

SPRAWOZDANIE SYSY

Laboratorium 3

Jan Czechowski 337066

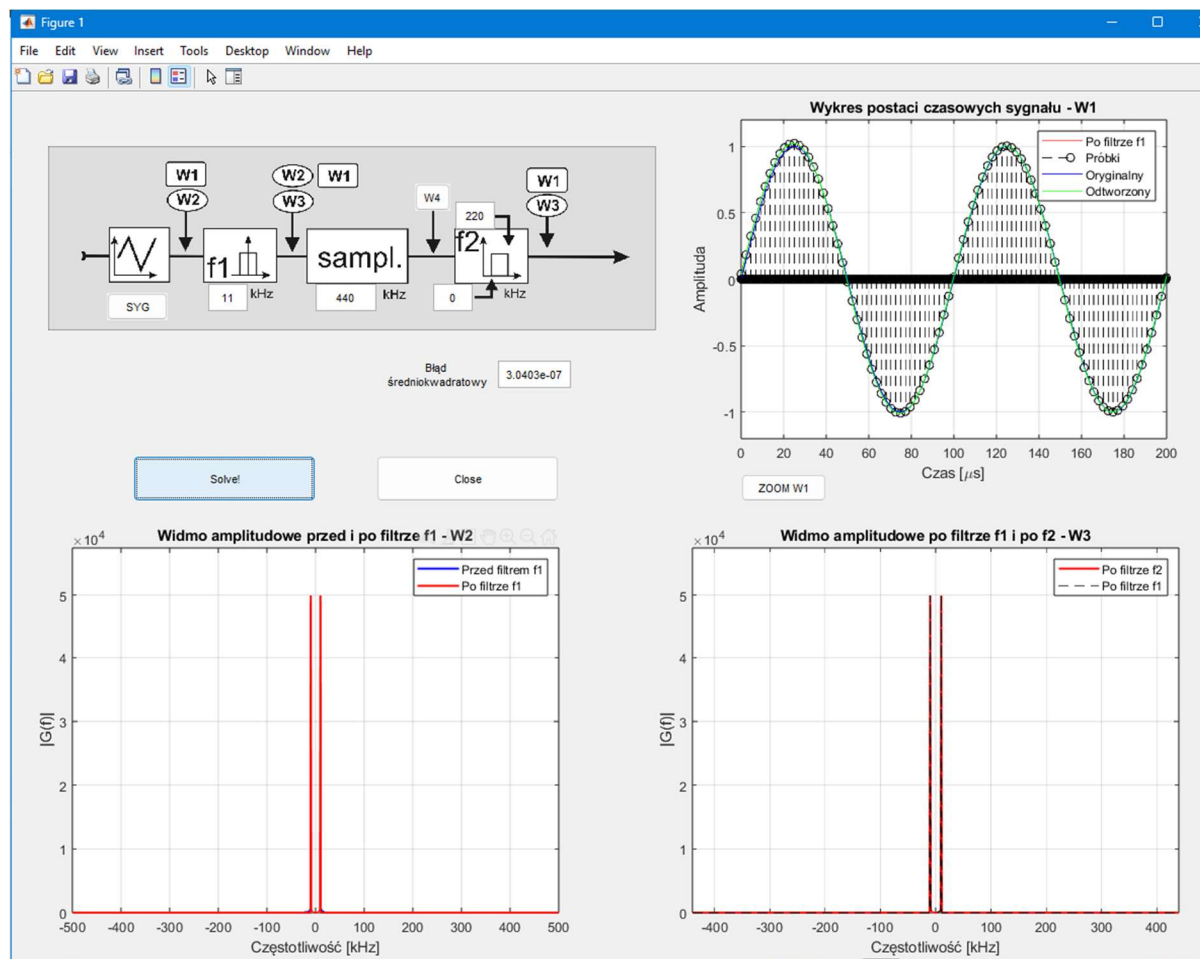
Bartłomiej Gromulski 331475

3.04.2025

1. Zadanie

a)

Częstotliwość graniczna filtru $f_1 = 1/(100\mu s) = 10\text{kHz}$, a najniższą wartością filtru, która nie zniekształca widma sygnału \sin , jest **$f_1 = 11\text{ kHz}$** .



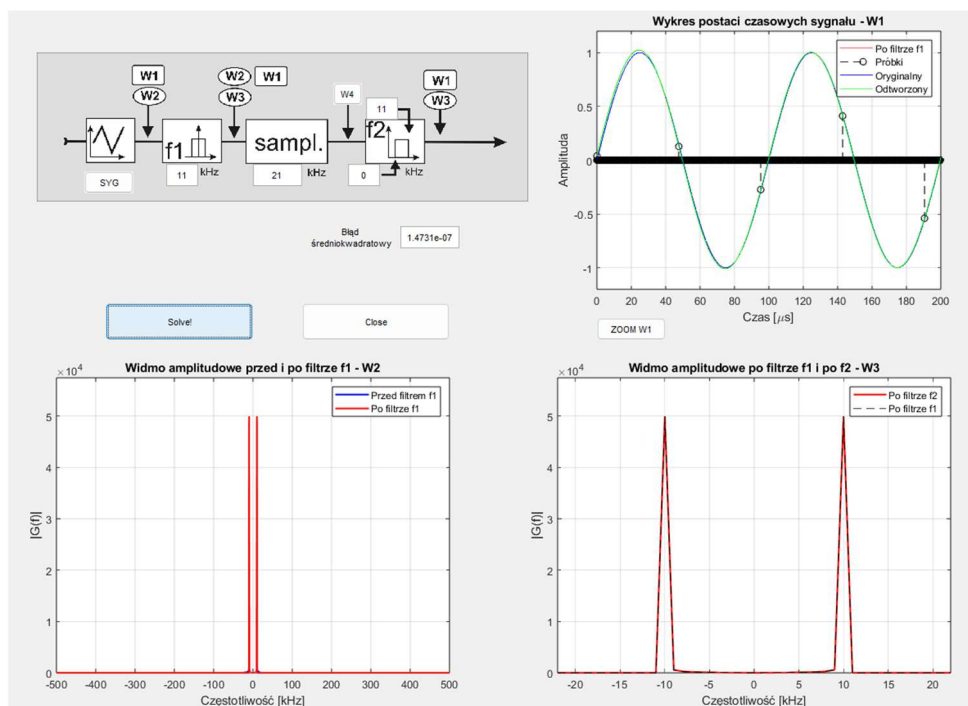
Rys. 1 Widmo dla szerokości filtru $f_1 = 11\text{ kHz}$.

b)

Teoretycznie, zgodnie z twierdzeniem Nyquista, aby nie dopuścić do aliasingu, musimy mieć: $f_s \geq 2 f_c = 2 f_1$.

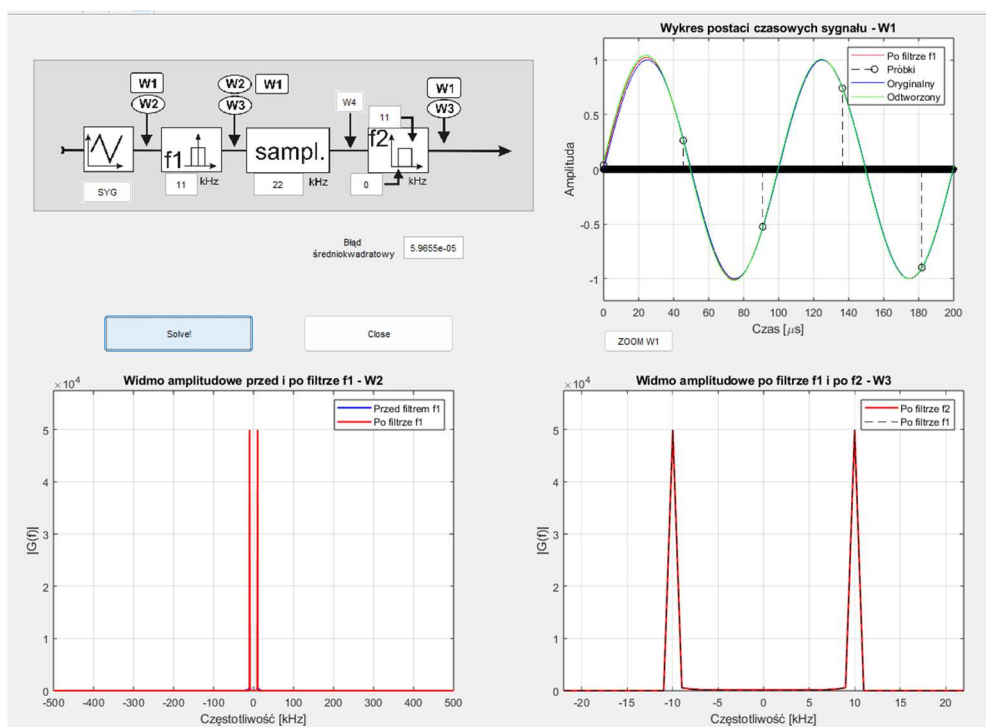
Dla $f_1 = 11\text{ kHz}$ daje to $f_s \geq 22\text{ kHz}$. Jednak w naszym skrypcie mamy narzucone obostrzenie - zarówno szerokość filtru f_1 , jak i częstotliwość próbkowania f_s można podawać tylko jako **liczby całkowite** w [kHz].

Gdybyśmy mogli ustawić np. $f_1 = 10,5\text{ kHz}$, to wymagana teoretycznie częstotliwość próbkowania wynosiłaby: $2 \times 10,5 = 21\text{ kHz}$ i dla tej wartości aliasing nie występuje.



Rys. 2 Widma dla częstotliwości próbkowania 21 kHz.

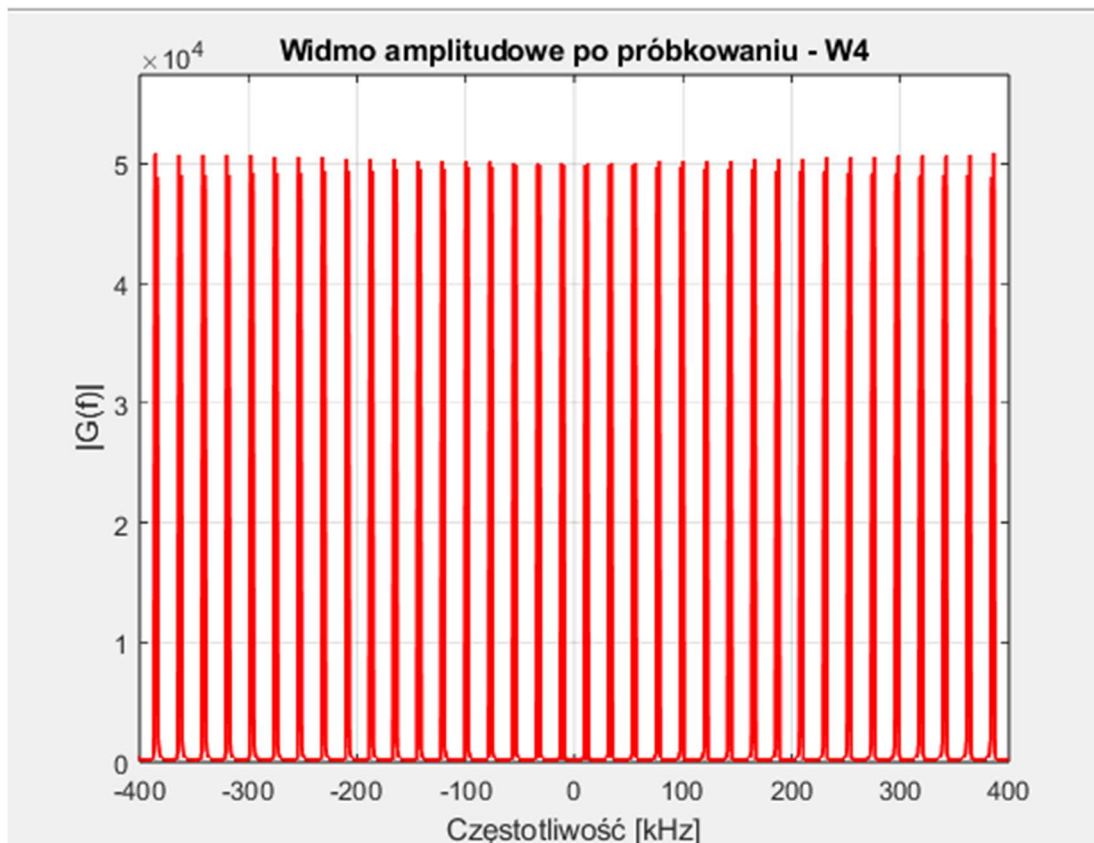
Skoro jednak program nie przyjmuje wartości niecałkowitych, najniższą „legalną” szerokością filtru jest $f_1 = 11$ kHz. Dla tej wartości $f_s = 22$ kHz.



Rys. 3 Widma dla częstotliwości próbkowania 22 kHz.

c)

Widmo amplitudowe po próbkowaniu:



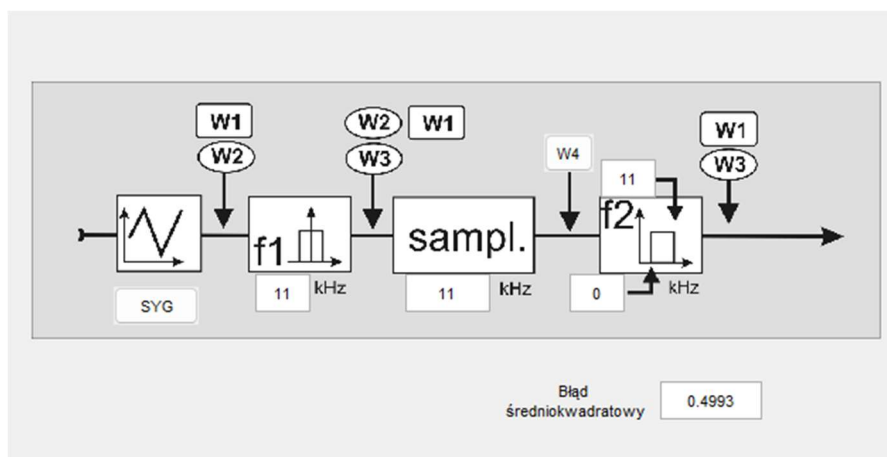
Rys. 4 Widmo amplitudowe po próbkowaniu.

d)

Poniższe podpunkty będą liczone dla $f_s = 22$ kHz.

$0,5 * f_s = 11$ kHz:

Błąd średniokwadratowy = 0,4993

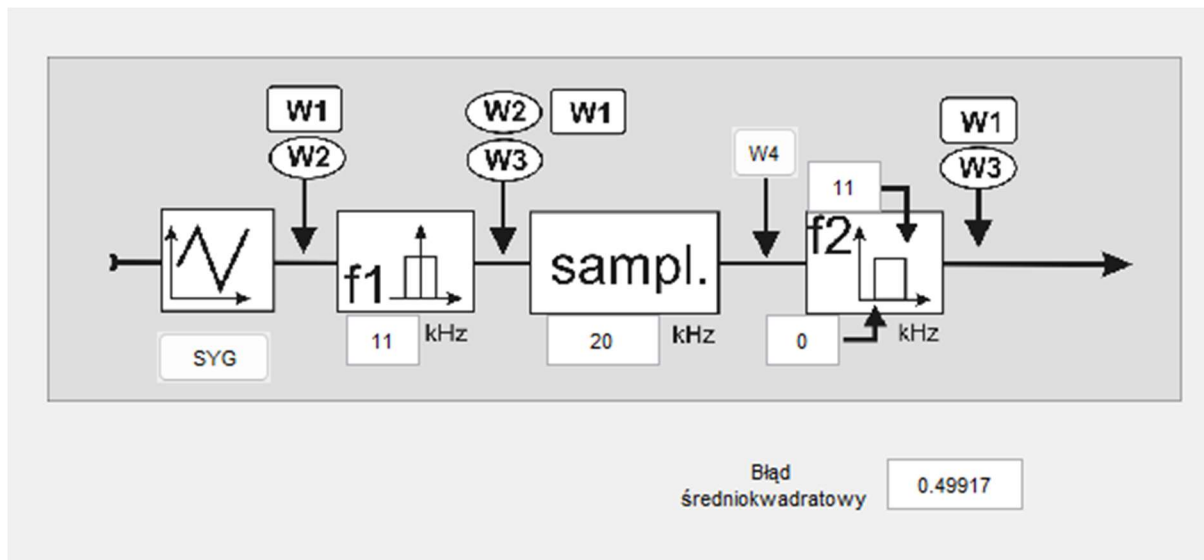


Rys. 5 Błąd średniokwadratowy dla $0,5 * f_s$

Przy połowie teoretycznej częstotliwości próbkowania sygnał jest silnie aliasowany, co skutkuje bardzo wysokim błędem średniokwadratowym. Wynik bliski 0,5 wskazuje na znaczące zniekształcenia sygnału.

$0,9 \text{ fs} \approx 20 \text{ kHz}$:

Błąd średniokwadratowy = 0,49917

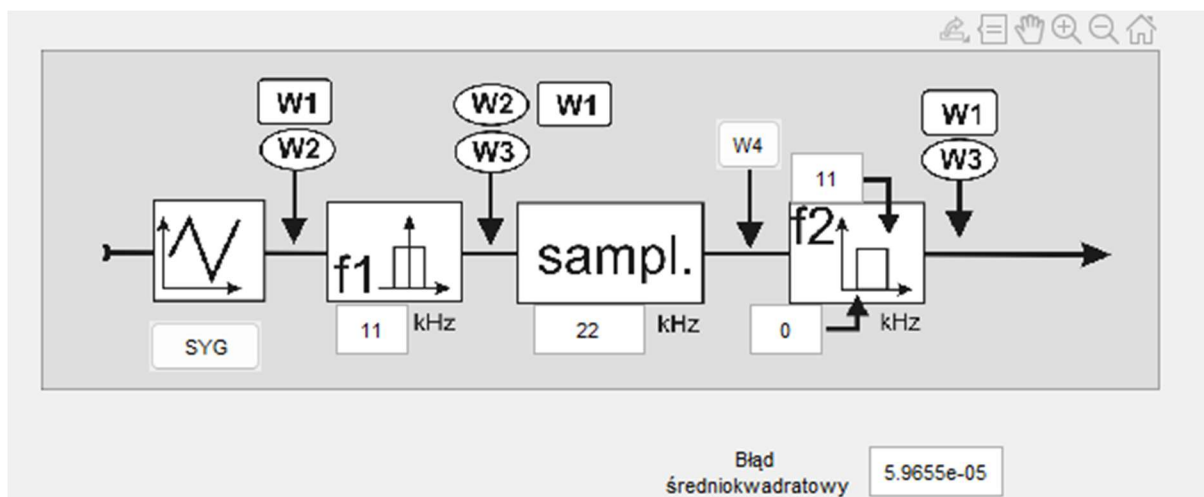


Rys. 6 Błąd średniokwadratowy dla $0,9 * \text{fs}$

Nawet przy 90% fs błąd pozostaje praktycznie na tym samym poziomie, co świadczy o tym, że częstotliwość ta nadal jest zbyt niska, aby poprawnie odwzorować sygnał. Aliasowanie jest nadal dominujące.

$1 \text{ fs} = 22 \text{ kHz}$:

Błąd średniokwadratowy = $5.9655\text{e-}05 \approx 0$

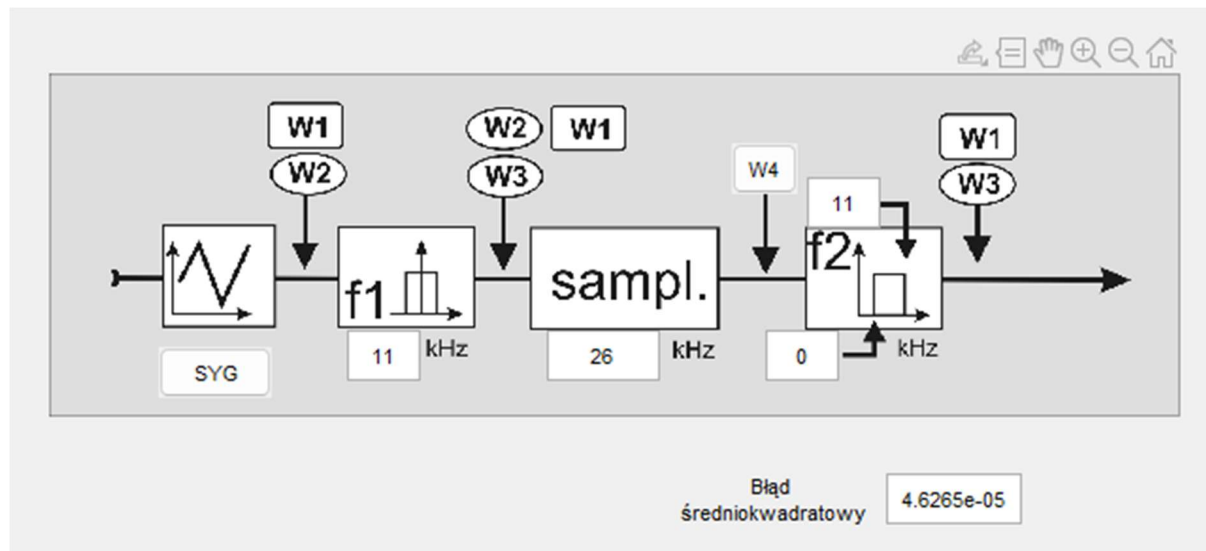


Rys. 7 Błąd średniokwadratowy dla $1 * \text{fs}$

Przekroczenie progu Nyquista (1 fs) powoduje gwałtowny spadek MSE. Wartość rzędu 10^{-5} wskazuje, że sygnał jest prawidłowo próbkowany i rekonstrukcja przebiegu jest bardzo dokładna.

$$1,2 \cdot f_s = 26,4 \text{ kHz} \approx 26 \text{ kHz:}$$

$$\text{Błąd średniokwadratowy} = 4,6265\text{e-}05 \approx 0$$

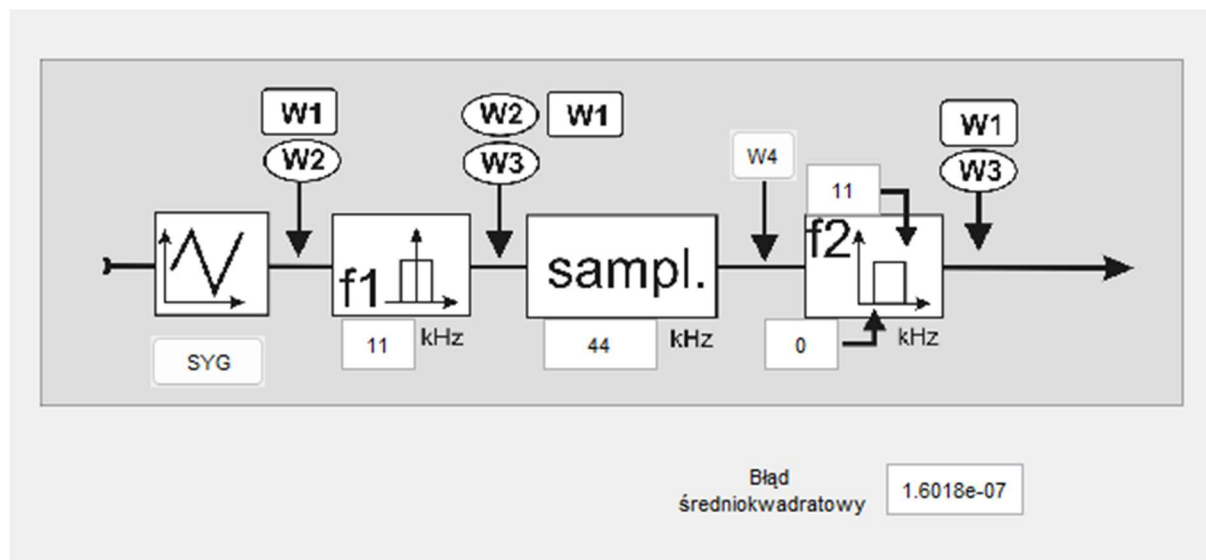


Rys. 8 Błąd średniokwadratowy dla $1,2 \cdot f_s$

Przy niewielkim nadpróbkowaniu obserwujemy dalszą minimalną redukcję błędu. Choć poprawa jest mniejsza, sygnał jest już bardzo dobrze odtworzony.

$$2 \cdot f_s = 44 \text{ kHz:}$$

$$\text{Błąd średniokwadratowy} = 1.6018\text{e-}07 \approx 0$$



Rys. 9 Błąd średniokwadratowy dla $2 \cdot f_s$

Znaczne nadpróbkowanie (dwukrotność f_s) praktycznie eliminuje błąd, osiągając wartość niemal zerową, co potwierdza, że wyższa częstotliwość próbkowania daje jeszcze dokładniejszą rekonstrukcję.

Podsumowując, wyniki te wyraźnie ilustrują, że:

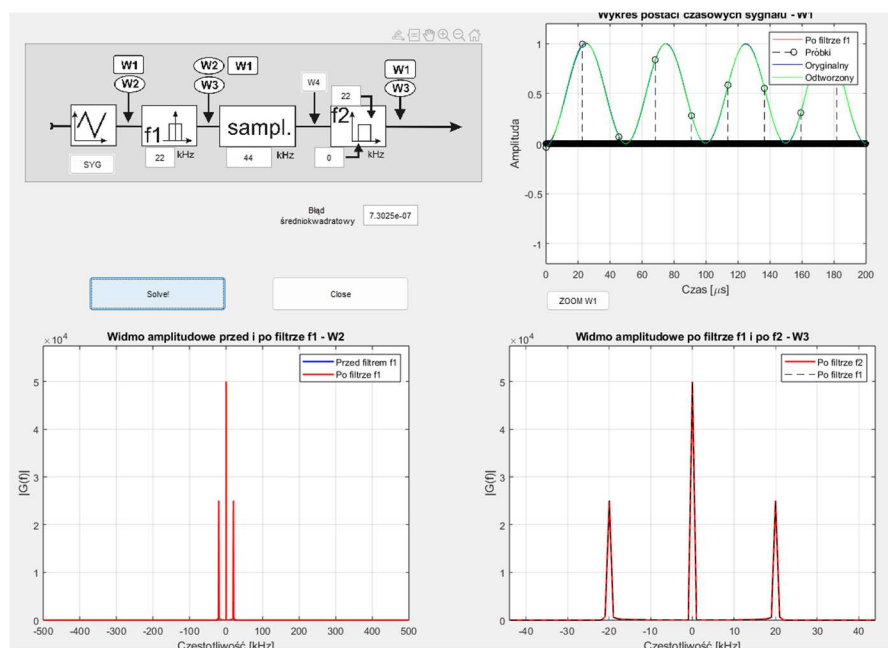
- Przy częstotliwościach poniżej lub nieosiągających wartości Nyquista ($0,5 f_s$ oraz $0,9 f_s$) aliasing jest tak silny, że praktycznie maksymalny błąd (około $0,5$) utrzymuje się.
- Próg Nyquista ($1 f_s$) jest kluczowy – przekroczenie tej wartości drastycznie poprawia jakość rekonstrukcji, obniżając MSE do poziomu rzędu 10^{-5} .
- Nadpróbkowanie ($1,2 f_s$, $2 f_s$) przynosi dalsze, aczkolwiek marginalne, usprawnienia w dokładności rekonstrukcji.

e)

Nie – wyznaczone dla $\sin f_i = 11 \text{ kHz}$ i $f_s = 22 \text{ kHz}$ nie wystarczą dla \sin^2 . Ponieważ \sin^2 zawiera składową o częstotliwości $2f$ (okres o połowę krótszy), jego najwyższa składowa to $2 \cdot 11 \text{ kHz} = 22 \text{ kHz}$. Aby uniknąć aliasingu, trzeba mieć

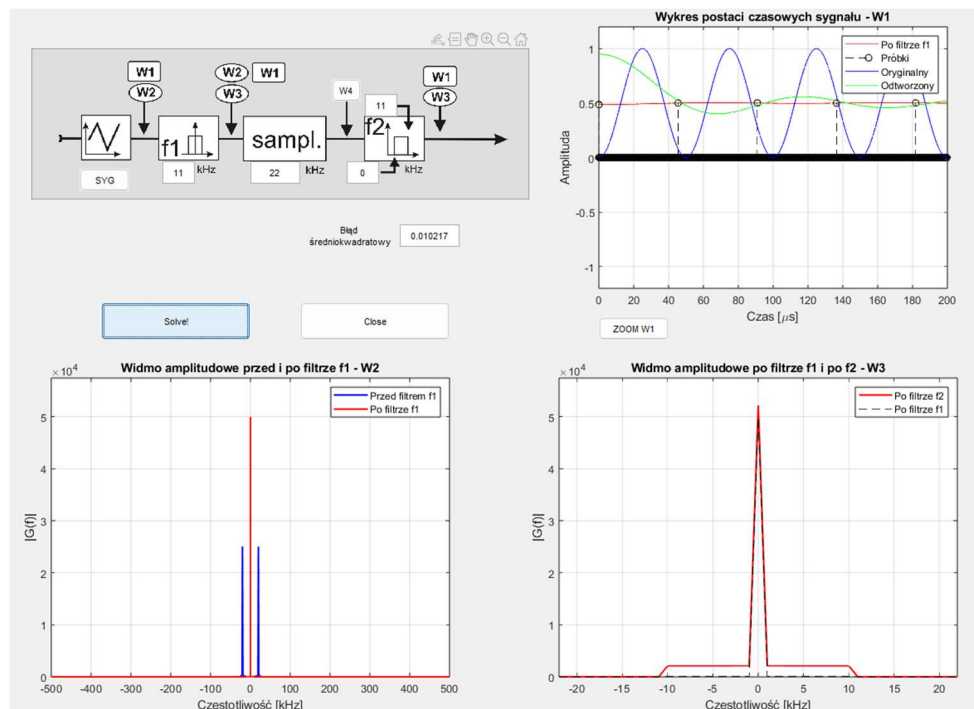
- $f_i \geq 22 \text{ kHz}$
- $f_s \geq 2 \cdot 22 \text{ kHz} = 44 \text{ kHz}$.

Zarówno składowa stała, jak i wyższa harmoniczna są zachowane. Wykres w czasie odtwarza typowy kształt \sin^2 bez zniekształceń.



Rys. 10 \sin^2 dla $f_i = 22 \text{ kHz}$ i $f_s = 44 \text{ kHz}$

Widmo sygnału zostaje pozbawione składowej wyższej częstotliwości, zostaje jedynie składowa stała. W dziedzinie czasu zamiast charakterystycznych „górek” \sin^2 widzimy niemal poziomy przebieg.

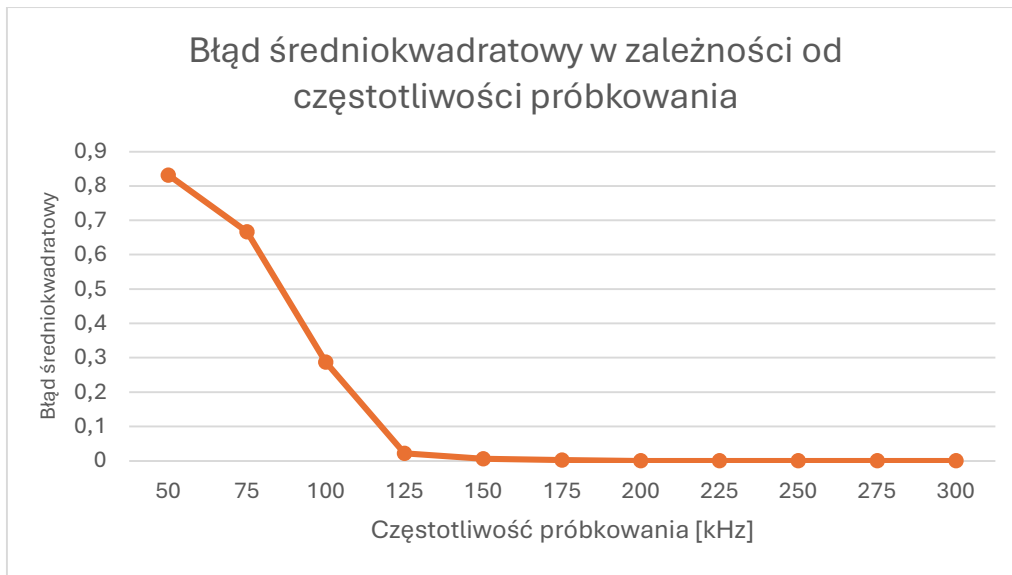


Rys. 11 \sin^2 dla $f_1=11$ kHz i $f_s=22$ kHz

2. Zadanie

Tabela 1 Wartości błędu średniokwadratowego w zależności od częstotliwości próbkowania dla sygnału prostokątnego.

Częstotliwość próbkowania [kHz]	Błąd średniokwadratowy
50	0,83169
75	0,66676
100	0,28739
125	0,021997
150	0,006254
175	0,0017361
200	1,4017E-32
225	2,394E-07
250	1,3616E-32
275	6,0163E-09
300	8,8659E-08

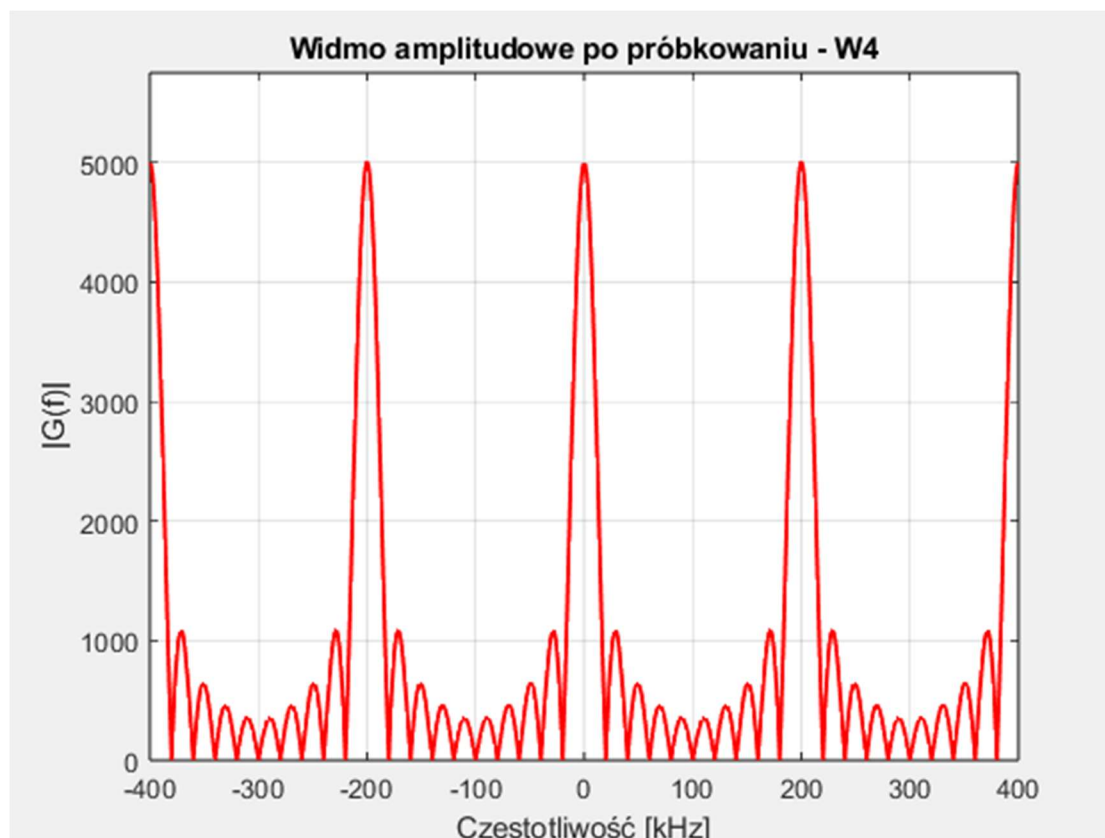


Rys. 12 Błąd średniokwadratowy w zależności od częstotliwości próbkowania dla pojedynczego impulsu prostokątnego.

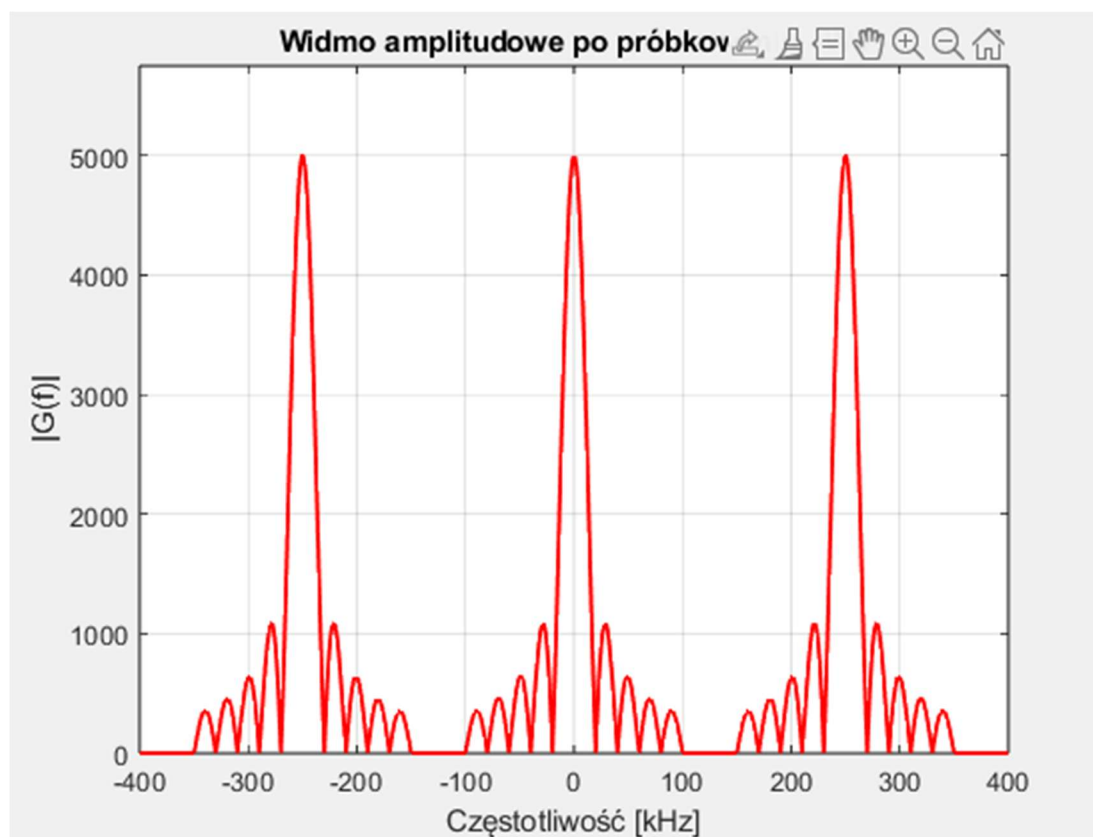
Z wykresu można odczytać, że:

1. **Do ok. $2 \times f_{\text{Nyquista}}$ (200 kHz)** błąd spada gwałtownie wraz ze wzrostem częstotliwości próbkowania.
2. **Powyżej $2 \times f_{\text{Nyquista}}$** błąd praktycznie osiąga wartość zerową i dalszy wzrost częstotliwości próbkowania nie przynosi istotnej poprawy odwzorowania sygnału.

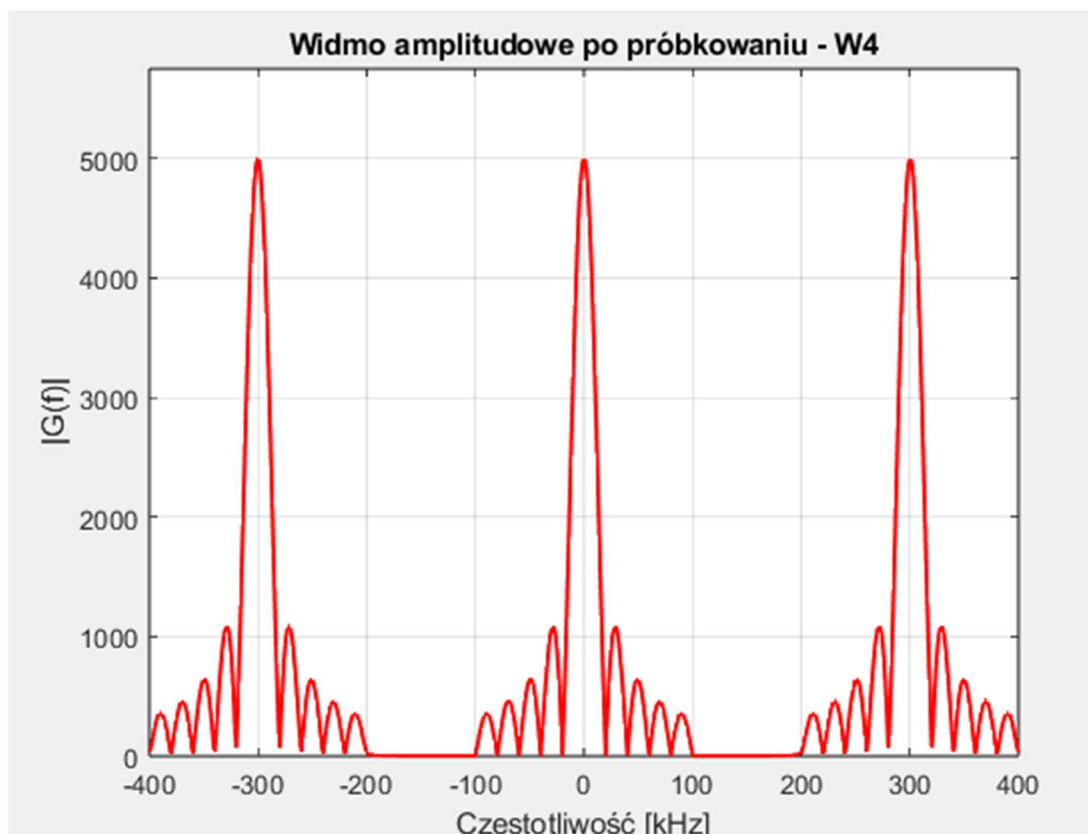
Wniosek: Ustawianie częstotliwości próbkowania powyżej dwukrotnej wartości Nyquista ($2 \times f_{\text{Nyquista}}$) nie jest uzasadnione, bo sygnał nie zyskuje na jakości, choć formalnie nie jest już zniekształcany co potwierdzają wykresy widm amplitudowych poniżej.



Rys. 13 Widmo amplitudowe dla $f_s = 200$ kHz.



Rys. 14 Widmo amplitudowe dla $f_s = 250$ kHz.



Rys. 15 Widmo amplitudowe dla $f_s = 300$ kHz.

3. Zadanie

W porównaniu z sygnałem z zadania 2, błąd średniokwadratowy dla sygnału wykładniczego osiąga mniejsze wartości i szybciej jego wartość zbliża się do zera.

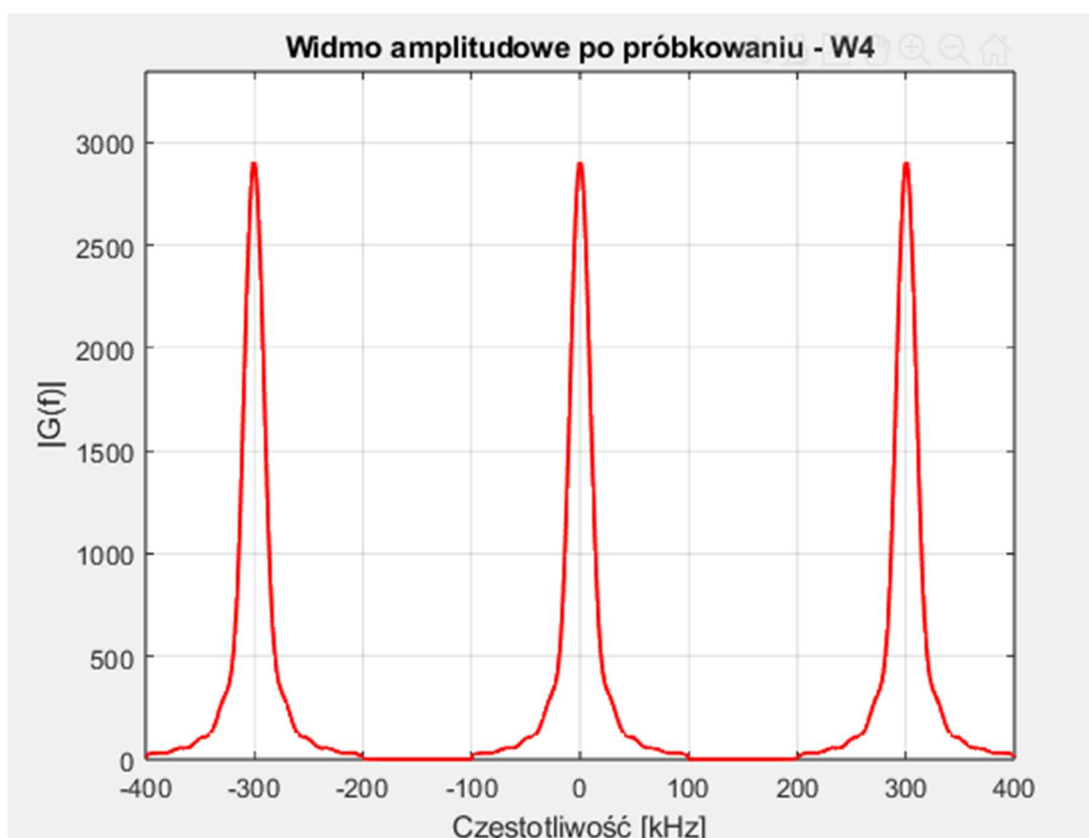
Tabela 2 Wartości błędu średniokwadratowego w zależności od częstotliwości próbkowania dla sygnału wykładniczego.

Częstotliwość próbkowania	Błąd średniokwadratowy
50	0,27362
75	0,18839
100	0,084317
125	0,0012833
150	0,00015244
175	0,000028105
200	4,836E-33
225	6,2139E-10

250	4,8665E-33
275	2,1284E-10
300	4,7152E-11



Rys. 16 Błąd średniokwadratowy w zależności od częstotliwości próbkowania dla sygnału wykładniczego.



Rys. 17 Widmo amplitudowe dla sygnału wykładniczy, przy częstotliwości próbkowania równej 300 kHz.

4. Zadanie

Aby błąd średniokwadratowy był bliski zera, mimo częstotliwości próbkowania niższej niż wymagana przez twierdzenie o próbkowaniu należy skorzystać z poniższych zależności. Kluczowe jest, by częstotliwość próbkowania była co najmniej około dwukrotnie większa od samej szerokości pasma (w tym wypadku szerokość pasma to $113 \text{ kHz} - 92 \text{ kHz} = 21 \text{ kHz}$). Częstotliwość próbkowania musi spełniać nierówność (gdzie f_L to dolna granica pasma, a f_H to górna granica):

$$\frac{2f_H}{n} \leq f_s \leq \frac{2f_L}{n-1}$$

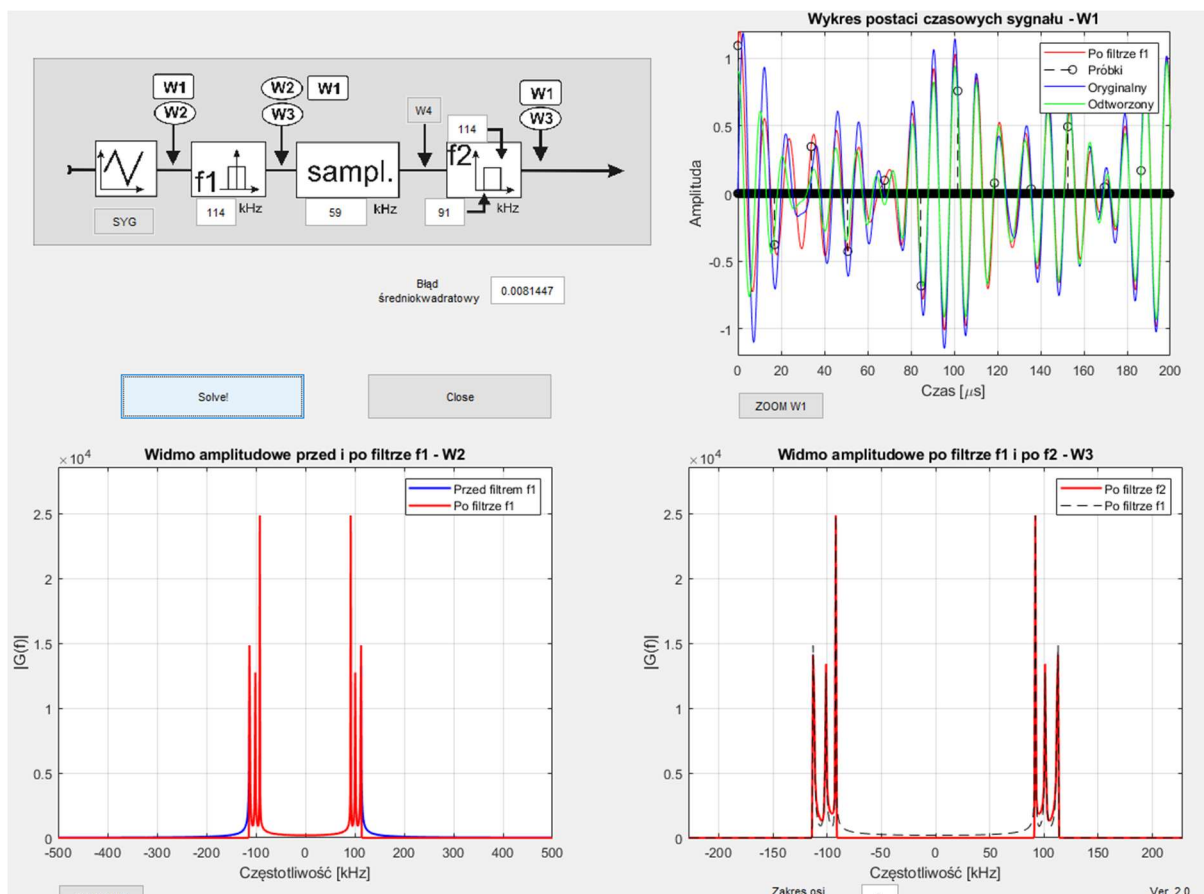
Dla n spełniającego zależność: $1 \leq n \leq \left\lfloor \frac{f_H}{f_H - f_L} \right\rfloor$

Dla n równego 4 otrzymujemy:

$$\frac{2 * 113 \text{ kHz}}{4} \leq f_s \leq \frac{2 * 92 \text{ kHz}}{4 - 1}$$

Otrzymujemy więc f_s należące do przedziału: $\langle 56,5 \text{ kHz}, 61,33 \text{ kHz} \rangle$

Dla f_s równego 59 kHz, oraz filtrów f_1 i f_2 ustawionych odpowiednio na wartości: 114 kHz oraz 91 kHz i 114 kHz. Dla takiego układu błąd średniokwadratowy wynosi 0.0081447.



Rys. 18 Ustawienia filtra i widma dla wartości z zadania 4

Spis treści

1. Zadanie	2
a).....	2
b)	2
c).....	3
d)	4
e).....	7
2. Zadanie	8
3. Zadanie	11
4. Zadanie	13

Spis rysunków:

Rys. 1 Widmo dla szerokości filtra $f_1 = 11$ kHz.	2
Rys. 2 Widma dla częstotliwości próbkowania 21 kHz.	3
Rys. 3 Widma dla częstotliwości próbkowania 22 kHz.	3
Rys. 4 Widmo amplitudowe po próbkowaniu.	4
Rys. 5 Błąd średniokwadratowy dla $0,5 * f_s$	4
Rys. 6 Błąd średniokwadratowy dla $0,9 * f_s$	5
Rys. 7 Błąd średniokwadratowy dla $1 * f_s$	5
Rys. 8 Błąd średniokwadratowy dla $1,2 * f_s$	6
Rys. 9 Błąd średniokwadratowy dla $2 * f_s$	6
Rys. 10 \sin^2 dla $f_i=22$ kHz i $f_s=44$ kHz	7
Rys. 11 \sin^2 dla $f_i=11$ kHz i $f_s=22$ kHz.	8
Rys. 12 Błąd średniokwadratowy w zależności od częstotliwości próbkowania dla pojedynczego impulsu prostokątnego.	9
Rys. 13 Widmo amplitudowe dla $f_s = 200$ kHz.	10
Rys. 14 Widmo amplitudowe dla $f_s = 250$ kHz.	10
Rys. 15 Widmo amplitudowe dla $f_s = 300$ kHz.	11

Spis tabel:

Tabela 1 Wartości błędu średniokwadratowego w zależności od częstotliwości próbkowania dla sygnału prostokątnego.	8
Tabela 2 Wartości błędu średniokwadratowego w zależności od częstotliwości próbkowania dla sygnału wykładniczego.	8