MAT3, termin 1 egzaminu 2020/21

1. 1. Skonstruować najmniejsze ciało $(F, +, \cdot)$, w którym wielomian $x^8 + x \in Z_2[x]$ rozkłada się na czynniki liniowe.
   2. Znaleźć wszystkie elementy pierwotne w ciele $(F, +, \cdot)$.
   3. Znaleźć wielomian minimalny dowolnie wybranego elementu pierwotnego w ciele $(F, +, \cdot)$.

2. Dane jest przekształcenie $g : R^3 \times R^3 \to R$ zadane wzorem $g([x_1, x_2, x_3], [y_1, y_2, y_3]) = x_1y_1 + x_1y_3 + x_2y_2 + x_3y_1 + 2x_3y_3$.
   1. Sprawdzić że g jest iloczynem skalarnym w przestrzeni $R^3(\mathbb{R})$
   2. Znaleźć macierz Gramma $M_g(\mathcal{B})$ w bazie standardowej $\mathcal{B} = \{[1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 1]\}$
   3. Przeprowadzić algorytm ortonormalizacji wektorów $[1, -1, 1]$ oraz $[1, 1, 0]$ z iloczynem $g(\cdot, \cdot)$

3. Dane jest przekształcenie liniowe $F : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ takie, że $F(w(x)) = w(0)(x^2 + x) - w(1)x + 2w(-1)$.Wyznacz
   1. macierz $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)$ przekształcenia F w bazach kanonicznych $\mathcal{A} = (x^3, x^2, x, 1)$ i $\mathcal{B} = (x^2, x, 1)$,
   2. bazę i wymiar $\operatorname{Ker} F$,
   3. bazę i wymiar $\operatorname{Im} F$.

4. 1. Wskazać wszystkie, parami nieizomorficzne grupy abelowe rzędu $n = 1372$.
   2. W pierścieniu $(Z_{2025}, +_{2025}, \cdot_{2025})$ znaleźć, jeśli istnieje element odwrotny $a^{-1} \in Z_{2025}$ do $a = 448$.
   3. Czy pierścień $(Z_{2025}, +_{2025}, \cdot_{2025})$ jest ciałem? Odpowiedź uzasadnić.

5. Dany mamy następujący układ równań liniowych nad ciałem $(Z_7, +_7, \cdot_7)$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
4x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 6x_4 & + & 4x_5 & = & 0 \\
 & & x_2 & + & & & 4x_4 & + & 2x_5 & = & 0 \\
2x_1 & + & x_2 & + & 6x_3 & + & 6x_4 & + & 4x_5 & = & 0 \\
 & & 3x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & = & 0
\end{array}$$

   Sprawdzić czy układ ma rozwiązanie w ciele $(Z_7, +_7, \cdot_7)$. Jeśli tak to wskazać bazę przestrzeni rozwiązań tego układu oraz określić jej wymiar.

6. Przekształcenie liniowe $F : R^3(\mathbb{R}) \to R^3(\mathbb{R})$ dane jest wzorem $F(x, y, z) = (-x - y - z, -x - y + z, -x + y - z)$.
   1. Wyznacz wszystkie wartości własne przekształcenia F.
   2. Wyznacz bazę $\mathcal{C}$ przestrzeni $R^3(\mathbb{R})$, składającą się z jak największej liczby wektorów własnych przekształcenia F.
   3. Wyznacz macierze $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(F)$, $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_{R^3(\mathbb{R})})$ oraz $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{C}}(\mathrm{id}_{R^3(\mathbb{R})})$, gdzie $\mathcal{E} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ jest bazą kanoniczną przestrzeni $R^3(\mathbb{R})$.

MAT3, termin 2 egzaminu 2020/21

1. Skonstruować ciało $GF(32)$.
   Które, i dlaczego, elementy ciała $GF(32)$ spełniają równanie $x^{31} = 1$? Podać jakiego stopnia są wielomiany minimalne wszystkich elementów w ciele $GF(32)$.

2. Dane są wektory $u = [1, 1, -1, 0]$, $v = [0, 0, 1, 1]$, $w = [1, 1, 1, 1]$. Niech $W = \mathcal{L}(u, v, w)$ będzie podprzestrzenią unitarną przestrzeni $R^4(\mathbb{R})$ ze standardowym iloczynem skalarnym $\langle [x_1, x_2, x_3, x_4], [y_1, y_2, y_3, y_4] \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$.
   1. Znaleźć bazę ortonormalną przestrzeni W,
   2. Wyznaczyć rzut ortogonalny wektora $z = [1, 2, 3, 4]$ na podprzestrzeń W.

3. Dane jest przekształcenie liniowe $F : M_2^2(\mathbb{R}) \to M_2^2(\mathbb{R})$ zadane wzorem $F(X) = A \cdot X$, gdzie $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.
   1. Wyznacz macierz $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(F)$ przekształcenia F, gdzie
   $$\mathcal{E} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$
   jest bazą kanoniczną przestrzeni $M_2^2(\mathbb{R})$.
   2. Wyznacz bazę i wymiar $\operatorname{Ker} F$ oraz $\operatorname{Im} F$.
   3. Czy macierze $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ i $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$ należą $\operatorname{Im} F$? Odpowiedź uzasadnij.

4. Podać z produktem minimalnie ilu grup cyklicznych izomorficzna jest grupa
   $$(\{1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}, \cdot_{24})$$
   i wskazać ten produkt.
   Obliczyć rzędy elementów w grupie $(\{1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}, \cdot_{24})$.
   W pierścieniu $(\mathbb{Z}_5[x], +, \cdot)$ rozłożyć wielomian $x^3 + 3x + 1$ na czynniki nierozkladalne.

5. 1. Przedyskutować rozwiązywalność układu $\begin{array}{rcrcrcr} ax_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & a \\ x_1 & - & ax_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 2a \end{array}$ w ciele liczb rzeczywistych w zależności od parametru $a \in \mathbb{R}$.
   W przypadku układu oznaczonego podać rozwiązania, natomiast w przypadku układu nieoznaczonego podać liczbę parametrów od ilu zależy rozwiązanie.

   2. Wiedząc, że A jest macierzą wymiaru $n \times n$ taką, że $A^3 = 0$ znaleźć macierz odwrotną do $B = I + A + A^2$, gdzie I oznacza macierz jednostkową wymiaru $n \times n$. Odpowiedź należy uzasadnić.
   Wskazówka: $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

6. Macierzą przekształcenia liniowego $F : R^3(\mathbb{R}) \to R^3(\mathbb{R})$ w bazie standardowej jest $A = M(F) = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.
   1. Wyznacz wszystkie wartości własne oraz podprzestrzenie własne przekształcenia F.
   2. Wyznacz macierz diagonalną D oraz odwracalną C takie, że $A = C \cdot D \cdot C^{-1}$.