Matematyka 1. Egzamin.

- Proszę rozwiązania zadań zapisać odręcznie, a następnie przesłać ich skan lub zdjęcie.
- W dowolnym miejscu pracy proszę zamieścić oświadczenie o treści
  Oświadczam, że niniejsza praca stanowiąca podstawę do uznania osiągnięcia efektów uczenia się z przedmiotu Matematyka 1 została wykonana przeze mnie samodzielnie
  i podpisać je czytelnie imieniem i nazwiskiem oraz numerem albumu.
  Prace bez załączonego oświadczenia nie będą sprawdzane.
- Każdy wysłany plik proszę podpisać wg schematu: $Mat1\_Egz1\_X\_Nazwisko\_Y$
  X - pierwsza litera imienia
  Y - nr wysyłanego pliku (jeśli więcej niż jeden)
- Po przesłaniu rozwiązań w ramach Zadania niezwłocznie po egzaminie proszę umieścić wydruki rozwiązań i oświadczenia w swoim Notesie przedmiotowym w zakładce Egzamin 1 (każde zadanie w oddzielnej Sekcji) w formie niewymagającej edytowania (rozpakowywania, zmniejszania, powiększania, przesuwania, obracania itp.).

Zad. 1 (10 pkt.)

1. Na płaszczyźnie zespolonej naszkicuj zbiór

$$D = \left\{ z \in \mathbb{C} : \quad |z - 1 + i| \leq 2 \quad \wedge \quad \frac{\pi}{3} < \arg(z-2) < \frac{2\pi}{3} \right\}$$

2. W zbiorze liczb zespolonych rozwiąż równanie

$$(z^2 - 4z + 5) \cdot \left(z^2 + 2 \cdot \frac{(1-i)^{40}}{(-\sqrt{3}+i)^{21}} \right) = 0$$

Zad. 2 (10 pkt.)

a) Stosując algorytm Euklidesa znaleźć przynajmniej jedno rozwiązanie w liczbach całkowitych x, y równania

$$\mathrm{NWD}(1824, 1296) = 1824x + 1296y$$

b) Obliczyć $\varphi(28^n)$ dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 1$, gdzie φ – funkcja Eulera.

c) Ile jest wszystkich liczb w zbiorze $\{1, 2, ..., 1000\}$ nie podzielnych ani przez 5, ani przez 8.

Zad. 3 (10 pkt.)

Niech $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 5 & 1 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in S_7$

a) Zapisać σ jako złożenie rozłącznych cykli. Policzyć $\mathrm{sgn}(\sigma)$.

b) Znaleźć permutację $\pi \in S_7$ taką, że $\pi \circ \sigma^3 = \mathrm{id}$,
gdzie σ^k oznacza k-krotne złożenie σ, id – oznacza identyczność.

c) Ile różnych ciągów znaków długości 9 można uzyskać z liter A,A,A,B,B,C,C,D,D

Zad. 4 (12 pkt.)

1. Znaleźć wyraz ogólny ciągu określonego rekurencyjnie: $a_0 = 3$, $a_1 = 22$ oraz $a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2}$, dla $n \geq 2$.

2. Sprawdzić indukcyjnie, że wyraz ogólny ciągu z punktu 1. został policzony poprawnie.

3. Znaleźć wyraz ogólny ciągu, którego funkcją tworzącą jest $f(x) = \dfrac{3 + 13x}{1 - 3x - 4x^2}$.

Zad. 5 (8 pkt.)

1. Narysować drzewo o podanym kodzie Prüfera: $(6, 6, 6, 6)$.

2. Pięciu specjalistów s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 jest członkami pięciu zespołów: $z_1 = \{s_2, s_4\}$, $z_2 = \{s_1, s_4\}$, $z_3 = \{s_2, s_3, s_5\}$, $z_4 = \{s_2, s_3, s_4\}$ oraz $z_5 = \{s_1, s_3, s_5\}$. Jeden specjalista z każdego zespołu ma być reprezentantem komisji. Czy jest możliwe, aby z każdego zespołu wysłać innego specjalistę? Jeśli tak wskazać przykładową komisję, jeśli nie wyjaśnić dlaczego jest to niemożliwe.

3. Dla jakich $m, n \in \mathbb{N}$ graf pełny dwudzielny $K_{m,n}$ jest hamiltonowski?

Powodzenia!