# 6. Przestrzenie wektorowe

## Zadania

1. Które z podanych zbiorów są podprzestrzeniami odpowiednich przestrzeni wektorowych:

   (a) $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$

   (b) $\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \mid yz \leq 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$

   (c) $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid |x - y| \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$

   (d) $\{A \in M_2^2(\mathbb{R}) \mid DetA = 0\} \subseteq M_2^2(\mathbb{R})$

   (e) $\{\begin{pmatrix} x & y \\ x+y & 2x \end{pmatrix} \in M_2^2(\mathbb{R}) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \subseteq M_2^2(\mathbb{R})$

   (f) $\{(x_1, x_2, \ldots, ) \in \mathbb{R}^\infty \mid \lim\limits_{n\to\infty} x_n < \infty\} \subseteq \mathbb{R}^\infty$

   (g) $\{f \in \mathbb{R}[x] \mid stf = 2k,\ k \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}[x]$

2. Niech $\mathbb{K} = (K, +, \cdot)$ będzie ciałem, $A \in M_m^n(K)$ oraz $X \in M_n^1(K)$. Pokazać, że zbiór $Rozw(A|\mathbf{0}_n^1)$ rozwiązań układu jednorodnego $AX = \mathbf{0}_n^1$ jest podprzestrzenią przestrzeni wektorowej $M_n^1(K)(\mathbb{K})$.

3. Sprawdzić, czy

   (a) wektory $[1, 3, 5]$, $[2, 7, 5]$ i $[1, 1, 9]$ generują przestrzeń wektorową $R^3(\mathbb{R})$,

   (b) $[5, 6, 4, 1] \in \mathcal{L}([1, 3, 1, 0], [1, 4, 2, 3])$ w przestrzeni wektorowej $Z_7^4(Z_7)$.

4. Zbadać liniową niezależność podanych układów wektorów w odpowiednich przestrzeniach wektorowych:

   (a) $[1, 3, 5]$, $[2, 9, 13]$, $[4, 9, 17]$ w przestrzeni $R^3(\mathbb{R})$

   (b) $[5, 4, 1]$, $[4, 3, 2]$, $[7, 7, -6]$ w przestrzeni $R^3(\mathbb{R})$

   (c) $[1, 1, 0]$, $[4, 3, 1]$, $[1, 4, 2]$ w przestrzeni $Z_5^3(Z_5)$

   (d) $[0, 0, 1]$, $[4, 0, 4]$, $[3, 4, 3]$ w przestrzeni $Z_5^3(Z_5)$

   (e) $p_1 = x^2 - 1$, $p_2 = x + 1$, $p_3 = -x^2 + 2x + 3$, $p_4 = -2x + 3$ w $R_2[x](\mathbb{R})$

   (f) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ w $M_2^2(R)(\mathbb{R})$

   (g) $f_1 = 1,\ f_2 = \sin^2 x,\ f_3 = \cos^2 x$ w przestrzeni funkcji ciągłych na zbiorze $R$

   (h) $f_1 = 1,\ f_2 = e^x,\ f_3 = e^{-x}$ w przestrzeni funkcji ciągłych na zbiorze $R$

5. Wiedząc, że wektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ i $\boldsymbol{x}$ są liniowo niezależne, zbadać liniową niezależność wektorów:

   (a) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}$

   (b) $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} + \boldsymbol{x}$

6. Sprawdzić, czy następujące układy wektorów stanowią bazy odpowiednich przestrzeni wektorowych:

   (a) $[1, 1, 1], [2, 1, 5], [3, 5, 4]$ w $R^3(\mathbb{R})$,

   (b) $[1, 7, -1], [2, 1, 11], [1, 5, 1]$ w $R^3(\mathbb{R})$,

   (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ w $M_2^2(R)(\mathbb{R})$,

7. Znaleźć współrzędne wektorów:

   (a) $\boldsymbol{v} = [-2, 5, 6]$ w bazie $\mathcal{B} = \{[1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 1]\}$ przestrzeni wektorowej $R^3(\mathbb{R})$,

   (b) $\boldsymbol{v} = [-2, 5, 6]$ w bazie $\mathcal{B} = \{[1, 1, 0], [2, 1, 0], [3, 3, 1]\}$ przestrzeni wektorowej $R^3(\mathbb{R})$,

   (c) $p = x + x^2$ w bazie $\mathcal{B} = \{1 + x, 1 - x, 1 + x + x^2\}$ przestrzeni wektorowej $R_2[x](\mathbb{R})$.

8. Dla $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \in M_2^4(Z_5)$ znaleźć bazę podprzestrzeni $Rozw(A|\mathbf{0}_4^1)$ przestrzeni wektorowej $Z_5^4(Z_5)$.

9. Wskazać bazy i określić wymiary podanych przestrzeni wektorowych nad ciałem $\mathbb{R}$:

   (a) $\{[2x, x+y, 3x-y, x-2y] \in R^4 \mid x, y \in R\}$

   (b) $\{[x, y, z, t] \in R^4 \mid x+y = z-y\}$

   (c) $\{p \in R_3[x] \mid p(0)+p(1) = 0\}$

   (d) $\mathcal{L}([1, 1, -1, 3], [1, 8, 6, -4], [1, 7, 5, -3], [2, 8, 7, 1])$

10. Dla podprzestrzeni $U = \mathcal{L}([5, 1, -3, 0], [17, 0, -7, 1])$ oraz $W = \mathcal{L}([1, 2, 3, 4], [5, 8, 1, 7])$ przestrzeni wektorowej $R^4(\mathbb{R})$ znaleźć wymiary podprzestrzeni $U + W$ i $U \cap W$.