (9) folgt im Limes $n \to \infty$, dass

$$a = \sum_{k=1}^{\infty} a_k g^{-k} \qquad a_k \in \{0, \dots, g-1\}$$

Eindeutigkeit: Sei

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k g^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k g^{-k}$$

wobei $a_k \neq b_k$ für mindestens ein $k \in \mathbb{N}$. Sei $n = \min\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \neq b_k\}$. Wir dürfen annehmen, dass $b_n \geq a_n + 1$.
Behauptung: $a_k = g - 1$ für alle $k \geq n + 1$ und $b_k = 0$ für alle $k \geq n + 1$.
Beweis durch Widerspruch: Wäre das falsch, also $a_k - b_k < g - 1$ für ein $k \geq n + 1$, dann hätten wir

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - b_k) g^{-k} \\
&= \underbrace{(a_n - b_n)}_{\leq -1} g^{-n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} (a_k - b_k) g^{-k} < -g^{-n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} (g-1) g^{-k} \\
&= -g^{-n} + (g-1) g^{-(n+1)} \frac{1}{1 - \frac{1}{g}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Widerspruch $0 < 0$.
Im Fall $a \geq 1$, wählen wir erst $n \in \mathbb{N}$ mit $g^{n-1} \leq a < g^n$ und bestimmen die g-adische Entwicklung von $\frac{a}{g^n} \in [0, 1)$. Danach verschieben wir das Komma um g Stellen nach rechts. ∎

Beispiel. g-adische Entwicklung von $\frac{1}{7}$ für $g = 5$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{7} \cdot 5 &= \frac{5}{7} = 0 + \frac{5}{7} \\
\frac{5}{7} \cdot 5 &= \frac{25}{7} = 3 + \frac{4}{7} \\
\frac{4}{7} \cdot 5 &= \frac{20}{7} = 2 + \frac{6}{7} \\
\frac{6}{7} \cdot 5 &= \frac{30}{7} = 4 + \frac{2}{7} \\
\frac{2}{7} \cdot 5 &= \frac{10}{7} = 1 + \frac{3}{7} \\
\frac{3}{7} \cdot 5 &= \frac{15}{7} = 2 + \frac{1}{7}
\end{aligned}$$

Das heißt $\frac{1}{7} = 0{,}0\overline{32412}$

5.3 Absolute Konvergenz

Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ heißt **absolut konvergent**, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n| < \infty$.

Theorem 5.7. *Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Da $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ konvergent ist, existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$n, m \geq N \implies \sum_{n=m+1}^{n} |z_n| < \varepsilon$$

Also gilt

$$n, m \geq N \implies \left| \sum_{k=m+1}^{n} z_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |z_k| < \varepsilon$$

Aus Satz 5.3 folgt nun, dass $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ konvergent ist. ∎

Beispiel.

1. Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ ist absolut konvergent für $|z| < 1$, denn

$$\sum_{n=0}^{\infty} |z^k| = \sum_{n=0}^{\infty} |z|^k = \frac{1}{1 - |z|} < \infty$$

2. Die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

   ist nicht absolut konvergent, aber konvergent (später).

Korollar 5.8 (Majorantenkriterium). *Falls $|z_k| \leq c_k$ für fast alle k und*

$$\sum_{k\geq 0} c_k < \infty,$$

dann ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z_k$ absolut konvergent.

Beweis. Nach Annahme existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|z_k| \leq c_k$ für $k \geq N$. Also gilt für $n \geq N$:

$$\sum_{k=0}^{n} |z_k| = \sum_{k=0}^{N-1} |z_k| + \sum_{k=N}^{n} \underbrace{|z_k|}_{\leq c_k} \leq \sum_{k=0}^{N-1} |z_k| + \sum_{k=N}^{\infty} c_k < \infty$$

Somit $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |z_k| = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} |z_k| \leq \sum\limits_{k=0}^{N-1} |z_k| + \sum\limits_{k=N}^{\infty} c_k < \infty$. Also ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z_k$ absolut konvergent. ■

Beispiel.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\sin(k) + \sqrt[k]{k^5}}{(2k-\sqrt{k})^3} = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{k}{k^3} \cdot \frac{\sin(k) + \frac{1}{k} \cdot \sqrt[k]{k^5}}{(2-\frac{1}{\sqrt{k}})^3}}_{z_k}$$

Es gilt

$$|z_k| \leq \frac{1}{k^2} \cdot \underbrace{\frac{1+\frac{1}{k}\sqrt[k]{k^5}}{(2-\frac{1}{\sqrt{k}})^3}}_{\to\frac{1}{8}\ (k\to\infty)}$$

Also gilt: $|z_k| \leq \frac{1}{k^2}$ für $k \geq N$ (N groß genug). Da $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$ folgt mit Korollar 5.8, dass auch $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ absolut konvergent ist.

Die folgenden beiden Kriterien beruhen auf dem Vergleich mit der geometrischen Reihe.

$$\sum_{k\geq 1} c_k = \sum_{k\geq 1} aq^k \quad (a>0), \quad |q|<1$$

Das **Markenzeichen** der geometrischen Reihe ist

$$\frac{c_{k+1}}{c_k} = q$$

Satz 5.9 (Quotientenkriterium). *Falls $z_n \neq 0$ für fast alle n und $q = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|$ existiert ($+\infty$ erlaubt), dann gilt:*

(a) $q < 1 \implies$ Die Reihe $\sum\limits_{k\geq 1} z_k$ ist absolut konvergent.

(b) $q > 1 \implies$ Die Reihe $\sum\limits_{k\geq 1} z_k$ ist divergent.

Beweis.

(a) Sei $r = \frac{1+q}{2} < 1$. Nach Voraussetzung existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $z_n \neq 0$ für $n \geq N$ und

$$n \geq N \implies \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| < r$$

Also gilt

$$n > N \implies |z_n| = \frac{|z_n|}{|z_{n-1}|}|z_{n-1}| < r|z_{n-1}| \leq \ldots \leq r^{n-N}|z_N|$$

wobei $\sum\limits_{n\geq 0} r^{n-N}|z_N| = r^{-N}|z_N| \sum\limits_{n\geq 0} r^n < \infty$, da $r < 1$. Nach Korollar 5.8 ist also $\sum\limits_{n\geq 0} z_n$ absolut konvergent.

(b) Im Fall $q > 1$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $z_n \neq 0$ $(n \geq N)$ mit $n \geq N \implies \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| > 1 \implies |z_{n+1}| > |z_n| > \ldots > |z_N| \neq 0$.

Das heißt $z_n \not\to 0 \quad (n \to \infty)$ und $\sum\limits_{k\geq 1} z_k$ ist divergent.

■

Bemerkung. *Für den Fall* $q = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = 1$*, dann ist sowohl Konvergenz als auch Divergenz möglich. Das sieht man an dem Beispiel*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}: \qquad \left(\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{n}\right)^{-1} = \frac{n}{n+1} \to 1\right) \text{ ist divergent.}$$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}: \qquad \left(\frac{1}{(n+1)^2} \cdot n^2 = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \to 1\right) \text{ ist konvergent.}$$

Allgemeiner gilt:

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| < 1 \implies \text{Konvergenz!}$$

und

$$\liminf_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| > 1 \implies \text{Divergenz!}$$

Beispiel.

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$ ist konvergent, denn

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^n} = \frac{3}{n+1} \overset{n\to\infty}{\to} 0 < 1$$

also absolut konvergent.

2. $\sum\limits_{n\geq 0} \sqrt{n!}5^{-n}$ ist divergent, denn

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{(n+1)!}}{5^{n+1}} \cdot \frac{5^n}{\sqrt{n!}} = \frac{\sqrt{n+1}}{5} \overset{n\to\infty}{\to} \infty > 1$$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ ist konvergent für $|z| < 1$ und divergent für $|z| > 1$.

$$\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \left|\frac{z^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{z^n}\right| = |z|\frac{n}{n+1} \to |z| \quad (n \to \infty)$$

Das Quotientenkriterium versagt bereits bei der konvergenten Reihe

$$q + 1 + q^3 + q^2 + q^5 + q^4 + \dots$$

$(q < 1)$. Hier ist der Quotient $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{q} > 1$ bzw. $q^3 < 1$.

Theorem 5.10 (Wurzelkriterium)**.** *Sei* $q := \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|}$, *wobei* $z_n \in \mathbb{C}$. *Dann gilt*

(a) $q < 1 \implies \sum\limits_{n\geq 0} z_n$ *ist absolut konvergent.*

(b) $q > 1 \implies \sum\limits_{n\geq 0} z_n$ *ist divergent.*

Beweis.

(a) Sei $r = \frac{1+q}{2}$. Da $q < r$, gilt $\sqrt[n]{|z_n|} < r$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ (Satz 4.16). Also existiert $N \in \mathbb{N}$ mit

$$n \geq N \implies \sqrt[n]{|z_n|} < r \implies |z_n| < r^n$$

Da $\sum\limits_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} < \infty$ folgt mit Korollar 5.8, dass $\sum z_n$ absolut konvergent ist.

(b) Falls $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} > 1$, dann ist

$$\sqrt[n]{|z_n|} \text{ für unendlich viele } n \qquad \implies |z_n| > 1 \text{ für unendlich viele } n$$

Also $z_n \not\to 0 \quad (n \to \infty)$ und die Reihe ist divergent (Satz 5.1).

■

Bemerkung. *Falls* $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = 1$, *dann ist sowohl Konvergenz als auch Divergenz möglich. (betrachte* $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ *und* $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$*).*

Beispiel. $\sum\limits_{n\geq 0} q^{n+(-1)^n} = q + 1 + q^3 + q^2 + q^5 + \dots$ mit $q \in (0,1)$ erfüllt $\sqrt[n]{a_n} = q^n \sqrt[n]{q^{\pm 1}} \to q \quad (n \to \infty)$. Also ist die Reihe nach Theorem 5.10 konvergent.

Satz 5.11 (Leibniz-Kriterium)**.** *Jede alternierende Reihe* $\sum\limits_{n\geq 0} (-1)^n a_n$ *mit* $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots$ *mit* $a_n \to 0 \quad (n \to \infty)$ *ist konvergent. Ist* s *die Summe und* $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$, *dann gilt* $|s - s_n| \leq a_{n+1}$

Bemerkung. (s_{2n+1}) *ist monoton wachsend, denn*

$$s_{2n+3} = s_{2n+1} + a_{2n+2} - a_{2n+3} \geq s_{2n+1}$$

und (s_{2n}) *ist monoton fallend, denn*

$$s_{2n+2} = s_{2n} - a_{2n+1} + a_{2n+2} \leq s_{2n}$$

Außerdem

$$s_{2n+1} = s_{2n} - a_{2n+1} \leq s_{2n} \leq \ldots \leq s_0$$

und

$$s_{2n} = s_{2n-1} + a_{2n} \geq s_{2n-1} \geq s_1$$

Also existierten

$$s_u = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} \text{ und } s_g = \lim_{n\to\infty} s_{2n}$$

und

$$s_u - s_g = \lim_{n\to\infty} (\underbrace{s_{2n+1} - s_{2n}}_{-a_{2n+1}})$$

Also $s_u = s_g =: s$.
Da $s_{2n+1} \nearrow s$ und $s_{2n} \searrow s$. Also

$$0 \leq s - s_{2n+1} \leq s_{2n+2} - s_{2n+1} = a_{2n+2}$$
$$0 \leq s_{2n} - s \leq s_{2n} - s_{2n+1} = a_{2n+1}$$

Beispiel. Die alternierende harmonische Reihe $\sum_{k\geq 0}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}$ ist konvergent nach Satz 5.11, ebenso z. B.

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

Satz 5.12 (Dirichlet)**.** *Sind die Partialsummen der Reihe* $\sum_{k\geq 0} z_n$ *beschränkt und ist* (p_n) *eine monoton fallende Nullfolge, dann ist die Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n p_n$$

konvergent.

Beispiel. $z_n = (-1)^{n+1}, p_n = \frac{1}{n}$ erfüllt die Annahme von Satz 5.12, also folgt 5.11 aus 5.12.

Beweis. Wir verwenden das Cauchy-Kriterium für Reihen (5.3). Sei $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} z_k$. Dann gilt für $n > m$:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=m+1}^{n} z_k p_k \\
&\qquad = \sum (s_k - s_{k-1}) p_k \\
&\qquad = \sum_{k=m+1}^{n} s_k p_k - \sum_{k=m}^{n-1} s_k p_{k+1} \\
&\qquad = \sum_{k=m+1}^{n-1} s_k (p_k - p_{k+1}) + s_n p_n - s_m p_{m+1}
\end{aligned}$$

Wir wissen, dass $M = \sup |s_n| < \infty$. Also gilt für $n > m$:

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{k=m+1}^{n} z_k p_k\right| \\
&\qquad \le \sum_{k=m+1}^{n-1} |s_k||p_k - p_{k-1}| + |s_n|p_n + |s_{m-1}|p_m + 1 \\
&\qquad \le M\left(\sum_{k=m+1}^{n-1} (p_k - p_{k+1}) + p_n + p_{m+1}\right) \\
&\qquad = M(p_{m+1} - p_n + p_n + p_{m+1}) = 2Mp_{m+1}
\end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Da $p_m \to 0$ $(m \to \infty)$, existiert $N \in \mathbb{N}$ mit

$$m \ge N \implies \left|\sum_{k=m+1}^{n} z_k p_k\right| \le 2mp_{m+1} < 2M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$$

Also ist die Reihe $\sum z_k p_k$ nach Satz 5.3 konvergent. ■

Beispiel. Wir betrachten $\sum\limits_{n\ge 1} \frac{z^n}{n}$ mit $z \in \mathbb{C}$. Für $|z| < 1$ ist diese Reihe absolut konvergent, denn

$$\left|\frac{z^n}{n}\right| |z^n| = |z|^n$$

Für $|z| > 1$ ist die Reihe divergent, denn $\frac{z^n}{n} \not\to 0$ $(n \to \infty)$ für $|z| > 1$. Für $z = 1$ haben wir Divergenz und für $z = -1$ ist die Reihe konvergent (alternierende harmonische Reihe). Sei jetzt $|z| = 1$ und $z \neq 1$. Wir wenden Satz 5.12 an mit $z_n = z^n$ und $p_n = \frac{1}{n}$. Es gilt

$$\sum_{k=0}^{n} z_k = \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

also

$$\left|\sum_{k=0}^{n} z^k\right| = \left|\frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}\right| = \frac{|1 - z^{n+1}|}{|1 - z|} \le \frac{1 + |z|^{n+1}}{|1 - z|} = \frac{2}{|1 - z|}$$

Also sind die Partialsummen beschränkt.

Folgerung. *Für $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ sind die Reihen*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n}$$

konvergent (siehe Blatt 9).

5.4 Umordnung von Reihen

Satz 5.13. *Ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ eine absolut konvergente Reihe ($z_k \in \mathbb{C}$) und $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv, dann ist auch die umsortierte Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_{\sigma(k))}$ absolut konvergent und*

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = \sum_{k=1}^{\infty} z_{\sigma(k)}$$

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $N := \max\{\sigma(1), \dots, \sigma(n)\}$, dann gilt für $m \geq N$:

$$\{\sigma(1), \dots, \sigma(n)\} \subset \{1, \dots, m\}$$

und folglich gilt

$$\sum_{k=1}^{n} |z_{\sigma(k)}| \leq \sum_{k=1}^{m} |z_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |z_k| < \infty$$

Also gilt

$$\sum_{k=1}^{n} |z_{\sigma(k)}| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

und die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_{\sigma(k)}$ ist absolut konvergent. Sei $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass

$$\sum_{k=m+1}^{n} |z_k| < \varepsilon \qquad \text{für } n > m \geq N$$

<u>Behauptung:</u> $\left|\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_{\sigma(k)} - \sum\limits_{k=1}^{m} z_k\right| \leq \varepsilon$ für $m \geq N$.
Sei $m \geq N$ und $N_m := \max\{\sigma^{-1}(1), \dots, \sigma^{-1}(m)\}$. Dann gilt für $n \geq N_m$:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_{\sigma(k)} - \sum_{k=1}^{m} z_k\right| \leq \sum_{k=m+1}^{\max\{\sigma(k) | 1 \leq k \leq n\}} |z_k| < \varepsilon$$

Also im Limes $m \to \infty$

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} z_{\sigma(k)} - \sum_{k=1}^{m} z_k\right| \leq \varepsilon$$

D.h.

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = \lim_{m \to \infty} \sum_{k=1}^{m} z_k = \sum_{k=1}^{\infty} z_{\sigma(k)}$$

■

Für bedingt konvergente Reihe gilt Satz 5.13 nicht! Sei s die Summe der alternierenden harmonischen Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Dann ist $s \leq 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$. Wir vergleichen mit der umgeordneten Reihe

$$\left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6}\right)$$

Sei s'_n die Summe der ersten n Glieder diese Reihe. Dann ist $s'_3 = \frac{5}{6}$

$$s'_{3k} = s'_{3(k-1)} + \left(\frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k}\right) > \frac{1}{4k} + \frac{1}{4k} - \frac{1}{2k} = 0$$

Daraus folgt $s'_{3k} > s'_{3(k-1)} > \dots > s'_3 = \frac{5}{6}$. Das heißt, wenn die umgeordnete Reihe konvergent ist, dann ist die Summe

$$\lim_{k \to \infty} s'_{3k} > \frac{5}{6} \geq s$$

Satz 5.14 (Riemannscher Umordnungssatz). *Ist die Reihe* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ $(a_k \in \mathbb{R})$ *bedingt konvergent, dann gibt es zu jeder reellen Zahl* s *eine bijektive Abbildung* $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *mit*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} = s$$

Beweisskizze. Nach Voraussetzung ist $\sum a_k$ konvergent und $\sum |a_k| > \infty$. Also $\lim\limits_{n\to\infty} a_k = 0$ und die Summe der positiven Glieder ist $+\infty$ und die Summe der negativen Glieder ist $-\infty$. Seien (b_k) und (c_k) die Teilfolgen von (a_k) bestehend aus den positiven Gliedern $(b_k \geq 0)$ und den negativen Gliedern $(c_k < 0)$.
Sei $s > 0$. σ wird wie folgt konstruiert. Wir nehmen zu erst so viele positive Glieder, beginnend bei b_1 bis die Summe der Glieder zum ersten Mal s übersteigt. Dann addieren wir so viele Glieder beginnend bei c_1, bis wir zum ersten Mal unter s landen. Dann addieren wir wieder positive Glieder und so fort.
Die so umgeordnete Reihe konvergiert gegen s. ■

5.5 Die Exponentialfunktion

Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots$$

absolut konvergent. Durch diese Reihe wird die Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert, d.h.

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

Satz 5.15. *Falls* $z_n \to z$ $(n \to \infty)$, *dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n = \exp(z)$$

vgl. Blatt 8. Insbesondere ist $\exp(z) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$.

Beweis. Sei $z \in \mathbb{C}$ fest und $z_n \to z$ $(n \to \infty)$. Sei $\varepsilon > 0$ und $M \in \mathbb{N}$ so groß, dass

$$n \geq M \implies |z_n| \leq |z| + 1$$

und

$$\sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{(|z|+1)^k}{k!} < \frac{\varepsilon}{3}$$

Dann gilt für $n \geq M + 1$

$$
\begin{aligned}
&\left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{z_n^k}{n^k} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \\
&= \underbrace{\sum_{k=0}^{M} \left[\binom{n}{k} \frac{z_n^k}{n^k} - \frac{z^k}{k!}\right]}_{A_n} + \underbrace{\sum_{k=M+1}^{n} \binom{n}{k} \frac{z_n^k}{n^k}}_{B_n} - \underbrace{\sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{z^k}{k!}}_{C_M} \\
&= A_n + B_n - C_M
\end{aligned}
$$

Wobei

$$
\begin{aligned}
|C_M| &\leq \sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} < \frac{\varepsilon}{3} \\
|B_n| &\leq \sum_{k=M+1} \binom{n}{k} \frac{|z_n|^k}{n^k} \\
&= \sum_{k=M+1}^{n} \frac{(|z|+1)^k}{k!} \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \\
&< \frac{\varepsilon}{3}
\end{aligned}
$$

und $A_n \to 0$ $(n \to \infty)$, denn

$$
\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \to \frac{1}{k!} \ (n \to \infty)
$$

Also existiert ein $N \in \mathbb{N}$, $N \geq M+1$ mit $A_n < \frac{\varepsilon}{3}$ für $n \geq N$. Insgesamt:

$$
\begin{aligned}
n \geq N \implies &\left|(1+\frac{z}{n})^n - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\right| \\
&\leq |A_n| + |B_n| + |C_M| < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3}
\end{aligned}
$$

■

Theorem 5.16. *Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:*

(a) $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$ *(Funktionalgleichung)*

(b) $\exp(z) \neq 0$ *und* $\exp(-z) = (\exp(z))^{-1}$

(c) $\left|\exp(z) - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{z^k}{k!}\right| \leq \frac{|z|^N}{N!} \exp(|z|)$

(d) *Für $x \in \mathbb{R}$ gilt:* $\exp(x) > 0$ *und* $|\exp(ix)| = 1$

(e) $e = \exp(1)$ *ist irrational.*

Beweis.

(a)

$$\begin{aligned}
&\exp(z)\exp(w)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{w}{n}\right)^n\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n \left(1+\frac{w}{n}\right)^n\\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{z}{n}\right)\left(1+\frac{w}{n}\right)\right]^n\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z+w}{n}+\frac{zw}{n^2}\right)^n\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\underbrace{\left(z+w+\frac{zw}{n}\right)}_{\to z+w}\right)^n\\
&= \exp(z+w)
\end{aligned}$$

(b) $\exp(-z)\exp(z) = \exp(-z+z) = \exp(0) = 1$. Daraus folgt, dass $\exp(z) \neq 0$ und $\exp(-z) = \exp(z)^{-1}$.

(c)

$$\begin{aligned}
\left|\exp(z) - \sum_{k=0}^{N-1}\frac{z^k}{k!}\right| &= \left|\sum_{k=N}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\right|\\
&\leq \sum_{k=N}^{\infty}\frac{|z|^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{|z|^{k+N}}{(k+N)!}\\
&= \frac{|z|^N}{N!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|z|^k}{k!}\underbrace{\frac{k!N!}{(k+N)!}}_{\leq\binom{N+k}{k}^{-1}\leq 1}\\
&\leq \frac{|z|^N}{N!}\exp(|z|)
\end{aligned}$$

(d) Für $x \geq 0$ gilt $\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots \geq 1 > 0$ und $\exp(-x) = \exp(x)^{-1} > 0$.

$$\begin{aligned}
|\exp(ix)|^2 &= \overline{\exp(ix)}\\
&= \exp(-ix)\exp(ix)\\
&= \exp(-ix+ix) = \exp(0) = 1
\end{aligned}$$

Also ist $|\exp(ix)| = 1$. Wir haben 3.3 (1) verwendet.

(e) Wir zeigen, dass $\mathrm{e}^{-1} = \exp(1)^{-1} = \exp(-1) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}$ irrational ist. Für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt nach Satz 5.11

$$0 < \left|\mathrm{e}^{-1} - \sum_{k=0}^{N}(-1)^k\frac{1}{k!}\right| \leq \frac{1}{(N+1)!}$$

Die erste Ungleichung folgt aus der strikten Monotonie der Teilfolgen (s_{2n+1}), (s_{2n}) der Folge der Partialsummen (Übung). Also

$$0 < \left| N!\mathrm{e}^{-1} - \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \frac{N!}{k!} \right| \leq \frac{1}{N+1} < 1$$

Wäre e^{-1} rational, d.h. $\mathrm{e}^{-1} = \frac{m}{n}$, dann wäre $N!\mathrm{e}^{-1} \in \mathbb{Z}$ für N groß genug. Das ist im Widerspruch zu obiger Ungleichung.

■

Satz 5.17. *Für alle rationalen Zahlen $\frac{p}{q}$ $(p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N})$ gilt*

$$\exp\left(\frac{p}{q}\right) = \sqrt[q]{\mathrm{e}^p} = \left(\sqrt[q]{\mathrm{e}}\right)^p = e^{\frac{p}{q}}$$

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt nach Theorem 5.16

$$\exp(n) = \exp(1)^n = \mathrm{e}^n$$

und

$$\exp(-n) = \exp(n)^{-1} = (\mathrm{e}^n)^{-1} = \mathrm{e}^{-n}$$

Also gilt für alle ganzen Zahlen $p \in \mathbb{Z}$

$$\exp(p) = \mathrm{e}^p$$

Es folgt

$$\exp\left(\frac{p}{q}\right)^q = \exp(\frac{p}{q} \cdot q) = \exp(p) = \mathrm{e}^p$$

Da $\exp\left(\frac{p}{q}\right) > 0$ und die q-te Wurzel eindeutig ist, folgt

$$\exp\left(\frac{p}{q}\right) = \sqrt[q]{\mathrm{e}^p}$$

Es folgt

$$\left(\sqrt[q]{\mathrm{e}}\right)^p = \exp\left(\frac{1}{q}\right)^p = \exp\left(\frac{p}{q}\right)$$

D.h. $\exp(x) = \mathrm{e}^x$ für $x \in \mathbb{Q}$. Daher definiert man für alle $z \in \mathbb{C}$

$$\mathrm{e}^z = \exp(z)$$

Die Exponentialfunktion bildet $\mathbb{R}$ bijektiv auf $\mathbb{R}^+$ ab. Die Umkehrfunktion

$$\ln := \exp^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$

heißt **natürlicher Logarithmus**. Für alle $a > 0$ gilt also

$$a = \mathrm{e}^{\ln(a)} := \exp(\ln(a))$$

Daher definiert man für $x \in \mathbb{R}$ und $a > 0$

$$a^x := \mathrm{e}^{x\ln(a)} (= \exp(x\ln(a)))$$

Für $x \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$\cos x = \mathbf{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})$$

und

$$\sin x = \mathbf{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})$$

Es folgt

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x$$

Eulersche Formel (1748). Wir werden später sehen, dass für $x \in [0, 2\pi)$ das Kreissegment zwischen $\mathrm{e}^{\mathrm{i}0} = 1$ und $e^{\mathrm{i}x}$ die Länge x hat. ■

Satz 5.18. *Für $x \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

und

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

mit absolut konvergenten Reihen.

Bemerkung. *Allgemein gilt für eine konvergente Reihe $\sum z_k$, dass $\mathbf{Re}(\sum z_k) = \sum \mathbf{Re}(z_k)$ und $\mathbf{Im}(\sum z_k) = \sum(\mathbf{Im} z_k)$. (Blatt 9)*

Beweis: Satz 5.18. Es gilt

$$\begin{aligned}
\exp(\mathrm{i}x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}x)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}x)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\mathrm{i}x)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}x)^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \cos x + \mathrm{i}\sin x
\end{aligned}$$

■

5.6 Potenzreihen

Eine Reihe der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \tag{10}$$

mit $a_k \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}$ heoßt **Potenzreihe** mit Koeffizienten a_k. Konvergenz hängt von $z \in \mathbb{C}$ ab. Zum Beispiel ist $1 + z + z^2 + \dots$ konvergent für $|z| < 1$ und divergent für $|z| \geq 1$. Die Exponentialreihe ist konvergent für alle $z \in \mathbb{C}$. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$ ist für $z = 0$ konvergent (Quotientenkriterium).

Satz 5.19. *Die Potenzreihe (10) konvergiert absolut für $|z| < R$ und sie divergiert für $|z| > R$, wobei*

$$R = \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1}$$

wobei jetzt $\frac{1}{\infty} := 0$ und $\frac{1}{0} := \infty$. R heißt ***Konvergenzradius****.*

Beweis. Nach dem Wurzelkriterium ist die Reihe (1) absolut konvergent, wenn

$$1 > \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |z|$$

d.h., wenn $|z| < \frac{1}{R}$. Für

$$1 < \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \cdot |z|$$

ist die Reihe konvergent. ■

Bemerkung. *Gemäß Quotientenkriterium ist (10) absolut konvergent, wenn $|z| < R$ mit $R = \frac{1}{q}$, wobei $q = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ (sofern der Limes existiert) und die Reihe ist divergent für $|z| > \frac{1}{q}$.*

Beispiel.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\mathrm{i})^n}{(n+1)^3} z^n$. Dann ist $R^{-1} = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{(n+1)^3}} = 2 \cdot \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{(n+1)^3}} = 2$. Also ist $R = \frac{1}{2}$.

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\mathrm{i})^n}{(n+1)^3} z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\mathrm{i})^n}{(n+1)^3} (z^2)^n$. Nach (a) haben wir Konvergenz für $|z^2| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow |z| < \frac{1}{sqrt2}$ und Divergenz für $|z^2| > \frac{1}{2} \Leftrightarrow |z| > \frac{1}{sqrt2}$. Also ist $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$. **Alternativ:**

$$R^{-1} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\left|\frac{(2\mathrm{i})^n}{(n+1)^3}\right|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{2^n}{(n+1)^3}} = \sqrt{2}$$

Also ist $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Die beiden Potenzreihen

$$\sum_{k\geq 0} a_k z^k = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots \tag{11}$$

und

$$\sum_{\ell\geq 0} b_\ell z^k = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots \tag{12}$$

seien absolut konvergent für ein gegebenes $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Wir multiplizieren das Produkt von (11) und (12) wie folgt

$$(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots)(b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots) = a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) z + (a_2 b_0 a_1 b_1 + a_0 b_2) z^2 + \ldots$$

Die Reihe heißt **Cauchy-Produkt** der Reihen (11) und (12).

Theorem 5.20. *Sind die Reihen (11) und (12) absolut konvergent im $z \in \mathbb{C}$, dann auch die Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \text{ mit } c_n = \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell b_{n-\ell}$$

und es gilt, dass

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell z^\ell\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

Bemerkung: *Es gilt auch*

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell z^\ell\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{\ell=0}^{\infty} a_k b_\ell z^{k+\ell}\right)$$

Beweis. Es genügt, den Fall $z = 1$ zu betrachten

$$\begin{aligned}
&\left|\left(\sum_{k=0}^{N} a_k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{N} b_\ell\right) - \sum_{n=0}^{N} c_n\right| \\
&= \left|\sum_{\substack{0\le k\le N\\0\le \ell\le N}} a_k b_\ell - \sum_{n=0}^{N}\sum_{\ell=0}^{n} a_\ell b_{n-\ell}\right| \\
&= \left|\sum_{\substack{n+\ell>N\\k,\ell\le N}} a_k b_\ell\right| \\
&\le \sum_{\substack{n+\ell>N\\k,\ell\le N}} |a_k||b_\ell| \\
&\le \sum_{\substack{N/2<k<N\\0\le\ell\le N}} |a_k||b_\ell| + \sum_{\substack{0\le k\le N\\N/2<\ell\le N}} |a_k||b_\ell| \\
&\le \underbrace{\sum_{k\ge N/2} |a_k|}_{\to 0}\underbrace{\sum_{\ell\ge 0} |b_\ell|}_{<\infty} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|}_{<\infty}\underbrace{\sum_{\ell>N/2} |b_\ell|}_{\to 0}
\end{aligned}$$

Zusammengefasst:

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}|c_n| \le \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{n}|a_\ell||b_{n-\ell}| = \left(\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|\right)\left(\sum_{\ell=0}^{\infty}|b_\ell|\right) < \infty$$

■

Satz 5.21. *Falls die Summe der Reihen*

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

und

$$b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots$$

in einer ε-Umgebung von $z = 0$ oder wenigstens einer Nullfolge in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ übereinstimmen, dann gilt $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Sei $R > 0$ der kleinere der beiden Konvergenzradien und sei $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, $c_k = a_k - b_k$. Wir nehmen an, dass $c_n \neq 0$ für mindestens ein $k \in \mathbb{N}_0$ und wir definieren $N := \min\{k \in \mathbb{N}_0 \mid c_k \neq 0\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=N}^{\infty} c_k z^k \\ &= c_N z^N + \sum_{k=N+1}^{\infty} c_k z^k \end{aligned}$$

Also gilt für $|z| \leq \frac{R}{2}$:

$$\begin{aligned} |f(z) - c_n z^N| &\leq \sum_{k=N+1}^{\infty} |c_k||z|^k \\ &\leq |z|^{N+1} \sum_{k=N+1} |c_k||z|^{k-N-1} \\ &\leq |z|^{N+1} \underbrace{\left(\sum_{k=N+1}^{\infty} |c_k| \left(\frac{R}{2}\right)^k \right)}_{<\infty} \left(\frac{R}{2}\right)^{-N-1} \\ &= |z|^{N+1} c_R \end{aligned}$$

Also

$$|c_N z_k^N| = |f(z) - c_n z_k^N| \leq |z_k|^{N+1}$$

Somit gilt:

$$|c_N| \leq |z_k| c_R \to 0 \ (n \to \infty)$$

im Widerspruch zu Annahme $c_N \neq 0$. ∎

6 Stetige Funktionen

6.1 Definition und Beispiele

Sei $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$. Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ heißt **stetig** im Punkt $x \in D$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$y \in D, |y - x| < \delta \implies |f(y) - f(x)| < \varepsilon$$

d. h

$$f(\mathbb{B}_\delta(x) \cap D) \subset \mathbb{B}_\varepsilon(f(x))$$

bzw.

$$|h| < \delta \text{ und } x + h \in D \implies |f(x+h) - f(x)| < \varepsilon$$

Die Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ heißt **stetig**, wenn sie in jedem Punkt $x \in D$ stetig ist.

Beispiel.

1. $f(x) = ax + b \qquad a, b \in \mathbb{C}$ ist stetig auf $\mathbb{R}$.

   Beweis. Sei $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$. Wir wählen $\delta := \frac{\varepsilon}{|a|+1}$. Sei $y \in \mathbb{R}$ mit $|y - x| < \delta = \frac{\varepsilon}{|a|+1}$, dann gilt $|f(y) - f(x)| = |ay - ax| = |a||y - x| < |a|\frac{\varepsilon}{|a|+1} < \varepsilon$. ∎

2. $f(x) = x^2$ ist stetig auf $\mathbb{R}$.

   Beweis. Sei $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$. Wir wählen $\delta := \min\{\frac{\varepsilon}{2|x|+1}, 1\}$. Dann gilt $h < \delta \implies |f(x+h) - f(x)| = |(x+h)^2 - x^2| = |2xh + h^2| = |h||2x + h| \leq |h|(2|x| + \underbrace{|h|}_{\leq 1}) \leq \frac{\varepsilon}{2|x|+1}(2|x| + 1) = \varepsilon$. ∎

3. Die **Dirichlet-Funktion**:

   $$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

   ist in keinem Punkt stetig.

4. Die Funktion

   $$f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

   ist nur stetig im Punkt $x = 0$ und in allen anderen Punkten unstetig.

Bemerkung. *In einem isolierten Punkt $a \in D$, d.h. $\mathbb{B}_\delta(a) \cap D = \{a\}$ ist **jede** Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ stetig. Wahr aber uninteressant.*

Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ heißt Lipschitz-stetig, wenn ein $L \geq 0$ existiert mit $|f(y) - f(x)| \leq L|y - x|$ für alle $x, y \in D$. L heißt **Lipschitz-Konstante** und Bedingung heißt Lipschitz-Bedingung. Jede Lipschitz-stetige Funktion ist stetig (wähle $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$.).

Beispiel.

- $f(x) = ax + b \quad a, b \in \mathbb{C}$ ist Lipschitz-stetig mit $L = |a|$.

- $f(x) = |x|$ ist Lipschitz-stetig mit $L = 1$.

Theorem 6.1. *Sei $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ und $x \in D$. Folgende Aussagen über $f\colon D \to \mathbb{C}$ sind äquivalent.*

(a) f ist stetig in x.

(b) Für jede Folge (x_n) in D mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.

Bemerkung.

1. *Eigenschaft (b) heißt auch Folgenstetigkeit von f in x.*
2. *Theorem 6.1 gilt auch, wenn in (b) nur Folgen aus $D \setminus \{x\}$ zugelassen werden.*

Beweis. **(a) $\implies$ (b):** Sei f stetig in x und sei (x_n) eine Folge in D mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Sei also $\varepsilon > 0$. Da f in x stetig ist, existiert ein $\delta > 0$ mit

$$|y - x| < \delta, y \in D \implies |f(y) - f(x)| < \varepsilon. \tag{13}$$

Da $x_n \to x$ existiert $N_\delta \in \mathbb{N}$ mit

$$n \geq N_\delta \implies |x_n - x| < \delta \tag{14}$$

Aus (13) und (14) folgt:

$$n \geq N_\delta \implies |x_n - x| < \delta \implies |f(x_n) - f(x)| < \varepsilon$$

Also $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.
(b) $\implies$ (a): Wir zeigen die Kontraposition. f ist stetig in x bedeutet:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall y \in D : |y - x| < \delta \implies |f(y) - f(x)| < \varepsilon$$

Die Negierung ist

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 : \exists y \in D : |y - x| < \delta \text{ und } |f(y) - f(x)| \geq \varepsilon$$

Insbesondere gilt $\neg(a) \implies$

$$\exists \varepsilon > 0 \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in D : |x_n - x| < \frac{1}{n} =: \delta \text{ und } |f(x_n) - f(x)| \geq \varepsilon$$

Da $x_n \to x$ und $f(x_n) \not\to f(x)$ ist (b) falsch. D.h. es gilt $\neg(b)$. ■

Folgerung.

1. *Die Funktion $x \mapsto \sqrt{x}$ ist stetig auf $[0, \infty)$, denn diese Funktion ist Folgen-stetig in jedem Punkt $x \geq 0$ (siehe Aufgabe 6.5).*
2. *Die Funktion $x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x}$, $\quad \alpha \in \mathbb{C}$ ist stetig auf $\mathbb{R}$.*

   Beweis. Sei $x \in \mathbb{R}$ und (x_n) eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Zu zeigen:

   $$\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{\alpha x_n} = \mathrm{e}^{\alpha x}$$

Für $n \in \mathbb{N}$ so groß, dass $|x_n - x| \leq 1$ gilt Folgendes

$$\begin{aligned}
|\mathrm{e}^{\alpha x_n} - \mathrm{e}^{\alpha x}| &= \left|\mathrm{e}^{\alpha x}\left(\mathrm{e}^{\alpha(x_n - x)} - 1\right)\right| \\
&\leq |\mathrm{e}^{\alpha x}|\left|\mathrm{e}^{\alpha(x_n - x)} - 1\right| \\
&\leq |\mathrm{e}^{\alpha x}|\,|\alpha(x_n - x)|\mathrm{e}^{|\alpha(x_n - x)|} \\
&= |\mathrm{e}^{\alpha x}|\,|\alpha||x_n - x|\mathrm{e}^{|\alpha||x_n - x|} \\
&\leq |\mathrm{e}^{\alpha x}|\,|\alpha||x_n - x|\mathrm{e}^{|\alpha|} \\
&\to 0 \quad (n \to \infty)
\end{aligned}$$

■

Satz 6.2. *Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ stetig im Punkt $a \in D$ und sei $f(a) > 0$. Dann existiert $\delta > 0$, so dass für alle $x \in B_\delta(a) \cap D$ gilt*

$$f(x) > \frac{f(a)}{2} > 0$$

Beweis. Wähle $\varepsilon = \frac{f(a)}{2} > 0$. Dann existiert $\delta > 0$ mit

$$|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Also

$$f(x) \geq f(a) - |f(x) - f(a)| > f(a) - \varepsilon = f(a) - \frac{f(a)}{2} = \frac{f(a)}{2}$$

■

6.2 Rechnen mit stetigen Funktionen

Sind $f\colon D(f) \to \mathbb{C}, \quad g\colon D(g) \to \mathbb{C}$ gegebene Funktionen, dann sind die Funktion

$$f + g, \quad f \cdot g, \quad \frac{f}{g}$$

definiert durch

$$\begin{aligned}
(f+g)(x) &:= f(x) + g(x) & D(f+g) &= D(f) \cap D(g) \\
(f \cdot g) &:= f(x) \cdot g(x) & D(f \cdot g) &= D(f) \cap D(g) \\
\left(\frac{f}{g}\right)(x) &:= \frac{f(x)}{g(x)} & D\left(\frac{f}{g}\right) &= D(f) \cap \{x \in D(g) \mid g(x) \neq 0\}
\end{aligned}$$

Die Funktion $|f|, \lambda f, \mathbf{Re}f, \mathbf{Im}f, \overline{f}$ sind auf $D(f)$ definiert durch

$$\begin{aligned}
|f|(x) &:= |f(x)| \\
(\lambda f)(x) &:= \lambda f(x) \\
(\mathbf{Re}f)(x) &:= \mathbf{Re}(f(x)) \\
(\mathbf{Im}f)(x) &:= \mathbf{Im}(f(x)) \\
\overline{f}(x) &:= \overline{f(x)}
\end{aligned}$$

Satz 6.3. *Sind f und g stetig in $x \in D(f) \cap D(g)$, dann auch $f + g, f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$ (wenn $g(x) \neq 0$). Ist f stetig in $x \in D(f)$, dann auch $\overline{f}, \mathbf{Re}f, \mathbf{Im}f, |f|, \lambda f$.*

Beweis. Sei $x \in D\left(\frac{f}{g}\right)$ und sei (x_n) eine Folge in $D\left(\frac{f}{g}\right)$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.Dann $g(x) \neq 0$ und $g(x_n) \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also gilt nach Satz 4.3

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f}{g}(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{\lim f(x_n)}{\lim g(x_n)} = \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{f}{g}\right)(x)$$

Nach Theorem 6.1 ist also $\frac{f}{g}$ stetig in x. Die übrigen Behauptungen wären analog bewiesen mit Hilfe von Satz 4.1 und Satz 4.3. ■

Folgerung.

3. $\cos$ *und* $\sin$ *sind stetig auf* $\mathbb{R}$, *denn* $x \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ *ist stetig nach Folgerung 2 und* $\cos(x) = \mathbf{Re}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}, \sin(x) = \mathbf{Im}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ *sind somit stetig nach Satz 6.3.*

4. *Potenzen* $x \mapsto x^n, \quad (n \in \mathbb{Z})$, *sind stetig auf* $\mathbb{R}$ *bzw.* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ *für* $n < 0$.

5. *Jedes Polynom*
$$p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$$
$a_k \in \mathbb{C}$, *ist stetig auf* $\mathbb{R}$.

6. *Jede rationale Funktion* $\frac{p}{q}$ *mit Polynomen* p *und* q *ist stetig auf* $\{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}$.

Satz 6.4. *Ist* $f\colon D(f) \to \mathbb{R}$ *stetig in* $a \in D(f), f(a) \in D(g)$ *und* $g\colon D(g) \to \mathbb{C}$ *stetig in* $f(a)$, *dann ist die Verknüpfung* $g \circ f$ *stetig in* a.

Beweis. Sei (x_n) eine Folge in $D(g \circ f) = D(f) \cap f^{-1}(D(g))$ und $x_n \to a \quad (n \to \infty)$. Da f in a stetig ist, gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$, da g stetig ist in $f(a)$ und $f(x_n) \to f(a)$ gilt

$$g(f(x_n)) \to g(f(a))$$

also ist $g \circ f$ stetig in a nach Theorem 6.1. ■

Beispiel.

- $x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ ist stetig als Verknüpfung von $f(x) = -\frac{x^2}{2}$ und $g(x) = \mathrm{e}^x$.
- Die Funktion $x \mapsto \sin\frac{1}{x}$ ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, denn $f(x) = \frac{1}{x}$ ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $g(x) = \sin x$ ist stetig auf $\mathbb{R}$.

6.3 Stetige Funktionen auf Intervallen

Theorem 6.5 (Zwischenwertsatz)**.** *Sei* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *stetig und sei* $f(a) < c < f(b)$ *(oder* $f(a) > c > f(b)$*). Dann existiert ein Punkt* $t \in (a,b)$ *mit* $f(t) = c$.

Beweis. Sei $f(a) < c < f(b)$. Wir konstruieren rekursiv eine Intervallschachtelung $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f(a_n) \leq c < f(b_n)$. Sei $[a_1, b_1] := [a, b]$ und wenn $[a_n, b_n]$ konstruiert ist und $m = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$, dann

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] = \begin{cases} [a_n, m] & f(m) > c \\ [m, b_n] & f(m) \leq c \end{cases}$$

Die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ impliziert die Existenz von $t \in \mathbb{R}$ mit $\{t\} = \bigcap_{n\geq 1}[a_n, b_n]$. Es gilt also $b_n - a_n \to 0 \quad (n \to \infty)$ und $a_n \leq t \leq b_n$. Also $\lim_{n\to\infty} a_n = t = \lim_{n\to\infty} b_n$. Da f stetig in t ist, folgt

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq c$$

Andererseits ist

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \geq c$$

Also folgt $f(t) = c$. ■

Satz 6.6. *Jedes reelle Polynom*

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$$

$a_0, ..., a_{n-1} \in \mathbb{R}$ *mit n ungerade hat mindestens eine reelle Nullstelle.*

Beweis. Für $x \neq 0$ gilt $p(x) = x^n f(x)$ mit

$$f(x) = 1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}$$

wobei $f(m) \to 1 \quad (m \to \infty)$ und $f(-m) \to 1 \quad (m \to \infty)$. D.h. für $m \in \mathbb{N}$ groß genug gilt $f(\pm\infty) > 0$. Da n ungerade ist, folgt

$$p(m) = m^n f(m) > 0$$

und

$$p(-m) = (-m)^n f(-m) < 0$$

$p\colon [-m, m] \to \mathbb{R}$ ist stetig und $p(-m) < 0 < p(m)$. Also existiert nach Theorem 6.5 $t \in (-m, m)$ mit $p(t) = 0$. ■

Satz 6.7. *Ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ (beschränkt oder unbeschränkt) wird durch eine stetige Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ auf ein Intervall $f(I)$ abgebildet. Wenn $\alpha = \inf_{x\in I} f(x)$ und $\beta = \sup_{x\in I} f(x)$, dann gilt $(\alpha, \beta) \subset f(I)$.*

Beweis. Sei $c \in (\alpha, \beta)$. Dann existieren $x_1, x_2 \in I$ mit $f(x_1) < c < f(x_2)$. Da I ein Intervall ist, ist auch $[x_1, x_2] \subset I$ (bzw. $[x_2, x_1] \subset I$). Also folgt aus Theorem 6.5, dass $t \in I$ existiert mit $f(t) = c$. M. a. W. $c \in f(I)$ und somit $(\alpha, \beta) \subset f(I)$. Da $\alpha \leq f(x) \leq \beta$ für alle $x \in I$, also ist $f(I)$ eines der Intervalle $(\alpha, \beta), (\alpha, \beta], [\alpha, \beta), [\alpha, \beta]$. ■

Beispiel.

1. Ist $I = (0, 1]$ und $f(x) = \frac{1}{x}$, dann ist $f(I) = [1, \infty)$
2. Ist $I = \mathbb{R}$ und $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, dann $f(I) = f(\mathbb{R}) = (0, 1]$.

Eine Funktion $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt **(streng) monoton wachsend**, wenn

$$a < b \implies f(a) \leq f(b) \quad (f(a) < f(b))$$

für $a, b \in D$. f heißt **(streng) monoton fallend**, wenn $-f$ (streng) monoton wachsend ist.

Theorem 6.8. *Sei $I \in \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend und stetig. Dann bildet f das Intervall I bijektiv auf das Intervall $J := f(I)$ ab und $f^{-1}\colon J \to I$ ist ebenfalls streng monoton wachsend und stetig.*

Beweis. Die Injektivität folgt aus der strengen Monotonie. $f\colon I \to J$ ist surjektiv, da $J = f(I)$ per Definition. J ist nach Satz 6.7 ein Intervall. Die Monotonie von f^{-1}: Es gilt

$$f(a) < f(b) \implies a < b, \tag{15}$$

was die strenge Monotonie von f^1 ist. (15) folgt aus der Tatsache, dass

$$a \geq b \implies f(a) \geq f(b),$$

was die Monotonie von f ist und die Kontraposition von (15) darstellt. Stetigkeit von f^{-1}: Sei $y_0 \in J$ und $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Zuerst sei x_0 ein innerer Punkt von I, d.h. $\exists \varepsilon > 0$ mit $[x_0 - \varepsilon, x + \varepsilon] \subset I$. Da f streng monoton ist, gilt

$$f(x_0 - \varepsilon) < f(x_0) < f(x_0 + \varepsilon)$$

Sei $\delta = \min\{f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0), f(x_0) - f(x_0 - \varepsilon)\}$. Dann gilt

$$\mathbb{B}_\delta(y_0) \subset (f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon)) = f(\mathbb{B}_\varepsilon(x_0))$$

Daraus folgt

$$f^{-1}(\mathbb{B}_\delta(y_0)) \subset f^{-1}(f(\mathbb{B}_\varepsilon(x_0))) = \mathbb{B}_\varepsilon(x_0) = \mathbb{B}_\varepsilon(f^{-1}(y_0))$$

Also ist f^{-1} stetig in y_0.
Sei nun $x_0 = \max I$. Dann ist $y_0 = f(x_0) = \max J$ und für $\varepsilon > 0$ klein genug, ist das $[x_0 - \varepsilon, x_0] \subset I$. Wegen der strengen Monotonie ist $f(x_0 - \varepsilon) < f(x_0) = y_0$. Sei $delta := f(x_0) - f(x_0 - \varepsilon)$, dann gilt

$$y_0 - \delta < y \leq y_0 \implies \underbrace{f^{-1}(y_0 - \delta)}_{x_0 - \varepsilon} < f^{-1}(y) \leq \underbrace{f^{-1}(y_0)}_{x_0}$$

$f^{-1}(\mathbb{B}_\delta(y_0) \cap J) \subset \mathbb{B}_\varepsilon(x_0) = \mathbb{B}_\varepsilon(f^{-1}(y_0))$. ∎

Wurzeln: $f\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ sei erklärt durch $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Dann ist f stetig, streng monoton wachsend und $f(0) = 0, f(x) \geq 0$ für alle $x \in [0, \infty)$ und $\sup_{x \geq 0} f(x) = \infty$. Also ist f bijektiv. Nach Theorem 6.8 ist $f^{-1}\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ streng monoton wachsend, stetig und $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$. Das zeigt, dass die $\sqrt[n]{x}$ für $x \geq 0$ existiert, einduetig und stetig von x abhängt. (Satz 4.7)

Ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ heißt **kompakt**, wenn I abgeschlossen und beschränkt ist, d.h. $I = [a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Theorem 6.9 (Satz vom Maximum)**.** *Eine stetige Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ nimmt auf einem kompakten Intervall I ihr Maximum und ihr Minimum an. D.h., es existieren $x_*, x^* \in I$ mit $f(x_*) \leq f(x) \leq f(x^*)$ für alle $x \in I$.*

Beweis. Sei $\beta = \sup_{x \in I} f(x)$ und sei (x_n) eine Folge in I mit $x_n \to \beta$ für $n \to \infty$. Da I beschränkt ist, ist auch die Folge (x_n) beschränkt. Also existiert eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k \geq 1}$, die konvergent ist, also

$$x^* = \lim_{k \to \infty} x_{n_k}$$

Sei $I = [a, b]$, dann $a \leq x_{n_k} \leq b$ und somit gilt auch $a \leq x^* \leq b$, d.h. $x^* \in I$. Da f stetig ist, folgt

$$f(x^*) = \lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = \beta$$

f hat dort ein Minimum, wo $-f$ ein Maximum hat. ∎

Bemerkung. *Theorem 6.9 gilt nicht für Intervalle, die nicht kompakt sind oder Funktionen f, die nicht stetig sind.*

Beispiel.

1. $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$ nimmt weder Minimum noch Maximum an, denn $(0,1)$ ist nicht kompakt.

2. $f\colon [1,\infty] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x}$ ist stetig, hat das Maximum 1, aber f hat kein Minimum, weil $[1,\infty)$ nicht beschränkt.

3. $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} x & x > 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$. $[0,1]$ ist kompakt, aber f ist nicht stetig und f hat kein Minimum.

Korollar 6.10. *Eine stetige Funktion $f\colon I \to \mathbb{C}$ auf einem kompakten Intervall $I \in \mathbb{R}$ ist beschränkt, d.h.*

$$\sup_{x\in I} |f(x)| < \infty$$

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass $x \mapsto |f(x)|$ stetig ist. Dazu zeigen wir, dass $x \mapsto |f(x)|$ folgenstetig ist. Sei $x \in I$ und sei (x_n) eine Folge in I mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$. Mit Satz 4.1 (d) folgt

$$\lim_{n\to\infty} |f(x_n)| = |f(x)|$$

Also ist $x \mapsto |f(x)|$ stetig. ■

Gleichmäßige Stetigkeit Betrachten wir die Funktion $f(x) = x^2$. Dann ist da δ zu einem gegebenen ε abhängig von ε (das ist nicht erstaunlich!) und von x. Andererseits ist das δ bei $f(x) = ax + b$ nur abhängig von ε und a, nämlich $\delta = \frac{\varepsilon}{|a|+1}$.
Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ heißt **gleichmäßig stetig**, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für $x, y \in D$

$$|y - x| < \delta \implies |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

Gleichmäßig stetige Funktionen sind stetig. Lipschitz-stetige Funktionen sind gleichmäßig stetig $\delta = \varepsilon/L$. f ist nicht gleichmäßig stetig, wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert ohne „passendes“ δ, d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $x, y \in D$ mit $|x - y| < \delta$ und $f(y) - f(x)| \geq \varepsilon$.

Beispiel.

1. $f(x) = x^2$ ist **nicht** gleichmäßig stetig.

   Beweis. Sei $\varepsilon = 1$ und sei $\delta > 0$ und $x = \frac{1}{\delta}$ und $y = x + \frac{\delta}{2}$. Dann ist $|y - x| = \frac{\delta}{2} < \delta$ und $|f(y) - f(x)| = |(x + \delta/2)^2 - x^2| = |x\delta + \delta^2/4| = 1 + \delta^2/4 > 1 = \varepsilon$. ■

2. $f(x) = \frac{1}{x}$ ist nicht gleichmäßig stetig auf $(0,1]$ (Blatt 11).

3. $f(x) = \sqrt{x}$ ist gleichmäßig stetig auf $[0,1]$. Siehe Theorem 6.11.

Theorem 6.11. *Eine stetige Funktion $f\colon I \to \mathbb{C}$ auf einem* ***kompakten*** *Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig.*

Beweis. Angenommen, f sei stetig, aber nicht gleichmäßig stetig. Also existiert $\varepsilon > 0$ ohne passendes $\delta > 0$, insbesondere passt $\delta = \frac{1}{n}$ nicht, d. h. für alle $n \in \mathbb{N}$ existieren zwei Punkte $x_n, y_n \in I$ mit $|y_n - x_n| < \frac{1}{n}$ und $|f(y_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon$. (x_n) ist beschränkt, da I beschränkt ist, also existiert eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}) und $x = \lim_{k\to\infty} \in I$, denn I ist abgeschlossen. Da $|y_{n_k} - x_{n_k}| < \frac{1}{n_k} \to \infty$ für $k \to \infty$. Also

$$|y_{n_k} - x| \leq |y_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

Da f stetig ist in x, gilt $f(x) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(y_{n_k})$. Also

$$|f(y_{n_k}) - f(x_{n_k})| \leq |f(x_{n_k}) - f(x)| + |f(x) - f(y_{n_k})|$$

im Widerspruch zu $|f(y_{n_k}) - f(x_{n_k})| \geq \varepsilon$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Also ist die Annahme falsch. ■

6.4 Grenzwerte von Funktionen

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a$$

Für $\delta > 0$ und $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ definieren wir **punktierte δ-Umgebungen** von x_0 durch

$$\dot{\mathbb{B}}_\delta(x_0) = \mathbb{B}_\delta(x_0) \setminus \{x_0\},$$

für $x_0 = \infty$

$$\dot{\mathbb{B}}_\delta(x_0) = \left(\frac{1}{\delta}, \infty\right)$$

und für $x_0 = -\infty$

$$\dot{\mathbb{B}}_\delta(x_0) = \left(-\infty, -\frac{1}{\delta}\right).$$

Sei $D \subset \mathbb{R}$. Ein Punkt $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ heißt Häufungspunkt von D, wenn für alle $\delta > 0$

$$\dot{\mathbb{B}}_\delta(x_0) \cap D \neq \emptyset.$$

Lemma 6.12. *$x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann ein Häufungspunkt von $D \in \mathbb{R}$, wenn es eine Folge (x_n) in $D \setminus \{x_0\}$ gibt, mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. (Beweis: Übung)*

Sei $D \subset \mathbb{R}$ und sei $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ ein Häufungspunkt von D. Die Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ hat in x_0 den **Grenzwert** $a \in \mathbb{C}$, in Zeichen

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a, \quad f(x) \to a \quad (x \to x_0),$$

wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$x \in \dot{\mathbb{B}}_\delta(x_0) \cap D \implies |f(x) - a| < \varepsilon$$

Der Grenzwert ist eindeutig, falls er existiert (Übung, bzw. Satz 6.14).

Beispiel.

- $\lim_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$. ($\delta = \varepsilon^2$).
- $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$. ($\delta = \varepsilon$).

Beweis. Für $x \in \left(\frac{1}{\delta}, \infty\right) = \left(\frac{1}{\varepsilon}, \infty\right)$ ist $x > \frac{1}{\varepsilon}$ und somit $\frac{1}{x} < \varepsilon$. Also $\left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon$. ∎

- $\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ existiert nicht (Übung).

Satz 6.13. *Sei $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt von D. Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ ist genau dann stetig in x_0, wenn $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

Beweis. Vergleiche die ε-δ-Definition der Stetigkeit mit der Definition vom Grenzwert. ∎

Beispiel. $\lim_{x\to 0}(\sin e^{-x}) \overset{\text{Satz 6.13}}{=} \sin(e^{-0}) = \sin(1)$.

Wenn $f\colon D \to \mathbb{C}$ in x_0 nicht definiert oder nicht stetig ist, aber eine Funktion $\tilde{f}\colon D \cup \{x_0\} \to \mathbb{C}$ existiert, die in x_0 stetig ist und mit f auf $D \setminus \{x_0\}$ übereinstimmt, dann

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \tilde{f}(x) = \tilde{f}(x_0)$$

Die Funktion $\tilde{f}$ heißt **stetige Fortsetzung von** $f \restriction D \setminus \{x_0\}$ **in den Punkt** x_0.

Satz 6.14. *Folgende Aussagen über $f\colon D \to \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}$ und einen Häufungspunkt $x_0 \in \mathbb{R}$ von D sind äquivalent.*

(a) $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$

(b) $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$ *für jede Folge (x_n) in $D \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$.*

(c) *$f \restriction D \setminus \{x_0\}$ hat eine stetige Fortsetzung in den Punkt x_0, die dort den Wert a hat.*

Beweis. Sei $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in D \setminus \{x_0\} \\ a & x = x_0 \end{cases}$. Dann gilt $|f(x) - a| = |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(x_0)|$ für $x \in D \setminus \{x_0\}$. Also (a) $\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} \tilde{f}(x) = \tilde{f}(x_0) \Leftrightarrow \tilde{f}$ ist stetig in $x_0 \Leftrightarrow$ (c). Andererseits gilt $\tilde{f}$ ist stetig in $x_0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \tilde{f}(x_n) = \tilde{f}(x_0)$ für jede Folge (x_n) in $D \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$ (vgl. Theorem 6.1 und die anschließende Bemerkung) $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$ für alle Folgen (x_n) wie oben $\Leftrightarrow$ (b). ∎

Folgerung. $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *existiert ist äquivalent zu $f \restriction (D \setminus \{x_0\})$ hat eine stetige Fortsetzung in den Punkt x_0.*

Satz 6.15 (Rechenregeln)**.** *Alle Funktionen im Folgenden seien auf $D \subset \mathbb{R}$ definiert und $x_0 \in \mathbb{R}$ sei ein Häufungspunkt von D. Für $\lim_{x\to x_0}$ schreiben wir $\lim$.*

(a) $\lim f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim |f(x)| = 0$.

(b) *Falls $|f(x)| \le p(x)$ in $\dot{\mathbb{B}}_\delta(x_0) \cap D$ und $\lim p(x) = 0$, dann gilt $\lim f(x) = 0$.*

(c) *Aus $\lim f(x) = a$ und $\lim g(x) = b$ folgt $\lim(f(x) + g(x)) = a + b$, $\lim f(x)g(x) = ab$ und für $b \neq 0$ ist $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$. Die Funktionen $\overline{f}, \mathbf{Re}f, \mathbf{Im}f, |f|$ und λf streben gegen $\overline{a}, \mathbf{Re}a, \mathbf{Im}a, |a|$ und λa für $x \to x_0$.*

(d) *Wenn zusätzlich zu (c) $f(x) \le g(x)$ in $\dot{\mathbb{B}}_\delta(x_0) \cap D$, dann gilt $a \le b$.*

(e) *Falls $f_1 \le g \le f_2$ in $\dot{\mathbb{B}}_\delta(x_0) \cap D$ und $\lim f_1(x) = a = \lim f_2(x)$, dann gilt $\lim g(x) = a$.*

Beweis. **(a)**, **(b)** sind unmittelbare Konsequenzen aus der Definition des Grenzwerts.
(c) Nach Satz 6.14 gibt es stetige Fortsetzungen $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$ von $f \restriction D \setminus \{x_0\}$, $g \restriction D \setminus \{x_0\}$ in den Punkt x_0. $\tilde{f} + \tilde{g}$ ist stetig in x_0 (Satz 6.3). Also

$$\lim f(x) + g(x) = \lim(\tilde{f} + \tilde{g}) = (\tilde{f} + \tilde{g})(x_0) = \tilde{f}(x_0) + \tilde{g}(x_0) = a + b$$

(d) $a > b \Leftrightarrow \tilde{f}(x_0) > \tilde{g}(x_0) \implies \tilde{f}(x_0) > \tilde{g}(x_0)$ für $x \in \dot{\mathbb{B}}_\delta(x_0) \cap D$ und δ klein genug. (Satz 6.2). $\Leftrightarrow f(x) > g(x)$ für $x \in \dot{\mathbb{B}}_\delta(x_0) \cap D$. (Wir haben die Kontrapostion bewiesen).
(e) ist zur Übung überlassen. ■

Lemma 6.16.

1. *Für* $\alpha \in \mathbb{C}$ *gilt*
$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{x} = \alpha$$

2. *Es ist*
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Beweis. Es gilt (Theorem 5.16)

$$\mathrm{e}^{\alpha x} = 1 + \alpha x + R(\alpha x)$$

wobei $|R(z)| \leq \frac{|z|^2}{2}\mathrm{e}^{|z|}$. Also gilt

$$\left|\frac{\mathrm{e}^{\alpha x} - 1}{x} - \alpha\right| = \frac{1}{|x|}\left|\mathrm{e}^{\alpha x} - 1 - \alpha x\right| \leq \frac{1}{|x|}\frac{|\alpha x|}{2}\mathrm{e}^{\alpha x} = \frac{|\alpha|}{2}|x|\mathrm{e}^{|\alpha||x|} =: p(x)$$

Da p stetig ist, gilt
$$\lim x \to 0 p(x) = p(0) = 0.$$
Mit Satz 6.15 (b) folgt also
$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{\mathrm{e}^{\alpha x} - 1}{x} - \alpha\right) = 0$$
und somit folgt (1).
(2): Es gilt
$$\frac{\sin x}{x} = \mathbf{Im}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x} = \mathbf{Im}\,\underbrace{\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - 1}{x}}_{\to \mathrm{i}} \to \mathbf{Im}\,\mathrm{i} = 1$$

■

Satz 6.17. *Falls der Grenzwert*
$$y_0 = \lim_{x \to x_0} f(x)$$
existiert und eine zweite Funktion g in y_0 stetig ist, dann

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(y_0)$$

Beweis. Sei $\tilde{f}$ stetige Fortsetzung von f in den Punkt x_0. Dann ist $\tilde{f}(x_0) = y_0$ und $g \circ \tilde{f}$ ist stetig in x_0. Also
$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{x \to x_0} g(\tilde{f}(x)) = g(\tilde{f}(x_0)) = g(y_0)$$

■

Mögliche Anwendung: Sei $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig, dann ist

$$\lim_{x\to 0} g\left(\frac{\sin x}{x}\right) = g(1)$$

Beispiel.

$$\lim_{x\to\infty} x^n \mathrm{e}^{-x} = 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$. Also ist $x^n \mathrm{e}^{-x} < x^n \frac{(n+1)!}{x^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{x} \to 0$ und die Behauptung folgt aus Satz 6.15 (b).

Theorem 6.18 (Cauchy-Kriterium). *Sei $f\colon D \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ ein Häufungspunkt von D. Dann sind äquivalent:*

(a) $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *existiert.*

(b) Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$x, y \in \dot{\mathbb{B}}_\delta(x_0) \cap D \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Beweis. $\underline{\text{(a)} \implies \text{(b)}}$: Sei $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ und sei $\varepsilon > 0$, dann existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$x \in \dot{\mathbb{B}}_\delta(x_0) \cap D \implies |f(x) - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Dann gilt:

$$x, y \in \dot{\mathbb{B}}_\delta(x_0) \cap D \implies |f(x) - f(y)| \leq |f(x) - a| + |a - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\underline{\text{(b)} \implies \text{(a)}}$: Da x_0 ein Häufungspunkt von D ist, existiert eine Folge (x_n) in $D \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0 \quad (n \to \infty)$. Sei $\varepsilon > 0$. Nach (b) existiert $\delta > 0$ mit

$$x, y \in \dot{\mathbb{B}}_\delta(x_0) \cap D \implies |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{16}$$

Sei $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass

$$n \geq N \implies x_n \in \dot{\mathbb{B}}_\delta(x_0)$$

Also

$$n, m \geq N \implies x_n, x_m \in \dot{\mathbb{B}}_\delta(x_0) \cap D \implies |f(x_n) - f(x_m)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

D.h. $f(x_n)$ ist Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$. Also

$$a = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \in \mathbb{C}$$

Nach (16)

$$x \in \dot{\mathbb{B}}_\delta(x_0) \cap D \implies |f(x) - a| = \lim_{n\to\infty} \underbrace{|f(x) - f(x_n)|}_{< \frac{\delta}{2} \text{ für } n \geq N} < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

D.h.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a$$

■

Anwendung: Ist $f\colon (a,b) \to \mathbb{C}$ gleichmäßig stetig, dann existieren die Grenzwerte

$$\lim_{x\to a} f(x) \text{ und } \lim_{x\to b} f(x)$$

Beweis. Zu $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$, so dass

$$|x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Also gilt

$$x, y \in \dot{\mathbb{B}}_\delta(a) \cap (a,b) \implies |x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Also existiert

$$\lim_{x\to a} f(x)$$

nach Theorem 6.18. ■

Folgerung. *Eine Funktion $f\colon (a,b) \to \mathbb{C}$ ist genau dann gleichmäßig stetig, wenn es eine stetige Funktion $\tilde{f}\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ mit $\tilde{f} = f$ auf (a,b).*

Uneigentliche Grenzwerte

Beispiel. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|} = \infty$.

Wir definieren

$$\mathbb{B}_\varepsilon(\infty) = \left(\frac{1}{\varepsilon}, \infty\right) \text{ und } \mathbb{B}_\varepsilon(-\infty) = \left(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

Für $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ Häufungspunkt von D und eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ sagen wir f hat in x_0 den uneigentlichen Grenzwert $\pm\infty$, in Zeichen

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty,$$

wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$x \in \dot{\mathbb{B}}_\delta(x_0) \cap D \implies f(x) \in \mathbb{B}_\varepsilon(\pm\infty).$$

Satz 6.19. *Sei $a, x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$, x_0 ein Häufungspunkt von $D \subset \mathbb{R}$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:*

(a) $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$

(b) $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$ *für jede Folge in* $D \setminus \{x_0\}$ *mit* $x_n \to x_0$

Für $x, a \in \mathbb{R}$ ist das (eine Folge von) Satz 6.14. In den anderen Fällen kann n wie im Beweis von Theorem 6.1 argumentieren (stetig = Folgen-stetig) argumentieren.

Satz 6.20. *Sei $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ ein Häufungspunkt von D und sei $f\colon D \to \mathbb{R} \setminus \{a\}$ eine Funktion mit $f(x) \to a \in \bar{\mathbb{R}} \quad (x \to x_0)$. Dann gilt*

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = \lim_{y\to a} g(y)$$

sofern die rechte Seite als eigentlicher Grenzwert oder uneigentlicher Grenzwert existiert. Vergleiche dazu Satz 6.17.

Beweis. Wir verwenden Satz 6.19. Sei (x_n) eine Folge in $D \setminus \{x_0\}$ mit $\lim x_n = x_0$. Dann gilt nach Annahme $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$ (Satz 6.19), wobei $(f(x_n))$ eine Folge in $\mathbb{R} \setminus \{a\}$. Da $\lim_{y\to a} g(y)$ existiert, folgt mit Satz 6.19, dass

$$\lim_{n\to\infty} g(f(x_n)) = \lim_{y\to a} g(y)$$

■

Beispiel.

1. $\lim_{y\to 0} \ln(y) = -\infty$. Es gilt mit $y = \mathrm{e}^x = f(x)$ $\lim_{y\to 0} \ln(y) = \lim_{y\to 0} = \lim_{x\to -\infty} \ln(\mathrm{e}^x) = \lim_{x\to -\infty} x = -\infty$.

2. $\lim_{y\to 0} y\ln(y) = \lim_{x\to -\infty} \mathrm{e}^x \ln(\mathrm{e}^x) = \lim_{x\to -\infty} \mathrm{e}^x x = -\lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{-x} x = 0$.

Einseitige Grenzwerte

Sei $D \subset \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$ und $D_+ = \{x \in D \mid x > x_0\}$. Dann hat $f\colon D \to \mathbb{C}$ den rechtsseitigen Grenzwert $a \in \mathbb{C}$, in Zeichen

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = a \text{ oder } f(x_0+) = a,$$

falls $f \upharpoonright D_+$ in x_0 den Grenzwert a hat. Ist $x_0 \in D$, dann heißt f **rechtsseitig stetig** in x_0, wenn

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0).$$

Der linksseitige Grenzwert und die Eigenschaft **linksseitig stetig** werden analog definiert.

Beispiel. Die Gaußklammer $[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$ ist rechtsseitig stetig, aber nicht linksseitig stetig.

Satz 6.21. *Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ ist in einem (inneren) Punkt $x_0 \in D$ genau dann stetig, wenn die $f(x_0\pm)$ existieren und*

$$f(x_0-) = f(x_0) = f(x_0+).$$

Beweis. Sei $f(x_0-) = f(x_0) = f(x_0+)$ und sei $\varepsilon > 0$. Dann existieren $\delta_+, \delta_- > 0$ mit

$$x_0 - \delta_- < x < x_0 \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

und für

$$x_0 < x < x_0 + \delta_+ \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Sei $\delta := \min\{\delta_-, \delta_+\} > 0$, dann gilt

$$x \in \mathbb{B}_\delta(x_0) \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

und f ist stetig in x_0.
Umgekehrt, wenn f stetig ist in x_0, dann ist

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

also ist auch

$$\lim_{x\to x_0\pm} f(x) = f(x_0)$$

■

Art der Unstetigkeit: Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ hat in $x_0 \in D$ eine Unstetigkeit **erster Art**, wenn $f(x_0\pm)$ existieren, aber nicht beide mit $f(x_0)$ übereinstimmen. D.h. , wenn $f(x_0-) \neq f(x_0+)$ (Sprungstelle) oder $f(x_0-) = f(x_0+) \neq f(x_0)$.
Wenn $f(x_0-)$ oder $f(x_0+)$ nicht existiert, dann ist die Unstetigkeit von **zweiter Art**.

Beispiel. Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \geq 0 \\ x & x < 0 \end{cases}$$

hat in $x = 0$ eine Unstetigkeit erster Art. Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

hat in $x = 0$ eine Unstetigkeit zweiter Art.

Monotone Funktionen

Lemma 6.22. *Ist $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ monoton wachsend, dann existieren die einseitigen Grenzwerte $f(a+)$ und $f(b-)$ und*

$$f(a+) = \inf\{f(x) \mid x \in (a,b)\} \geq -\infty$$

und

$$f(b-) = \sup\{f(x) \mid x \in (a,b)\} \leq \infty.$$

Ein analoges Resultat gilt für monoton fallende Funktionen.

Beweis. Sei $\beta = \sup\{f(x) \mid x \in (a,b)\} < \infty$ und sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $x_\varepsilon \in (a,b)$ mit $\beta - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \leq \beta$. Sei $\delta = b - x_\varepsilon > 0$. Dann gilt

$$b - \delta < x < b \implies f(x) \geq f(b-\delta) = f(x_\varepsilon) > \beta - \varepsilon$$

und $f(x) \leq \beta$, also $\beta - \varepsilon < f(x) \leq \beta$. Also ist

$$\lim_{x \to b-} f(x) = \beta$$

Die übrigen Fälle werden analog behandelt. ■

Theorem 6.23. *Ist $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ monoton wachsend und $x_0 \in (a,b)$, dann existieren $f(x_0\pm)$ und es gilt*

$$f(x_0-) \leq f(x) \leq f(x_0+)$$

Beweis. Nach Lemma 6.22 gilt, dass

$$f(x_0-) = \sup\{f(x) \mid a < x < x_0\} \leq f(x_0)$$

andererseits

$$f(x_0) \leq \inf\{f(x) \mid x_0 < x < b\} = f(x_0+).$$

■

Korollar 6.24. *Eine monotone Funktion $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ ist stetig bis auf abzählbar viele Sprungstellen.*

Beweis. Sei $x_0 \in (a,b)$ eine Unstetigskeitsstelle. Dann gilt nach Theorem 6.23

$$f(x_0-) < f(x_0+)$$

Also ist x_0 eine Sprungstelle. Also existiert eine rationale Zahl $r(x_0) \in \mathbb{Q}$ mit $f(x_0-) < r(x_0) < f(x_0+)$. Sind $x_1 < x_2$ zwei Sprungstellen, dann $f(x_1+) \leq f(x_2-)$ und somit

$$r(x_1) < f(x_1+) \leq f(x_2-) < r(x_2)$$

Also ist $x \mapsto r(x)$ ist eine injektive Abbildung von den Sprungstellen von f in $\mathbb{Q}$. Also ist die Menge der Sprungstellen von f abzählbar. ∎

6.5 Logarithmus

$\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig, $\mathrm{e}^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und exp ist streng monoton wachsend, denn $\mathrm{e}^k > 1$ für $k > 0$, also

$$\mathrm{e}^{x+k} = \mathrm{e}^k \mathrm{e}^x > e^x$$

also

$$\lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^x = \sup \mathrm{e}^x = \infty$$

und

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = \lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x} = 0.$$

Also $\exp(\mathbb{R}) = (0,\infty)$. Somit ist

$$\exp\colon \mathbb{R} \to (0,\infty)$$

streng monoton wachsend, stetig und bijektiv. Die Inverse

$$\ln\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$$

ist streng monoton wachsend und stetig (Theorem 6.8). Also gilt

$$\exp(\ln(x)) = x \text{ für } x > 0$$

und

$$\ln(\exp(x)) = x \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

Aus der Monotonie von ln folgt (Lemma 6.22)

$$\lim_{y\to 0+} \ln(y) = \inf_{y>0} \ln(y) = -\infty$$

Für $u, v > 0$ gilt (Übung)

$$\ln(uv) = \ln(u) + \ln(v) \text{ und } \ln\left(\frac{u}{v}\right) = \ln(u) - \ln(v)$$

Satz 6.25. *Für alle* $a > 0$ *und* $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ *gilt* $\ln(a + \frac{p}{q}) = \frac{p}{q}\ln(a)$.

Beweis. Für $p \in \mathbb{Z}$ gilt

$$a^p = (\mathrm{e}^{\ln(a)})^p = \mathrm{e}^{p\ln(a)} \implies \ln(a^p) = p\ln(a)$$

Daraus folgt wegen $(a^{\frac{p}{q}})^q = a^p$

$$q\ln(a^{\frac{p}{q}}) = \ln((a^{\frac{p}{q}})^q) = \ln(a^p) = p\ln(a) \implies \ln(a^{\frac{p}{q}}) = \frac{p}{q}\ln(a)$$

∎

Nach Satz 6.25 gilt

$$a^{\frac{p}{q}} = \mathrm{e}^{\frac{p}{q}\ln(a)}$$

Das motiviert die Definition

$$a^x := \mathrm{e}^{x\ln(a)} \qquad (x \in \mathbb{R}, a > 0)$$

Satz 6.26. *Für $a, b > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gilt*

(a) $\ln(a^x) = x\ln(a)$

(b) $a^{x+y} = a^x a^y$

(c) $(a^x)^y = a^{xy}$

(d) $a^x b^x = (ab)^x$

Beweis.

(a) folgt direkt aus der Definition von a^x.

(b) $a^{x+y} = \mathrm{e}^{(x+y)\ln(a)} = \mathrm{e}^{x\ln(a)}\mathrm{e}^{y\ln(a)} = a^x a^y$.

(c) $(a^x)^y = \mathrm{e}^{y\ln(a^x)} = \mathrm{e}^{yx\ln(a)} = a^{xy}$

(d) $a^x b^x = \mathrm{e}^{x\ln(a)}\mathrm{e}^{x\ln(b)} = \mathrm{e}^{x(\ln(a)+\ln(b))} = \mathrm{e}^{x\ln(ab)} = (ab)^x$

■

Satz 6.27. *Für $\alpha > 0$ gilt:*

(a) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$

(b) $\lim_{x\to\infty} x^\alpha \ln(x) = 0$

Beweis.

(a) Per Definition von x^α gilt:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\mathrm{e}^{\alpha\ln(x)}} = \lim_{y\to\infty} \frac{y}{\mathrm{e}^{\alpha y}} = 0$$

(b)

$$\lim_{x\to 0} x^\alpha \ln(x) = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{y^\alpha}\ln(y) = \lim_{y\to 0} \frac{-\ln(y)}{y^\alpha} = 0$$

■

6.6 Hyperbolische Funktionen

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt **gerade**, wenn $f(-x) = f(x)$ für $x \in \mathbb{R}$, sie heißt **ungerade**, wenn $f(-x) = -f(x)$ für $x \in \mathbb{R}$. Jede Funktion lässt sich zerlegen

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

in einen geraden Anteil und einen ungeraden Anteil. Zum Beispiel sind

$$\cosh(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \text{ und } \sinh(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

der gerade und der ungerade Anteil von exp. Es gilt

$$(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1$$

Hyperbolischer Sinus und Areasinus: $\sinh(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$ ist die Summe der streng monoton wachsenden Funktionen $\frac{\mathrm{e}^x}{2}$ und $-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}$. Also ist sinh streng monoton wachsend, stetig und per Definition ungerade. Es gilt

$$\lim_{x\to\infty} \sinh(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \frac{1}{\mathrm{e}^x}) = \infty$$

und

$$\lim_{x\to-\infty} \sinh(x) = -\infty.$$

Also $\sinh(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ (Zwischenwertsatz), sinh ist bijektiv und

$$\sinh^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

ist ebenfalls streng monoton wachsend und stetig. Es gilt

$$\sinh^{-1}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$$

Hyperbolischer Cosinus und Areacosinus: $\cosh(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$ ist auf $[0,\infty)$ streng monoton wachsend und auf $(-\infty,0]$ streng monoton fallend, denn cosh ist gerade und $\cosh(x) = \sqrt{1+(\sinh x)^2}$ ist auf $[0,\infty)$ streng monoton wachsend. Weiter gilt $\cosh(0) = 1$ und $\lim_{x\to\infty}\cosh(x) = \infty$. D.h. $\cosh([0,\infty)) = [1,\infty)$. Somit ist

$$\cosh\colon [0,\infty) \to [1,\infty)$$

bijektiv, streng monoton wachsend und stetig. Die Umkehrfunktion

$$\cosh^{-1}\colon [1,\infty) \to [0,\infty)$$

ist ebenfalls streng monoton wachsend und stetig. Es gilt

$$\cosh^{-1}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2-1})$$

Hyperbolischer Tangens und Areatangens:

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = \frac{1-\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}}$$

ist ungerade, stetig zwischen -1 und 1 und

$$\lim_{x\to\infty} \tanh(x) = 1 \text{ und } \lim_{x\to-\infty} \tanh(x) = -1.$$

Also gilt $\tanh(\mathbb{R}) = (-1,1)$. tanh ist streng monoton wachsend, denn

$$\tanh(x) = \left(1 - \frac{1}{(\cosh x)^2}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (x \geq 0)$$

wächst streng monoton auf $[0,\infty)$. Da tanh ungerade ist, folgt die strenge Monotonie auf ganz $\mathbb{R}$. Also ist $\tanh(\mathbb{R}) = (-1,1)$ und

$$\tanh^{-1}\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$$

streng monoton wachsend und stetig. Es gilt

$$\tanh^{-1}(y) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$$

6.7 Trigonometrische Funktionen

Es gilt

$$e^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x$$

D.h.

$$\cos x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2} = \mathbf{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})$$

und

$$\sin x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2} = \mathbf{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}).$$

cos ist gerade und sin ungerade.

Satz 6.28.

(a) $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

(b) $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$

(c) $\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

(d) $\sin(x) - \sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

Beweis. (a), (b) siehe Vortragsübung Blatt 5. (c), (d) folgen aus (a), (b) angewandt auf $x = u+v, y = u-v$, wobei $u = x + \frac{y}{2}$ und $v = \frac{x-y}{2}$ ■

Lemma 6.29.

(a) $\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}$

(b) $\sin x \geq x - \frac{x^3}{3!}$

Beweis. Nach Satz 5.18 ist

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + R(x),$$

wobei $R(x) = -\frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \ldots$ die Summe einer alternierenden Reihe ist deren Glieder für $|x| \leq 7$ betragsmäßig monoton fallen. Also $R(x) \leq 0$ für $|x| \leq 7$, denn

$$-\frac{x^6}{6!} < 0.$$

Für $|x| > 7$ gilt

$$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} \geq 1 \geq \cos(x).$$

(b) analog. ■

Lemma 6.30.

(a) $\sin x > 0 \quad x \in (0,2]$

(b) cos *ist streng monoton fallend auf* $[0,2]$.

Beweis.

(a) $\sin x \geq x\left(1 - \frac{x^2}{6}\right) \geq \frac{x}{3} > 0$

(b) Für $2 \geq x > y \geq 0$

$$\cos x - \cos y = -2 \underbrace{\sin(\frac{x+y}{2})}_{>0} \underbrace{\sin(\frac{x-y}{2})}_{>0} < 0$$

■

Satz 6.31 (und Definition)**.** *Die Funktion* cos *hat in* $(0,2)$ *genau eine Nullstelle. Sie wird mit* $\frac{\pi}{2}$ *bezeichnet.*

Beweis. cos ist stetig, $\cos(0) = 1$ und $\cos(2) \leq 1 - \frac{4}{2} + \frac{16}{4!} = -\frac{1}{3} < 0$. Also hat cos eine Nullstelle in $(0,2)$. Es gibt keine weitere Nullstelle, weil cos streng monoton fallend ist in $(0,2)$. ■

Theorem 6.32. *Es gilt*

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \quad e^{i\pi} = -1, \quad e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i \quad \textit{und} \quad e^{i2\pi} = 1.$$

Beweis. $\cos(\frac{\pi}{2})^2 + \sin(\frac{\pi}{2})^2 = \left|e^{i\frac{\pi}{2}}\right|^2 = 1$, wobei $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$. Also $\sin(\frac{\pi}{2}) = \pm 1$. Da $\frac{\pi}{2} \in (0,2)$ folgt aus Lemma 6.30 (a), dass $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$. Das heißt, es gilt

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i \sin(\frac{\pi}{2}) = i$$

Der Rest folgt durch Potenzieren von $e^{i\frac{\pi}{2}}$. ■

Korollar 6.33.

(a) $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$
$\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$

(b) $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$
$\sin(x + \pi) = -\sin(x)$

(c) $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$
$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$

Beweis (c).

$$\begin{aligned} &\cos(\frac{\pi}{2} - x) + i\sin(\frac{\pi}{2} - x) \\ &= e^{i(\frac{\pi}{2} - x)} = e^{i\frac{\pi}{2}} e^{-ix} = ie^{ix} \\ &= \sin(x) + i\cos(x) \end{aligned}$$

Die Real- und Imaginärteile entsprechen sich, somit ist (c) bewiesen. Die übrigen Teile beweist man analog. ■

Korollar 6.34.

(a) $\sin x = 0 \;\Leftrightarrow\; x = k\pi$

(b) $\cos x = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

(c) $e^{ix} = 1 \;\Leftrightarrow\; x = k2\pi$

mit $k \in \mathbb{Z}$.

Beweis. „ $\Longleftarrow$ “ folgt aus Theorem 6.32.
„ $\Longrightarrow$ “ $\sin x > 0$ auf $(0, \frac{\pi}{2}]$, denn $\frac{\pi}{2} <$ und Lemma 6.30 (a). $\sin x = \sin(\pi - x) > 0$ für $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$. Also gilt $\sin x > 0$ für $x \in (0, \pi)$. Für $x \in (\pi, 2\pi)$ ist $x - \pi \in (0, \pi)$ und somit $\sin x = -\sin(x - \pi)$. D.h. $\sin x \neq 0$, wenn $x \neq k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.
(b) folgt aus (a), denn $\cos x = \sin(\frac{pi}{2} - x)$.
(c)

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = 1 \implies \cos(x) = 1 \text{ und } \sin x = 0 \implies x = k\pi \implies \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi} = \pm 1$$

wobei $\mathrm{e}^{\mathrm{i}2n\pi} = 1$ und $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n+1)\pi} = -1$. D.h. $x = k\pi$ mit k gerade. ■

Geometrische Bedeutung von Kosinus und Sinus. Die Abbildung $t \mapsto \mathrm{e}^{iut}$ ist injektiv auf $[0, 2\pi)$, denn

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}s} \implies \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-s)} = 1 \implies t - s = 2\pi k \implies k = 0 \text{ und damit } t = s$$

Für $t \in (0, 2\pi)$ und $n \in \mathbb{N}$ sind

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\frac{k}{n}} \qquad k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$$

$(n + 1)$ verschiedene Punkte auf dem Kreis

$$\mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

Es sind die Eckpunkte eines Polygons $\gamma_{t,n} \subset \mathbb{C}$ bestehend aus n Seiten gleicher Länge, nämlich

$$\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\frac{(k+1)}{n}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\frac{k}{n}}\right| = \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{n}} - 1\right|.$$

Die Länge von $\gamma_{t,n}$ ist $n\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{n}} - 1\right|$. Man definiert die Länge des Kreissegments

$$\gamma_t = \{\mathrm{e}^{\mathrm{i}s} \mid s \in [0, t]\}$$

Also

$$\begin{aligned}
\text{Länge}(\gamma_t) &:= \lim_{n\to\infty} \text{Länge}(\gamma_{t,n}) \\
&= \lim_{n\to\infty} n\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{n}} - 1\right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{t}{n}} - 1}{\frac{t}{n}}\right| t \\
&= |\mathrm{i}|t \text{ Lemma 6.16} \\
&= t
\end{aligned}$$

Man definiert

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}, \quad \sec(x) = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc(x) = \frac{1}{\sin x}.$$

Die Umkehrfunktionen arcsin, arccos, arctan

- Wegen $\sin x > 0$ auf $(0, \pi]$ ist $\cos x$ streng monoton fallend auf $[0, \pi]$ (Satz 6.28 (c)). Es gilt
$$\cos(0) = 1, \quad \cos(\pi) = -1$$
und cos ist stetig. Also ist
$$\cos\colon [0, \pi] \to [-1, 1]$$
bijektiv und
$$\arccos\colon [-1, 1] \to [0, \pi]$$
streng monoton fallend und stetig.

- $\sin\colon [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ stetig und monoton wachsend. Die Umkehrfunktion
$$\arcsin\colon [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$
ist wieder streng monoton wachsend und stetig.

- $\tan = \frac{\sin}{\cos}\colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ ist stetig und streng monoton wachsend. Weiter gilt
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} \tan x = +\infty$$
und
$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}+} \tan x = -\infty.$$
Die Umkehrung
$$\arctan\colon \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$
ist wieder stetig und streng monoton wachsend.

Polardarstellung

Satz 6.35. *Die Funktion $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ bildet das Intervall $[0, 2\pi)$ bijektiv auf $\mathbb{S}^1$ ab.*

Beweis. Injektivität haben wir bereits bewiesen. Sei $x + \mathrm{i}y \in \mathbb{S}^1$, d.h. $x^2 + y^2 = 1$. Für den Fall $y \geq 0$ setzen wir $t = \arccos(x) \in [0, \pi]$. Dann ist $\cos(t) = x$ und $\sin t = \sqrt{1 - (\cos t)^2} = \sqrt{1 - x^2} = |y| = y$. Also ist
$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos t + \mathrm{i} \sin t = x + \mathrm{i}y$$
Ist $y < 0$, dann $x \in (-1, 1)$ und $t = 2\pi - \arccos(x) \in (\pi, 2\pi)$. Also $\cos t = x$ und $\sin t = -\sqrt{1 - x^2} = -|y| = y$. Damit ist
$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = x + \mathrm{i}y$$
■

7 Differentialrechnung

7.1 Begriff der Ableitung

Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall und $x_0 \in I$ und $f\colon I \to \mathbb{C}$. f heißt **differenzierbar** in x_0, falls der Grenzwert

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \in \mathbb{C}$$

existiert. $f'(x_0)$ heißt **Ableitung** von f im Punkt x_0. Man schreibt auch

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x},$$

was daran erinnert, dass $f'(x_0)$ ein Limes vom **Differenzenquotienten** ist:

$$f'(x_0) := \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

wobei $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ und $\Delta x = x - x_0$. Die Gerade

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

heißt **Tangente** an den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$. Wenn f reellwertig ist dann ist $f'(x_0)$ die Steigung dieser Tangente. Die Abbildung

$$\mathrm{d}f(x_0)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad h \mapsto \mathrm{d}f(x_0)h := f'(x_0)h$$

heißt **Differential** von f im Punkt x_0. Das Differential beschreibt die lineare Approximation des Zuwachses $\Delta f = f(x_0 + h) - f(x_0)$ mit $\mathrm{d}x := \Delta x \in \mathbb{R}$ und $\mathrm{d}f'(x)\Delta x$ wird $f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.
Die einseitigen Grenzwerte

$$f'(x_0\pm) = \lim_{x \to x_0\pm} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

heißen rechtsseitige bzw. linksseitige Ableitung von f in x_0.

Bemerkung.

1. *Im Fall $I = [a, b]$, dann ist $f'(a) = f'(a+)$ und $f'(b) = f'(b-)$.*
2. *f ist genau dann differenzierbar in $x_0 \in (a, b)$, wenn $f(x_0+) = f(x_0-)$ und dann $f'(x_0) = f'(x_0\pm)$.*
3. *Ist f differenzierbar in x_0, dann ist f stetig in x_0, denn $f(x) - f(x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x - x_0) \to f'(x_0) \cdot 0 = 0 \quad (x \to x_0)$.*

Satz 7.1. *Eine Funktion f ist genau dann differenzierbar in x_0, wenn eine in x_0 stetige Funktion $\Phi\colon I \to \mathbb{C}$ existiert mit $f(x) - f(x_0) = \Phi(x)(x - x_0)$. Φ hängt von x_0 (und von f) ab und dann $\Phi(x_0) = f'(x_0)$.*

Beweis. Nach Satz 6.14 ist die Existenz des Grenzwerts des Differenzenquotienten für $x \to x_0$ äquivalent zur Existenz einer stetigen Fortsetzung der Funktion $x \mapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. ■

Satz 7.2. *Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{C}$ ist genau dann differenzierbar in x_0, wenn $\mathbf{Re}f$ und $\mathbf{Im}f$ in x_0 differenzierbar sind und dann ist*

$$(\mathbf{Re}f)'(x_0) = \mathbf{Re}f'(x_0) \quad \textit{und} \quad (\mathbf{Im}f)'(x_0) = \mathbf{Im}f'(x_0)$$

Beweis. Wird bewiesen auf Blatt 13. ■

Die **Ableitung einer Funktion** $f\colon I \to \mathbb{C}$ ist die Funktion $f'\colon I \to \mathbb{C}$ auf $I' := \{x \in I \mid f \text{ ist differenzierbar in } x\}$ mit $f'\colon x \mapsto f'(x)$. Wenn $I' = I$, dann sagt man f sei **differenzierbar auf** I und wenn zusätzlich f' stetig ist, dann heißt f **stetig differenzierbar**. („*Das ist erstaunlich.*“, vgl. Blatt 13)

Beispiel.

1. Für $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ gilt $f'(x) = nx^{n-1}$.

   Beweis.

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{1}{h}((x+h)^n - x^n)\\ &= \frac{1}{h}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}h^k - x^n\right) = \frac{1}{h}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}h^k\\ &= \frac{1}{h}\binom{n}{1}x^{n-1}h + \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}h^{k-1} \to nx^{n-1} \quad (h \to 0)\end{aligned}$$

■

2. Für $f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}$ gilt $f'(x) = \alpha \mathrm{e}^{\alpha x}$, d.h. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{\alpha x} = \alpha \mathrm{e}^{\alpha x}$.

   Beweis.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{e}^{\alpha(x+h)} - \mathrm{e}^{\alpha x}}{h} &= \frac{\mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{e}^{\alpha h} - \mathrm{e}^{\alpha x}}{h}\\ &= \frac{\mathrm{e}^{\alpha h} - 1}{h}\mathrm{e}^{\alpha x} \to \alpha \mathrm{e}^{\alpha x} \quad (h \to 0)\end{aligned}$$

■

   Insbesondere ist $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x$ und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a^x = \ln(a)a^x$.

3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ und somit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos x = -\sin x$ und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x = \cos x$.

   Beweis.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos x &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathbf{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})\\ &= \mathbf{Re}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right) = \mathbf{Re}(\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})\\ &= \mathbf{Re}(\mathrm{i}(\cos x + \mathrm{i}\sin x)) = -\sin x\end{aligned}$$

   Analog für $\sin x$. ■

7.2 Ableitungsregeln

Satz 7.3. *Seien $f, g\colon I \to \mathbb{C}$ und $\alpha \in \mathbb{C}$. Dann gilt für alle $x \in I$ für welche der Ausdrucks rechterseits existiert*

(a) $(\alpha f)' = \alpha f'$

(b) $(f+g)' = f' + g'$

(c) $(fg) = f'g + fg'$ *(Produktregel)*

(d) $(f/g)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ *(Quotientenregel)*

Beweis.

(c)
$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = f(x)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}g(x_0)$$
und für $x \to x_0$ dann $f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)$.

(d) Sei $g(x_0) \neq 0$ und g differenzierbar in x_0. Dann ist g stetig in x_0. Also $g(x) \neq 0$ in einer ε-Umgebung um x_0. Für $x \in \mathbb{B}_\varepsilon(x_0)$ gilt
$$\frac{1}{x - x_0}\left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}\right) = \frac{g(x_0) - g(x)}{g(x)g(x_0)}\frac{1}{x - x_0} = -\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\frac{1}{g(x)g(x_0)}$$
und für $x \to x_0$ ist das gleich $-\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}$ und der Rest folgt aus (c).

■

Satz 7.4 (Kettenregel)**.** *Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle. Ist $f\colon I \to J$ differenzierbar in $x_0 \in I$ und g differenzierbar in $y_0 := f(x_0)$, dann ist $g \circ f$ differenzierbar in x_0 und*
$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

Beweis. Nach Voraussetzung gilt
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \Phi_f(x)(x - x_0) \quad \text{und} \quad \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \Phi_g(y)(y - y_0)$$
wobei Φ_f in x_0, Φ_g in y_0 stetig sind und $\Phi_f(x_0) = f'(x_0)$, $\Phi_g(y_0) = g'(y_0)$ (Satz 7.1). Also
$$g(f(x)) - g(f(x_0)) = \Phi_g(f(x))(f(x) - f(x_0)) = \Phi_g(f(x))\Phi_f(x)(x - x_0)$$
Φ_f ist in x_0 stetig und da f in x_0 stetig ist und da Φ_g in $f(x_0)$ stetig ist, ist $x \mapsto \Phi_g(f(x))$ stetig in x_0. D.h. $\Phi_g(f(x))\Phi_f(x)$ ist stetig in x_0. Somit ist $g \circ f$ nach Satz 7.1 differenzierbar in x_0 und
$$(g \circ f)'(x_0) = \Phi_g(f(x_0))\Phi_f(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

■

Beispiel.

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{\sin x} = \mathrm{e}^{\sin x}\cos x$

2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{\sin(1/\cos x)} = \mathrm{e}^{\sin(\frac{1}{\cos x})}\cos(\frac{1}{\cos x})\frac{\sin x}{\cos^2 x}$

Satz 7.5 (Ableitung der Umkehrfunktion)**.** *Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton auf dem Intervall I. Ist f differenzierbar in x_0 und $f'(x_0) \neq 0$, dann ist $f'\colon f(I) \to I$ in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar und*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0)}$$

Beweis. Da f differenzierbar in x_0 ist, gilt

$$f(x) - f(x_0) = \Phi(x)(x - x_0)$$

mit einer in x_0 stetigen Funktion Φ und

$$\Phi(x_0) = f'(x_0). \tag{17}$$

Sei $g := f'$. Dann gilt

$$y - y_0 = f(g(y)) - f(g(y_0)) = \Phi(g(y))(g(y) - g(y_0)) \implies \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{\Phi(g(y))}$$
$$\implies g(y) - g(y_0) = \frac{1}{\Phi(g(y))}(y - y_0).$$

Man beachte, dass $\Phi(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ wegen (17) und $f'(x_0) \neq 0$. Da $g = f'$ stetig ist und Φ in $x_0 = g(y_0)$ ebenfalls stetig ist, ist $y \mapsto 1/\Phi(g(y))$ stetig in y_0. Also, nach Satz 7.1, ist g differenzierbar in y_0 und

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

■

Beispiel.

1. exp ist streng monoton wachsend und differenzierbar. Also

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(x) = \frac{1}{\exp'(\ln(x))} = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x}$$

2. $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ ist streng monoton und differenzierbar auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ mit Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

Also

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan x = \frac{1}{\tan'(\arctan x)} = \frac{1}{1 + x^2}$$

7.3 Maxima und Minima

Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ hat in $x_0 \in D$ ein **lokales Maximum**, wenn ein $\delta > 0$ existiert, so dass $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in \mathbb{B}_\delta(x_0) \cap D$. f hat in x_0 das **globale (absolute) Maximum**, wenn $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in D$. Lokales und globales Minimum werden analog definiert. **Extremum** ist der gemeinsame Oberbegriff für Maximum und Minimum.

Satz 7.6. *Hat $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ in x_0 ein lokales Extremum und ist f in x_0 differenzierbar, dann gilt $f'(x_0) = 0$.*

Beweis. f habe in x_0 ein lokales Maximum, dann gilt $f(x) \leq f(x_0)$ für $x \in \mathbb{B}_\delta(x_0)$. Also

$$f'(x_0+) = \lim_{x\to x_0+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0 \quad \text{und} \quad f'(x_0-) = \lim_{x\to x_0-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$$

Da f differenzierbar ist, folgt

$$0 \leq f'(x_0-) = f'(x_0) = f'(x_0+) \leq 0$$

D.h. $f'(x_0) = 0$. ∎

Nullstellen der Ableitung heißen **kritische** oder **stationäre** Punkte von f.

Korollar 7.7. *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a,b) differenzierbar und seien $x_1, \ldots, x_n$ kritische Punkte von f, dann gilt*

$$\max_{a\leq x\leq b} f(x) = \max\{f(a), f(b), f(x_1), \ldots, f(x_n)\}.$$

Beweis. Da f auf $[a,b]$ stetig ist, existiert $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x) \leq f(x_0)$ für alle x (Theorem 6.9), wenn $x_0 \in (a,b)$, dann ist $f'(x_0) = 0$ (Satz 7.6). Also $x \in \{a, b, x_1, \ldots, x_n\}$. Somit für alle x

$$f(x) \leq f(x_0) \leq \max\{f(a), f(b), f(x_1), \ldots, f(x_n)\} \leq f(x_0).$$

∎

7.4 Mittelwertsatz

Satz 7.8 (Satz von Rolle)**.** *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a,b) differenzierbar. Falls $f(a) = f(b)$, dann existiert $t \in (a,b)$ mit $f'(t) = 0$.*

Beweis. Wenn f konstant ist, dann $f'(t) = 0$ für alle $t \in (a,b)$. Wenn f nicht konstant ist, dann existieren $x_*, x^* \in [a,b]$ mit (Theorem 6.9)

$$f(x_*) \leq f(x) \leq f(x^*) \qquad x \in [a,b]$$

Da f nicht konstant ist, ist $f(x_*) < f(x^*)$ und somit $x_* \in (a,b)$ oder $x^* \in (a,b)$. Also $f'(x_*) = 0$ bzw. $f'(x^*) = 0$. ∎

Theorem 7.9. *Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a,b) differenzierbar, dann existiert ein $t \in (a,b)$ mit*

$$f'(t) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Beweis. $g(x) = f(x) - x\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ erfüllt die Voraussetzung von Satz 7.8, denn $g(b) - g(a) = 0$. Also existiert ein $t \in (a,b)$ mit $0 = g'(t) = f'(t) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ∎

Bemerkung. *Der Mittelwertsatz gilt nicht für komplexe Funktionen. Bspw. erfüllt $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ auf $[0, 2\pi]$ die übrigen Voraussetzungen aus Satz 7.8. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}0} = 1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi}$, aber $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \neq 0$ für alle t.*

Korollar 7.10. *Sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gilt* *(a) $f' = 0$ auf (a,b) genau dann, wenn f konstant,*

(b) $f' \geq 0$ auf (a,b) genau dann, wenn f monoton wachsend,

(c) $f' > 0$ dann ist f streng monoton wachsend.

Beweis. „$\Leftarrow$“ folgen aus der Definition des Differentialquotienten. „$\Rightarrow$“ folgt aus dem Mittelwertsatz in der Form $f(y) - f(x) = f'(t)(y-x)$ mit $x < t < y$. ■

Bemerkung. *„$\Leftarrow$“ gilt nicht in (c), wie das Beispiel $f(x) = x^3$ zeigt, $f'(0) = 0$.*

Korollar 7.11. *Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ differenzierbar, $\alpha \in \mathbb{C}$ und $f' = \alpha f$, dann gilt $f(x) = f(0)\mathrm{e}^{\alpha x}$.*

Beweis.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x)\mathrm{e}^{-\alpha x}) = (f' - \alpha f)\mathrm{e}^{-\alpha x}$$

Nach Korollar 7.10 ist

$$f(x) = \mathrm{e}^{-\alpha x} = f(0)\mathrm{e}^{-\alpha 0} = f(0) \implies f(x) = f(0)\mathrm{e}^{\alpha x}$$

■

Folgerung. *$f(x) = \mathrm{e}^x$ ist die einzige Funktion mit $f' = f$ und $f(0) = 1$.*

Satz 7.12. *Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig und in (a,b) differenzierbar. Dann existiert $t \in (a,b)$ mit*

$$|f(b) - f(a)| \leq |f'(t)|(b-a) \tag{18}$$

Wenn f auf $[a,b]$ stetig und differenzierbar ist, dann ist f Lipschitz-stetig.

Beweis. Ist f stetig differenzierbar, dann ist $|f|$ stetig und somit beschränkt auf $[a,b]$. D.h.

$$\max_{t\in[a,b]} |f'(t)| < \infty$$

Aus (18) folgt also $|f(y) - f(x)| \leq L|y-x|$.

■

Beweis von (18): Sei $\gamma \in \mathbb{R}$ mit $f(b) - f(a) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}|f(b) - f(a)|$. Sei $g(x) := \mathbf{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma} f(x))$. g erfüllt die Voraussetzung des Mittelwertsatzes. Also existiert $t \in (a,b)$ mit

$$\begin{aligned} |f(b) - f(a)| &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\gamma} f(b) - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\gamma} f(a) \\ &= \mathbf{Re}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\gamma} f(b)) - \mathbf{Re}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\gamma} f(a)) \\ &= g(b) - g(a) = g'(t)(b-a) \leq \mathbf{Re}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\gamma} f'(t)) \leq |f'(t)| \end{aligned}$$

■

Satz 7.13. *Seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a,b) differenzierbar. Dann existiert $t \in (a,b)$ mit*

$$(f(b) - f(a))g'(t) = (g(b) - g(a))f'(t).$$

Bemerkung. *Für $g(x) = x$ reduziert sich die Aussage auf den Mittelwertsatz.*

Beweis. Sei $\Delta f := f(b) - f(a), \Delta g := g(b) - g(a)$ und $h(x) := \Delta f g(x) - \Delta g f(x)$. Es gilt $h(b) - h(a) = \Delta f \Delta g - \Delta g \Delta f = 0$. D.h. h erfüllt die Voraussetzung des Satzes von Rolle. Also existiert $t \in (a,b)$ mit

$$0 = h'(t) = \Delta f g'(t) - \Delta g f'(t).$$

■

Theorem 7.14 (de l'Hôpital)**.** *Seien $f, g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $b \leq \infty$, $g(x) \neq 0, g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$. Falls*

$$\lim_{x \to b-} f(x) = 0 = \lim_{x \to b-} g(x)$$

oder $g(x) \to \infty$ $(x \to b-)$, dann gilt

$$\lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to b-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

sofern der zweite Grenzwert existiert.

Bemerkung. *Ein analoger Satz gilt für $x \to a+$.*

Beispiel. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1$

Bemerkung. *Sind f, g in b definiert und stetig mit $f(b) = 0g(b)$. Dann ist*

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(b)}{g(x) - g(b)} = \frac{f'(t_x)}{g'(t_x)}, \quad t_x \in (a,b).$$

Also

$$\lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to b-} \frac{f'(t_x)}{g'(t_x)} = \lim_{t \to b-} \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

Beweis. Sei $\lambda := \lim_{t \to b-} f'(t)/g'(t)$ und sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $x_0 \in (a,b)$, so dass

$$x_0 < t < b \implies \frac{f'(t)}{g'(t)} \in \mathbb{B}_{\varepsilon/2}(\lambda) \tag{19}$$

Falls nun $x_0 \leq x < y < b$, dann folgt aus Satz 7.13, dass

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(t)}{g'(t)} \tag{20}$$

mit $t \in (x,y)$. Nach (19), (20) gilt

$$x_0 \leq x < y < b \implies \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \in \mathbb{B}_{\varepsilon/2}(\lambda) \tag{21}$$

Fall 1:

$$\lim_{y \to b-} f(y) = 0 = \lim_{y \to b-} g(y)$$

Aus (21) folgt

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y \to b-} \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \in \overline{\mathbb{B}_{\varepsilon/2}(\lambda)} \subset \mathbb{B}_{\varepsilon}(\lambda)$$

wobei $\overline{\mathbb{B}_{\varepsilon/2}(\lambda)} := [\lambda - \varepsilon/2, \lambda + \varepsilon/2]$ (Sprich: **Abschluss** von $\mathbb{B}_{\varepsilon/2}(\lambda)$).

Fall 2:

$$\lim_{y \to b-} g(y) = \infty$$

Nach (21) mit $x = x_0$ und $y \in (x_0, b)$ gilt

$$\left| \frac{f(y) - f(x_0)}{g(y) - g(x_0)} - \lambda \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dividiere Zähler und Nenner durch $g(y)$ und mulitiplizieren dann beide mit $|1 - g(x_0)/g(y)|$. Wir erhalten dann

$$\left| \frac{f(y)}{g(y)} - \frac{f(x_0)}{g(y)} - \lambda \left(1 - \frac{g(x_0)}{g(y)}\right) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \left| 1 - \frac{g(x_0)}{g(y)} \right|.$$

Mit Dreiecksungleichung folgt

$$\left| \frac{f(y)}{g(y)} - \lambda \right| < \frac{\varepsilon}{2} \left| 1 - \frac{g(x_0)}{g(y)} \right| + \left| \frac{f(x_0)}{g(y)} \right| + |\lambda| \left| \frac{g(x_0)}{g(y)} \right|$$

Wir haben benutzt $|a - b| < c \implies |a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b| \leq c + |b|$.
Da $g(y) \to \infty$ $(y \to b-)$, existiert ein $y_0 \in (x_0, b)$, so dass

$$\left| \frac{f(x)}{g(y)} - \lambda \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

für $y_0 \in (y_0, b)$. ■

Beispiel.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\tan^2 x}{3x^2} = \frac{1}{3} \left(\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} \right)^2 = \frac{1}{3} \left(\lim_{x \to 0} \frac{1 + \tan x}{1} \right)^2 = \frac{1}{3}$$

7.5 Unstetigkeiten der Ableitung sind zweiter Art

Satz 7.15. *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(a) < \lambda < f'(b)$ (oder $f'(a) > \lambda > f'(b)$), dann existiert $t \in (a,b)$ mit $f'(t) = \lambda$. D.h. f' erfüllt die Aussage des Zwischenwertsatzes.*

Beweis. Sei $f'(a) < \lambda < f'(b)$ und sei $g(x) = f(x) - \lambda x$. Dann ist

$$\begin{aligned} g'(a) = f'(a) - \lambda < 0 &\implies g(t_1) < g(a) \ (t_1 \text{ nahe } a) \\ g'(b) = f'(b) - \lambda > 0 &\implies g(t_2) < g(b) \ (t_2 \text{ nahe } b) \end{aligned}$$

Also nimmt die stetige Funktion $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ihr Minimum in einem Punkt $t \in (a,b)$ an. Also

$$0 = g'(t) = f'(t) - \lambda \implies f'(t) = \lambda$$

■

Korollar 7.16. *Die Ableitung f' einer differenzierbaren Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ hat keine Unstetigkeiten erster Art.*

Beweis. Trivial. ■

7.6 Ableitungen höherer Ordnung

Sei $I \in \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{C}$ differenzierbar mit $f'\colon I \to \mathbb{C}$. Ist f' wieder differenzierbar, dann schreibt man $f'' := (f')'$ oder $f^{(2)}$. f heißt n-mal differenzierbar mit $f^{(n)}$, wenn $f^{(n-1)}$ noch ein Mal differenzierbar ist und $f^{(n)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{(n-1)}$. $f^{(0)} := f$. f heißt n-mal stetig differenzierbar, wenn $f^{(n)}$ zusätzlich stetig ist. Statt $f^{(n)}$ schreibt man auch

$$\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}, \quad \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n f, \quad \partial^n f$$

Außerdem definieren wir

$$C^0(I) := C(I) := \{f\colon I \to \mathbb{C} \mid f \text{ stetig}\}$$

und

$$C^n(I) := \{f\colon I \to \mathbb{C} \mid f \text{ ist } n-\text{mal stetig differenzierbar}\}$$

$C^\infty := \bigcap_{n\geq 0} C^n(I)$ heißt Menge der beliebig oft differenzierbaren Funktionen auf I. Statt $f \in C^n(I)$ sagt man auch f sei von der Klasse $C^n(I)$. Diese Mengen sind Vektorräume über $\mathbb{C}$ oder über $\mathbb{R}$.

Satz 7.17. *Sind $f, g\colon I \to \mathbb{C}$ n-mal (stetig) differenzierbar, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, dann auch $\alpha f + \beta g$ n-mal (stetig) differenzierbar und*

$$(\alpha f + \beta g)^{(n)} = \alpha f^{(n)} + \beta g^{(n)}$$

Beweis. Man wende vollständige Induktion nach n an. ∎

Seien $f, g\colon I \to \mathbb{C}$ zweimal differenzierbar, dann folgt aus der Produktregel:

$$\begin{aligned}
(fg)' &= f'g + fg' \\
(fg)'' &= f''g + f'g' + f'g' + fg'' \\
&= f''g + 2f'g' + fg''
\end{aligned}$$

Das riecht nach Binomialkoeffizienten und es gilt der

Satz 7.18 (Leibnizsche Regel)**.** *Sind $f, g\colon I \to \mathbb{C}$ n-mal (stetig) differenzierbar, dann auch fg und*

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Beweis. Wird auf Blatt 14 bewiesen. ∎

Satz 7.19. *Sind $f\colon I \to \mathbb{R}$ und $g\colon f(I) \to \mathbb{C}$ n-mal (stetig) differenzierbare Funktionen, dann auch $g \circ f$.*

Beweis. Induktion in n. Für $n = 0$ ist $g \circ f$ stetig, wenn f, g stetig. Die Behauptung sei richtig für ein $n \geq 0$ und f, g seien $(n+1)$-mal (stetig) differenzierbar. Dann ist $g \circ f$ differenzierbar

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'$$

Mit Induktionsannahme und Satz 7.18 ist die rechte davon noch n-mal differenzierbar, also auch die linke Seite. D.h. $g \circ f$ ist $(n+1)$-mal (stetig) differenzierbar. ∎

Satz 7.20. *Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ $n \geq 1$ mal (stetig) differenzierbar und $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$. Dann ist auch die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon f(I) \to I$ n-mal stetig differenzierbar.*

Bemerkung. *Aus $f'(x) \neq 0$ für alle x und Satz 7.15 folgt, dass $f'(x) > 0$ oder $f'(x) < 0$ für alle $x \in I$. Also ist f streng monoton und somit bijektiv von I nach $f(I)$.*

Beweis. Sei $g = f^{-1}$ und $h(x) = 1/x$. Dann gilt nach Satz 7.5

$$g' = \frac{1}{f' \circ g} = h \circ (f' \circ g).$$

Ist f' stetig, dann auch $h \circ (f^{-1} \circ g)$ und somit auch g'.
Sei die Behauptung richtig für ein $n \geq 1$ und f sei $(n+1)$-mal stetig differenzierbar. Dann sind f' und g noch n-mal differenzierbar, also (Satz 7.19) ist $h \circ (f' \circ g)$ und damit auch g' noch n-mal (stetig) differenzierbar. D.h. g ist $(n+1)$-mal (stetig) differenzierbar. ∎

7.7 Die Taylor'sche Formel

Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar ($n \geq 1$). Dann gilt approximativ

$$f(x) \cong f(a) + f'(a)(x-a)$$

(bewusst ungenau) für x nahe $a \in I$. Für $n > 1$ suchen wir eine bessere Approximation an f (nahe $a \in I$) durch ein Polynom n-ten Grades.

$$p(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n$$

Die Koeffizienten a_k bestimmen wir aus den Bedingungen

$$p^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) \quad \text{mit} \quad k = 0, \ldots, n$$

und

$$p^{(k)}(a) = a_k k!.$$

Es gilt also

$$a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

So bekommen wir das *Taylor-Polynom n-ten Grades von f mit Entwicklungspunkt a*:

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)(x-a)^2 + \cdots + f^{(n)}(a)(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Theorem 7.21 (Taylor'sche Formel)**.** *Die reellwertige Funktion f sei $(n-1)$-mal stetig differenzierbar auf $[a,b]$ und n-mal differenzierbar in (a,b). Dann gibt es zu jedem $x \in [a,b]$ ein $t_x \in (a,b)$ mit*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(t_x)}{n!}(x-a)^n.$$

Falls zusätzlich $f^{(n)}(a)$ existiert, dann gilt

$$f^{(n)}(t_x) \to f^{(n)}(a) \quad (x \to a)$$

Bemerkung.

1. *Für $n = 1$ reduziert sich die Aussage Theorem 7.21 auf den Mittelwertsatz mit $f(x) = f(a) + f'(x)(x-a)$.*
2. $\frac{f^{(n)}(t_x)}{n!}(x-a)^n$ *heißt* ***Lagrange-Restglied***
3. *Die Taylorformel gilt unverändert auch für $b \leq x \leq a$.*

Beweis. Es genügt den Fall $x = b$ zu betrachten (Mit Mittelwertsatz vergleichen). Wir definieren

$$g(t) := f(t) - T_{n-1}(t) - M(t-a)^n \implies M = \frac{f(b) - T_{n-1}(b)}{(b-a)^n}$$

Nach Konstruktion von g gilt

$$0 = g(a) = g'(a) = \cdots = g^{(n-1)}(a)$$

und $g(b) = 0$. Nach dem Satz von Rolle existiert ein $t_1 \in (a, b)$ mit $g'(t_1) = 0$, ein $t_2 \in (a, t_1)$ mit $g''(t_2) = 0$, ein $t_3 \in (a, t_2)$ mit $g'''(t_3) = 0$ usw. und ein $t_n \in (a, t_{n-1})$ mit $g^{(n)}(t_n) = 0$. D.h.

$$g^{(n)}(t_n) = f^{(n)}(t_n) - Mn! \implies M = \frac{f^{(n)}(t_n)}{n!}$$

■

Beweis des Zusatzes. Sei $g(x) := f(x) - T_n(x)$ Dann folgt aus der Taylorformel einerseits

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) - T_{n-1}(x) - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &= \frac{1}{n!}\left(f^{(n)}(t_x) - f^{(n)}(a)\right)(x-a)^n \end{aligned} \tag{22}$$

und andererseits

$$g(x) = \frac{g^{(n-1)}(s_x)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}. \tag{23}$$

Da f und somit auch g in a differenzierbar ist, existiert Φ mit

$$g^{(n-1)}(s) = g^{(n-1)}(a) + \Phi(s)(s-a) = \Phi(s)(s-a) \quad \text{mit} \quad \Phi(a) = g^{(n)}(a) \quad \text{(Satz 7.1)}$$

Aus (22), (23) folgt

$$\frac{1}{n!}\left(f^{(n)}(t_x)0f^{(n)}(a)\right)(x-a)^n = \Phi(s_x)(s_x - a)\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}$$

und daraus folgt

$$|f^{(n)}(t_x) - f^{(n)}(a)| = n|\Phi(s_x)|\frac{|s_x - a|}{|x-a|} \leq |\Phi(s_x)| \to n|\Phi(a)| = 0 \quad (x \to a)$$

■

Satz 7.22. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \mathbb{R}$ gilt*

(a)
$$\left|\sin x - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}$$

(b)
$$\left|\cos x - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\right| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

Bemerkung. *Für $|x| \leq 1$ folgt die Aussage aus dem Satz von Leibniz für alternierende Reihen.*

Beweis.

(a) $f^{(2n)}(x) = (-1)^n \sin x$ und $f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cos x$. Also für $x = 0 : f^{(2n)}(0) = 0$ und $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$. D.h.

$$T_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = T_{2k+2}(x)$$

Also ist

$$|\sin x - T_{2n+1}(x)| = |\sin x - T_{2n+2}| = \left|\frac{f^{(2n+3)}(t_x)}{(2n+3)!}x^{2n+3}\right| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}$$

(b) wird analog bewiesen.

■

7.8 Analyse kritischer Punkte

$f \in C^2(I)$ und $f'(a) = 0$, dann wissen wir aus der Schule **(?)**

$$\begin{array}{lll} f''(a) > 0 & \Longrightarrow & \text{lokales Minimum in } a \\ f''(a) < 0 & \Longrightarrow & \text{lokales Maximum in } a \end{array}$$

Wenn $f''(a) = 0$ und f'' in a das Vorzeichen wechselt, dann hat f in a einen **Wendepunkt**.

Satz 7.23. *Die Funktion $f\colon \mathbb{B}_\varepsilon(a) \to \mathbb{R}$ sei $n \geq 2$-mal differenzierbar und $f^{(n)}(a)$ sei die erste nichtverschwindende Ableitung von f in a, d.h.*

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Ist n gerade, dann hat f in a ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum, je nachdem ob $f^{(n)}(a) > 0$ oder $f^{(n)}(a) < 0$. Ist n ungerade, dann hat f in a kein lokales Extremum, sondern einen Wendepunkt.

Beweis. Nach Theorem 7.21 gilt

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(n)}(t_x)}{n!}(x-a)^n,$$

wobei $f^{(n)}(t_x) \to f^{(n)}(a) \neq 0$. D.h. in $\mathbb{B}_\delta(a)$

$$f(x) > f(a) \quad \text{falls} \quad f^{(n)}(a) > 0$$

und

$$f(x) < f(a) \quad \text{falls} \quad f^{(n)}(a) < 0$$

Wenn n ungerade ist, dann wechselt $(x-a)^n$ in a das Vorzeichen, also auch $f(x)-f(a)$ und daher liegt kein lokales Extremum vor. Theorem 7.21 angewandt auf f'' liefert

$$f''(x) = \frac{f^{(n)}(t_x)}{(n-2)!}(x-a)^{n-2}.$$

Also wechselt $(x-a)^{n-2}$ in a das Vorzeichen, also auch f''. ■

Landau'sche O-Symbole

Sei $f\colon D \to \mathbb{C}$, a Häufungspunkt von D und $\beta \in \mathbb{R}$. Man schreibt

$$f(x) = o(|x-a|^\beta) \quad (x \to a)$$

falls

$$\frac{f(x)}{|x-a|^\beta} \to 0 \quad (x \to a)$$

Man schreibt

$$f(x) = O(|x-a|^\beta) \quad (x \to a)$$

falls eine Konstante $c > 0$ existiert mit

$$f(x) \leq c|x-a|^\beta \quad x \in \mathbb{B}_\delta(a)$$

Korollar 7.24. *Ist $f\colon I \to \mathbb{R}$ in $a \in I$*

(a) n-mal differenzierbar, dann

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o(|x-a|^n) \quad (x \to a)$$

(b) $(n+1)$-mal differenzierbar, dann gilt

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + O(|x-a|^{n+1}) \quad (x \to a)$$

Beweis. Wird ergänzt. ■

Ist f beliebig oft differenzierbar, dann heißt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Taylorreihe von f um a bzw. mit Entwicklungspunkt a. Die Taylorreihe braucht für $x \neq a$ nicht zu konvergieren und wenn sie konvergiert, braucht die Summe nicht mit f übereinzustimmen. Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

ist beliebig oft differenzierbar und $f^{(n)}(0) = 0$ für alle n. Also konvergiert die Taylorreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0 \neq f(x)$$

für $x > 0$.

Notizen