MAT 2 - ćwiczenia 1

Paweł Lefelbajn

9 października 2020

Zadanie 1

a)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n + 4^n}{4^n + 5^n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{4^n \cdot \left(\left(\frac{3}{4}\right)^n + 1\right)}{5^n \cdot \left(\left(\frac{4}{5}\right)^n + 1\right)}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{5} \cdot \sqrt[n]{\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n + 1}{\left(\frac{4}{5}\right)^n + 1}}$$

$$= \frac{4}{5}$$

Zadanie 1

b)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(\frac{n\pi}{2})}{n+1}$$

Zauważmy, że

$$-1 \leq \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \leq 1$$

Zatem

$$0 \overset{n\to\infty}{\leftarrow} -\frac{1}{n+1} \leq \frac{\cos(\frac{n\pi}{2})}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \overset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$$

Twierdzenie o trzech ciągach

Twierdzenie

Załóżmy, że

- istnieje $N_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $a_n \leq b_n \leq c_n$ dla wszystkich $n \geq N_0$,
- $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} c_n = g$.

Wówczas

$$\lim_{n \to \infty} b_n = g.$$

Zadanie 1

b)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n+1}$$

Zauważmy, że

$$-1 \leq \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \leq 1$$

Zatem

$$0 \overset{n\to\infty}{\leftarrow} -\frac{1}{n+1} \leq \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \overset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$$

Zatem z Twierdzenia o trzech ciągach

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n+1} = 0$$

Zadanie 1

c)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}\cdot 4^n + n\cdot 3^n + 5n^3} = \lim_{n\to\infty} 4\cdot \sqrt[n]{\frac{1}{n^2} + n\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{5n^3}{4^n}}$$

Spróbujmy oszacować to wyrażenie

$$\begin{aligned} 4\cdot \sqrt[n]{\frac{1}{n^2} + n\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{5n^3}{4^n}} &\leq 4\cdot\sqrt[n]{1+n\cdot 1+1} \\ &\leq 4\cdot\sqrt[n]{n+n+n} \\ &= 4\cdot\sqrt[n]{3\cdot n} \overset{n\to\infty}{\to} 4\cdot 1 \end{aligned}$$

Zadanie 1

I z drugiej strony

$$
\begin{aligned}
4 \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{n^2} + n \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{5n^3}{4^n}} &\geq 4 \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{n^2} + 0 + 0} \\
&= 4 \cdot \sqrt[n]{\left(\frac{1}{n}\right)^2} \\
&= 4 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^2 \overset{n\to\infty}{\to} 4 \cdot \left(\frac{1}{1}\right)^2
\end{aligned}
$$

Zatem z Twierdzenia o trzech ciągach

$$
\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2} \cdot 4^n + n \cdot 3^n + 5n^3} = 4
$$

Zadanie 1

d)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+2n+1}{2n^2+2}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n-1}{2n^2+2}\right)^{n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2n^2+2}{2n-1}}\right)^{n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{2n^2+2}{2n-1}}\right)^{\frac{2n^2+2}{2n-1}}\right)^{\frac{(2n-1)(n+1)}{2n^2+2}}$$

Zadanie 1

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)(n+1)}{2n^2+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2-\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n})}{2+\frac{2}{n^2}}=\frac{(2-0)(1+0)}{2+0}=1$$

Twierdzenie

Jeżeli $a_n \overset{n\to\infty}{\to} a > 0$ oraz $b_n \overset{n\to\infty}{\to} b$ to

$$a_n{}^{b_n} \overset{n\to\infty}{\to} a^b$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+2n+1}{2n^2+2}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{2n^2+2}{2n-1}}\right)^{\frac{2n^2+2}{2n-1}}\right)^{\frac{(2n-1)(n+1)}{2n^2+2}}=e^1=e$$

Zadanie 1

e)

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\left[\ln(n+3)-\ln n\right] = \lim_{n\to\infty} n\cdot\ln\left(\frac{n+3}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\ln\left(\left(\frac{n+3}{n}\right)^n\right)$$

Policzmy zatem wewnętrzną granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{3}{n}\right)^{\frac{n}{3}}\right)^3 = e^3$$

Zatem z ciągłości funkcji $f(x)=\ln(x)$

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\left[\ln(n+3)-\ln n\right] = \lim_{n\to\infty}\ln\left(\left(\frac{n+3}{n}\right)^n\right) = \ln(e^3) = 3\ln(e) = 3$$

Zadanie 2

Wykaż, że nie istnieje granica:

a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n\pi) + \sqrt{3}}{2\cos(n\pi) + \sqrt{2}}$$

Przypuśćmy, że ciąg $a_n = \frac{\cos(n\pi)+\sqrt{3}}{2\cos(n\pi)+\sqrt{2}}$ zbiega do pewnej liczby g.

Zauważmy, że

$$\cos(n\pi) = (-1)^n$$

Stąd

$$a_n = \frac{(-1)^n + \sqrt{3}}{2(-1)^n + \sqrt{2}}$$

Zadanie 2

$$a_{2n} = \frac{1+\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}} \overset{n\to\infty}{\to} \frac{1+\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}}$$

$$a_{2n+1} = \frac{-1+\sqrt{3}}{-2+\sqrt{2}} \overset{n\to\infty}{\to} \frac{-1+\sqrt{3}}{-2+\sqrt{2}}$$

Ale przypuściliśmy, że a_n zbiega do g, stąd a_{2n} oraz a_{2n+1} również zbiegają do g z Twierdzenia. Stąd otrzymujemy

$$\frac{-1+\sqrt{3}}{-2+\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}}.$$

Zatem otrzymujemy sprzeczność, więc przypuszczenie że a_n zbiega było fałszywe.

Zadanie 2

b)Oznaczmy $b_n = a^n$

$$b_{2n} = a^{2n} = (a^2)^n \overset{n\to\infty}{\to} \infty$$

$$b_{2n+1} = a^{2n+1} = a \cdot (a^2)^n \overset{n\to\infty}{\to} -\infty$$

Zatem $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ nie istnieje.

Ważne granice

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\forall_{r\in\mathbb{R}} \ \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^r - 1}{x} = r$$

$$\forall_{a>0} \ \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Zadanie 3

Oblicz granicę funkcji

a)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(4x)}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1-2\sin^2(2x)\right)}{x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(2x)}{x^2}\\ &= \lim_{x\to 0} 4\left(\frac{\sin(2x)}{(2x)}\right)^2\\ &= 4\cdot(1)^2\\ &= 4\end{aligned}$$

Zadanie 3

b)

$$\lim_{x \to 0} \left(1 - \sin(x)\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} \left(\left(1 + (-\sin(x))\right)^{\frac{1}{-\sin(x)}} \right)^{\frac{-\sin(x)}{x}} = e^{-1}$$

Zadanie 3

c) Mamy do czynienia z granicą typu $f(x)^{g(x)}$, gdzie $f(x) \to 1$ oraz $g(x) \to \infty$.
Zatem chciało by się skorzystać z granicy $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}(\cos(x))^{\operatorname{ctg}^2(x)} &= \lim_{x\to 0}(1+(\cos(x)-1))^{\operatorname{ctg}^2(x)} \\
&= \lim_{x\to 0}\left((1+(\cos(x)-1))^{\frac{1}{\cos(x)-1}}\right)^{(\cos(x)-1)\operatorname{ctg}^2(x)}
\end{aligned}$$

Zadanie 3

Zajmijmy się wykładnikiem

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}(\cos(x)-1)\operatorname{ctg}^2(x) &= \lim_{x\to 0}(\cos(x)-1)\frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)} \\
&= \lim_{x\to 0}(\cos(x)-1)\frac{\cos^2(x)}{1-\cos^2(x)} \\
&= \lim_{x\to 0} -\frac{\cos^2(x)}{1+\cos(x)} \\
&= -\frac{1^2}{1+1} \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Zadanie 3

Stąd

$$\lim_{x\to 0}(\cos(x))^{\operatorname{ctg}^2(x)} = \lim_{x\to 0}\left(\left(1+(1-\cos(x))\right)^{\frac{1}{1-\cos(x)}}\right)^{(1-\cos(x))\operatorname{ctg}^2(x)} = e^{-\frac{1}{2}}$$

Zadanie 3

d) Najpierw wyłączmy najwyższą potęgę:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{2x^2+x+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}}{x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x}\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$$

Zadanie 3

d) Najpierw wyłączmy najwyższą potęgę:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{2x^2+x+1}}{x} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}}{x} \\
&= \color{blue}{\cancel{\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x}\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|}{x}\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} \\
&= -\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

Zadanie 4

a)Niech $f(x) = \sin(3x)$. Weźmy dwa ciągi
$x_n = -\frac{2n\pi}{3}$
$y_n = -\frac{2n\pi + \frac{pi}{2}}{3}$
Zauważmy, że

$$f(x_n) = \sin(3x_n) = \sin(2\pi n) = 0 \overset{n\to\infty}{\to} 0$$

$$f(y_n) = \sin(3y_n) = \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 1 \overset{n\to\infty}{\to} 1$$

Zatem istnieją dwa ciągi $x_n, y_n \to -\infty$ takie, że

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(y_n)$$

.
Zatem $\lim_{x\to-\infty} \sin(3x)$ nie istnieje.

Zadanie 4

b) Policzmy granice jednostronne

$$\lim_{x\to 0^+} \left(1+|x|\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x\to 0^-} \left(1+|x|\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^-} (1-x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{e}$$

Granice jednostronne są różne, więc granica w punkcie $x = 0$ nie istnieje.

Zadanie 5

Zbadaj ciągłość funkcji $f(x)$ w każdym punkcie dziedziny. Określ rodzaje punktów nieciągłości.

a)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sin(x)} & \text{dla } x \in (-\pi, \pi) \setminus \{0, \pi\} \\ 0 & \text{dla } x \in \{0, \pi\} \end{cases}$$

Funkcja $\frac{x}{\sin(x)}$ jest funkcją ciągłą dla $x \in (-\pi, \pi) \setminus \{0, \pi\}$ jako iloraz funkcji ciągłych x oraz $\sin(x)$. Zatem jedyne podejrzane o nieciągłość punkty to $x = 0$ oraz $x = \pi$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{sin(x)}{x}} = 1 \neq 0$$

Zatem

$$\lim_{x \to 0} f(x) \neq 0 = f(0)$$

Stąd $x = 0$ jest punktem nieciągłości 1 rodzaju.

Zadanie 5

$$\lim_{x\to\pi^+} f(x) = \lim_{x\to\pi^+} \frac{x}{\sin(x)} = -\infty$$

$$\lim_{x\to\pi^-} f(x) = \lim_{x\to\pi^-} \frac{x}{\sin(x)} = \infty$$

Zatem w $x = \pi$ granica nie istnieje, więc funkcja nie jest tam ciągła. Ponadto granice jednostronne są nieskończone, więc jest to punkt nieciągłości 2 rodzaju.

Zadanie 5

b)

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

Zauważmy, że $f(x)$ jest ciągła dla $x \neq 0$ jako złożenie funkcji e^x - ciągła oraz $\frac{1}{x}$ - ciągła dla $x \neq 0$. Zatem jedyny punkt podejrzany o nieciągłość to $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$$

Zatem granica nie istnieje w punkcie $x = 0$, więc $f(x)$ jest tam nieciągła. Ponadto jest to punkt nieciągłości 2 rodzaju.

Zadanie 6

Wykaż, że równanie $e^x - 2\cos(x) = 0$ ma pierwiastek w przedziale $(0,1)$.

Dowód.

Niech $f(x) = e^x - 2\cos(x)$. Jest to funkcja ciągła.
Zauważmy, że

$$f(0) = e^0 - 2\cos(0) = 1 - 2 = -1 < 0$$

$$f(1) = e - 2\cos(1) > e - 2 > 0$$

Z Twierdzenia Darboux dla dowolnego c takiego, że $f(1) < c < f(0)$ istnieje ξ takie, że $f(\xi) = c$.
Zauważmy, że między $f(0)$, a $f(1)$ leży wartość 0. Zatem istnieje $\xi \in (0,1)$, że $f(\xi) = 0$. $\square$

Zadanie 7

Wykaż, że równanie $\ln x + 2x = 1$ ma dokładnie jeden pierwiastek w przedziale $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Dowód.

Niech $f(x) = \ln x + 2x - 1$. Chcemy pokazać, że $f(x)$ ma dokładnie jedno miejsce zerowe w $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + 1 - 1 < 0$$

$$f(1) = \ln(1) + 2 - 1 = 1 > 0$$

Zatem z zasady Darboux istnieje miejsce zerowe. Teraz trzeba pokazać, że jest tylko jedno. Zauważmy, że $f(x)$ jest funkcją rosnącą. Stąd istnieje tylko jedno miejsce zerowe. $\square$