Elementy i układy elektroniczne *(UKEL)*

Prowadzenie: dr inż. Daniel Gryglewski
pok.549 i 533
Daniel.Gryglewski@pw.edu.pl lub D.Gryglewski@ire.pw.edu.pl

Pobudzenie sygnałem sinusoidalnie zmiennym

- Przebieg sinusoidalny o dowolnej fazie początkowej φ_0 można przedstawić jako kombinację funkcji $sin(\omega t)$ i $cos(\omega t)$:

$$a(t) = A_m \cos(\omega t + \varphi_0) = A_c \cos(\omega t) + A_s \sin(\omega t)$$

gdzie: $A_m = \sqrt{A_c^2 + A_s^2}$, $\varphi_0 = -\,arctg(A_s / A_c)$ dla $A_c \geq 0$ i $\varphi_0 = \pi - arctg(A_s / A_c)$ dla $A_c < 0$

lub: $A_c = A_m \cos(\varphi_0)$, $A_s = A_m \sin(-\varphi_0)$

- Dla uproszczenia obliczeń przebieg sinusoidalny warto przedstawić w postaci odpowiednika w postaci zespolonej :

Postać rzeczywista:

Postać zespolona:

amplituda zespolona -> **wskaz !!!**

$$a(t) = A_m \cos(\omega t + \varphi_0) \Longleftrightarrow \overline{a(t)} = A_m e^{j(\omega t + \varphi_0)} = \underbrace{A_m e^{j\varphi_0}} \cdot e^{j\omega t} =$$

$$A_m \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) + j \cdot A_m \cdot \sin(\omega t + \varphi 0)$$

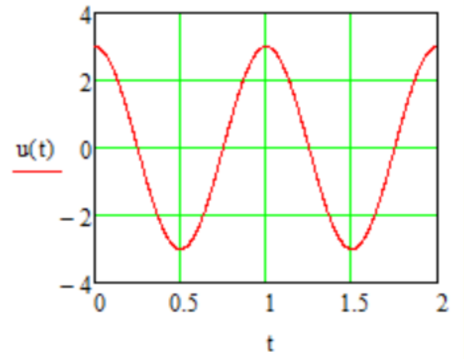
Reguła przejścia:

$$A(t) = Re(\overline{A(t)})$$

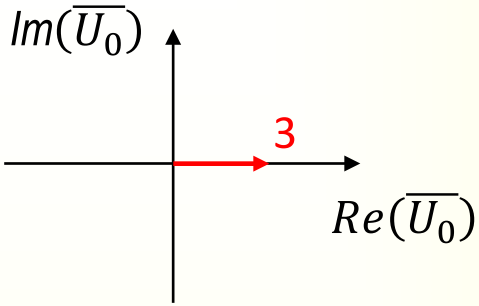
Pobudzenie sygnałem sinusoidalnie zmiennym

Przykłady:

- u(t) = 3 cos (ωt) -> postać zespolona: $3\ e^{j(\omega t+0)}$ -> amplituda zespolona: $\overline{U_0} = 3\ e^{j0} = 3$

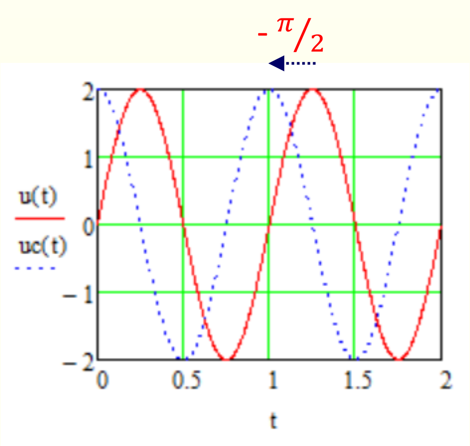


Wykres wskazowy:

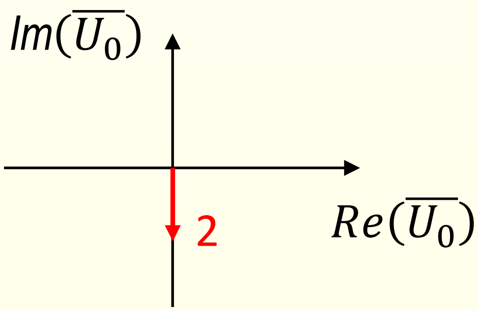


- u(t) = 2 sin (ωt) = 2 cos(ωt - $^{\pi}/_{2}$) -> postać zespolona: $2\ e^{j(\omega t-\pi/2)}$

-> amplituda zespolona: $2\ e^{-j\pi/2} = -2j$

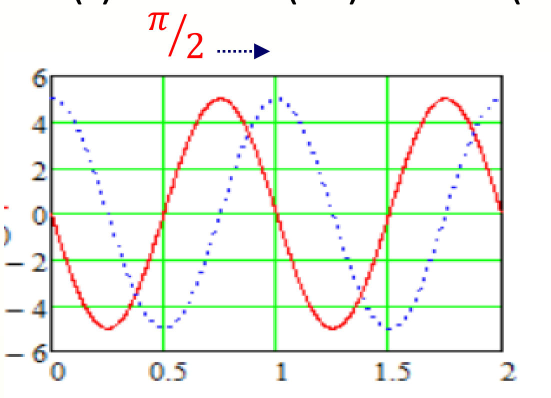


Wykres wskazowy:



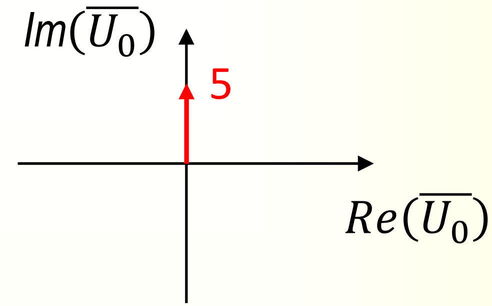
Pobudzenie sygnałem sinusoidalnie zmiennym- > przykłady cd:

- $u(t) = -5\sin(\omega t) = 5\cos(\omega t + \pi/2)$ -> postać zespolona: $5\,e^{j(\omega t + \pi/2)}$



-> amplituda zespolona: $5\,e^{j\pi/2} = 5j$

Wykres wskazowy:

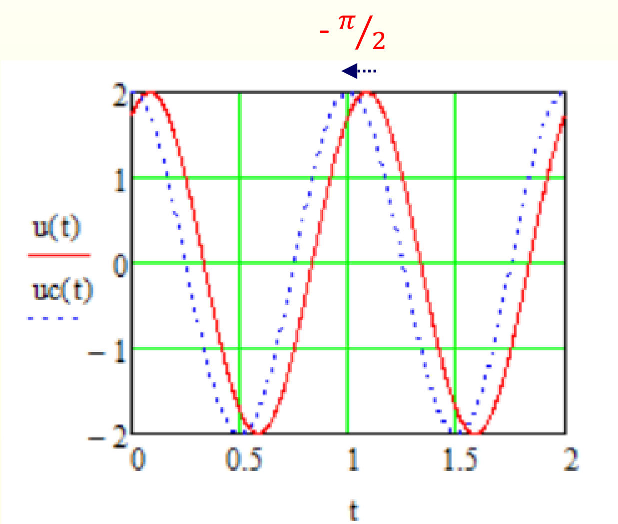


- $u(t) = \sqrt{3}\cos(\omega t) + 1\sin(\omega t)$ -> postać zespolona: = $\sqrt{3}\,e^{j(\omega t+0)} + e^{j(\omega t - \pi/2)}$

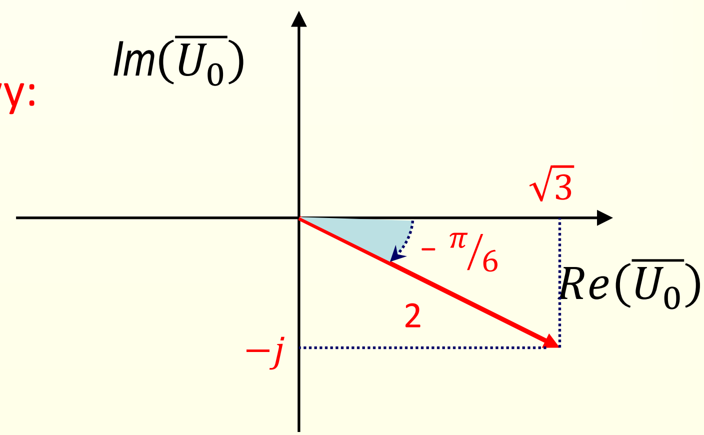
-> amplituda zespolona: $\sqrt{3} - j = 2\,e^{j(-\pi/6)}$

lub $u(t) = 2\cos(\omega t - \pi/6)$ -> postać zespolona: $2\,e^{j(\omega t - \pi/6)}$

-> amplituda zespolona: $2\,e^{j(-\pi/6)} = \sqrt{3} - j$

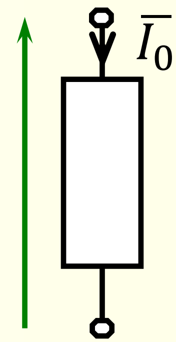


Wykres wskazowy:

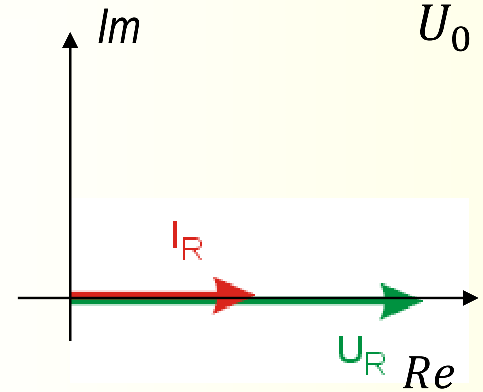


Opornik - *Pobudzenie sygnałem sinusoidalnie zmiennym*

Zależność między napięciem a prądem wynika z *klasycznego* prawa Ohma



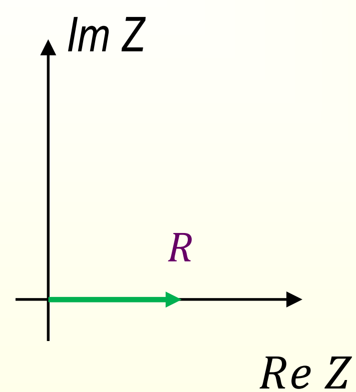
$$\mathrm{u(t) = R\,i(t)} \quad \Rightarrow \quad \overline{U_0} = \mathrm{R}\overline{I_0}$$

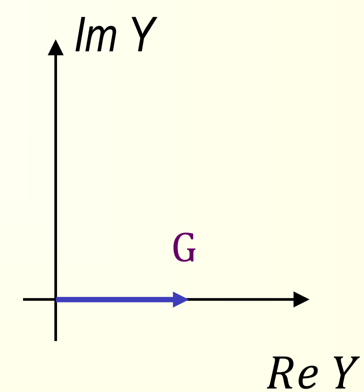


Impedancja [Ω] $\quad Z = \dfrac{\overline{U_0}}{\overline{I_0}} = R$

Admitancja [S] $\quad Y = \dfrac{\overline{I_0}}{\overline{U_0}} = \dfrac{1}{Z} = \dfrac{1}{R} = G$

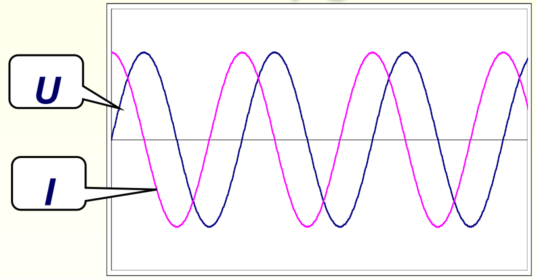
Jak łatwo zauważyć – prąd i napięcie są „w fazie”
(faza początkowa prądu i napięcia jest taka sama)

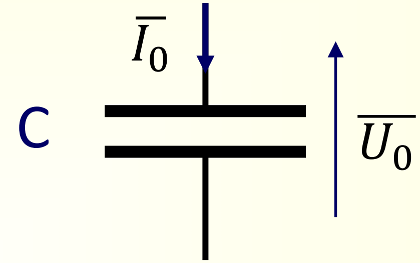




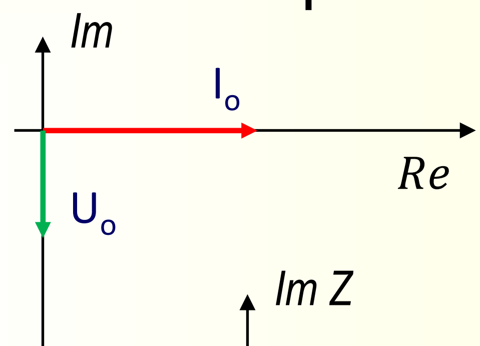
Kondensator - *Pobudzenie sygnałem sinusoidalnie zmiennym*

- ***Prąd wyprzedza napięcie o 90⁰.***

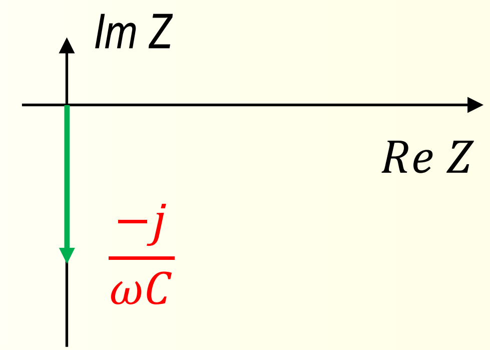




$$i = C \cdot \frac{du}{dt} \quad \Rightarrow \quad \overline{I_0} = C \cdot j\omega\overline{U_0}$$

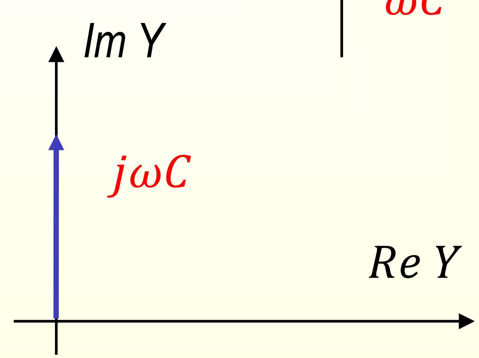


Impedancja [Ω] $\quad Z = \dfrac{\overline{U_0}}{\overline{I_0}} = \dfrac{1}{j\omega C} = \dfrac{-j}{\omega C} = jX$



Reaktancja [Ω] $\quad Im(Z) = X = \dfrac{-1}{\omega C}$

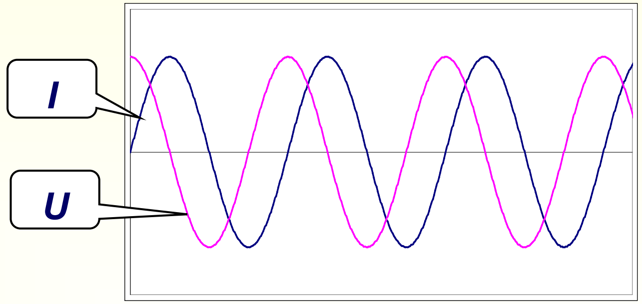
Admitancja [S] $\quad Y = \dfrac{\overline{I_0}}{\overline{U_0}} = \dfrac{1}{Z} = j\omega C = jB$

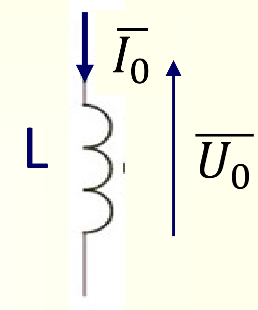


Susceptancja [S] $\quad Im(Y) = B = \omega C$

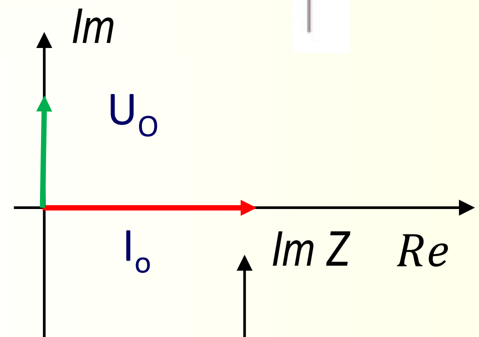
Indukcyjność - *Pobudzenie sygnałem sinusoidalnie zmiennym*

- ***Napięcie wyprzedza prąd o 90⁰.***

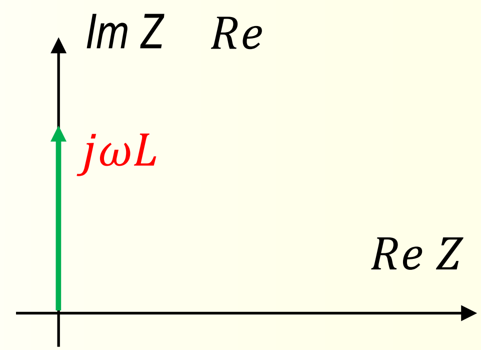




$$u = L \cdot \frac{di}{dt} \quad \Rightarrow \quad \overline{U_0} = L \cdot j\omega \overline{I_0}$$

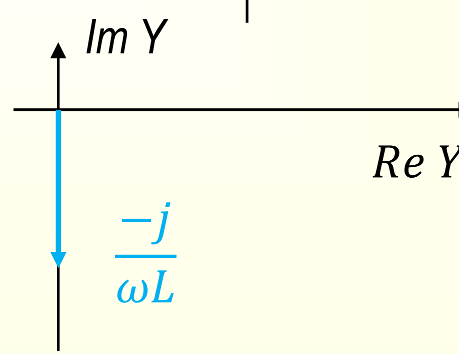


Impedancja [Ω] $\quad Z = \frac{\overline{U_0}}{\overline{I_0}} = j\omega L = jX$



Reaktancja [Ω] $\quad Im(Z) = X = \omega L$

Admitancja [S] $\quad Y = \frac{\overline{I_0}}{\overline{U_0}} = \frac{1}{Z} = \frac{1}{j\omega L} = \frac{-j}{\omega L} = jB$



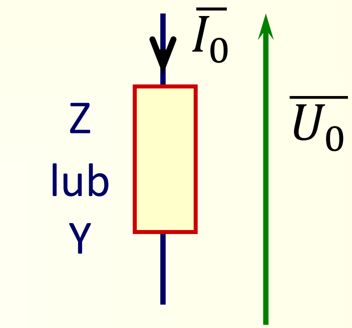
Susceptancja [S] $\quad Im(Y) = B = \frac{-1}{\omega L}$

Impedancja / Admitancja dwójników zespolonych

Impedancja: $Z = \dfrac{\overline{U_0}}{\overline{I_0}} = Z = R + jX$

rezystancja

reaktancja

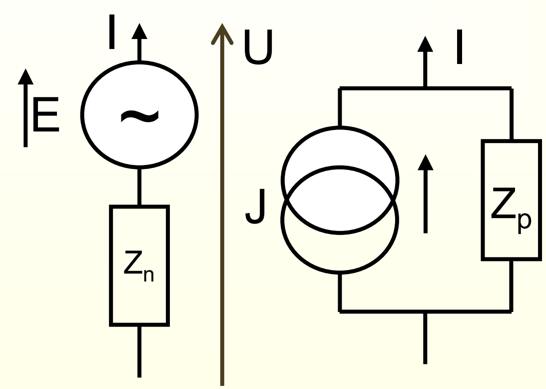


Admitancja: $Y = \dfrac{\overline{I_0}}{\overline{U_0}} = \dfrac{1}{Z} = G + jB$

konduktancja

susceptancja (konduktancja bierna)

Źródła rzeczywiste (ze stratami):

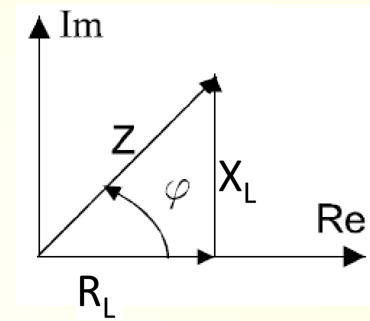


$$Z_p = Z_n = Z_w$$

$$E = JZ_w$$

Impedancja dwójników zespolonych (cz. 2)

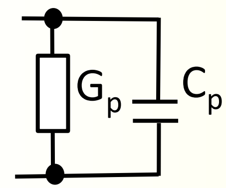
Cewka rzeczywista (ze stratami):



Impedancja: $$Z = R_L + jX_L = R_L + j\omega L$$

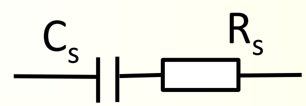
rezystancja | reaktancja

Kondensator rzeczywisty (ze stratami):



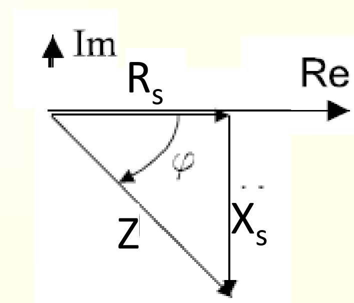
Admitancja: $$Y = G_p + jB_p = G_p + j\omega C_p$$

konduktancja | susceptancja



Impedancja: $$Z = R_s + jX_s = R_s - j\frac{1}{\omega C_s}$$

rezystancja | reaktancja

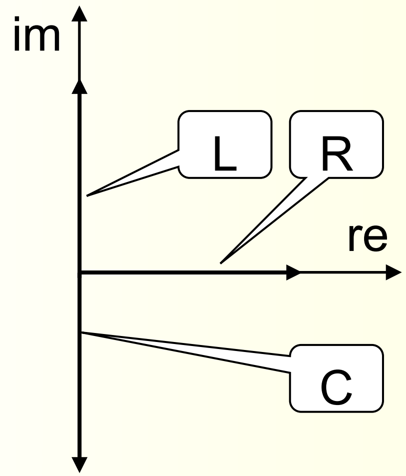


Uwaga: $C_s \neq C_p$ $R_s \neq 1/G_p$

Impedancja dwójników zespolonych (cz. 3)

W metodzie zespolonych amplitud w dalszym ciągu należy używać praw Kirchoffa do analizy obwodów.

Oprócz prawa Ohma opisującego rezystor, mamy do dyspozycji również wzory na impedancje (reaktancje) cewki i kondensatora.



Impedancja i admitancja przy połączeniu:

szeregowym:

$$Z_{zast} = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_N = \sum_{1}^{N} Z_i$$

i równoległym

$$Y_{zast} = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_N = \sum_{1}^{N} Y_i$$

pamiętamy, że są to liczby **zespolone**.

Uwaga! Metoda zespolonych amplitud pozwala opisać obwód dla jednej, konkretnie wybranej częstotliwości.

Impedancja dwójników zespolonych (cz. 4)

Założenia:

$$Z_k = R_k + jX_k = |Z_k| e^{j\varphi_{zk}}$$ gdzie: $$|Z_k| = \sqrt{R_k^2 + X_k^2}$$ $$dla\ R_k > 0 \quad \varphi_{zk} = arctg\left(\frac{X_k}{R_k}\right)$$

$$Y_k = G_k + jB_k = |Y_k| e^{j\varphi_{Yk}}$$ gdzie: $$|Y_k| = \sqrt{G_k^2 + B_k^2}$$ $$dla\ G_k > 0 \quad \varphi_{Yk} = arctg\left(\frac{B_k}{G_k}\right)$$

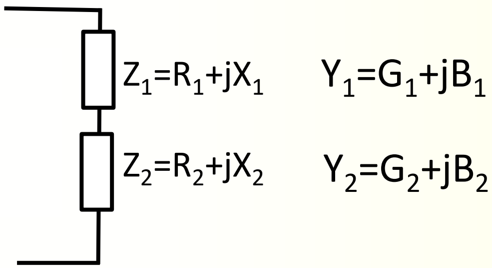
Postać kanoniczna (algebraiczna)

Postać wykładnicza

Przy połączeniu szeregowym 2 elementów:

$$Z_{zast} = Z_1 + Z_2 = (R_1 + R_2) + j(X_1 + X_2)$$

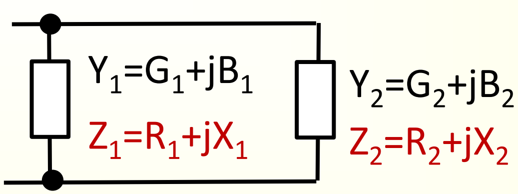
R_{zast} X_{zast}



Przy połączeniu równoległym 2 elementów:

$$Y_{zast} = Y_1 + Y_2 = (G_1 + G_2) + j(B_1 + B_2)$$

G_{zast} B_{zast}

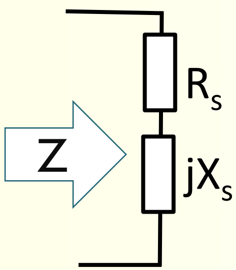


$$Z_{zast} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{(R_1 + jX_1)(R_2 + jX_2)}{(R_1 + R_2) + j(X_1 + X_2)} = \frac{\left(R_1^2 R_2 + R_2^2 R_1 + X_1^2 R_2 + X_2^2 R_1\right) + j\left(X_1^2 X_2 + X_2^2 X_1 + R_1^2 X_2 + R_2^2 X_1\right)}{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2}$$

Impedancja dwójników zespolonych (cz. 5)

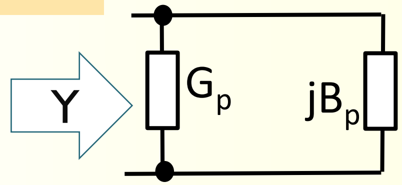
ZAMIANA UKŁADU

SZEREGOWY ⇔ **RÓWNOLEGŁY**



$$Z = R_s + jX_s = |Z|e^{j\varphi_z}$$

$$Y = G_p + jB_p = |Y|e^{j\varphi_Y}$$



$$Z = \frac{1}{Y} \qquad Y = \frac{1}{Z}$$

$$R_s + jX_s = \frac{1}{G_p + jB_p} = \frac{G_p - jB_p}{G_p^2 + B_p^2}$$

$$G_p + jB_p = \frac{1}{R_s + jX_s} = \frac{R_s - jX_s}{R_s^2 + X_s^2}$$

czasem łatwiej liczyć tak:

$$|Z| = \frac{1}{|Y|} \quad i \quad \varphi_Z = -\varphi_Y$$

$$|Y| = \frac{1}{|Z|} \quad i \quad \varphi_Y = -\varphi_Z$$