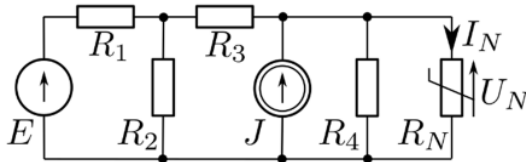


**Zad. 1**

Obliczyć punkt pracy ( $U_N$ ,  $I_N$ ) rezystancji nieliniowej.



$$\begin{aligned} E &= 18 \text{ V} \\ J &= 2 \text{ mA} \\ R_1 &= 6 \text{ k}\Omega \\ R_2 &= R_4 = 3 \text{ k}\Omega \\ R_3 &= 4 \text{ k}\Omega \end{aligned}$$

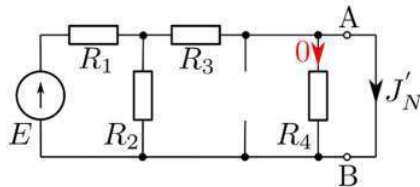
$$\begin{aligned} R_N: \\ u_N &= a i_N |i_N| \\ a &= 0.5 \text{ V}/(\text{mA})^2 \end{aligned}$$

Układ na lewo od  $R_N$  należy sprowadzić do źródła zastępczego (w tym wypadku łatwiej wyznaczyć prąd Nortona), a następnie rozwiązać prosty układ nieliniowy ( $J_N$ ,  $R_w$ ,  $R_N$ ). Konwencja jednostek {V, mA, kΩ}

**Wyznaczanie  $J_N$** 

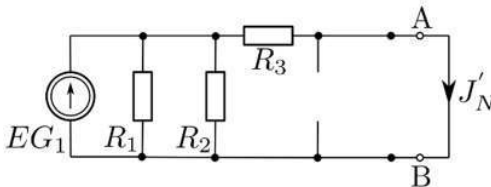
W wyznaczaniu  $J_N$  można użyć zasady superpozycji:

Dla aktywnego źródła E, mamy schemat:



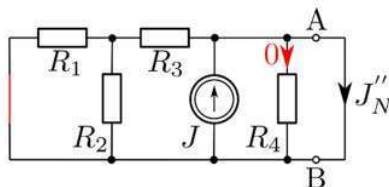
Tu najkorzystniej jest wykonać zamianę źródła rzeczywistego ( $E$ ,  $R_1$ ) na równoważne zaciskowo źródło prądowe. Opór  $R_4$  zwarty – można usunąć.

Obliczenie składowej  $J'_N$  sprowadza się do wykorzystania trójgałęźnego dzielnika prądowego (z wykorzystaniem konduktancji):



$$\begin{aligned} J'_N &= E G_1 \frac{G_3}{G_1 + G_2 + G_3} = \\ &= 18 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}} = 3 \cdot \frac{3}{9} = 1 \text{ mA} \end{aligned}$$

Dla aktywnego źródła J obliczenie składowej  $J''_N$  jest trywialne, gdyż cały prąd ze źródła płynie przez zwarcie między węzłami A i B.

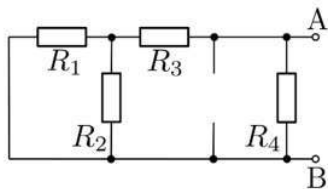


$$J''_N = J = 2 \text{ mA}$$

Prąd Nortona ma więc wartość  $J_N = J'_N + J''_N = 3 \text{ mA}$

**Wyznaczanie  $R_w$** 

Aby wyznaczyć  $R_w$  źródła należy wyłączyć wszystkie źródła niezależne. Ponieważ zostały same opory (nie ma źródeł sterowanych), wystarczy stosować własności łączenia oporów.



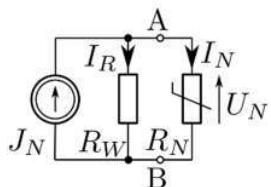
$$R_W = ((R_1 || R_2) + R_3) || R_4 =$$

$$= ((6 || 3) + 4) || 3 = (2 + 4) || 3 =$$

$$= 2 \text{ k}\Omega$$

### Wyznaczenie punktu pracy

Pozostało rozwiązanie uproszczonego układu nieliniowego z wykorzystaniem równania elementu:



$$J_N - I_R - I_N = 0$$

$$U_N = R_W I_R$$

$$U_N = a I_N^2$$

- bo jest tylko jedno źródło,  
które wywoła dodatni prąd  $i_N$ ,  
 $U_N > 0$

$$J_N - I_R - I_N = 0$$

$$a I_N^2 = R_W I_R \rightarrow I_R = \frac{a}{R_W} I_N^2$$

$$J_N - \frac{a}{R_W} I_N^2 - I_N = 0$$

$$I_N^2 + 4 I_N - 12 = 0$$

$$\Delta = 64$$

$$U_N = 2 \text{ V (dla } U_N > 0)$$

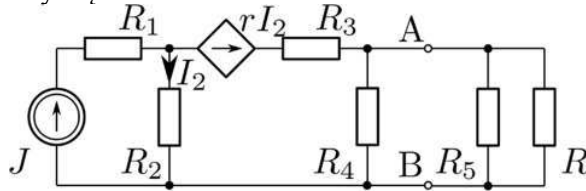
$$I_N = J_N - \frac{U_N}{R_W}$$

$$I_N = 3 - \frac{2}{2} = 2 \text{ mA}$$

Punkt pracy wynosi: (2 V, 2 mA)

**Zad. 2**

Obliczyć wartość oporu  $R$  dla której w obciążeniu (na prawo od zacisków AB) wydzielą się największa moc. Obliczyć tę moc.

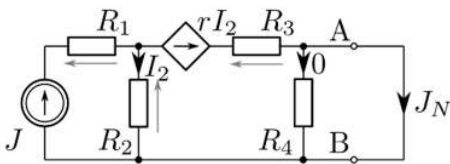


$$\begin{aligned} J &= 1,6 \text{ mA} \\ r &= 4 \text{ V/mA} \\ R_1 &= 3 \text{ k}\Omega \\ R_2 &= 1 \text{ k}\Omega \\ R_3 &= 3 \text{ k}\Omega \\ R_4 &= 8 \text{ k}\Omega \\ R_5 &= 20 \text{ k}\Omega \end{aligned}$$

Układ na lewo od AB należy sprowadzić do źródła zastępczego (w tym wypadku łatwiej wyznaczyć źródło Nortona), a następnie dobrać taką wartość oporu  $R$ , aby opór wewnętrzny  $R_w$  źródła zastępczego był równy oporowi zastępczemu obciążenia ( $R_5 \parallel R$ ). Następnie należy wyznaczyć moc wydzielaną w obciążeniu. Konwencja jednostek  $\{V, \text{mA}, \text{k}\Omega\}$ .

**Wyznaczanie  $J_N$** 

Wartość  $J_N$  nie jest niezbędna do dopasowania obciążenia, ale będzie potrzebna do obliczenia mocy. W celu wyznaczenia  $J_N$  należy zamienić obciążenie źródła na zwarcie. Prąd płynący tym zwarcie ma szukaną wartość  $J_N$ . Opór  $R_4$  jest zwarty, więc można go pominąć. W układzie mamy jeden istotny węzeł prądowy i jeden istotny obwód napięciowy (oczko ze źródłem  $J$  można tu pominąć bo wniesie jedynie zbędną informację o napięciu na źródle  $J$ , również opór  $R_1$  nie wpływa na  $J_N$ ).



$$\begin{aligned} J - I_2 - J_N &= 0 \\ R_2 I_2 + r I_2 - R_3 J_N &= 0 \end{aligned}$$

$$I_2 = J_N \frac{R_3}{r + R_2}$$

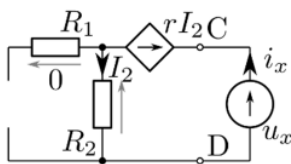
$$J = J_N \frac{R_3}{r + R_2} + J_N = J_N \frac{r + R_2 + R_3}{r + R_2}$$

$$J_N = J \frac{r + R_2}{r + R_2 + R_3} = 1,6 \cdot \frac{4 + 1}{4 + 1 + 3} = 1 \text{ mA}$$

**Wyznaczanie  $R_w$** 

Ponieważ w obwodzie występuje źródło sterowane, nie wystarczy łączenie oporów. Należy wyłączyć źródło niezależne  $J$ , a następnie pobudzić tak uzyskany dwójnik zewnętrznym źródłem i obliczyć z równań Kirchhoffa stosunek napięcia zaciskowego do prądu.

Obliczenia można uprościć wydzielając część ze źródłem sterowanym (można to zrobić, jeśli wielkość sterująca znajdzie się w wydzielonym obwodzie) i obliczyć jej rezystancję wewnętrzną  $R'_w = u_x / i_x$ . Następnie, tak otrzymaną rezystancję można połączyć z oporami  $R_3$  i  $R_4$ .



Mamy tylko jedno oczko i wspólny prąd  $i_x$

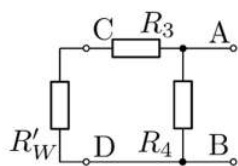
$$i_x = I_2$$

$$R_2 I_2 + r I_2 - u_x = 0$$

$$(R_2 + r) i_x = u_x$$

$$R'_W = \frac{u_x}{i_x} = R_2 + r = 5 \text{ k}\Omega$$

Teraz pozostało obliczenie  $R_W$  całego źródła:

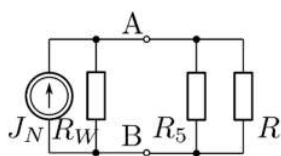


$$R_W = (R'_W + R_3) \parallel R_4$$

$$= (5 + 3) \parallel 8 = 4 \text{ k}\Omega$$

### Dopasowanie obciążenia

Wartość  $R$  zdecydowanie łatwiej znaleźć wykorzystując przewodności, ze względu na równoległy charakter obciążenia  $R_o = R_5 \parallel R$ .



Dopasowanie nastąpi kiedy  $R_W = R_o$ ,  
więc także  $G_W = G_o$

$$G_W = G_5 + G \rightarrow G = G_W - G_5$$

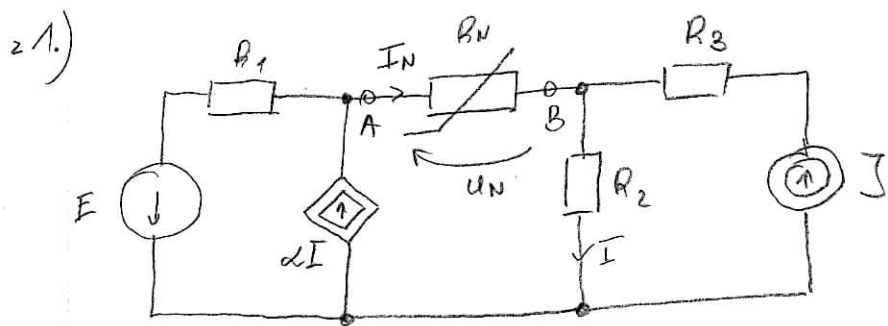
$$R = \frac{1}{G_W - G_5} = \frac{1}{\frac{1}{4} - \frac{1}{20}} = \frac{20}{4} = 5 \text{ k}\Omega$$

### Wyznaczanie mocy w obciążeniu

Aby wyznaczyć moc w dopasowanym obciążeniu, można skorzystać ze wzoru na moc dysponowaną źródła:

$$P_d = \frac{J_N^2}{4G_W} = \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{4}} = 1,25 \text{ mW}$$

Można też wyznaczyć prąd w obciążeniu (traktowanym jako całość  $R_o$ ) oraz napięcie na jego zaciskach i pomnożyć je przez siebie.



PEŁP K2  
Wyznaczyć punkt pracy  
oporu nieliniowego  $R_N$ :  
( $U_N, I_N$ ).

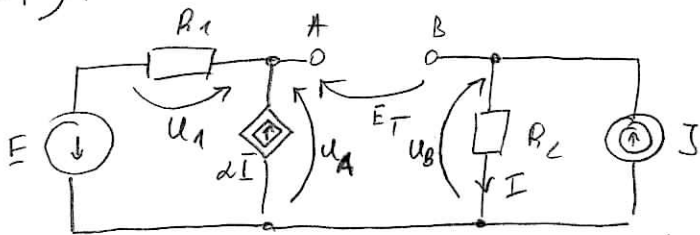
Dane:  $R_1 = 16\Omega$ ,  $R_2 = 2k\Omega$ ,  $R_3 = 3k\Omega$ ,  $J = 4mA$ ,  $E = 5V$ ,  $\alpha = \frac{1}{2} \frac{A}{A}$

$R_N$ :  $I_N = aU_N^3 + bU_N^2 + cU_N$ ;  $a = 1 \frac{mA}{V^3}$ ,  $b = 1 \frac{mA}{V^2}$ ,  $c = 4 \frac{mA}{V}$

W pierwszej kolejności należy zauważyć, że opór  $R_3$  jest połączony szeregowo z idealnym źródłem prądowym – możemy go wstępnie zignorować.

W drugim kroku wyznaczamy parametry źródła zastępczego dla obwodu leżącego „na rezystorze” właściwie AB.

$E_T$



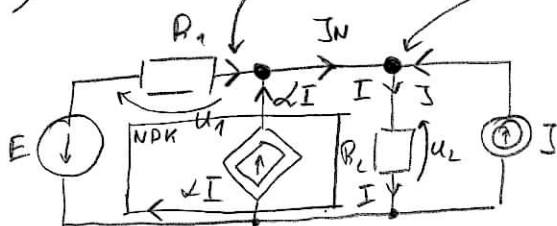
$$E_T = U_A - U_B$$

$$U_B = J \cdot R_2 = 4mA \cdot 2k\Omega = 8V$$

$$U_A = -E + U_1 = -E + \alpha I R_1 = -E + \alpha J \cdot R_1 = -5V + \frac{1}{2} \cdot 4mA \cdot 16\Omega = -5V + 2V = -3V$$

$$E_T = -3V - 8V = -11V$$

$J_N$



NPK:  $-E - U_1 - U_2 = 0$

$$-E - R_1 [I(1-\alpha) - J] - R_2 I = 0$$

$$-E - I R_1 (1-\alpha) + J R_1 - I R_2 = 0$$

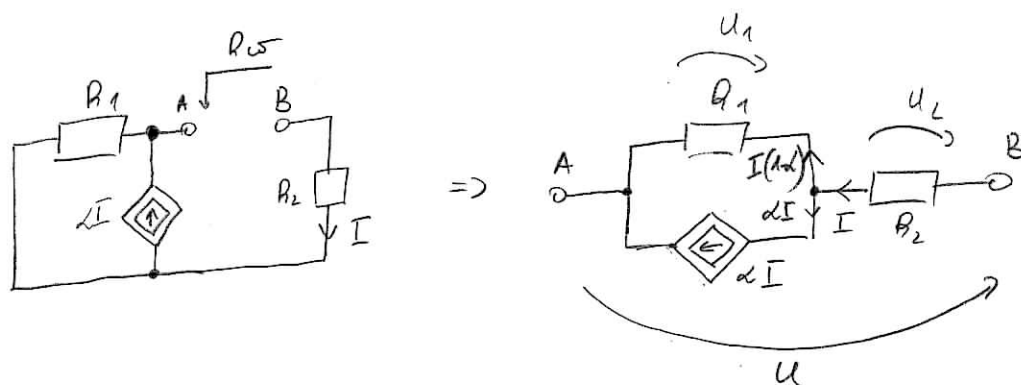
$$-E + J R_1 = I [R_1 (1-\alpha) + R_2]$$

$$I = \frac{J R_1 - E}{R_1 (1-\alpha) + R_2} = \frac{4mA \cdot 16\Omega - 5V}{16\Omega \cdot \frac{1}{2} + 2k\Omega} = \frac{4V - 5V}{\frac{5}{2}k\Omega} = -\frac{2}{5}mA$$

$$J_N = I - J = -\frac{2}{5}mA - 4mA = -\frac{22}{5}mA$$

$$R_{\omega}) \quad R_{\omega} = \frac{E_I}{I_N} = \frac{-11 \text{ V}}{-\frac{22}{5} \text{ mA}} = \underline{\underline{\frac{5}{2} \text{ k}\Omega}}$$

Dla sprzeczki wyznaczmy jeszcze  $R_{\omega}$  analizując schemat:

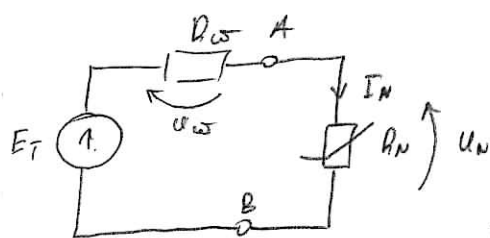


$$R_{\omega} = \frac{U}{I}$$

$$U = U_1 + U_2 = I \cdot (1-\alpha) \cdot R_1 + I R_2 = I \cdot [(1-\alpha) \cdot R_1 + R_2] \Rightarrow \frac{U}{I} = R_1(1-\alpha) + R_2 = \checkmark$$

$$= 1 \text{ k}\Omega \cdot \frac{1}{2} + 2 \text{ k}\Omega = \underline{\underline{\frac{5}{2} \text{ k}\Omega}}$$

Niech teraz zastosować twierdzenie Thevenina:



$$E_T - U_{\omega} - U_N = 0$$

$$U_{\omega} = I_N \cdot R_{\omega} = (\alpha \cdot U_N^3 + b U_N^2 + c U_N) \cdot R_{\omega} =$$

$$= \alpha U_N^3 R_{\omega} + b U_N^2 R_{\omega} + c U_N R_{\omega}$$

$$\{ \text{V, mA, k}\Omega \}$$

$$-11 - \frac{5}{2} U_N^3 - \frac{5}{2} U_N^2 - 10 U_N - U_N = 0$$

$$\frac{5}{2} U_N^3 + \frac{5}{2} U_N^2 + 11 U_N + 11 = 0 \quad / \cdot 2$$

$$5 U_N^3 + 5 U_N^2 + 22 U_N + 22 = 0$$

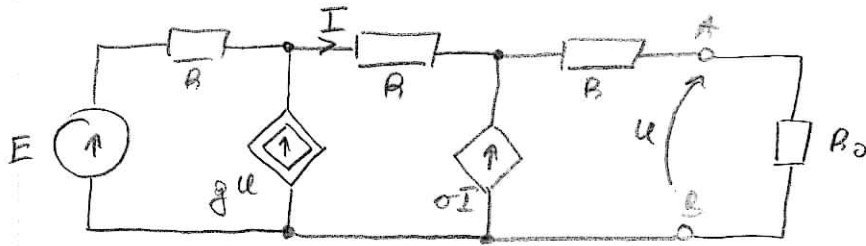
↑  
dzieląc wyrazem wolnego:  $\pm 22, \pm 11, \pm 2, \pm 1$ .

$$5 U_N^2 (U_N + 1) + 22 (U_N + 1) = 0$$

$$(5 U_N^2 + 22) (U_N + 1) = 0 \rightarrow \text{Jeden pierwiastek oczywisty: } \underline{\underline{U_N = -1 \text{ V}}}$$

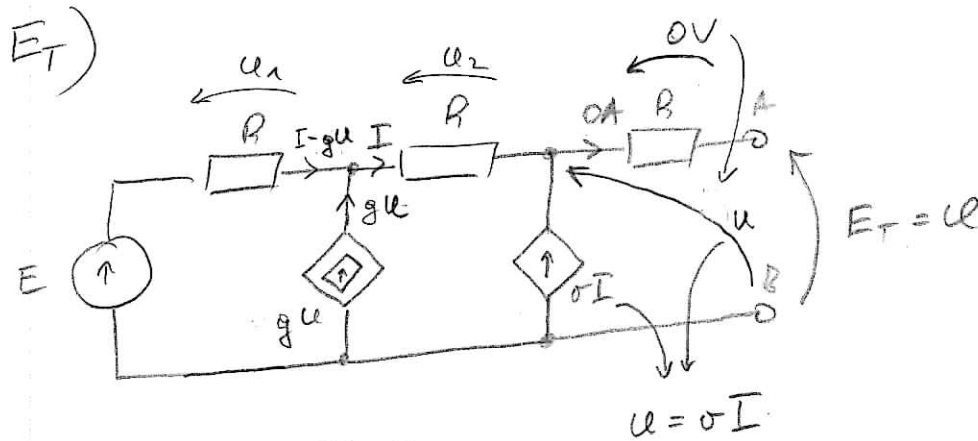
$$\underline{\underline{I_N = (-1)^3 + (-1)^2 + 4 \cdot (-1) = -4 \text{ mA}}}$$

22) Wyznaczyć wartość oporu  $R_0$ , dla którego wydzielisz w nim największą moc. Obliczyć tę moc.



$$\begin{aligned} E &= 1V \\ R &= 1\Omega \\ g &= \frac{1}{2}S \\ \sigma &= \frac{1}{4}S \end{aligned}$$

W pierwszym kroku należy wyznaczyć parametry źródła zastępczego dla obwodu na lewo od zacisków AB.

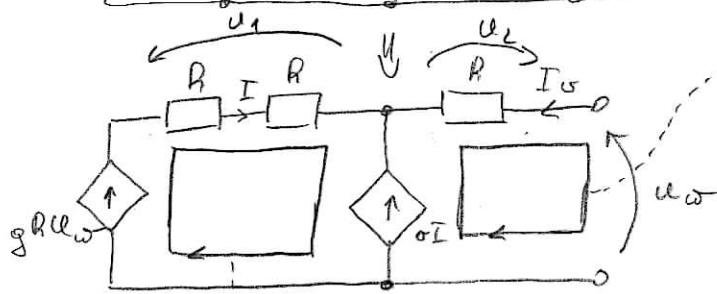
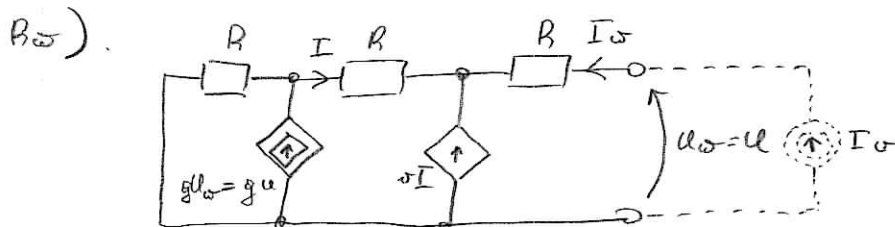


$$E - U_1 - U_2 - \sigma I = 0$$

$$E - I(R(1 - g\sigma)) - IR - I\sigma = 0$$

$$I = \frac{E}{R + \sigma + R(1 - g\sigma)} \rightarrow E_T = U = \sigma I = \frac{E\sigma}{R + \sigma + R(1 - g\sigma)} = \frac{1V \cdot \frac{1}{4}S}{(1 + \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{3}{4})\Omega} =$$

$$= 1V \cdot \frac{\frac{1}{4}}{\frac{9}{4}} = \underline{\underline{\frac{2}{9}V}}$$



$$gRU_\omega - U_1 - \sigma I = 0 \Rightarrow gRU_\omega - 2IR - \sigma I = 0 \Rightarrow I = \frac{gR}{2R + \sigma} \cdot U_\omega$$

$$\sigma I + U_2 - U_\omega = 0 \Rightarrow \sigma I + RI_\omega - U_\omega = 0$$

$$U_\omega \left( 1 - \frac{gR\sigma}{2R + \sigma} \right) = I_\omega R$$

$$\frac{U_\omega}{I_\omega} = R_\omega = \frac{R}{2R + \sigma - gR\sigma} =$$

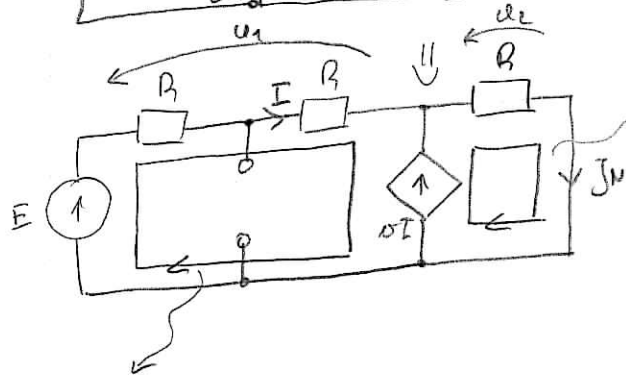
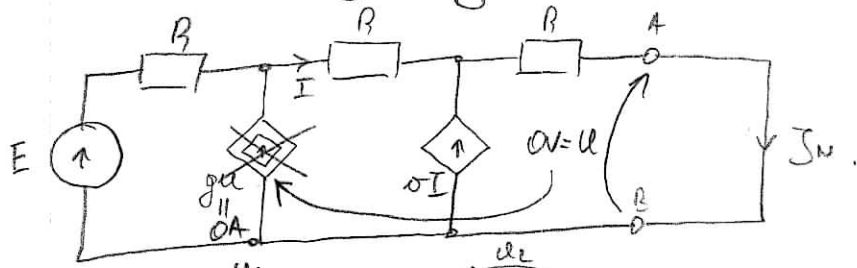
$$= \frac{R(2R + \sigma)}{2R + \sigma - gR\sigma} = \frac{1\Omega \cdot \frac{5}{4}}{(2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4})\Omega} =$$

$$= \frac{\frac{5}{4}\Omega}{\frac{9}{4}} = \underline{\underline{\frac{10}{9}\Omega}}$$



$$\underline{\underline{I_N = \frac{E_T}{R_W} = \frac{\frac{2}{5} V}{\frac{10}{5} \Omega} = \frac{2}{10} A}}$$

Dla pewności wykonamy  $I_N$  analizę siłową:



$$\sigma I = u_2$$

$$\sigma I = R I_N$$

$$\underline{\underline{I_N = I \cdot \frac{\sigma}{R} = E \cdot \frac{\sigma}{R(2R+\sigma)} = 1V \cdot \frac{1/5}{10 \cdot \frac{5}{5}} = \frac{1}{5} A}}$$

$$E - u_1 - \sigma I = 0 \Rightarrow E - 2RI - \sigma I = 0 \Rightarrow I = \frac{E}{2R+\sigma}$$

$$= \frac{1}{5} A$$

Zakładając, że wagi nie sposób sterowanie źródła prądowego wykonanie  $I_N$  było niefortunne.

Z warunku nie dopasowania:

$$R_0 = R_W \Rightarrow \underline{\underline{R_0 = \frac{10}{5} \Omega}}$$

W etapie moc wydzielona w  $R_0$  równa jest mocy dysypowanej źródła:

$$P_{R_0} = P_{dysp} = \frac{E_T^2}{4R_W} = \frac{(\frac{1}{5} V)^2}{10 \cdot \frac{10}{5} \Omega} = \frac{1}{90} W$$