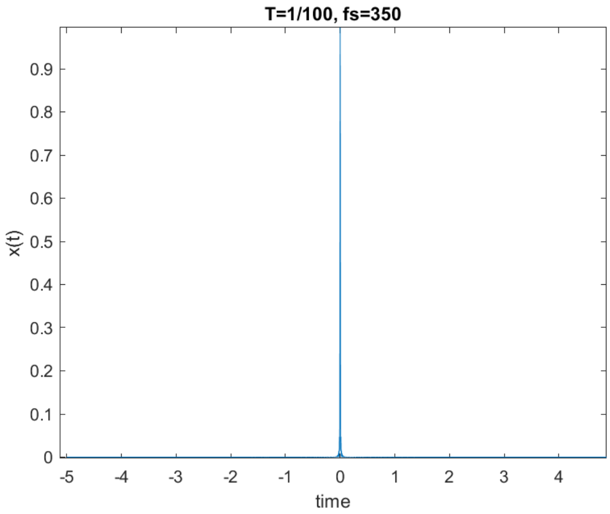
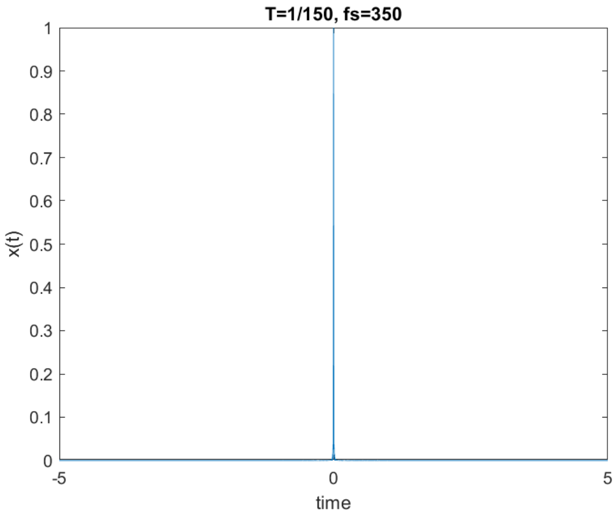
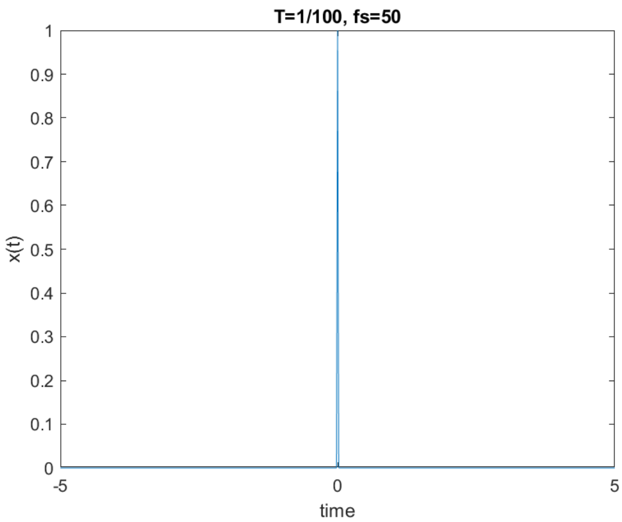
1.

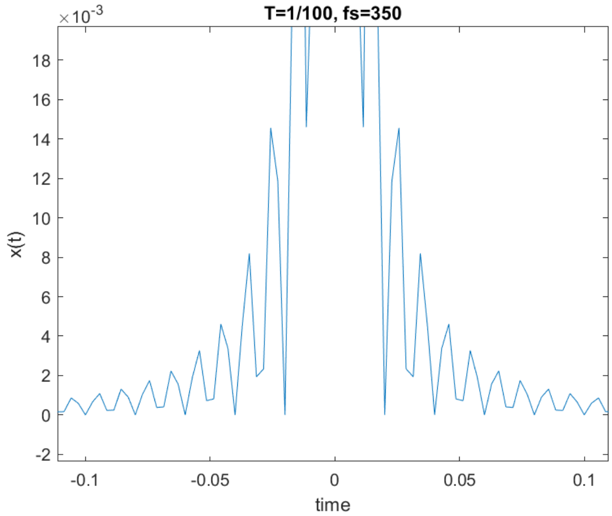
觀察 a、b、c 的時域圖，發現三者的圖樣似乎有些許不同，但微乎其微，接著將圖像放大：

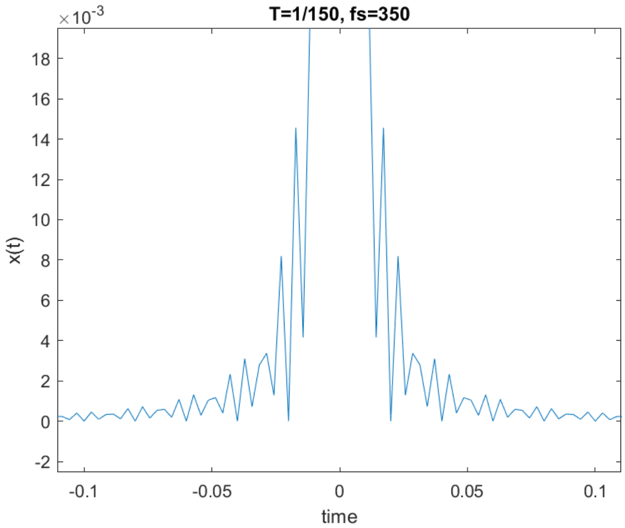


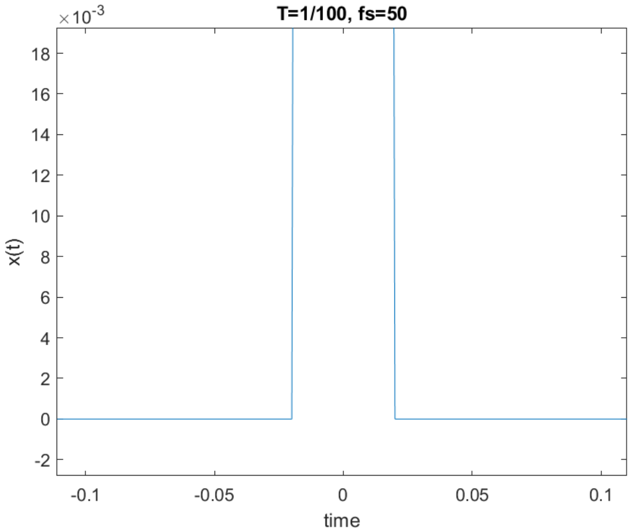




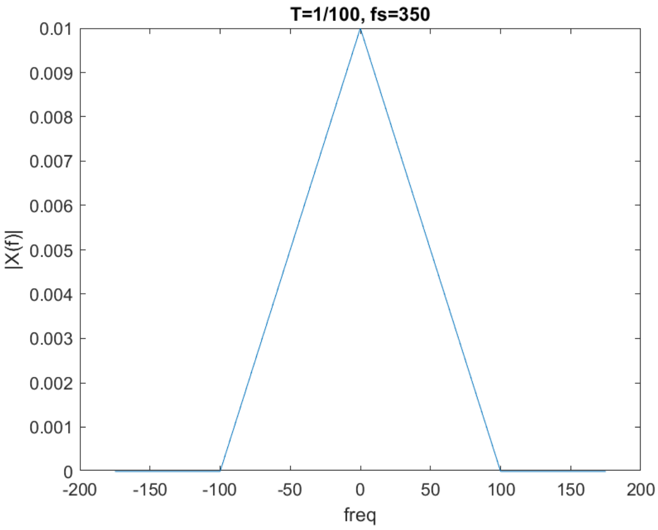
將圖像放大後，發現 a 和 b 的圖像因爲其周期的不同而產生不同的圖樣，輸出符合預期；而觀察 c 可以發現取樣率過低導致圖形完全無法辨認，接近 square wave 的形狀。

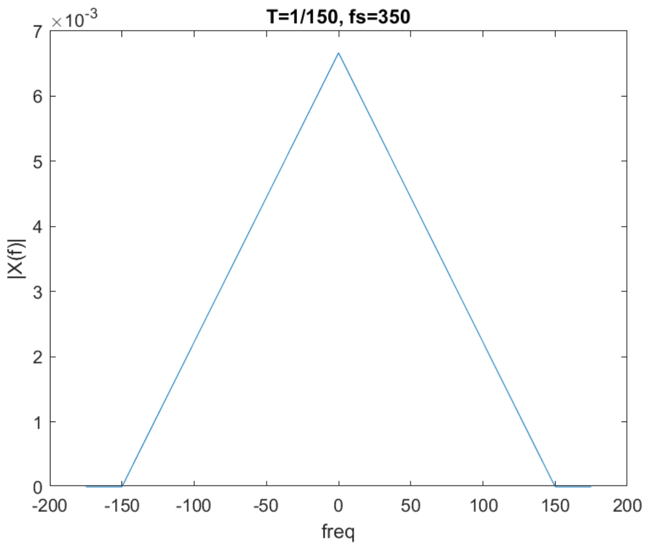


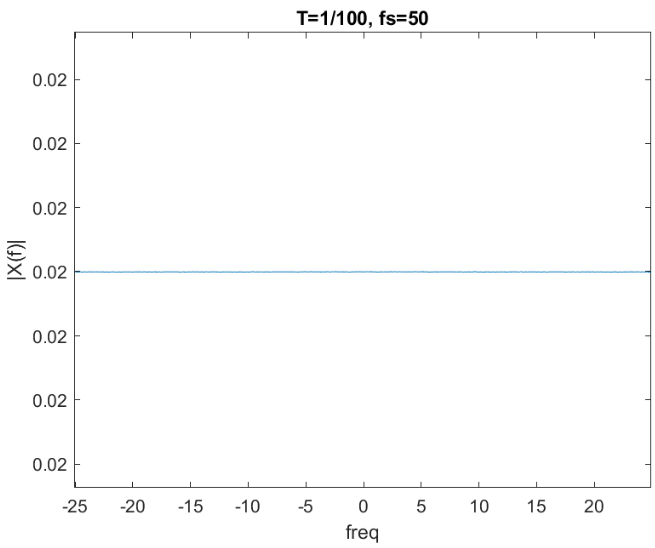




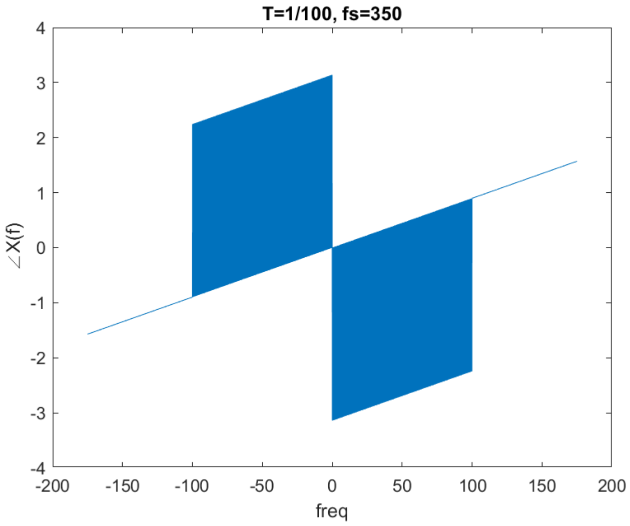
觀察強度頻譜發現 sinc^2 的 Fourier transform 形成三角波，a、b Fourier transform 的頻率分佈與預期相同，值得注意的是 c 因爲取樣率過低，時域形狀近似於 square wave，其 Fourier transform 也呈幾乎等值，但其應還是近似於一 sinc 函數。

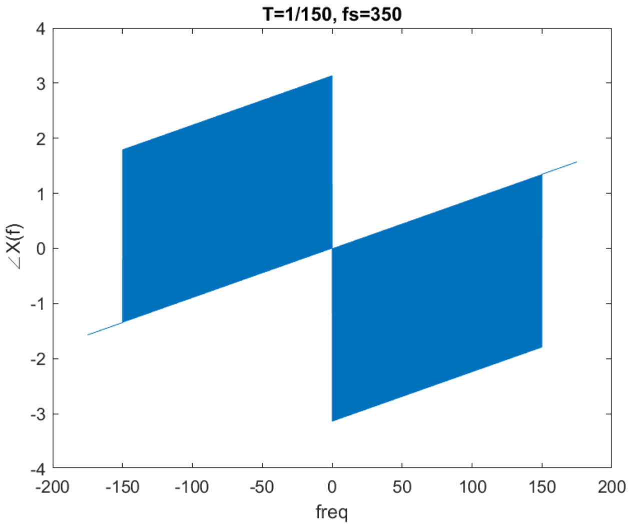


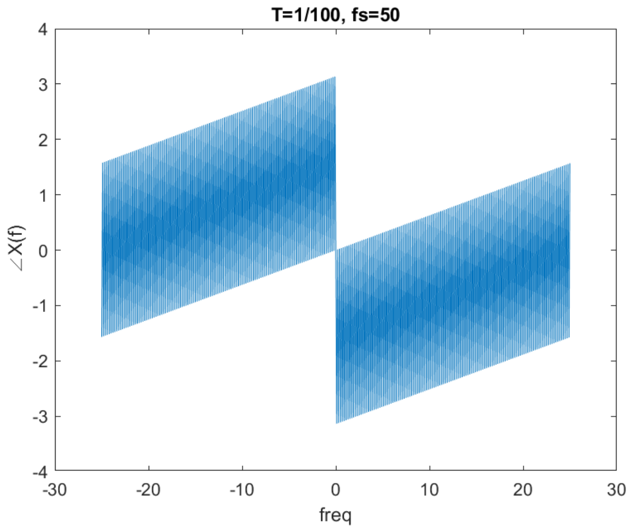




觀察三者的相位頻譜可以發現 a、b Fourier transform 的頻率分佈與預期相同，而 c 因爲取樣率的關係因此頻率分佈只有在-25 至 25 之間，但形狀皆類似。







程式碼:
首先將參數輸入進去，先將 x(t)輸出時域圖，接著把 x(t)進行 fast Fourier transform，因爲我們的原點在中間，因此利用 fftshift 將原點左右之頻譜調換以得到中心為原點的頻譜圖，因爲使用 FFT 計算 DTFT 多了採樣時間間隔，因此要再除掉，接著將輸出取絕對值得強度頻譜圖及使用 phase 函數得到相位頻譜圖。

```
fs = 350;                        % sampling frequency
ts = 1/fs;                       % sampling interval
t = -5:ts:5;                     % time vector
T = 0.01;

% 1.(a)
x = sinc(t/T).^2;
figure(1); plot(t,x),xlabel('time'),ylabel('x(t)'),title('T=1/100, fs=350')

X = fftshift(fft(x))/fs; % Fourier transform of x(t)
figure(2); plot(f,abs(X)),xlabel('freq'),ylabel('|X(f)|'),title('T=1/100,
fs=350')
figure(3); plot(f,phase(X)),xlabel('freq'),ylabel('∠X(f)'),title('T=1/100,
fs=350')
```

將周期改為 1/150，並如法炮製:

```

% 1.(b)
T = 1/150;
x = sinc(t/T).^2;
f = linspace(-fs/2,fs/2,length(x)); % freq index
figure(4); plot(t,x),xlabel('time'),ylabel('x(t)'),title('T=1/150, fs=350')

X = fftshift(fft(x))/fs; % Fourier transform of x(t)
figure(5); plot(f,abs(X)),xlabel('freq'),ylabel('|X(f)|'),title('T=1/150,
fs=350')
figure(6); plot(f,angle(X)),xlabel('freq'),ylabel('∠X(f)'),title('T=1/150,
fs=350')
```

將取樣頻率改爲 50，並如法炮製，記得其他參數也要記得更改：

```
% 1.(c)
T = 1/100;
fs = 50;
ts = 1/fs;
t = -5:ts:5;
x = sinc(t/T).^2;
f = linspace(-fs/2,fs/2,length(x)); % freq index
figure(7); plot(t,x),xlabel('time'),ylabel('x(t)'),title('T=1/100, fs=50')

X = fftshift(fft(x))/fs; % Fourier transform of x(t)
figure(8); plot(f,abs(X)),xlabel('freq'),ylabel('|X(f)|'),title('T=1/100,
fs=50')
figure(9); plot(f,angle(X)),xlabel('freq'),ylabel('∠X(f)'),title('T=1/100,
fs=50')
```

2.

利用 Fourier transform 分別計算 x(t)、h(t)並相乘得到輸出，看出含有 sinc。

$$H(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{-jwt}\, dt$$

$$= \int_0^4 \left(e^{-10t} + e^{-\frac{t^2}{2}}\right) e^{-jwt}\, dt.$$

$$= \frac{1}{-10-jw} e^{(-10-jw)t} + \frac{1}{-t-jw} e^{-\frac{t^2}{2}-jwt} \Bigg|_0^4$$

$$= \frac{1}{-10-jw} e^{-40-j4w} + \frac{1}{-4-jw} e^{-8-j4w}$$

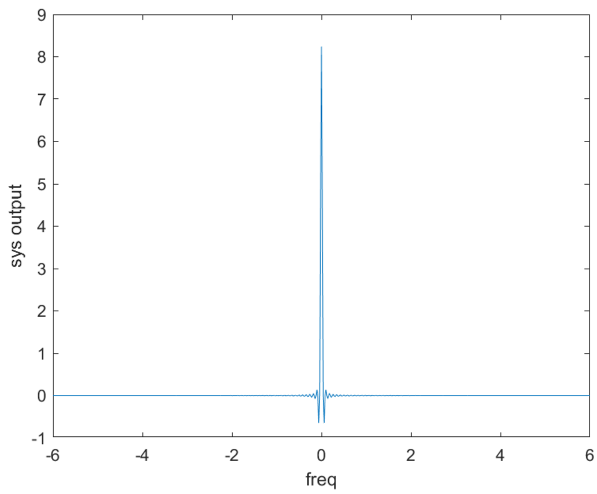
$$- \frac{1}{-10-jw} - \frac{1}{-jw}$$

$$X(jw) = \int_{-3}^{3} e^{-jwt}\, dt = \frac{1}{-jw} e^{-jwt} \Bigg|_{-3}^{3} = \frac{1}{-jw}\left(e^{-j3wt} - e^{j3wt}\right)$$

$$= \frac{\sin(3wt)}{w/2} = 6t \cdot \mathrm{sinc}(3wt)$$

$$\Rightarrow Y(jw) = X(jw) \cdot H(jw)$$

接著在 matlab 中輸出 Spectrum：



可以看出十分近似 sinc 函數，與預期結果雷同。

程式碼：
先設置參數，此處取樣頻率設爲 50，接著將 x(t)輸入，時間為-6~6;將 x(t)進行 fft，DTFT 使用 FFT 一樣進行 shift 和把取樣頻率除掉；h(t)依據同樣的步驟，最後相乘得輸出。

```
fs=50;                        % sampling frequency
ts=1/fs;                      % sampling interval
t=-6:ts:6;                    % time vector

x = (1).*(t/6<1/2).*(t/6>-1/2) + (1/2).*(t/6==1/2) + (1/2).*(t/6==-1/2);
%figure(1); plot(t,x),xlabel('time'),ylabel('x(t)')


X = fftshift(fft(x))/fs;
h = (exp(-10*t) + exp(-t.^2/2)).*(t<=4).*(t>=0);
H = fftshift(fft(h))/fs;

X_H = X.*H;
f = linspace(-fs/2,fs/2,length(x));

figure(5); plot(t,X_H),xlabel('freq'),ylabel('sys output')
```