1 Definition

Unter einer gewöhnlichen Differentialgleichung n-ter Ordnung verstehen wir eine Gleichung, in der Ableitungen einer unbekannten Funktion $y = y(x)$ bis zur n-ten Ordnung auftreten.

Beispiel: Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y' = sin(x)$$

$y' = y^{(1)}$: Lagrange-Schreibweise

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$: Leibnitz-Schreibweise

$\dot{y}$: Newton-Schreibweise

1.1 Autonome Differentialgleichung

Eine **Autonome Differentialgleichung** ist eine spezielle Art von Differentialgleichung, bei der die Ableitung nicht von x, also der unabhängigen Variable abhängt, sondern nur vom aktuellen Zustand der Funktion selbst.

Beispiel: Autonome Differentialgleichung
Die Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y(x)$$

ist autonom, weil auf der rechten Seite x nicht explizit vorkommt und somit nicht von x abhängig ist.

2 Lösung einer Differentialgleichung

2.1 Definition der Lösung

Eine Funktion $y = y(x)$ heisst **Lösung der Differentialgleichung**, wenn sie mit ihren Ableitungen die Differentialgleichung identisch erfüllt.

Unter der allgemeinen Lösung einer Differentialgleichung versteht man grundsätzlich eine Lösungsmenge, die mithilfe der Integrationskonstante $C \in \mathbb{R}$ beschrieben wird.

Beispiel: Allgemeine Lösung

$$y = -cos(x) + C$$

C: Integrationskonstante

Eine spezielle Lösung erhalten wir durch Einsetzen eines bestimmten Werts für diesen Paramter C.

Beispiel: Spezielle Lösung

$$y = -cos(x) + 3$$

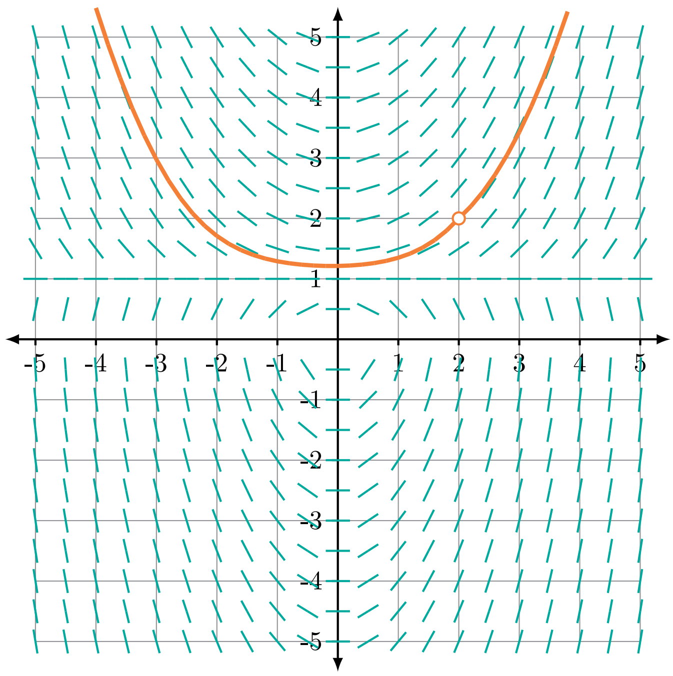
2.2 Graphische Lösung: Das Richtungsfeld

Ein **Anfangswertproblem** besteht aus einer Differentialgleichung und einer Anfangsbedingung.

$$\begin{cases} y' = f(x,y) & \text{Differentialgleichung} \\ y(x_0) = y_0 & \text{Anfangsbedingung} \end{cases}$$

Das **Richtungsfeld** einer Differentialgleichung ist die Gesamtheit der Richtungselemente, welche die Steigung der Lösungskurve, die durch diesen Punkt verlaufen, repräsentieren.

Beispiel:



$$\begin{cases} y' = x - \frac{x}{y} \\ y(2) = 2 \end{cases}$$

Isoklinen: $y = 1$ und $x = 0$

Isoklinen sind Linien im Richtungsfeld, die gleiche Werte, also die gleiche Steigung, haben.

3 Numerik

3.1 Euler-Verfahren

Das Euler-Verfahren ist ein numerisches (also näherungsweises) Verfahren zur Approximation der unbekannten Lösungskurve eines allgemeinen Anfangswertproblems:

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Vom Ausgangspunkt P(x_0,y_0) wird schrittweise mit der gewählten Schrittweite h nach vorne gearbeitet, wobei $n \in \mathbb{N}$ und $h > 0$.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + h \\ y_{n+1} &= y_n + hf(x_k, y_k) \end{aligned}$$

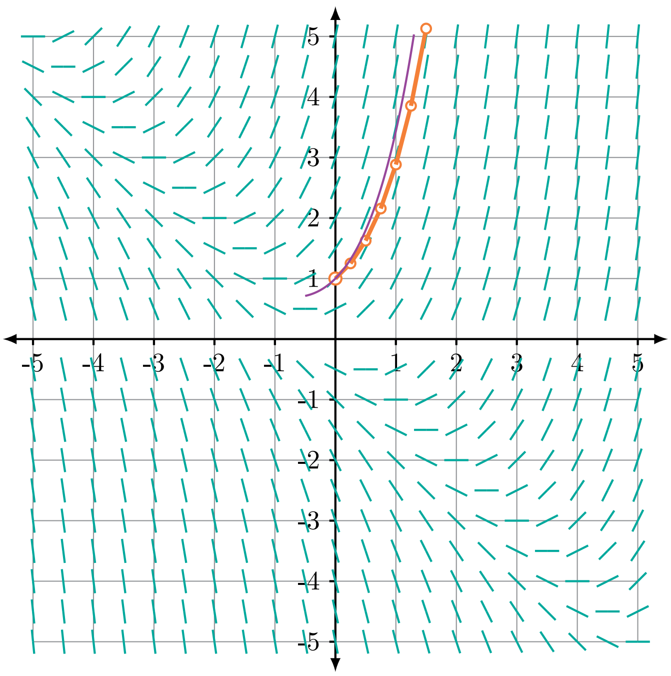
Allerdings entsteht dabei ein Fehler e_k, der mit zunehmendem Abstand zum Ausgangspunkt grösser werden. Der Fehler an der Stelle x_k ist einfach die Differenz der beiden Werte:

$$e_k := y(x_k) - y_k$$

3.2 Grafische Veranschaulichung

Das Euler-Verfahren lässt uns die Funktionskurve erahnen. Je kleiner h, desto genauer wird die Approximation, jedoch steigt dadurch auch der Rechenaufwand, da wir noch mehr Punkte ausrechen müssen.

Beispiel: $y' = x + y$, $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $h = 0.25$



- Das Euler-Verfahren in Orange.
- Die exakte Lösung in Violet.
- Das Richtungsfeld in Grün (Emerald).

3.2.1 Exkurs Programmierung des Euler-Verfahrens

Python

```python
def euler (f, x0, y0, h, n)
  x = x0
  y = y0
  result = [(x, y)]
  for i in range(n):
    x += h
    y += h * f(x, y)
    result.append((x, y))
  return result
```

4 Separation

Bei diesem Verfahren wird die Differentialgleichung so umgeformt, dass man sie anschliessend durch integrieren lösen kann.

> Eine gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung heisst **seperabel**, wenn sie sich auf folgende Form bringen lässt:
>
> $$y' = h(y) \cdot g(x) = h(y(x)) \cdot g(x)$$

4.1 Lösungsvorgehen

1. $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ einfügen
2. Seperation von y und x
3. Integrieren (links nach y und rechts nach y)
4. Auflösen nach y

Wobei der 4. Schritt nicht immer möglich ist ⇒ Numerisches Verfahren!

Beispiel: Separation
Differentialgleichung: $y' = -2 \cdot cos(x) \cdot y(x)$, wobei $y \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -2 \cdot cos(x) \cdot y(x) && |\cdot \mathrm{d}x \quad |\cdot \frac{1}{y} \\ \int \Big(\frac{1}{y}\Big)\,\mathrm{d}y &= \int \big(-2 \cdot cos(x)\big)\,\mathrm{d}x \\ \ln\big(|y|\big) &= -2 \cdot \sin(x) + c_1 && |\, e^{()} \\ |y| &= e^{-2\cdot\sin(x)+c_1} && |\, c_2 := e^{c_1} \\ |y| &= e^{-2\cdot\sin(x)} \cdot c_2 \\ y(x) &= e^{-2\cdot\sin(x)} \cdot c \Rightarrow \text{Allgemeine Lösung} \end{aligned}$$

4.2 Singuläre Lösung

Eine singuläre Lösung ist eine Lösung der Differentialgleichung, die beim normalen Herleiten nicht auftaucht.

Beispiel: Singuläre Lösung
Differentialgleichung: $y' = -2 \cdot cos(x) \cdot y(x)$, wobei $y \neq 0$

$$\begin{aligned} y' &= -2 \cdot cos(x) \cdot y(x) \\ y(x) &= 0 \Rightarrow \text{Singuläre Lösung} \end{aligned}$$