MAT2 Rozwiązania
Z_5

1. Zbadaj istnienie granicy podwójnej $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$, jeśli:

(a) $f(x,y) = \dfrac{x^3y}{x^2+2y^2}, \quad (x_0,y_0)=(0,0),$

Skorzystamy z definicji Cauchy'ego: $|f(x,y)-g|<\varepsilon$ dla $(x,y)\in S((0,0),\delta)$ i pokażemy, że granica wynosi 0.

$\left|\frac{x^3y}{x^2+2y^2}\right| \leqslant \left|\frac{x^3y}{x^2+y^2}\right| = \left|x^2\cdot\frac{xy}{x^2+y^2}\right| \leqslant \frac{1}{2}|x|^2 < \varepsilon$

skorzystaliśmy tutaj z oszacowania $\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| \leqslant \frac{1}{2}$ które wynika z wzoru skróconego mnożenia $(|x|-|y|)^2 \geqslant 0$.

(b) $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, \quad (x_0,y_0)=(0,0),$

Granica nie istnieje, ponieważ:

$\left(0,\frac{1}{n}\right) \to (0,0)\ :\ \lim_{n\to\infty} f\left(0,\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{0}{\frac{1}{n^2}} = 0$

$\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n^2}\right) \to (0,0)\ :\ \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{2}{n^4}} = \frac{1}{2}$

(c) $f(x,y) = \dfrac{x-xy}{2x^2+(y-1)^2}, \quad (x_0,y_0)=(0,1).$

$f(x,y) = \frac{x(1-y)}{2x^2+(y-1)^2}$

Granica nie istnieje, ponieważ:

$\left(0,1+\frac{1}{n}\right) \to (0,1)\ :\ \lim_{n\to\infty} f\left(0,1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{0}{\frac{1}{n^2}} = 0$

$\left(\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right) \to (0,1)\ :\ \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{3}{n^2}} = \frac{1}{3}$

2. Oblicz, jeśli istnieją, pochodne cząstkowe $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ i $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, jeśli:

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(3x^2+y^2)}{x^3}, & \text{gdy} \quad x\neq 0, \\ 0, & \text{gdy} \quad x=0, \end{cases}$

$f_x(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(3x^2)}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{3x^2}{2}}{x^4} =$
$= \lim_{x\to 0} 2\cdot\frac{\sin\frac{3}{2}x^2}{\frac{3}{2}x^2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{\sin\frac{3}{2}x^2}{\frac{3}{2}x^2}\cdot\frac{3}{2} = \frac{9}{2}$

$f_y(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{0}{y} = 0$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y}{x^2+y^2}, & \text{gdy} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{gdy} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

$f_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{x^2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^3} = 1$

$f_y(0,0)\ :\ \lim_{y\to 0} \frac{\frac{y}{y^2}}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{y^2} = +\infty \Rightarrow f_y(0,0)$ - nie istnieje

3. Zbadaj ciągłość funkcji $f(x,y)$ w punkcie (x_0,y_0) oraz istnienie pochodnych cząstkowych w tym punkcie, jeśli:

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{gdy} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{gdy} \quad (x,y) = (0,0), \end{cases} \qquad (x_0,y_0) = (0,0),$

Funkcja jest nieciągła w $(0,0)$, ponieważ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nie istnieje:

$\left(\frac{1}{n},0\right) \to (0,0)\ :\ \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n},0\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{0}{\frac{1}{n^2}} = 0$

$\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) \to (0,0)\ :\ \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2}$

Pochodne cząstkowe funkcji w $(0,0)$ istnieją:

$f_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0\,, \qquad f_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = 0$

(b) $f(x,y) = \sqrt{x^4+y^2}, \quad (x_0,y_0) = (0,0).$

Funkcja jest ciągła w $(0,0)$, pochodna cząstkowa nie istnieje:

$f_y(0,0)\ :\ \lim_{y\to 0} \frac{\sqrt{y^2}}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{|y|}{y}$ - nie istnieje

$f_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^4}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = 0$

Uwaga: Dla funkcji wielu zmiennych ciągłość i istnienie pochodnych cząstkowych jest od siebie niezależne.

4. Wyznacz, o ile istnieją, ekstrema właściwe funkcji $f(x,y)$, jeśli:

(a) $f(x,y) = \ln(2xy) - 2x^2 - y^2,$

$D_f\ :\ (x>0\ \wedge\ y>0)\ \vee\ (x<0\ \wedge\ y<0)\,, \quad f \in C^2(D_f)$

Punktami podejrzanymi o istnienie ekstremów są punkty krytyczne stacjonarne, możemy też stosować warunek wystarczający istnienia ekstremum funkcji.

Wyznaczamy punkty stacjonarne:

$$\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2y}{2xy}-4x=0 \\ \frac{2x}{2xy}-2y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1-4x^2}{x}=0 \\ \frac{1-2y^2}{y}=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \vee x=-\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{\sqrt{2}} \vee y=-\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow P_0=\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\,,\ P_1=\left(-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Sprawdzamy, czy w punktach stacjonarnych są ekstrema funkcji:

$f_{xx}=-\frac{1}{x^2}-4 \quad f_{yy}=-\frac{1}{y^2}-2\,, \quad f_{xy}=0$

$$W(x,y)=\begin{vmatrix} -\frac{1}{x^2}-4 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{y^2}-2 \end{vmatrix}=\left(\tfrac{1}{x^2}+4\right)\left(\tfrac{1}{y^2}+2\right)>0 \quad \forall\,(x,y)$$

$\wedge\ f_{xx}(P_k)<0\,,\ \ k=0,1 \Rightarrow f(P_0)=f(P_1)=\ln\frac{1}{\sqrt{2}}-1$ - maksima lokalne właściwe

(b) $f(x,y)=(2x+y^2)e^x$,

$f(x,y)=2xe^x+y^2e^x\,, \quad f\in C^2(\mathbb{R}^2)$

Wyznaczamy punkty stacjonarne:

$$\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^x(2+2x+y^2)=0 \\ 2ye^x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2+2x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow P_0=(-1,0)$

Sprawdzamy, czy w punkcie stacjonarnym jest ekstremum funkcji:

$f_{xx}=e^x(4+2x+y^2) \quad f_{yy}=2e^x\,, \quad f_{xy}=2ye^x$

$$W(P_0)=\begin{vmatrix} 2e^{-1} & 0 \\ 0 & 2e^{-1} \end{vmatrix}>0 \ \wedge \ f_{xx}(P_0)>0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow f(P_0)=-2e^{-1}$ - minimum lokalne właściwe

(c) $f(x,y)=2x^2-x^3y^2-\ln x$,

$D_f\ :\ x>0\,, \quad f\in C^2(D_f)$

Wyznaczamy punkty stacjonarne:

$$\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x-3x^2y^2-\frac{1}{x}=0 \\ -2x^3y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{4x^2-3x^3y^2-1}{x}=0 \\ x^3y=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x^2-1=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow P_0=\left(\tfrac{1}{2},0\right)$$

Sprawdzamy, czy w punkcie stacjonarnym jest ekstremum funkcji:

$f_{xx}=4-6xy^2+\frac{1}{x^2} \quad f_{yy}=-2x^3\,, \quad f_{xy}=-6x^2y$

$$W(P_0)=\begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2^4 \end{vmatrix}<0 \Rightarrow \text{brak ekstremum w } P_0$$

5. Wyznacz ekstrema funkcji $f(x,y) = xy^2$.

$f \in C^2(\mathbb{R}^2)$

Wyznaczamy punkty stacjonarne:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 0 \\ 2xy = 0 \end{cases} \Rightarrow (x,0) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

$W(x,0) = 0$, więc twierdzenie nie rozstrzyga istnienia ekstremów, musimy zbadać istnienie ekstremów w punktach $(x,0)$ dla $x \in \mathbb{R}$ z definicji:

$f(x,0) = 0$

$\forall\, x > 0\,,\ |y| < \varepsilon \quad f(x,y) > 0 \Rightarrow f(x,0) = 0$ - minimum lokalne niewłaściwe

$\forall\, x < 0\,,\ |y| < \varepsilon \quad f(x,y) < 0 \Rightarrow f(x,0) = 0$ - maksimum lokalne niewłaściwe

w punkcie $(0,0)$ funkcja nie ma ekstremum, bo w dowolnym sąsiedztwie tego punktu funkcja przyjmuje wartości zarówno większe jak i mniejsze od 0.

6. Sprawdzić, czy funkcja f spełnia warunki Cauchy'ego-Riemanna, jeśli

$$\text{(a)} \quad f(z) = z^3 + iz$$

Funkcję $f(z)$ zapiszemy w postaci $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, spełnia ona równania Cauchy-Riemanna (C-R) w punkcie (x_0, y_0), jeśli w tym punkcie spełniony jest układ równań

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

$f(z) = f(x+iy) = (x+iy)^3 + i(x+iy) = (x^3 - 3xy^2 - y) + i(3x^2y - y^3 + x)$
Stąd:

$u(x,y) = \operatorname{Re} f(z) = x^3 - 3xy^2 - y\,, \quad v(x,y) = \operatorname{Im} f(z) = 3x^2y - y^3 + x$

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3y^2 = 3x^2 - 3y^2 \\ -6xy - 1 = -6xy - 1 \end{cases} \Rightarrow \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \text{ funkcje } u(x,y)\,,\, v(x,y)$$
spełniają warunki C-R.

$$\text{(b)} \quad f(z) = z \cdot |z|^2$$

$f(z) = f(x+iy) = (x+iy)(x^2+y^2) = (x^3 + xy^2) + i(x^2y + y^3)$
Stąd:

$u(x,y) = \operatorname{Re} f(z) = x^3 + xy^2\,, \quad v(x,y) = \operatorname{Im} f(z) = x^2y + y^3$

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 + y^2 = x^2 + 3y^2 \\ 2xy = -2xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 = 2y^2 \\ 4xy = 0 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = (0,0)$$

Równania C-R są spełnione tylko w punkcie $(0,0)$.

$$\text{(c)} \quad f(z) = \mathrm{Re}(z^2) \cdot \bar{z}$$

$f(x+iy) = (x^2 - y^2)(x - iy) = (x^3 - xy^2) + i(y^3 - x^2 y)$
Stąd:

$u(x,y) = \mathrm{Re}\, f(z) = x^3 - xy^2\,, \quad v(x,y) = \mathrm{Im}\, f(z) = -x^2 y + y^3$

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - y^2 = -x^2 + 3y^2 \\ -2xy = 2xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = y^2 \\ 4xy = 0 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = (0,0)$$

Równania C-R są spełnione tylko w punkcie $(0,0)$.

7. Obliczyć, jeśli istnieje, pochodną $f'(z)$ oraz zbadać holomorficzność funkcji

$$\text{(a)} \quad f(z) = \mathrm{Im}(z+i)^2$$

Funkcja $f(z)$ jest holomorficzna w punkcie z_0, jeśli ma pochodną w punkcie z_0 oraz w pewnym jego otoczeniu.

Jeśli funkcje $u(x,y)$, $v(x,y)$ spełniają równania C-R w punkcie (x_0, y_0) oraz są klasy C^1 w tym punkcie, to pochodna $f'(z_0)$ istnieje i zachodzą wzory:

$$f'(z_0) = \left. u_x + iv_x \right|_{(x_0,y_0)} = \left. v_y - iu_y \right|_{(x_0,y_0)}$$

$f(x+iy) = \mathrm{Im}\left[(x + i(y+1))^2\right] = 2x(y+1)$
Stąd:

$u(x,y) = \mathrm{Re}\, f(z) = 2xy + 2x\,, \quad v(x,y) = \mathrm{Im}\, f(z) = 0$

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y + 2 = 0 \\ 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = (0,-1)$$

Równania C-R są spełnione tylko w punkcie $(0,-1)$, ponadto, jako wielomiany, funkcje $u\,, v \in C^1(\mathbb{R}^2)$, stąd pochodna istnieje tylko w punkcie $z = -i$, więc funkcja nie jest holomorficzna.

$f'(-i) = \left. 2y + 2 + i \cdot 0 \right|_{(x,y)=(0,-1)} = 0$

$$\text{(b)} \quad f(z) = e^{\bar{z}}$$

$f(z) = f(x+iy) = e^x \cdot e^{-iy} = e^x(\cos y - i \sin y)$
Stąd:

$u(x,y) = \mathrm{Re}\, f(z) = e^x \cos y\,, \quad v(x,y) = \mathrm{Im}\, f(z) = -e^x \sin y$

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^x \cos y = -e^x \cos y \\ -e^x \sin y = e^x \sin y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos y = 0 \\ \sin y = 0 \end{cases} \Rightarrow y \in \emptyset \Rightarrow f'(z)$$

nigdzie nie istnieje (nie jest spełniony warunek konieczny, czyli równania C-R), więc funkcja nie jest holomorficzna.