5. Układy równań liniowych

$(P, +, \cdot)$ - pierścień przemienny z 1

Układem m równań liniowych nad P z n niewiadomymi $x_1, \ldots, x_n$ nazywać będziemy każdy układ równań postaci:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1}x_1 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n & = & b_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array}$$

gdzie dla $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, $a_{ij}, b_i \in P$.

Elementy a_{ij} nazywamy *współczynnikami* przy niewiadomych, elementy b_i nazywamy *wyrazami wolnymi.*

Rozwiązaniem układu równań liniowych nazywamy każdy ciąg $(x_1, \ldots, x_n) \in P^n$ spełniający każde równanie układu.

Każdy układ równań liniowych albo nie ma rozwiązań, albo ma jedno rozwiązanie, albo ma (nieskończenie, jeśli pierścień jest nieskończony) wiele rozwiązań.

Jeżeli układ równań nie ma rozwiązań, to mówimy, że jest ***sprzeczny***. Jeżeli układ ma jedno rozwiązanie, to mówimy, że jest ***oznaczony***. Jeżeli układ ma wiele rozwiązań, to mówimy, że jest ***nieoznaczony***.

Wprowadzając oznaczenia:

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_j \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad X := \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_i \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$

układ m równań z n niewiadomymi możemy zapisać w postaci macierzowej

$$AX = B.$$

Macierz A nazywamy ***macierzą układu równań*** lub *macierzą główną układu równań.* Jednokolumnową macierz X nazywamy ***macierzą niewiadomych*** lub *kolumną niewiadomych.* Jednokolumnową macierz B nazywamy ***macierzą wyrazów wolnych*** lub *kolumną wyrazów wolnych.*

Macierz $(A|B)$ złożoną z macierzy układu i kolumny wyrazów wolnych nazywamy ***macierzą rozszerzoną.***

Niech $A \in M_m^n(P)$, $B \in M_m^1(P)$. Oznaczmy przez

$$Rozw(A|B) := \{X \in M_n^1(P) \mid AX = B\}$$

zbiór wszystkich rozwiązań układu $AX = B$. Powiemy, że dwa układy równań liniowych są *równoważne*, jeżeli mają takie same zbiory rozwiązań.

Twierdzenie 1. *Niech $A, A' \in M_m^n(P)$, $B, B' \in M_m^1(P)$ i niech macierz $A'|B'$ będzie wierszowo-równoważna macierzy $A|B$. Wtedy*

$$Rozw(A'|B') = Rozw(A|B),$$

czyli układy równań $AX = B$ oraz $A'X = B'$ są równoważne.

Przykład 2. Niech $(P, +, \cdot)$ będzie pierścieniem liczb rzeczywistych. Macierz rozszerzona

$$A|B := \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 10 \end{array}\right)$$

jest wierszowo-równoważna macierzy

$$A'|B' := \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Stąd układ równań

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 5 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & = & 10 \end{array}$$

jest równoważny układowi

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 1, \end{array}$$

co oznacza, że jest sprzeczny. Zauważmy, że $rzA = 1 \neq rz(A|B) = 2$.

Przykład 3. Niech $(P, +, \cdot)$ będzie pierścieniem liczb rzeczywistych. Macierz rozszerzona

$$A|B := \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

jest wierszowo-równoważna macierzy

$$A'|B' := \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Stąd układ równań

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & & & = & 2 \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{array}$$

jest równoważny układowi

$$\begin{array}{ccc} x_1 & = & 1 \\ x_2 & = & 1 \\ x_3 & = & 1, \end{array}$$

czyli ma dokładnie jedno rozwiązanie. W tym przypadku $rzA = rz(A|B) = n = 3$.

Macierz A jest wierszowo-równoważna macierzy jednostkowej I_3, zatem jest odwracalna. Stąd

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Przykład 4. Niech $(P, +, \cdot)$ będzie pierścieniem liczb rzeczywistych. Macierz rozszerzona

$$A|B := \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 8 \end{array}\right)$$

jest wierszowo-równoważna macierzy

$$A'|B' := \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Stąd układ równań

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & & & = & 2 \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 8 \end{array}$$

jest równoważny układowi

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & & & = & 2 \\ & & -x_2 & + & x_3 & = & 0. \end{array}$$

Stąd

$$\begin{array}{ccc} x_1 & = & 2 - x_2 \\ x_2 & = & t \in \mathbb{R} \\ x_3 & = & x_2, \end{array}$$

czyli układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od jednego parametru $t \in \mathbb{R}$. W tym przykładzie mamy: $rzA = rz(A|B) = 2 < n = 3$.

Twierdzenie 5. (*Kronecker, Capelli*)
Niech $(P, +, \cdot)$ bedzie ciałem i $A \in M_m^n(P)$ oraz $B \in M_m^1(P)$. Układ równań

$$AX = B$$

ma co najmniej jedno rowiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$rzA = rz(A|B).$$

Ponadto:

- *Jeśli* $rzA = rz(A|B) = n$*, to rozwiązanie jest dokładnie jedno. W przypadku, gdy macierz* A *jest odwracalna, to* $X = A^{-1}B$*, a układ* $AX = B$ *nazywamy układem Cramera.*
- *Jeśli* $rzA = (A|B) < n$*, to istnieje wiele rozwiązań zależnych od* $p = n - rzA$ *parametrów.*

Przykład 6. Niech $(P, +, \cdot)$ będzie pierścieniem liczb rzeczywistych. Rozważmy następujący układ $m = 5$ równań z $n = 5$ niewiadomymi:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} & & x_2 & + & 7x_3 & - & 5x_4 & + & x_5 & = & 5 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & + & 3x_5 & = & -1 \\ 5x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & & + & 8x_5 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & + & 5x_5 & = & 1 \\ 4x_1 & + & x_2 & - & 9x_3 & + & 7x_4 & + & 8x_5 & = & -1 \end{array}$$

Macierz

$$A|B = \left(\begin{array}{rrrrr|r} 0 & 1 & 7 & -5 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 3 & -1 \\ 5 & 3 & 1 & 0 & 8 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & -1 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & -9 & 7 & 8 & -1 \end{array}\right)$$

jest wierszowo równoważna macierzy $A'|B'$ w postaci trapezowej:

$$A'|B' = \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -4 & 3 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 7 & -5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Stąd $rzA = rz(A|B) = 3$, czyli układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $p = n - rzA = 2$ parametrów. Rozwiązanie możemy zapisać w następującej postaci:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & = & -5 & + & 4t_1 & - & 3t_2 \\ x_2 & = & 3 & - & 7t_1 & + & 5t_2 \\ x_3 & = & t_1 & & & & \\ x_4 & = & t_2 & & & & \\ x_5 & = & 2, & & & & \end{array}$$

gdzie $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.

Niech $A \in M_m^n(P)$ i $X \in M_n^1(P)$. Układ równań postaci:

$$AX = \mathbf{0}_n^1$$

nazywamy *układem jednorodnym.*

Wniosek 7. $(P, +, \cdot)$ - *ciało*
Układ jednorodny $AX = \mathbf{0}_n^1$ *ma niezerowe rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy* $rzA < n$*.*

Twierdzenie 8. *Niech* $A \in M_m^n(P)$*,* $B \in M_m^1(P)$*,* $X \in M_n^1(P)$ *oraz* $X_0 \in Rozw(A|B)$*. Wtedy*

$$Rozw(A|B) = \{X_0 + Y \mid Y \in Rozw(A|\mathbf{0}_n^1)\}.$$

Zadania

1. Obliczyć rząd macierzy A:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 5 & 7 & 2 \\ 4 & 6 & 8 & 9 & 3 \\ 3 & 5 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in M_4^5(R)$

(b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \in M_3^4(Z_7)$

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 & 5 \\ 6 & 5 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 6 & 3 & 0 \\ 5 & 5 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_4^5(Z_7)$

2. Sprawdzić, czy dany układ równań liniowych ma rozwiązanie w ciele liczb rzeczywistych. Jeśli tak, określić od ilu parametrów zależy to rozwiązanie a następnie rozwiązać ten układ. Który z układów jest układem Cramera?

(a) $$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ -2x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 3 \\ -x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 6 \end{array}$$

(b) $$\begin{array}{rcrcrcrcr} & & x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & 3x_4 & = & 2 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & -1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 1 \end{array}$$

(c) $$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & -3 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$$

(d) $$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & & & - & x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & - & x_3 & = & -1 \\ x_1 & - & x_2 & & & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array}$$

(e) $$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & - & x_5 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & - & 3x_5 & = & 1 \end{array}$$

(f) $$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr} x_1 & & & - & x_3 & & & + & x_5 & & & = & 0 \\ & & x_2 & & & - & x_4 & & & + & x_6 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & & & & & + & x_5 & - & x_6 & = & 0 \\ & & x_2 & - & x_3 & & & & & + & x_6 & = & 0 \\ x_1 & & & & & - & x_4 & + & x_5 & & & = & 0 \end{array}$$

3. Sprawdzić, czy dany układ równań liniowych ma rozwiązanie w ciele $(Z_7, +_7, \cdot_7)$. Jeśli tak, określić od ilu parametrów zależy to rozwiązanie a następnie rozwiązać ten układ.

(a) $$\begin{array}{rcrcrcr} 2 \cdot_7 x_1 & +_7 & 5 \cdot_7 x_2 & +_7 & 4 \cdot_7 x_3 & = & 6 \\ 5 \cdot_7 x_1 & +_7 & 4 \cdot_7 x_2 & +_7 & 4 \cdot_7 x_3 & = & 3 \\ 6 \cdot_7 x_1 & & & +_7 & x_3 & = & 4 \end{array}$$

(b) $$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3 \cdot_7 x_1 & +_7 & 4 \cdot_7 x_2 & +_7 & 4 \cdot_7 x_3 & +_7 & 6 \cdot_7 x_4 & = & 1 \\ 4 \cdot_7 x_1 & +_7 & 5 \cdot_7 x_2 & +_7 & 4 \cdot_7 x_3 & +_7 & x_4 & = & 0 \\ 5 \cdot_7 x_1 & +_7 & 6 \cdot_7 x_2 & +_7 & 4 \cdot_7 x_3 & +_7 & 3 \cdot_7 x_4 & = & 6 \end{array}$$

4. Przedyskutować rozwiązalność układu w ciele liczb rzeczywistych w zależności od parametru a:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} ax_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & ax_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & ax_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & ax_4 & = & 1 \end{array}$$