Matematyka 1. Egzamin.

- Proszę rozwiązania zadań zapisać odręcznie, a następnie przesłać ich skan lub zdjęcie.
- W dowolnym miejscu pracy proszę zamieścić oświadczenie o treści
  Oświadczam, że niniejsza praca stanowiąca podstawę do uznania osiągnięcia efektów uczenia się z przedmiotu Matematyka 1 została wykonana przeze mnie samodzielnie
  i podpisać je czytelnie imieniem i nazwiskiem oraz numerem albumu.
  Prace bez załączonego oświadczenia nie będą sprawdzane.
- Każdy wysłany plik proszę podpisać wg schematu: *Mat1_Egz1_X_Nazwisko_Y*
  X - pierwsza litera imienia
  Y - nr wysyłanego pliku (jeśli więcej niż jeden)
- Po przesłaniu rozwiązań w ramach Zadania niezwłocznie po egzaminie proszę umieścić wydruki rozwiązań i oświadczenia w swoim Notesie przedmiotowym w zakładce Egzamin 1 (każde zadanie w oddzielnej Sekcji) w formie niewymagającej edytowania (rozpakowywania, zmniejszania, powiększania, przesuwania, obracania itp.).

Zad. 1 (10 pkt.)

1. Na płaszczyźnie zespolonej naszkicuj zbiór

$$D=\left\{z\in\mathbb{C}:\quad |z-2-i|\leq 3\quad\wedge\quad \frac{\pi}{4}<\arg(z-i)<\frac{\pi}{2}\right\}$$

2. W zbiorze liczb zespolonych rozwiąż równanie

$$(z^2+2z+2)\cdot\left(z^2+\frac{(-\sqrt{3}-i)^{31}}{(-1+i)^{60}}+\sqrt{3}\right)=0$$

Zad. 2 (10 pkt.)

a) Stosując algorytm Euklidesa znaleźć przynajmniej jedno rozwiązanie w liczbach całkowitych x, y równania

$$\mathrm{NWD}(1254, 2002) = 1254x + 2002y$$

b) Obliczyć $\varphi(33\ )$ dla dowolnej liczby naturalnej $n\geq 1$, gdzie φ – funkcja Eulera.

c) Ile jest wszystkich liczb podzielnych przez 2 lub 5 w zbiorze $\{1, 2, ..., 1000\}$.

Zad. 3 (10 pkt.) Niech $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\4&7&5&1&6&2&3\end{pmatrix}\in S_7$

a) Zapisać σ jako złożenie rozłącznych cykli. Policzyć $\mathrm{sgn}(\sigma)$.

b) Znaleźć permutację $\pi\in S_7$ taką, że $\pi\circ\sigma^3=\mathrm{id}$,
gdzie σ oznacza k-krotne złożenie σ, id – oznacza identyczność.

c) Ile różnych ciągów znaków długości 9 można uzyskać z liter A,A,A,B,B,C,C,D,D.

Zad. 4 (12 pkt.)

1. Znaleźć wyraz ogólny ciągu określonego rekurencyjnie: $a_0=5$, $a_1=-13$ oraz $a\ \ =-4a_{\ -1}+5a_{\ -2}$, dla $n\geq 2$.
2. Sprawdzić indukcyjnie, że wyraz ogólny ciągu z punktu 1. został policzony poprawnie.
3. Znaleźć wyraz ogólny ciągu, którego funkcją tworzącą jest $f(x)=\dfrac{5+7x}{1+4x-5x^2}$.

Zad. 5 (8 pkt.)

1. Narysować drzewo o podanym kodzie Prüfera: $(3,3,3,2,2)$.
2. Pięciu specjalistów s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 jest członkami pięciu zespołów: $z_1=\{s_1,s_2,s_3,s_5\}$, $z_2=\{s_1,s_2,s_4\}$, $z_3=\{s_2,s_3\}$, $z_4=\{s_1,s_3,s_4\}$ oraz $z_5=\{s_1,s_3,s_4,s_5\}$. Jeden specjalista z każdego zespołu ma być reprezentantem komisji. Czy jest możliwe, aby z każdego zespołu wysłać innego specjalistę? Jeśli tak wskazać przykładową komisję, jeśli nie wyjaśnić dlaczego jest to niemożliwe.
3. Dla jakich $n\in\mathbb{N}$ graf pełny $K\ $ jest eulerowski?

Powodzenia!