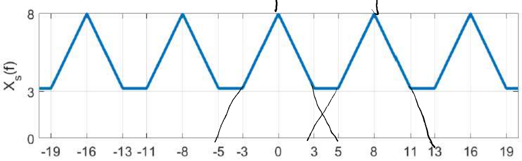
Kolos 2

wtorek, 3 czerwca 2025 20:48

Zad. 2 (5 pkt.) PRÓBKOWANIE

W wyniku próbkowania pewnego sygnału $x(t)$ deltami Diraca otrzymano widmo $X_s(f)$ podane poniżej. Wiadomo, że zaszło zjawisko aliasingu. Spróbuj określić jaka jest częstotliwość próbkowania [0.5 pkt] i wyznacz sygnał $x(t)$, który spróbkowano [2 pkt]. Podaj częstotliwość próbkowania, dla której aliasing nie zajdzie [2 pkt]. Wyznacz częstotliwość Nyquista sygnału $x(t)$ [0.5 pkt].

$f_s = 8\,Hz$



$$X_s(f) = f_s \sum_{n \in Z} X(f - n8)$$

$$X_s(f) = 8 \cdot \sum_{n \in Z} X(f - n8)$$

$$X(f) = tri\left(\frac{f}{5}\right)$$

$$x(t) = 5\, sinc^2(5t)$$

aliasing nie zajdzie dla $f_s > 10\,Hz$

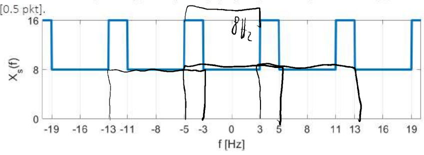
$$f_N = 5\,Hz = f_{max}$$

Zad. 2 (5 pkt.) PRÓBKOWANIE

W wyniku próbkowania pewnego sygnału $x(t)$ deltami Diraca otrzymano widmo $X_s(f)$ podane poniżej. Wiadomo, że zaszło zjawisko aliasingu. Spróbuj określić jaka jest częstotliwość próbkowania [0.5 pkt] i wyznacz sygnał $x(t)$, który spróbkowano [2 pkt]. Podaj częstotliwość

---

próbkowania, dla której aliasing nie zajdzie [2 pkt]. Wyznacz częstotliwość Nyquista sygnału $x(t)$ [0.5 pkt].



$f_s = 8\,Hz$

$$X_s(f) = f_s \sum_{n \in Z} X(f - nf_s)$$

$$X_s(f) = 8 \sum X(f - n8)$$

$f_s > 10\,Hz$

$$X(f) = rect\left(\frac{f}{\;}\right)$$

bez aliasingu

$$X(f) = rect\left(\frac{f}{16}\right)$$

$$f_{max} = 5\,Hz$$

$$x(t) = 10\,sinc(10t)$$

Zad. 3 (5 pkt.) TRANSFORMATA ZET

Znajdź odwrotną transformatę ZET systemu o podanej transmitancji [4 pkt]. Czy wskazany system jest stabilny? [1 pkt] Odpowiedź uzasadnij.

$$H(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})^2\left(1-\frac{1}{K+1}\cdot z^{-1}\right)}$$

$K = 2$ $\qquad h[n] = ?$

$$H(z) = \frac{1}{(1-2z^{-1}+z^{-2})\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)} = \frac{z^3}{(z^2-2z+1)\left(z-\frac{1}{3}\right)} =$$

$$= \frac{z^3}{(z-1)^2\left(z-\frac{1}{3}\right)}$$

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{z^2}{(z-1)^2\left(z-\frac{1}{3}\right)} = \frac{A}{(z-1)} + \frac{B}{(z-1)^2} + \frac{C}{z-\frac{1}{3}}$$

$$z^2 = A(z-1)\left(z-\frac{1}{3}\right) + B\left(z-\frac{1}{3}\right) + C(z-1)^2$$

dla $z=1$:

$$1 = B\cdot\frac{2}{3} \qquad B = \frac{3}{2}$$

dla $z = \frac{1}{3}$

$$\frac{1}{9} = C\cdot\frac{4}{9} \Rightarrow C = \frac{1}{4}$$

$$z^2 = A(z-1)\left(z-\frac{1}{3}\right) + \frac{3}{2}z - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}$$

(tylko x^2)

$$z^2 = Az^2 + \frac{1}{4}z^2$$

$$1 = A + \frac{1}{4} \Rightarrow A = \frac{3}{4}$$

$$H(z) = \frac{\frac{3}{4}z}{z-1} + \frac{\frac{3}{2}z}{(z-1)^2} + \frac{\frac{1}{4}z}{z-\frac{1}{3}}$$

dla przyczynowego:

$z-1$ $\qquad (z-1)^2$ $\qquad \dfrac{1}{z-\frac{1}{3}}$

dla przyczynowego:

$$h(n) = \underbrace{\frac{3}{4}\cdot(1)^n}_{=1}\cdot u[n] + \frac{3}{2}\cdot n\cdot \underbrace{(1)^n}_{=1}\cdot u[n] + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n\cdot u[n]$$

$na^n u[n]$	$\frac{za}{(z-a)^2}$

(raczej) niestabilny

bo bieguny

$z_1 \wedge z_2 = 1$

(2 bieguny na kole jednostkowym)

Zad. 3 (5 pkt.) TRANSFORMATA ZET

Znajdź odwrotną transformatę ZET systemu o podanej transmitancji [4 pkt]. Czy wskazany system jest stabilny? [1 pkt] Odpowiedź uzasadnij.

$$H(z) = \frac{K}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}$$

$K=2$

$$H(z) = \frac{2}{1-3z^{-1}+2z^{-2}} = \frac{2z^2}{z^2-3z+2}$$

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{2z}{z^2-3z+2} = \frac{2z}{(z-2)(z-1)} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z-1}$$

$$2z = A(z-1) + B(z-2)$$

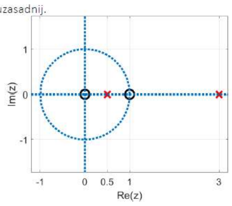
dla $z=1$ $\qquad$ dla $z=2$

$2 = -B \qquad B=-2 \qquad 4 = A$

$$H(z) = \frac{4z}{z-2} + \frac{-2z}{z-2}$$

$h(n) = 4$

Zad. 4 (5 pkt.) FILTRY DYSKRETNE #1
Poniżej podano rozkład zer i biegunów pewnego filtru. Znajdź równanie różnicowe opisujące działanie filtru [2 pkt]. Narysuj jego postać drabinkową II rodzaju [2 pkt]. Czy jest to filtr FIR czy IIR? [1 pkt] Odpowiedź uzasadnij.



$y[n] = ?$

p.d. II r. $= ?$

FIR / IIR $= ?$

$$H(z) = \frac{z(z-1)}{\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-3)} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$H(z) = \frac{z^2 - z}{z^2 - \frac{7}{2}z + \frac{3}{2}} \cdot \frac{z^{-2}}{z^{-2}} = \frac{1 - z^{-1}}{1 - \frac{7}{2}z^{-1} + \frac{3}{2}z^{-2}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$X(z) - X(z)z^{-1} = Y(z) - \frac{7}{2}z^{-1}Y(z) + \frac{3}{2}z^{-2}Y(z)$$

$$x[n] - x[n-1] = y[n] - \frac{7}{2}y[n-1] + \frac{3}{2}y[n-2]$$

$$y[n] = x[n] - x[n-1] + \frac{7}{2}y[n-1] - \frac{3}{2}y[n-2]$$

IIR bo zależy od innych $y[n-x]$, $x \in \mathbb{Z}$

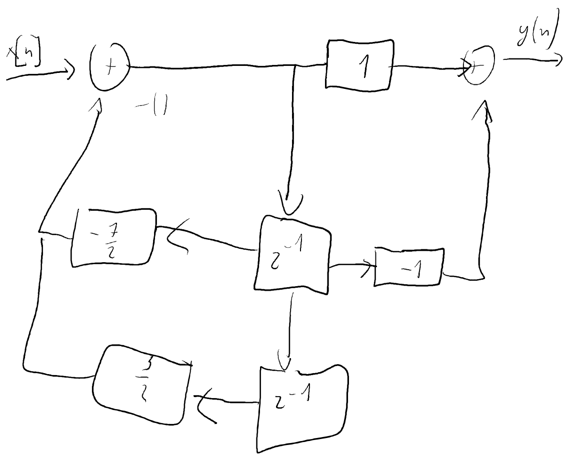
postać drab. II rodzaju

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{n} b(i)\, z^{-i}}{\sum_{i=0}^{n} a(i)\, z^{-i}}$$

$$\frac{1 - z^{-1}}{1 - \frac{7}{2}z^{-1} + \frac{3}{2}z^{-2}} = \frac{1 \cdot z^{0} - 1 \cdot z^{-1} + 0 \cdot z^{-2} \ldots}{1 \cdot z^{0} - \frac{7}{2}z^{-1} + \frac{3}{2} \cdot z^{-2} \ldots}$$

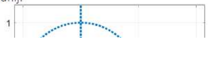
$b(0) = 1$ $\quad b(1) = -1$ $\quad b(2) = 0$ ...

$a(0) = 1$ $\quad a(1) = -\frac{7}{2}$ $\quad a(2) = \frac{3}{2}$ $\quad a(3) = 0$ ...



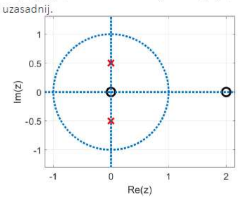
Zad. 4 (5 pkt.) FILTRY DYSKRETNE #1
Poniżej podano rozkład zer i biegunów pewnego filtru. Znajdź równanie różnicowe opisujące działanie filtru [2 pkt]. Narysuj jego postać drabinkową II rodzaju [2 pkt]. Czy jest to filtr FIR czy IIR? [1 pkt] Odpowiedź uzasadnij.

$y[n] = ?$



Zad. 4 (5 pkt.) FILTRY DYSKRETNE #1

Poniżej podano rozkład zer i biegunów pewnego filtru. Znajdź równanie różnicowe opisujące działanie filtru [2 pkt]. Narysuj jego postać drabinkową II rodzaju [2 pkt]. Czy jest to filtr FIR czy IIR? [1 pkt] Odpowiedź uzasadnij.



$y[n] = ?$

p.d. II r. = ?

FIR / IIR = ?

$$H(z) = \frac{(z-2)z}{\left(z-\frac{j}{2}\right)\left(z+\frac{j}{2}\right)} = \frac{z^2 - 2z}{z^2 + \frac{1}{4}} \cdot \frac{z^{-2}}{z^{-2}} = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 + \frac{1}{4}z^{-2}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$X(z) - 2z^{-1}X(z) = Y(z) + \frac{1}{4}z^{-2}Y(z)$$

$$x[n] - 2 \cdot x[n-1] = y[n] + \frac{1}{4} \cdot y[n-2]$$

$$y[n] = x[n] - 2x[n-1] - \frac{1}{4}y[n-2]$$

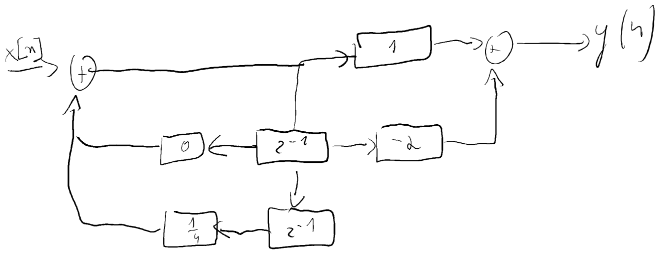
IIR (ľoT) bo zależy od innych $y[n-x]$, $x \in \mathbb{Z}_+$

postać dr. II rodzaju

$$H(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 + \frac{1}{4}z^{-2}}$$

$b(0) = 1$ $\quad b(1) = -2$

$a(0) = 1$ $\quad a(1) = 0$ $\quad a(2) = \frac{1}{4}$



Zad. 5 (5 pkt.) FILTRY DYSKRETNE #2

Na wejście filtru podano sygnał dyskretny $x[n] = \left(\frac{1}{5}\right)^n u[n]$, a na wyjściu pojawiło się $y[n] = \frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^n u[n]$. Częstotliwość próbkowania jest równa 5 GHz. Podaj równanie różnicowe opisujące działanie filtru [3 pkt]. Podaj wartości transmitancji ($H(f)$) filtru dla częstotliwości 0 Hz i 2.5 GHz [2 pkt].

$x[n] = \left(\frac{1}{5}\right)^n u[n]$

$y[n] = ?$

$H(f)$ dla $f = 0\,Hz$

$f = 2{,}5\,GHz$

$y[n] = \frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^n u[n]$

$$X[z] = \frac{z}{z - \frac{1}{5}}$$

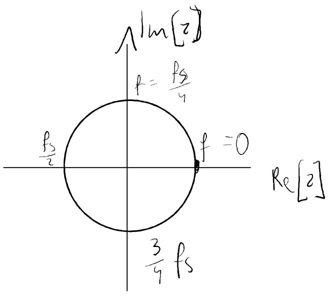
$$y[z] = \frac{5}{2} \cdot \frac{z}{z - \frac{1}{2}} - \frac{3}{2} \frac{z}{z - \frac{1}{5}}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\frac{\frac{5}{2} z}{z - \frac{1}{2}} - \frac{\frac{3}{2} z}{z - \frac{1}{5}}}{\frac{z}{z - \frac{1}{5}}} = \frac{\frac{5}{2} z^{\cancel{2}} - \frac{1}{2} \cancel{z} - \frac{3}{2} z^{\cancel{2}} + \frac{3}{4} \cancel{z}}{\frac{\cancel{z}}{\cancel{z - \frac{1}{5}}} \cdot \left(z - \frac{1}{2}\right) \cancel{\left(z - \frac{1}{5}\right)}} = \frac{z + \frac{1}{4}}{z - \frac{1}{2}} \cdot \frac{z^{-1}}{z^{-1}}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + \frac{1}{4} z^{-1}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}$$

$$Y(z) - \frac{1}{2} z^{-1} Y(z) = X(z) + \frac{1}{4} z^{-1} X(z)$$

$$y[n] = x[n]$$



0 Hz $\quad f = 0 \iff z = 1$

$$H(z=1) = \frac{1 + \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{5}{2}$$

2,5 GHz

$$H(z=-1) = \frac{-1 + \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{2}} = \left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)$$

Zad. 5 (5 pkt.) FILTRY DYSKRETNE #2

Na wejście filtru podano sygnał dyskretny $x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$, a na wyjściu pojawiło się $y[n] = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{5}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$. Częstotliwość próbkowania jest równa 100 kHz. Podaj równanie różnicowe opisujące działanie filtru [3 pkt.]. Podaj wartości transmitancji ($H(f)$) filtru dla częstotliwości 0 Hz i 50 kHz [2 pkt.].

$$X(z) = \frac{z}{z - \frac{1}{4}}$$

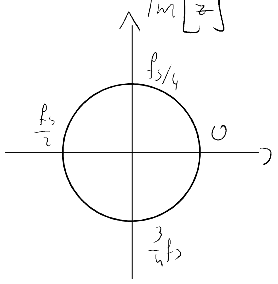
$$y(z) = \frac{3}{2} \cdot \frac{z}{z - \frac{1}{2}} - \frac{5}{4} \cdot \frac{z}{z - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{3}{2} z \left(z - \frac{1}{4}\right) - \frac{5}{4} z \left(z - \frac{1}{2}\right)}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{4}\right)}$$

$$H(z) = \frac{\frac{\frac{3}{2} \cancel{z} \left(z - \frac{1}{4}\right) - \frac{5}{4} \cancel{z} \left(z - \frac{1}{2}\right)}{\left(z - \frac{1}{2}\right) \cancel{\left(z - \frac{1}{4}\right)}}}{\frac{\cancel{z}}{\cancel{z - \frac{1}{4}}}} = \frac{\frac{1}{4} z + \frac{1}{4}}{z - \frac{1}{2}} \cdot \frac{z^{-1}}{z^{-1}}$$

$$H(z) = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} z^{-1}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$\frac{1}{4} X(z) + \frac{1}{4} z^{-1} X(z) = Y(z) - Y(z) \frac{1}{2} z^{-1}$$

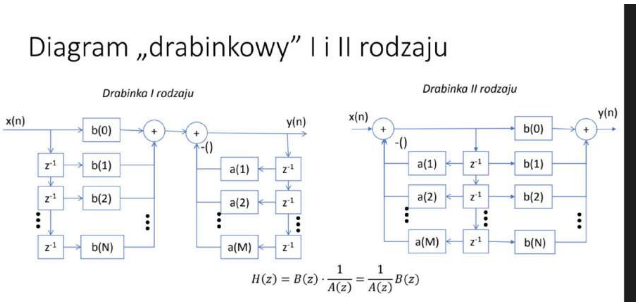
$$y[n] = \frac{1}{4} x[n] + \frac{1}{4} x[n-1] + \frac{1}{2} y[n-1]$$



$f_s = 100\,kHz$

$0\,Hz \quad H(z=1) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$

$50\,kHz \quad H(z=-1) = 0$



$|z| > |a|$

$|z| < |a|$