IMIĘ NAZWISKO . . . . sala ....

Egzamin Mat3/I 22.06.22

1.	2.	3.	4.	5.	$\sum_E$	$\sum_{ćw+pr}$	$\sum$	Ocena

1. (13 pkt.) Przekształcenie liniowe $F : R_3[x](\mathbb{R}) \to R^4(\mathbb{R})$ dane jest wzorem
$$F\left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right) = [2a - c,\ b - 2d,\ a + 2c,\ 2a + 2b + c - 4d].$$
   1. (4 pkt.) Wyznacz macierz $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)$ przekształcenia F w bazach $\mathcal{A} = (x^3, x^2, x, 1)$ i $\mathcal{B} = ([1, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0], [0, 0, 1, 0], [0, 0, 0, 1])$.
   2. (5 pkt.) Wyznacz bazę i wymiar $\operatorname{Ker} F$.
   3. (4 pkt.) Wyznacz bazę i wymiar $\operatorname{Im} F$.
2. (13 pkt.) Dana jest macierz $A \in M_{3\times4}(\mathbb{Z}_5)$ taka, że
$$A = \begin{bmatrix} a & a & 2 & 0 \\ 1 & 4 & a & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$
   1. (5 pkt.) Wyznacz rząd macierzy A w zależności od parametru $a \in \mathbb{Z}_5$.
   2. (5 pkt.) Dla parametru a takiego, że rząd macierzy A jest najmniejszy, podaj bazę przestrzeni rozwiązań jednorodnego układu równań $AX = 0$.
   3. (3 pkt.) Dla wybranego w poprzednim podpunkcie parametru a podaj przykład macierzy $B \in M_{3\times1}(\mathbb{Z}_5)$ takiej, że układ równań $AX = B$ jest sprzeczny i uzasadnij swój wybór.
3. (13 pkt.) Przekształcenie liniowe $F : C^3(\mathbb{C}) \to C^3(\mathbb{C})$ w bazie standardowej $\mathcal{E} = ([1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 1])$ ma macierz
$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(F) = \begin{bmatrix} i & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
   1. (6 pkt.) Wyznacz wartości własne i odpowiadające im wektory własne przekształcenia F.
   2. (3 pkt.) Wyznacz bazę $\mathcal{C}$ przestrzeni $C^3(\mathbb{C})$, w której F ma postać diagonalną.
   3. (4 pkt.) Wyznacz macierze $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(F)$, $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_{C^3(\mathbb{C})})$ oraz $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{C}}(\mathrm{id}_{C^3(\mathbb{C})})$.
4. (13 pkt.) Dana jest grupa $(Z_{21}^*, \cdot_{21})$.
   1. (3 pkt.) Czy w grupie $(Z_{21}^*, \cdot_{21})$ istnieje element rzędu 5? Odpowiedź proszę uzasadnić.
   2. (5 pkt.) Uzasadnij, że $H = \{1, 8, 13, 20\}$ jest podgrupą grupy $(Z_{21}^*, \cdot_{21})$. Czy isnieje ciało $(F, +, \cdot)$ takie, że $(F^*, \cdot)$ jest izomorficzna z grupą $(H, \cdot_{21})$? Odpowiedź proszę uzasadnić.
   3. (5 pkt.) Wskaż elementy grupy ilorazowej grupy $(Z_{21}^*, \cdot_{21})$ przez relację wyznaczoną przez podgrupę H. Zapisz tabelkę działania w otrzymanej grupie ilorazowej.
5. (13 pkt.) W przestrzeni wektorowej $R^2(\mathbb{R})$ dany jest iloczyn skalarny
$$\langle [x_1, x_2], [y_1, y_2] \rangle = ax_1y_1 + bx_1y_2 + bx_2y_1 + cx_2y_2, \quad a, b, c \in R.$$
   1. (5 pkt.) Wyznacz współczynniki a, b, c tak, aby $[1, 0] \perp [1, 2]$, $\| [1, 0] \| = 2$ oraz $\| [1, 2] \| = 4$.
   2. (4 pkt.) Dla iloczynu określonego w punkcie 1. znajdź bazę ortonormalną przestrzeni $R^2(\mathbb{R})$.
   3. (4 pkt.) Dla iloczynu określonego w punkcie 1. znajdź bazę podprzestrzeni $\{[x_1, x_2] \mid [x_1, x_2] \in R^2 \perp [1, 0]\}$.