7. Przekształcenia liniowe

Zadania

1. Które z następujących przekształceń są liniowe?
   (a) $F : R^2 \to R$, $F([x_1, x_2]) = (x_1 + 1)(x_2 - 1)$
   (b) $F : R^2 \to R^3$, $F([x_1, x_2]) = [x_1 + 2x_2, x_1 - x_2, x_1]$
   (c) $F : R \to R$, $F(x) = |x|$
   (d) $F : R^3 \to R^3$, $F([x_1, x_2, x_3]) = [x_1x_2, x_1, x_3]$

2. Niech $F\colon C \to C$, $F(z) = \overline{z}$. Pokazać, że F jest przekształceniem liniowym przestrzeni wektorowej $C(\mathbb{R})$. Czy F jest przekształceniem liniowym przestrzeni wektorowej $C(\mathbb{C})$?

3. Przekształcenie liniowe $F\colon Z_7^2 \to Z_7^2$ dane jest przez przyporządkownanie $[1, 5] \mapsto [3, 5]$ oraz $[3, 4] \mapsto [5, 6]$. Dla dowolnego wektora $\boldsymbol{v} = [x_1, x_2] \in Z_7^2$ obliczyć $F(\boldsymbol{v})$.

4. Sprawdzić, czy istnieje przekształcenie liniowe $F\colon R^3 \to R^3$ spełniające warunki: $F([5, 5, 3]) = [1, 0, 7]$, $F([3, 3, 3]) = [2, 1, 5]$ oraz $F([1, 2, 3]) = [4, 2, 4]$.

5. Niech $V(\mathbb{K})$ będzie przestrzenią wektorową, a $W_1(\mathbb{K})$ i $W_2(\mathbb{K})$ takimi jej podprzestrzeniami, że $V = W_1 \oplus W_2$. Funkcję $\pi_1\colon V \to W_1$ określoną dla dowonych $\boldsymbol{w}_1 \in W_1$, $\boldsymbol{w}_2 \in W_2$ wzorem $\pi_1(\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2) = \boldsymbol{w}_1$ nazywamy *rzutowaniem* przestrzeni $V(\mathbb{K})$ na podprzestrzeń $W_1(\mathbb{K})$ wzdłuż podprzestrzeni $W_2(\mathbb{K})$. Pokazać, że odwzorowanie π_1 jest liniowe. Wyrazić analitycznie rzutowanie przestrzeni $R^3(\mathbb{R})$ na podprzestrzeń $\mathcal{L}([1, 0, 0], [0, 1, 0])$ wzdłuż podprzestrzeni $\mathcal{L}([1, 1, 1])$.

6. Dla każdego z podanych przekształceń liniowych F wyznaczyć macierz przekształcenia w bazach standardowych odpowiednich przestrzeni wektorowych. Podać bazy i wymiary podprzestrzeni jądra $KerF$ i obrazu ImF.
   (a) $F : R^3 \to R^2$, $F([x_1, x_2, x_3]) = [x_1 + x_2, x_2 + x_3]$
   (b) $F : R^3 \to R^4$, $F([x_1, x_2, x_3]) = [2x_1 - x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 - x_3, -x_1 + 3x_2 - 2x_3, 8x_1 + x_2 + x_3]$
   (c) $F : R^2 \to R^2$, $F([x_1, x_2]) = [2x_1 - x_2, 3x_2 - 6x_1]$
   (d) $F : R^4 \to R^5$, $F([x_1, x_2, x_3, x_4]) = [x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_4, x_3, x_1]$
   (e) $F : R^4 \to R^3$, $F([x_1, x_2, x_3, x_4]) = [2x_1 + x_3, 2x_2 - x_4, x_3 + 2x_4]$
   (f) $F : R^4 \to R^4$, $F([x_1, x_2, x_3, x_4]) = [x_4, x_3, x_2, x_1]$
   (g) $F : R^5 \to R^3$, $F([x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]) = [x_1 + x_2 + x_3, x_2 + x_3 + x_4, x_3 + x_4 + x_5]$
   (h) $F : R^4 \to R^3$, $F([x_1, x_2, x_3, x_4]) = [x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4, x_1 + 2x_3 + x_4, 2x_1 + x_2 + 3x_3]$
   (i) $F\colon R^2 \to R^2$ - obrót o kąt α wokół punktu $(0, 0)$
   (j) $F\colon R^2 \to R^2$ - symetria względem osi OX
   (k) $F\colon R_2[x] \to R_2[x]$, $F(w)(x) = w'(1)x + w(2)(x^2 + x)$

7. Znaleźć macierze podanych przekształceń liniowych we wskazanych bazach odpowiednich przestrzeni liniowych:
   (a) $F : R^2 \to R^3$, $F([x_1, x_2]) = [x_1 + x_2, 2x_1 + x_2, x_1 - 3x_2]$,
   w bazach $\mathcal{B} : [1, 1], [1, -1]$ oraz $\mathcal{C} : [1, -1, 0], [0, 1, -1], [0, 0, 1]$
   (b) $F : R^3 \to R^2$, $F([x_1, x_2, x_3]) = [x_1 - x_2, x_2 - x_3]$,
   w bazach $\mathcal{B} : [1, 2, 2], [1, 1, 1], [1, 1, 2]$ oraz $\mathcal{C} : [1, 1], [1, 0]$