[Mat 3] - kolos 22L - gr. A

Zad. 1.

a)

1. **(2 pkt.)** Znajdź przestrzeń rozwiązań nad $\mathbb{R}$ następującego układu jednorodnego:

2

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - r_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{array}{c} \quad\quad\quad t_1 \quad\quad\quad t_2 \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$x_4 = 0$ $\quad$ $x_5 = t_2$ $\quad$ $x_3 = t_1$

$x_2 = -t_1$

$x_1 - t_1 + t_1 + t_2 = 0$ $\quad$ $x_1 = -t_2$ $\quad$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x_1 = -t_2 \\ x_2 = -t_1 \\ x_3 = t_1 \\ x_4 = 0 \\ x_5 = t_2 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = t_1 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$W = \mathcal{L}\left([0,-1,1,0,0],[-1,0,0,0,1]\right)$$

b)

2. **(1 pkt.)** Wykorzystując wynik z punktu 1. rozwiąż układ niejednorodny:

$$\begin{aligned} x_1 &+ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ x_1 &- x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 2 \\ x_1 &+ 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 = 2 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3+r_2}$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & t_1 & & t_2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$x_3 = t_1 \qquad x_4 = 0 \qquad x_5 = t_2$

$x_2 = -t_1$

$x_1 \cancel{-t_1} + \cancel{t_1} + 0 + t_2 = 2$

$x_1 = 2 - t_2$

$) \quad t_1, t_2 \in R$

Zad. 2

a)

Zad. 2

2 1. **(2 pkt.)** Znajdź wszystkie wektory 3-wymiarowej przestrzeni wektorowej nad ciałem $(Z_2, +_2, \cdot_2)$.

$x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\}$

$[0,0,0], [0,0,1], [0,1,0], [1,0,0], [1,1,0], [1,0,1], [0,1,1], [1,1,1]$

b)

2. **(1 pkt.)** Sprawdź, czy wielomiany $x^2 + x$, $x^2 + x + 1$ oraz $x + 1$ są liniowo niezależne w przestrzeni wielomianów $Z_2[x]$.

$\alpha(x^2+x) + \beta(x^2+x+1) + \gamma(x+1) = 0$

$(\alpha+\beta)x^2 + (\alpha+\beta+\gamma)x + (\beta+\gamma) = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 - r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$\gamma = 0$

$\beta = 0$

$\alpha = 0$

LINIOWO NIEZALEŻNY

Zad. 3

Zad. 3 Dane jest przekształcenie liniowe $F : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ takie, że

$$F([x_1, x_2, x_3, x_4]) = [x_1 + x_2 + 2x_3, -2x_1 + 2x_2 + 4x_4, x_1 + x_3 - x_4].$$

1. **(1 pkt.)** Wyznacz macierz tego przekształcenia w bazach standardowych.

bazy standardowe: $[1,0,0,0], [0,1,0,0], [0,0,1,0], [0,0,0,1]$

$F([1,0,0,0]) = [1,-2,1]$

$F([0,1,0,0]) = [1,2,0]$

$F([0,0,1,0]) = [2,0,1]$

$F([0,0,0,1]) = [0,4,-1]$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

b)

2. **(2 pkt.)** Wyznacz Ker$F$ oraz ImF. Podaj ich bazy i wymiary.

KerF: $A \cdot v = 0$ $\qquad v = [x_1, x_2, x_3]$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 + 2r_1} \begin{array}{cccc|c} & & t_1 & t_2 & \\ \hline \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{-1} & \cancel{-1} & \cancel{-1} & \cancel{0} \end{array}\right]$$

$x_3 = t_1$

$x_4 = t_2$

$x_2 = -t_1 - t_2$

$x_1 - t_1 - t_2 + 2t_1 = 0 \Rightarrow x_1 = -t_1 + t_2$

$$v = [-t_1 + t_2, -t_1 - t_2, t_1, t_2] = t_1[-1, -1, 1, 0] + t_2[1, -1, 0, 1]$$

$$\mathrm{Ker}F = \mathcal{L}(\underbrace{[-1,-1,1,0], [1,-1,0,1]}_{\text{baza}}) \qquad \dim \mathrm{Ker}F = 2$$

$\operatorname{Im}F = \mathcal{L}([1,-2,1], [1,2,0])$

$\dim \operatorname{Im}F = 2$

$\dim \operatorname{Ker}F + \dim \operatorname{Im}F = 4$ ✓

c) 3. **(1 pkt.)** Czy $v = [3,-5,1,3] \in \operatorname{Ker}F$? Czy $w = [1,6,-1] \in \operatorname{Im}F$? Odpowiedzi uzasadnij.

$$\alpha[-1,-1,1,0] + \beta[1,-1,0,1] = [3,-5,1,3]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$\beta = 3$

$\alpha = 1$

$-\alpha - \beta = -5$

$-1-3=-4 \neq -5$ $\underline{\text{NIE}}$

$$\alpha[1,-2,1] + \beta[1,2,0] = [1,6,-1]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

$\alpha = -1$

$2 + 2\beta = 6$

$\beta = 2$

$L = -1 + 2 = 1 = P$ ✓

Zad. 4

Zad. 4 Dane jest przekształcenie liniowe $F : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ takie, że

$$F([x,y,z]) = [-2x+4y+2z, 2y+2z, x-y+z].$$

a) 2 1. **(2 pkt.)** Wyznacz wszystkie wartości własne i podprzestrzenie wektorów własnych tego przekształcenia.

baza st.: $[1,0,0], [0,1,0], [0,0,1]$

$F([1,0,0]) = [-2,0,1]$

$F([0,1,0]) = [4,2,-1]$ $\qquad A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$F([0,0,1]) = [2,2,1]$

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda Id) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 4 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+1} \cdot (-2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2-\lambda & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-2-\lambda)((2-\lambda)(1-\lambda)+2) + (8-4+2\lambda) = (-2-\lambda)(2-3\lambda+\lambda^2+2) + 4+2\lambda =$$

$$= -(\lambda+2)[\lambda^2-3\lambda+4-2] = -(\lambda+2)[\lambda^2-3\lambda+2] = -(\lambda+2)(\lambda-2)(\lambda-1)$$

$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 2 \qquad \lambda_3 = -2$

dla $\lambda_1 = 1$

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3 + 3r_1}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{ccc|c} & & t & \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{0} \end{array}\right]$$

$x_2 = -2t$

$x_1 = x_2 = -2t$

$V = [-2t, -2t, t] = t[-2, -2, 1]$

$N_1 = \mathcal{L}([-2, -2, 1])$

dla $\lambda = 2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -4 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -4 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2 + 4r_1} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & t & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{0} \end{array}\right] \end{array}$$

$x_3 = 0 \qquad x_2 = t \qquad x_1 = t$

$$u = [t, t, 0] = t[1, 1, 0]$$

$$N_2 = \mathcal{L}([1, 1, 0])$$

dla $\lambda = -2$

$$\begin{array}{ccc|c} & & t & \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \cancel{0} & \cancel{4} & \cancel{2} & \cancel{0} \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

$$x_3 = t = 2k$$

$$2x_2 = -t$$

$$x_2 = -\frac{t}{2} = -k$$

$$x_1 + k + 6k = 0$$

$$x_1 = -7k$$

$$w = [-7k, -k, 2k] = [-7, -1, 2] \cdot k$$

$$N_{-2} = \mathcal{L}([-7, -1, 2])$$

b) **(2 pkt.)** Wyznacz bazę $\mathcal{C}$ przestrzeni $\mathbb{C}^3$ składającą się z maksymalnej ilości wektorów własnych przekształcenia F. Podaj macierze $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(F)$ oraz $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\mathrm{Id})$, gdzie $\mathcal{B}$ jest bazą standardową $\mathbb{C}^3$.

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -7 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 6 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 + \frac{r_1}{2}]{r_2 - r_1} \begin{bmatrix} -2 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Są liniowo niezależne

zatem:

$$C = \mathcal{L}\underbrace{\left([-2,-2,1],[1,1,0],[-7,-1,2]\right)}_{\text{baza}}$$

$$M_C^C(F) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$M_B^C(\mathrm{Id}_V) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & -7 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3 + \frac{r_1}{2}]{r_2 - r_1}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & -7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & -7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3 \cdot \frac{1}{6}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & -7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[r_1 + 7r_3]{r_2 + 3r_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{7}{6} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_1 - r_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \end{array}\right]$$

$$M_B^C\left(\mathrm{Id}_V\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \end{bmatrix}$$