Zad. 1.

[MAT3] - L7 - Przekształcenia liniowe

1. Które z następujących przekształceń są liniowe?

(a) $F : R^2 \to R^3$, $F([x_1, x_2]) = [x_1 x_2, 0, 0]$

$F: U \to W$: liniowe, gdy:

1) $\forall u, v \in V$: $F(u+v) = F(u) + F(v)$

2) $\forall u \in V$ $\forall \lambda \in \mathbb{K}$: $F(\lambda u) = \lambda F(u)$

2) $F(\alpha u) = F([\alpha x_1, \alpha x_2]) = [\alpha^2 x_1 x_2, 0, 0]$

$\alpha F(u) = \alpha \cdot F([x_1, x_2]) = \alpha [x_1 x_2, 0, 0] = [\alpha x_1 x_2, 0, 0]$

$[\alpha^2 x_1 x_2, 0, 0] \neq [\alpha x_1 x_2, 0, 0]$ dla $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq 1$

✗ NIE JEST LINIOWE

(b) $F : R^2 \to R^3$, $F([x_1, x_2]) = [x_1 + 2x_2, x_1 - x_2, x_1]$

$F(u) = F([x_1, x_2])$

1) $F(u) + F(v) = F([x_1, x_2]) + F([y_1, y_2]) =$

$= [x_1 + 2x_2, x_1 - x_2, x_1] + [y_1 + 2y_2, y_1 - y_2, y_1] =$

$= [x_1 + y_1 + 2(x_2 + y_2), x_1 - x_2 + y_1 - y_2, x_1 + y_1]$

||

$F(u+v) = [x_1 + y_1 + 2(x_2 + y_2), x_1 + y_1 - x_2 - y_2, x_1 + y_1]$ ✓

2) $\alpha F(u) \stackrel{?}{=} F(\alpha u)$

$F(\alpha u) = F([\alpha x_1, \alpha x_2]) = [\alpha x_1, \alpha 2 x_2, \alpha x_1 - \alpha x_2, \alpha x_1]$

JEST LINIOWE

$\alpha F(u) = \alpha F([x_1, x_2]) = \alpha [x_1 + 2x_2, x_1 - x_2, x_1]$ // ✓

(c) $F: R^3 \to R^2$, $F([x_1, x_2, x_3]) = [x_1 + 2, x_2]$

$u = [x_1, x_2, x_3]$ $\quad v = [y_1, y_2, y_3]$

1) $F(u+v) \overset{?}{=} F(u) + F(v)$

$F(u) + F(v) = [x_1 + 2, x_2] + [y_1 + 2, y_2] =$

$= [x_1 + y_1 + 4, x_2 + y_2]$

$F(u+v) = [x_1 + y_1 + 2, x_2 + y_2]$

X

NIE JEST LINIOWE

(d) $F: R^3 \to R^3$, $F([x_1, x_2, x_3]) = [x_1 x_2, x_1, x_3]$

1) $F(u+v) \overset{?}{=} F(u) + F(v)$ $\quad u = [x_1, x_2, x_3]$ $\quad v = [y_1, y_2, y_3]$

$F(u) + F(v) = F([x_1, x_2, x_3]) + F([y_1, y_2, y_3]) =$

$= [x_1 x_2, x_1, x_3] + [y_1 y_2, y_1, y_3] = [x_1 x_2 + y_1 y_2, x_1 + y_1, x_3 + y_3]$

$F(u+v) = F([x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3]) = [(x_1 + y_1)(x_2 + y_2), x_1 + y_1, x_3 + y_3]$

X NIE JEST LINIOWE

Zad. 2.

2. Niech $F: C \to C$, $F(z) = \bar{z}$. Pokazać, że F jest przekształceniem liniowym przestrzeni wektorowej $C(\mathbb{R})$. Czy F jest przekształceniem liniowym przestrzeni wektorowej $C(\mathbb{C})$?

$C(\mathbb{R})$: $\quad F(z) = \bar{z}$

1) $F(z_1) + F(z_2) \overset{?}{=} F(z_1 + z_2)$

$F(z_1) + F(z_2) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 =$

$F(z_1 + z_2) = \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

$F(z_1) + F(z_2) = F(z_1 + z_2)$ ✓

2) $F(\alpha z) \overset{?}{=} \alpha F(z)$ $\quad \alpha \in R$

$F(\alpha z) = \bar{\alpha} \bar{z} = \alpha \bar{z}$ $\quad = \quad$ $\alpha F(z) = \alpha \bar{z}$ ✓

w części rzeczywistej się nic nie zmienia

JEST LINIOWYM

$C(\mathbb{C})$:

$\alpha \in \mathbb{C}$

2) $F(\alpha z) \stackrel{?}{=} \alpha F(z)$

$F(\alpha z) = \bar{\alpha} \bar{z}$

$\alpha F(z) = \alpha \bar{z}$

np. dla $\alpha = i$

$F(\alpha z) = \bar{i} \bar{z} = -i\bar{z}$

$\alpha F(z) = i \bar{z}$ $\neq$

× NIE JEST LINIOWYM

Zad. 3.

3. Przekształcenie liniowe $F\colon Z_7^2 \to Z_7^2$ dane jest przez przyporządkowanie $[1,5] \mapsto [3,5]$ oraz $[3,4] \mapsto [5,6]$. Dla dowolnego wektora $\boldsymbol{v} = [x_1, x_2] \in Z_7^2$ obliczyć $F(\boldsymbol{v})$.

$F(\overbrace{[1,5]}^{v_1}) = \overbrace{[3,5]}^{w_1}$

$F(\underbrace{[3,4]}_{v_2}) = \underbrace{[5,6]}_{w_2}$

$F([x_1, x_2]) = ?$

A – macierz reprezentująca to przekształcenie liniowe (macierz przekształceń)

$$A \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 + 2r_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 \cdot 5} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_1 - 3r_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right]$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$F(v) = [5x_1 + x_2,\ 6x_1 + 4x_2]$$

Lab. 5.

5. Dla każdego z podanych przekształceń liniowych F wyznaczyć macierz przekształcenia w bazach standardowych odpowiednich przestrzeni wektorowych. Podać bazy i wymiary podprzestrzeni jądra $KerF$ i obrazu ImF.

(a) $F : R^3 \to R^2$, $F([x_1, x_2, x_3]) = [x_1 + x_2, x_2 + x_3]$

bazy standardowe $\underbrace{[1,0,0]}_{u}, \underbrace{[0,1,0]}_{v}, \underbrace{[0,0,1]}_{w}$

$F([1,0,0]) = [1,0]$

$F([0,1,0]) = [1,1]$

$F([0,0,1]) = [0,1]$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Jądro KerF – to zbiór wszystkich wektorów takich, że

$F(u) = [0, 0, \ldots]$ $\quad A \cdot x = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \underset{(R^3)}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}} = \underset{(R^2)}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 = -x_2 \\ x_3 = -x_2 \\ x_1 = x_3 \end{cases}$$

$x_1 = t$

$[x_1, x_2, x_3] = x_1 [1, -1, 1] = t[1, -1, 1]$

$KerF = \alpha(\underbrace{[1, -1, 1]}_{baza})$

$\dim KerF = 1$

$\dim(R^3) = 3$

$\dim \operatorname{Ker} F + \dim \operatorname{Im} F = 3 \implies \dim \operatorname{Im} F = 2$

$\operatorname{Im} F = \mathcal{L}\{[1,0], \cancel{[1,2]}, [0,1]\}$

liniowo zależny

$\dim \operatorname{Im} F = 2 \to$ bo 2 wektory w bazie

(b) $F: R^3 \to R^4$, $F([x_1, x_2, x_3]) = [2x_1 - x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 - x_3, -x_1 + 3x_2 - 2x_3, 8x_1 + x_2 + x_3]$

baza standardowa: $[1,0,0], [0,1,0], [0,0,1]$

$F([1,0,0]) = [2, 1, -1, 8]$

$F([0,1,0]) = [-1, 2, 3, 1]$

$F([0,0,1]) = [1, -1, -2, 1]$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 8 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Jądro Ker F:

$Ax = 0$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 8 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 + x_3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 \\ 8x_1 + x_2 + x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \\ 8 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \\ 8 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{r_3 + r_1 \\ r_4 - 8r_1}]{r_2 - 2r_1}$$

$$t = 5k$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{5} & \cancel{-3} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{-15} & \cancel{9} & \cancel{0} \end{array}\right]$$

$$-5x_2 + 3t = 0$$

$$x_2 = \frac{3}{5}t = 3k$$

$$x_3 = -6k + 5k = -1k$$

$$x_1 = t = 5k$$

$$k[-1, 3, 5]$$

$\ker F = \mathcal{L}[-1, 3, 5]$ Baza $\ker F$: $\{[-1, 3, 5]\}$

$\dim \ker F = 1$

$\dim \operatorname{Im} F = 2$

$$\operatorname{Im} F = \mathcal{L}([2, 1, -1, 8], [-1, 2, 3, 1])$$

(c) $F : R^2 \to R^2$, $F([x_1, x_2]) = [2x_1 - x_2, 3x_2 - 6x_1]$

baza standardowa: $[1, 0]\ [0, 1]$

$$F([1,0]) = [2, -6]$$

$$F([0,1]) = [-1, 3]$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$Ax = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ \cancel{-6x_1 + 3x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cancel{0} \end{bmatrix}$$

$2x_1 = x_2$ $\ker F = \mathcal{L}([1, 2])$ $\dim \ker F = 1$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ \cancel{-6} & \cancel{3} & \cancel{0} \end{array}\right]$$

$$\operatorname{Im} F = \mathcal{L}\left([2,-6]\right) \qquad \dim \operatorname{Im} F = 1$$

$$\dim \operatorname{Im} F + \dim \operatorname{Ker} F = 2$$

(d) $F : R^4 \to R^5$, $F([x_1, x_2, x_3, x_4]) = [x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_4, x_3, x_1]$

baza standardowa: $[1,0,0,0]$, $[0,1,0,0]$, $[0,0,1,0]$, $[0,0,0,1]$

$$F([1,0,0,0]) = [1,0,0,0,1]$$

$$F([0,1,0,0]) = [1,1,0,0,0]$$

$$F([0,0,1,0]) = [0,1,1,1,0]$$

$$F([0,0,0,1]) = [0,0,1,0,0]$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Ax = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 + x_4 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{c|c} x_1 + x_2 & 0 \\ x_2 + x_3 & 0 \\ x_3 + x_4 & 0 \\ x_3 & 0 \\ x_1 & 0 \end{array}\right]$$

$x_1 = 0$

$x_3 = 0$

$x_2 = x_4 = 0$

$\operatorname{Ker} F = \mathcal{L}([0,0,0,0])$

$\dim \operatorname{Ker} F = 0$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_5 - r_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_5 + r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[r_5 - r_3]{r_4 - r_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{-1} \end{bmatrix}$$

$\operatorname{Im} F = \mathcal{L}([1,0,0,0,1], [1,1,0,0,0], [0,1,1,1,0], [0,0,1,0,0])$

$\dim \operatorname{Im} F = 4$

(e) $F : R^4 \to R^3$, $F([x_1, x_2, x_3, x_4]) = [2x_1 + x_3, 2x_2 - x_4, x_3 + 2x_4]$

baza standardowa: $[1,0,0,0], [0,1,0,0], [0,0,1,0], [0,0,0,1]$

$F([1,0,0,0]) = [2,0,0]$

$F([0,1,0,0]) = [0,2,0]$

$F([0,0,1,0]) = [1,0,1]$

$F([0,0,0,1]) = [0,-1,2]$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$Ax = 0$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x_1 + x_3 \\ 2x_2 - x_4 \\ x_3 + 2x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} & & & t \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$x_3 + 2t = 0 \Rightarrow x_3 = -2t$

$2x_2 = t \qquad x_2 = \frac{t}{2}$

$2x_1 - 2t = 0 \qquad x_1 = t \qquad x_4 = t$

$\ker F = \mathcal{L}\left([1, \tfrac{1}{2}, -2, 1]\right)$ $\dim \ker F = 1$

$\operatorname{Im} F = \mathcal{L}\left([0,2,0], [2,0,0], [1,0,1]\right)$

$\dim \operatorname{Im} F = 3$

$\dim \ker F + \dim \operatorname{Im} F = 3+1=4$ ✓