# Formy dwuliniowe hermitowskie i przestrzenie unitarne - dodatek.

$\mathbb{K} = (K, +, \cdot)$ - ciało liczb rzeczywistych lub liczb zespolonych
$V(\mathbb{K})$ - przestrzeń wektorowa nad $\mathbb{K}$

**Definicja 1.** *Odwzorowanie*

$$g : V \times V \to K$$

*jest **formą dwuliniową hermitowską** na przestrzeni $V(\mathbb{K})$, jeśli dla $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$, $\alpha_1, \alpha_2 \in K$*

1. $g(\alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}) = \alpha_1 g(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}) + \alpha_2 g(\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v})$
2. $g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \overline{g(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})}$

Jeżeli $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ to funkcję $g$ nazywamy ***formą dwuliniową symetryczną***.

**Definicja 2.** *Przekształcenie*

$$h : V \to K$$

*nazywamy **formą hermitowską** na przestrzeni $V(\mathbb{K})$, jeśli istnieje forma dwuliniowa hermitowska $g \colon V \times V \to K$ taka, że*

$$\forall (\boldsymbol{v} \in V)\ h(\boldsymbol{v}) = g(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}).$$

*Formę $g$ nazywamy **formą biegunową** formy $h$.*
*Jeżeli forma biegunowa formy $h$ jest symetryczna, tzn. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, to formę hermitowską $h$ nazywamy formą **kwadratową**.*

Każda forma hermitowska $h$ ma tylko jedną formę biegunową:

$$g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \frac{1}{4}(h(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + ih(\boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v}) - h(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) - ih(\boldsymbol{u} - i\boldsymbol{v})).$$

Dla formy kwadratowej $h$ wzór na jej formę biegunową przybiera postać:

$$g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \frac{1}{4}(h(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) - h(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v})).$$

Macierzą formy hermitowskiej nazywamy macierz jej formy biegunowej. Podobnie, wektory ortogonalne względem formy hermitowskiej są to wektory ortogonalne względem jej formy biegunowej. Forma hermitowska jest w *postaci kanonicznej*, gdy jej macierz jest diagonalna.

**Przykład 3.** *Forma dwuliniowa hermitowska $g \colon C^3 \times C^3 \to C$, $g([x_1, x_2, x_3], [y_1, y_2, y_3]) = x_1\overline{y}_1 + ix_1\overline{y}_2 - ix_2\overline{y}_1$ jest formą biegunową formy hermitowskiej*

$$h \colon C^3 \to C, \quad h([x_1, x_2, x_3]) = x_1\overline{x}_1 + ix_1\overline{x}_2 - ix_2\overline{x}_1.$$

**Przykład 4.** *Forma biegunowa formy kwadratowej $h \colon R^2 \to R$, $h([x_1, x_2]) = x_1^2 + 2x_1x_2$ ma postać:*

$$g([x_1, x_2], [y_1, y_2]) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1.$$

Forma dwuliniowa hermitowska $g \colon V \times V \to K$ jest ***dodatnio określona***, jeśli $\forall(\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{v} \in V)\ g(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) > 0$ oraz ***ujemnie określona***, jeśli $\forall(\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{v} \in V)\ g(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) < 0$. Forma $g$ jest ***nieokreślona***, jeśli nie jest określona ani ujemnie ani dodatnio, tzn. istnieją $\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$ takie, że $g(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1) > 0 \ \wedge \ g(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2) < 0$.

**Twierdzenie 5.** *Forma dwuliniowa hermitowska $g \colon V \times V \to K$ jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy macierz Grama $M_g(\mathcal{B}) = (a_{ij})$ spełnia warunek:*

$$Det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & \dots & a_{jj} \end{pmatrix} > 0 \text{ dla } j = 1, \dots, n.$$

**Uwaga 6.** *Dla każdego liniowo niezależnego układu wektorów $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ przestrzeni $V(\mathbb{K})$ i dodatnio określonej formy dwuliniowej hermitowskiej $g \colon V \times V \to K$ na przestrzeni $V(\mathbb{K})$*

$$\Gamma_g(\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m) > 0.$$

Forma hermitowska $h$ jest dodatnio (ujemnie) określona, jeśli jej forma biegunowa jest dodatnio (ujemnie) określona.

**Definicja 7.** *Dodatnio określoną formę dwuliniową hermitowską* $g\colon V\times V\to K$ *na przestrzeni* $V(\mathbb{K})$ *nazywamy* ***iloczynem skalarnym*** *i ozn.* $<\cdot,\cdot>$.

$\langle u, v\rangle = 0 \quad u \perp v \quad \perp_{\langle,\rangle}$

**Definicja 8.** *Układ wektorów* $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_m$ *w przestrzeni unitarnej jest* ***układem ortonormalnym****, jeśli jest układem* ***ortogonalnym****, tzn.* $<\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{v}_j>=0$ *dla każdego* $i\neq j=1,\dots,m$*, oraz* $<\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{v}_i>=1$ *dla* $i=1,\dots,m$.

Bazę przestrzeni unitarnej będącą układem ortonormalnym nazywamy ***bazą ortonormalną***.

**Twierdzenie 9.** *W każdej skończenie wymiarowej przestrzeni unitarnej istnieje baza ortonormalna.*

$V(\mathbb{K})$ - przestrzeń unitarna z iloczynem skalarnym $<\cdot,\cdot>$ oraz normą $\|\cdot\|=\sqrt{<\cdot,\cdot>}$ $\qquad \langle v, v\rangle = \|v\|^2$

**Ortogonalizacja Grama-Schmidta**

Niech $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_m\in V$ będzie liniowo niezależnym układem wektorów w przestrzeni $V(\mathbb{K})$ generujacym podprzestrzeń $W$, tzn. $W=\mathcal{L}(\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_m)$. Układ wektorów $\boldsymbol{u}_1,\dots,\boldsymbol{u}_m\in V$ określony wzorami:

4

$$\boldsymbol{u}_1:=\boldsymbol{v}_1, \qquad \forall$$

$$\boldsymbol{u}_k:=\boldsymbol{v}_k-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{<\boldsymbol{v}_k,\boldsymbol{u}_i>}{\|\boldsymbol{u}_i\|^2}\boldsymbol{u}_i,\ \text{dla } k=2,\dots,m \qquad V \quad 0$$

jest układem ortogonalnym takim, że $W=\mathcal{L}(\boldsymbol{u}_1,\dots,\boldsymbol{u}_m)$. Układ $\boldsymbol{u}_1/\|\boldsymbol{u}_1\|,\dots,\boldsymbol{u}_m/\|\boldsymbol{u}_m\|\in W$ jest bazą ortonormalną podprzestrzeni $W$.

Zatem bazę ortonormalną $\boldsymbol{w}_1,\dots,\boldsymbol{w}_m\in W$ podprzestrzeni $W=\mathcal{L}(\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_m)$ możemy określić następująco. Przyjmujemy najpierw $\boldsymbol{w}_1:=\boldsymbol{v}_1/\|\boldsymbol{v}_1\|$. Jeśli $m>1$, $1\le k\le m-1$ i znane są już wektory $\boldsymbol{w}_1,\dots,\boldsymbol{w}_k$, to wektor $\boldsymbol{w}_{k+1}$ określamy jako $\boldsymbol{w}_{k+1}:=\boldsymbol{v}'_{k+1}/\|\boldsymbol{v}'_{k+1}\|$, gdzie

$$(*) \qquad \boxed{\boldsymbol{v}'_{k+1}:=\boldsymbol{v}_{k+1}-\sum_{i=1}^{k}<\boldsymbol{v}_{k+1},\boldsymbol{w}_i>\boldsymbol{w}_i.} \qquad \text{Pr. } 11 \ \ 10$$

**Przykład 10.** *Niech* $W=\mathcal{L}(\boldsymbol{v}_1=[1,1,1,1],\boldsymbol{v}_2=[2,0,1,1],\boldsymbol{v}_3=[5,1,1,5])$ *będzie podprzestrzenią przestrzeni unitarnej* $R^4(\mathbb{R})$ *z iloczynem skalarnym* $<[x_1,x_2,x_3,x_4],[y_1,y_2,y_3,y_4]>=\sum_{j=1}^4 x_jy_j$. *Stosując proces ortogonalizacji Grama-Schmidta do podprzestrzeni* $W$ *wyznaczymy jej bazę ortonormalną* $\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\boldsymbol{w}_3$.

$$1)\qquad \boldsymbol{w}_1=\frac{\boldsymbol{v}_1}{\|\boldsymbol{v}_1\|}=\frac{1}{2}[1,1,1,1] \qquad \|v_1\|=\sqrt{\langle v_1,v_1\rangle}=\sqrt{4}=2$$

$$2)\qquad \boldsymbol{v}'_2=\boldsymbol{v}_2-<\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{w}_1>\boldsymbol{w}_1=[2,0,1,1]-<[2,0,1,1],\frac{1}{2}[1,1,1,1]>\frac{1}{2}[1,1,1,1]= \qquad k=1$$

$$=2\cdot1+0\cdot1+1\cdot1+1\cdot1$$

$$[2,0,1,1]-\frac{1}{4}<[2,0,1,1],[1,1,1,1]>[1,1,1,1]=\underbrace{[2,0,1,1]}_{=v_2}-\frac{1}{4}4\underbrace{[1,1,1,1]}_{=w_1}=[1,-1,0,0]$$

$$\boldsymbol{w}_2=\frac{\boldsymbol{v}'_2}{\|\boldsymbol{v}'_2\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}[1,-1,0,0] \qquad \|v_2'\|=\sqrt{1+(-1)^2+0+0}=\sqrt{2}$$

$$k=2 \qquad 3)\qquad \boldsymbol{v}'_3=\boldsymbol{v}_3-<\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{w}_1>\boldsymbol{w}_1-<\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{w}_2>\boldsymbol{w}_2=[5,1,1,5]-<[5,1,1,5],\frac{1}{2}[1,1,1,1]>\frac{1}{2}[1,1,1,1]-$$

$$<[5,1,1,5],\frac{1}{\sqrt{2}}[1,-1,0,0]>\frac{1}{\sqrt{2}}[1,-1,0,0]=$$

$$v_3 \qquad 2$$

$$[5,1,1,5]-\frac{1}{4}12[1,1,1,1]-\frac{1}{2}4[1,-1,0,0]=[5,1,1,5]-[3,3,3,3]-[2,-2,0,0]=[0,0,-2,2]$$

$$3$$

$$\boldsymbol{w}_3=\frac{\boldsymbol{v}'_3}{\|\boldsymbol{v}'_3\|}=\frac{1}{2\sqrt{2}}[0,0,-2,2]=\frac{1}{\sqrt{2}}[0,0,-1,1]$$

*Zatem szukaną bazą ortonormalną podprzestrzeni* $W$ *jest:* $\boldsymbol{w}_1=\frac{1}{2}[1,1,1,1]$, $\boldsymbol{w}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}[1,-1,0,0]$, $\boldsymbol{w}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}[0,0,-1,1]$.

$$\langle w_1, w_2\rangle=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1\cdot1+1\cdot(-1)+0+0)=0 \qquad \left\langle \frac{v}{\|v\|},\frac{v}{\|v\|}\right\rangle=1$$

$$=\frac{1}{\|v\|^2}\langle v,v\rangle$$

$(V, < >)$ podpr. $V = W \oplus U$ $v = w' + u'$, $\in W$ $\in U$ $\pi(v) = w'$

**Dopełnienie ortogonalne** $W \subseteq V$:

$$W^{\perp} := \{ \boldsymbol{v} \in V : \forall(\boldsymbol{w} \in W)\ \boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{w} \} \leq V$$

Jeżeli $V(\mathbb{K})$ jest skończenie wymiarową przestrzenią unitarną z iloczynem skalarnym $< \cdot, \cdot >$ oraz $W$ jest podprzestrzenią $V(\mathbb{K})$ to $V = W \oplus W^{\perp}$. Przekształcenie

$$\pi : W \oplus W^{\perp} \to W;\ \pi(\boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}^{\perp}) = \boldsymbol{w}$$

$W \oplus W^{\perp}$ $V$

nazywamy *rzutowaniem* przestrzeni $V = W \oplus W^{\perp}$ na podprzestrzeń $W$ natomiast wektor $\boldsymbol{w}$ nazywamy ***rzutem ortogonalnym*** wektora $\boldsymbol{v}$ na podprzestrzeń $W$. Jeżeli wektory $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ tworzą bazę ortonormalną podprzestrzeni $W$, to dla dowolnego wektora $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} + w^{\perp}$, gdzie $\boldsymbol{w} \in W$ i $\boldsymbol{w}^{\perp} \in W^{\perp}$ oraz $\boldsymbol{w}_i$, $i = 1, \ldots, m$, otrzymujemy

$\langle w, w^{\perp} \rangle = 0$

$$< \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_i > = < \boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}^{\perp}, \boldsymbol{w}_i > = < \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}_i > + \underbrace{< \boldsymbol{w}^{\perp}, \boldsymbol{w}_i >}_{=0} = < \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}_i > .$$

$w_1, \ldots, w_m$ $W$ | $W^{\perp}$

Stąd dla $\boldsymbol{w} = a_1\boldsymbol{w}_1 + \ldots + a_m\boldsymbol{w}_m$,

$$< \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_i > = < \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}_i > = < a_1\boldsymbol{w}_1 + \ldots + a_m\boldsymbol{w}_m, \boldsymbol{w}_i > = a_i.$$

$= \langle a_1 w_1, w_i \rangle + \ldots + \langle a_i w_i, w_i \rangle + \ldots + \langle a_m w_m, w_i \rangle$

Zatem rzutem ortogonalnym wektora $\boldsymbol{v} \in V$ na podprzestrzeń $W$ jest wektor $\boldsymbol{w} = < \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_1 > \boldsymbol{w}_1 + \ldots + < \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_m > \boldsymbol{w}_m$.

**Przykład 11.** *Niech* $W = \mathcal{L}([1,1,1,1],[2,0,1,1],[5,1,1,5])$ *będzie podprzestrzenią przestrzeni unitarnej* $R^4(\mathbb{R})$ *z iloczynem skalarnym* $< [x_1,x_2,x_3,x_4],[y_1,y_2,y_3,y_4] > = \sum_{j=1}^{4} x_j y_j$ *i niech* $\boldsymbol{v} = [6,5,3,0] \in V$. *Bazą ortonormalną podprzestrzeni* $W$ *jest:* $\boldsymbol{w}_1 = \frac{1}{2}[1,1,1,1]$, $\boldsymbol{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}[1,-1,0,0]$, $\boldsymbol{w}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}[0,0,-1,1]$. *Zatem rzutem ortogonalnym wektora* $\boldsymbol{v}$ *na podprzestrzeń* $W$ *jest wektor*

$$\boldsymbol{w} = < \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_1 > \boldsymbol{w}_1 + < \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_2 > \boldsymbol{w}_2 + < \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_3 > \boldsymbol{w}_3 = \frac{1}{4}14[1,1,1,1] + \frac{1}{2}[1,-1,0,0] + \frac{1}{2}(-3)[0,0,-1,1] =$$

$$\frac{1}{2}([7,7,7,7] + [1,-1,0,0] + [0,0,3,-3]) = [4,3,5,2].$$

$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$

Niech $V(\mathbb{R})$ będzie rzeczywistą przestrzenią unitarną z iloczynem skalarnym $< \cdot, \cdot >$ oraz normą $\| \cdot \| = \sqrt{< \cdot, \cdot >}$. Na mocy nierówności Schwartza

$$-1 \leq \frac{< \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} >}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|} \leq 1.$$

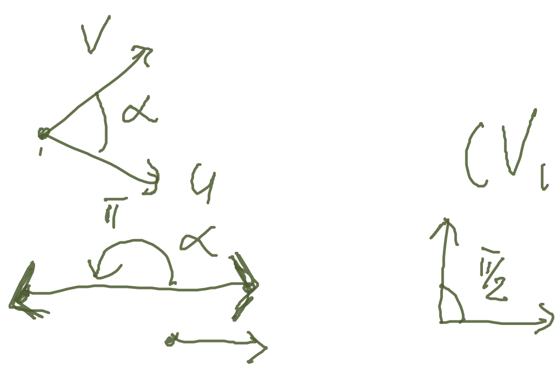
Istnieje zatem dokładnie jedna liczba $0 \leq \alpha \leq \pi$ taka, że

$$\cos\alpha = \frac{< \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} >}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|}. \tag{1}$$

$\langle a_1 w_1, w_i \rangle = a_1 \langle w_1, w_i \rangle = 0$

$\langle a_i w_i, w_i \rangle = a_i \langle w_i, w_i \rangle = a_i$

Liczbę $\alpha \in [0, \pi]$ spełniającą warunek (1) nazywamy ***kątem niezorientowanym*** między wektorami $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$.




$(V, \| \|)$ – p. unormow.

$(V, \| \|) \longleftarrow (V, < >)$ – p. unitarna