8. Wektory i wartości własne

Zadania

1. W przestrzeni R^3 wyznaczyć macierz zmiany bazy od bazy $\mathcal{B} = \{[0,1,0],[0,0,1],[1,0,0]\}$ do bazy $\mathcal{C} = \{[-1,2,3],[2,-3,1],[0,0,1]\}$.

2. Znaleźć wielomian charakterystyczny macierzy:

   (a) $\begin{pmatrix} 2+i & 1 \\ 2 & 2-i \end{pmatrix}$,

   (b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

3. Znaleźć wartości własne i wektory własne podanych liniowych przekształceń przestrzeni liniowych. Dla każdej wartości własnej λ znaleźć podprzestrzeń N_λ wektorów własnych.

   (a) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F([x_1,x_2]) = [x_1, x_1+x_2]$,

   (b) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F([x_1,x_2,x_3]) = [x_1-x_3, 2x_2, x_1+x_3]$.

   (c) $F : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $F([x_1,x_2]) = [-x_2, x_1]$,

   (d) $F : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, $F([x_1,x_2,x_3]) = [x_1-x_3, 2x_2, x_1+x_3]$.

4. Niech $F\colon V \to V$ będzie przekształceniem liniowym o podanej macierzy $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)$ w bazie standardowej $\mathcal{B}$ przestrzeni $V(\mathbb{C})$. Sprawdzić, czy istnieje baza $\mathcal{C}$ odpowiedniej przestrzeni wektorowej, w której $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(F)$ jest macierzą diagonalną. Jeśli tak, znaleźć macierze zmiany bazy: $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(Id_V)$ oraz $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(Id_V)$.

   (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

   (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

   (c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

   (d) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (e) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

   (f) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$