Rozwiązanie zadania

Część a) Liczba rozwiązań w zależności od parametru b

Dany jest układ równań:

$$\begin{cases} x + (2-b)y + z = 0, \\ x + 2y + (1-b)z = b, \\ (1-b)x + 2y + z = b. \end{cases}$$

Macierz główna A i macierz rozszerzona $[A|B]$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2-b & 1 \\ 1 & 2 & 1-b \\ 1-b & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad [A|B] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2-b & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1-b & b \\ 1-b & 2 & 1 & b \end{array}\right).$$

Po redukcji do postaci schodkowej otrzymujemy:

$$[A|B] \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2-b & 1 & 0 \\ 0 & b & -b & b \\ 0 & 0 & b(4-b) & b(b-2) \end{array}\right).$$

- **Dla** $b \neq 0$ **i** $b \neq 4$: Rząd $A = 3$, rząd $[A|B] = 3$ - **układ ma dokładnie jedno rozwiązanie**.
- **Dla** $b = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad [A|B] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

  Rząd $A = 1$, rząd $[A|B] = 1$ - **układ ma nieskończenie wiele rozwiązań**.

- **Dla** $b = 4$:

$$[A|B] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right).$$

  Rząd $A = 2$, rząd $[A|B] = 3$ - **układ nie ma rozwiązań**.

Podsumowanie liczby rozwiązań

Wartość parametru b	Liczba rozwiązań	Warunek
$b \in \mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$	1	dokładnie jedno rozwiązanie
$b = 0$	∞	nieskończenie wiele rozwiązań
$b = 4$	0	brak rozwiązań

Część b) Rozwiązanie dla $b \in B$

Zbiór B to wartości parametru b, dla których układ ma nieskończenie wiele rozwiązań:

$$B = \{0\}.$$

Dla $b = 0$ układ redukuje się do równania:

$$x + 2y + z = 0.$$

Rozwiązanie ogólne:

$$\begin{cases} x = -2s - t \\ y = s \\ z = t \end{cases} \quad \text{dla} \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Interpretacja: Rozwiązanie zależy od dwóch parametrów s i t, co odpowiada przestrzeni rozwiązań wymiaru 2.

$$\boxed{\begin{cases} x = -2s - t \\ y = s \\ z = t \end{cases} \qquad s, t \in \mathbb{R}}$$