

## 1 Definition

Unter einer gewöhnlichen Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung verstehen wir eine Gleichung, in der Ableitungen einer unbekannten Funktion  $y = y(x)$  bis zur  $n$ -ten Ordnung auftreten.

**Beispiel:** Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y' = \sin(x)$$

$y' = y^{(1)}$ : Lagrange-Schreibweise

$\frac{dy}{dx}$ : Leibnitz-Schreibweise

$\dot{y}$ : Newton-Schreibweise

### 1.1 Autonome Differentialgleichung

Eine **Autonome Differentialgleichung** ist eine spezielle Art von Differentialgleichung, bei der die Ableitung nicht von  $x$ , also der unabhängigen Variable abhängt, sondern nur vom aktuellen Zustand der Funktion selbst.

**Beispiel:** Autonome Differentialgleichung  
Die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = y(x)$$

ist autonom, weil auf der rechten Seite  $x$  nicht explizit vorkommt und somit nicht von  $x$  abhängig ist.

## 2 Lösung einer Differentialgleichung

### 2.1 Definition der Lösung

Eine Funktion  $y = y(x)$  heisst **Lösung der Differentialgleichung**, wenn sie mit ihren Ableitungen die Differentialgleichung identisch erfüllt.

Unter der allgemeinen Lösung einer Differentialgleichung versteht man grundsätzlich eine Lösungsmenge, die mithilfe der Integrationskonstante  $C \in \mathbb{R}$  beschrieben wird.

**Beispiel:** Allgemeine Lösung

$$y = -\cos(x) + C$$

$C$ : Integrationskonstante

Eine spezielle Lösung erhalten wir durch Einsetzen eines bestimmten Werts für diesen Parameter  $C$ .

**Beispiel:** Spezielle Lösung

$$y = -\cos(x) + 3$$

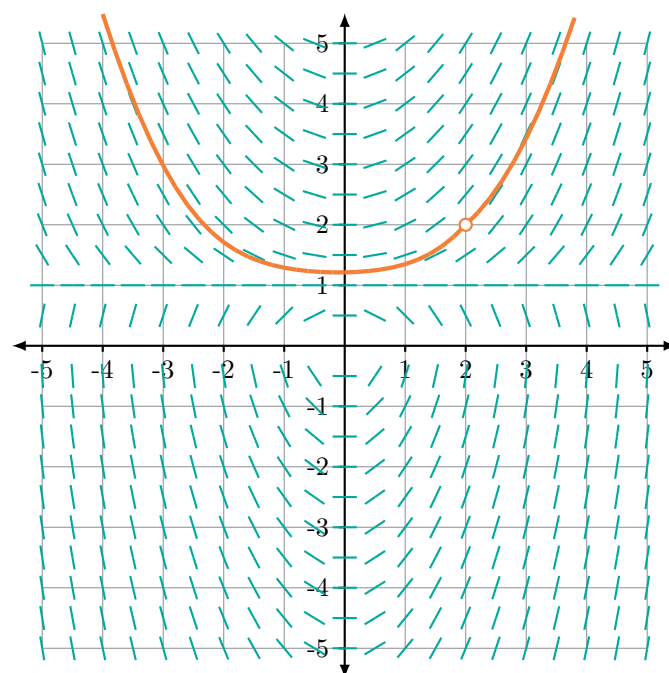
### 2.2 Graphische Lösung: Das Richtungsfeld

Ein **Anfangswertproblem** besteht aus einer Differentialgleichung und einer Anfangsbedingung.

$$\begin{cases} y' = f(x, y) & \text{Differentialgleichung} \\ y(x_0) = y_0 & \text{Anfangsbedingung} \end{cases}$$

Das **Richtungsfeld** einer Differentialgleichung ist die Gesamtheit der Richtungselemente, welche die Steigung der Lösungskurve, die durch diesen Punkt verlaufen, repräsentieren.

**Beispiel:**



$$\begin{cases} y' = x - \frac{x}{y} \\ y(2) = 2 \end{cases}$$

Isoklinen:  $y = 1$  und  $x = 0$

**Isoklinen** sind Linien im Richtungsfeld, die gleiche Werte, also die gleiche Steigung, haben.

## 3 Numerik

### 3.1 Euler-Verfahren

Das Euler-Verfahren ist ein numerisches (also näherungsweise) Verfahren zur Approximation der unbekannten Lösungskurve eines allgemeinen Anfangswertproblems:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Vom Ausgangspunkt  $P(x_0, y_0)$  wird schrittweise mit der gewählten Schrittweite  $h$  nach vorne gearbeitet, wobei  $n \in \mathbb{N}$  und  $h > 0$ .

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + h \\ y_{n+1} &= y_n + hf(x_k, y_k) \end{aligned}$$

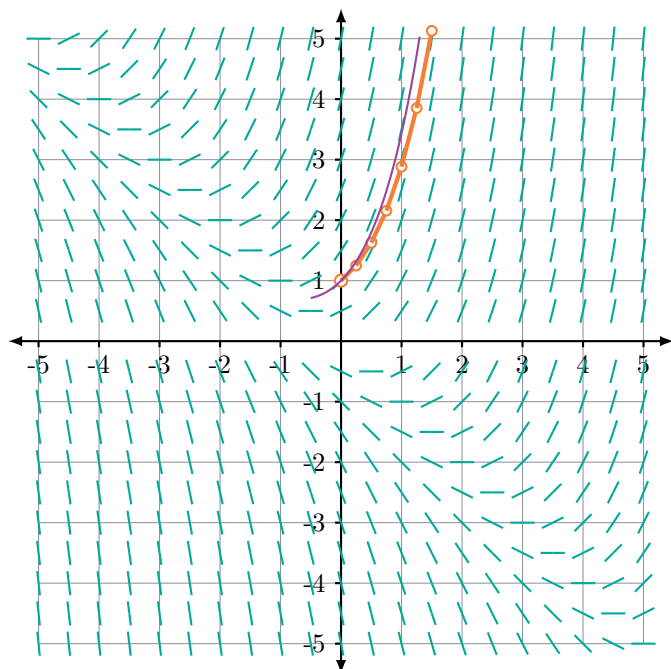
Allerdings entsteht dabei ein Fehler  $e_k$ , der mit zunehmendem Abstand zum Ausgangspunkt grösser wird. Der Fehler an der Stelle  $x_k$  ist einfach die Differenz der beiden Werte:

$$e_k := y(x_k) - y_k$$

### 3.2 Grafische Veranschaulichung

Das Euler-Verfahren lässt uns die Funktionskurve erraten. Je kleiner  $h$ , desto genauer wird die Approximation, jedoch steigt dadurch auch der Rechenaufwand, da wir noch mehr Punkte ausrechnen müssen.

**Beispiel:**  $y' = x + y$ ,  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 1$ ,  $h = 0.25$



- Das Euler-Verfahren in Orange.
- Die exakte Lösung in Violet.
- Das Richtungsfeld in Grün (Emerald).

### 3.2.1 Exkurs Programmierung des Euler-Verfahrens

Python

```
def euler (f, x0, y0, h, n)
    x = x0
    y = y0
    result = [(x, y)]
    for i in range(n):
        x += h
        y += h * f(x, y)
        result.append((x, y))
    return result
```

## 4 Separation

Bei diesem Verfahren wird die Differentialgleichung so umgeformt, dass man sie anschliessend durch integrieren lösen kann.

Eine gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung heisst **seperabel**, wenn sie sich auf folgende Form bringen lässt:

$$y' = h(y) \cdot g(x) = h(y(x)) \cdot g(x)$$

### 4.1 Lösungsvorgehen

1.  $y' = \frac{dy}{dx}$  einfügen
2. Separation von  $y$  und  $x$
3. Integrieren (links nach  $y$  und rechts nach  $y$ )
4. Auflösen nach  $y$

Wobei der 4. Schritt nicht immer möglich ist  $\Rightarrow$  Numerisches Verfahren!

**Beispiel:** Separation

Differentialgleichung:  $y' = -2 \cdot \cos(x) \cdot y(x)$ , wobei  $y \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -2 \cdot \cos(x) \cdot y(x) & | \cdot dx & | \cdot \frac{1}{y} \\ \int \left( \frac{1}{y} \right) dy &= \int (-2 \cdot \cos(x)) dx \\ \ln(|y|) &= -2 \cdot \sin(x) + c_1 & | e^{(\cdot)} \\ |y| &= e^{-2 \cdot \sin(x) + c_1} & | c_2 := e^{c_1} \\ |y| &= e^{-2 \cdot \sin(x)} \cdot c_2 \\ y(x) &= e^{-2 \cdot \sin(x)} \cdot c \Rightarrow \text{Allgemeine Lösung} \end{aligned}$$

### 4.2 Singuläre Lösung

Eine singuläre Lösung ist eine Lösung der Differentialgleichung, die beim normalen Herleiten nicht auftaucht.

**Beispiel:** Singuläre Lösung

Differentialgleichung:  $y' = -2 \cdot \cos(x) \cdot y(x)$

$$\begin{aligned} y' &= -2 \cdot \cos(x) \cdot y(x) \\ y(x) &= 0 \Rightarrow \text{Singuläre Lösung} \end{aligned}$$