Z6

środa, 4 czerwca 2025 20:35

1. Warunek zerowy $(0_v \in W)$
2. Dodawanie (jeśli $u, v \in W$ to $u+v \in W$)
3. Mnożenie przez skalar $(\alpha \cdot u \in W)$

1\. Które z podanych zbiorów są podprzestrzeniami odpowiednich przestrzeni wektorowych:

(a) $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$

1. $0 \geq 0 \quad \wedge \quad 0 \geq 0$ ✓

2. $x_1, y_1 \geq 0 \quad \wedge \quad x_2, y_2 \geq 0$

$$[\underbrace{x_1 + x_2}_{\geq 0}, \underbrace{y_1 + y_2}_{\geq 0}]$$ ✓

3. np. $\alpha = -2$; $u[0,1]$

$$-2[x,y] = [0, \underbrace{-2}_{<0}]$$ ✗

$-2 < 0$

(b) $\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \mid yz \leq 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$

1. $0 \cdot 0 \leq 0$ ✓

2. $y_1 z_1 \leq 0 \quad \wedge \quad y_2 z_2 \leq 0$

$$\underbrace{[0,1,0]}_{1 \cdot 0 \leq 0} + \underbrace{[0,0,1]}_{1 \cdot 0 \leq 0} = \underbrace{[0,1,1]}_{1 \cdot 1 > 0}$$ ✗

(c) $\{A \in M_2^2(\mathbb{R}) \mid DetA = 0\} \subseteq M_2^2(\mathbb{R})$

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $\quad ad - bc = 0$

R

1. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad Det(A) = 0$ ✓

2. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ & 1 \end{bmatrix}$ ✗

2. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ✗

$Det=0$ $\quad$ $Det=0$ $\quad$ $Det \neq 0$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \shortparallel\, 1$

(d) $\{\begin{pmatrix} x & y \\ x+y & 2x \end{pmatrix} \in M_2^2(\mathbb{R}) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \subseteq M_2^2(\mathbb{R})$

1. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2^2(\mathbb{R})$ ✓

2. $\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_1+y_1 & 2x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ x_2+y_2 & 2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1+x_2 & y_1+y_2 \\ x_1+y_1+x_2+y_2 & 2x_1+2x_2 \end{bmatrix}$ ✓

3. $\alpha \begin{bmatrix} x & y \\ x+y & 2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x & \alpha y \\ \alpha x+\alpha y & 2x\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ a+b & 2a \end{bmatrix}$ $\quad a=\alpha x \in \mathbb{R}$, $b=\alpha y \in \mathbb{R}$ ✓

(e) $\{f \in \mathbb{R}[x] \mid st f = 2k,\ k \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}[x]$

$f(x) = a + bx + cx^2 + \ldots + ex^{2k}$ $\quad k \in N$

1. $f(0) = a \implies stf = 2k$ ✓

2. $f_1(x) = 1 + x + x^2$

$f_2(x) = -x^2$

$f_1(x) + f_2(x) = 1 + x \quad\quad stf = 1 \neq 2k$ ✗

3. Zbadać liniową niezależność podanych układów wektorów w odpowiednich przestrzeniach wektorowych. Które z następujących układów wektorów stanowią bazy odpowiednich przestrzeni wektorowych.

(a) $[1, 3, 5]$, $[2, 9, 13]$, $[4, 9, 17]$ w przestrzeni $R^3(\mathbb{R})$

$\alpha \cdot [1,3,5] + \beta [2,9,13] + \gamma [4,9,17] \stackrel{?}{=} [0,0,0]$

$\begin{cases} \alpha + 2\beta + 4\gamma = 0 \\ 3\alpha + 9\beta + 9\gamma = 0 \\ 5\alpha + 13\beta + 17\gamma = 0 \end{cases}$

$\alpha + 2\beta + 4\gamma = 0$

$\beta = \gamma \quad\quad \alpha + 6\beta = 0$

$a = -6\beta$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \\ 5 & 13 & 17 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3 - 5r_1]{r_2 - r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{3} & \cancel{-3} & \cancel{0} \end{array}\right]$

$(\alpha, \beta, \gamma) = (-6\gamma, \gamma, \gamma)$

$(-6, 1, 1) \neq (0, 0, 0)$

LINIOWO ZALEŻNY

LINIOWO ZALEŻNY ⇐ NIE SĄ BAZĄ

(b) $[5,4,1]$, $[4,3,2]$, $[7,7,-6]$ w przestrzeni $R^3(\mathbb{R})$

$$\alpha[5,4,1] + \beta[4,3,2] + \gamma[7,7,-6] = [0,0,0]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 7 & 0 \\ 4 & 3 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & -6 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -6 & 0 \\ 4 & 3 & 7 & 0 \\ 5 & 4 & 7 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3 - 5r_1]{r_2 - 4r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & -5 & 31 & 0 \\ 0 & -6 & 37 & 0 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\xrightarrow{r_3 - \frac{6}{5}r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & -5 & 31 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$\gamma, \beta, \alpha = 0$ NIEZALEŻNY STANOWIĄ BAZĘ

(c) $[1,1,0]$, $[4,3,1]$, $[1,4,2]$ w przestrzeni $Z_5^3(Z_5)$

$$\alpha[1,1,0] +_5 \beta[4,3,1] +_5 \gamma[1,4,2] = [0,0,0]$$

$$\begin{cases} \alpha +_5 4\beta +_5 \gamma = 0 \\ \alpha +_5 3\beta +_5 4\gamma = 0 \\ \beta +_5 2\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 - r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3 + r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2 \cdot 4} \begin{array}{c} \qquad\quad t_1 \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$\beta + 2t_1 = 0$

$\beta = -2t_1 = 3t_1$

$\alpha + 2t_1 + t_1 \Rightarrow \alpha = -3t_1 = 2t_1$

np. dla $t = 1$

$(2,3,1) \neq (0,0,0)$ LINIOWO ZALEŻNY NIE SĄ BAZĄ

(d) $[0,0,1]$, $[4,0,4]$, $[3,4,3]$ w przestrzeni $Z_5^3(Z_5)$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right]$$

$4\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 0$
$\beta = 0$
$\alpha = 0$

$(0,0,0) = (0,0,0)$

LINIOWO NIEZALEŻNY

SĄ BAZĄ

(e) $p_1 = x^2 - 1$, $p_2 = x + 1$, $p_3 = -x^2 + 2x + 3$, $p_4 = -2x + 3$ w $R_2[x](\mathbb{R})$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 - r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{0} \\ 0 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

LINIOWO ZALEŻNY

NIE SĄ BAZĄ

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dim = 4

(f) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ w $M_2^2(R)(\mathbb{R})$

→ mamy tylko 2 wektory, więc nie można nimi wygenerować wszystkiego

$$\alpha A_1 + \beta A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\alpha = 0 \quad \beta = 0$

LINIOWO NIEZALEŻNY NIE SĄ BAZĄ

(g) $\alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \beta\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \gamma\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \delta\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ w $M_2^2(R)(\mathbb{R})$,

$$\alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \gamma & -\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

LINIOWO NIEZALEŻNY SĄ BAZĄ

$\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$

(h) $f_1 = 1$, $f_2 = \sin^2 x$, $f_3 = \cos^2 x$ w przestrzeni funkcji ciągłych na zbiorze R

$\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1}$

zależne

LINIOWO ZALEŻNY NIE SĄ BAZĄ

(i) $f_1 = 1$, $f_2 = e^x$, $f_3 = e^{-x}$ w przestrzeni funkcji ciągłych na zbiorze R

dim $= +\infty$

$$\alpha + \beta e^x + \gamma e^{-x} = 0$$

$e^{\ln x} = x$

dla $x = 0$: $\alpha + \beta + \gamma = 0$

dla $x = \ln 2$: $\alpha + \beta 2 + \gamma \frac{1}{2} = 0$

dla $x = \ln 4$: $\alpha + 4\beta + \frac{1}{4}\gamma = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 4 & \frac{1}{4} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 & -\frac{3}{4} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3 - 3r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{array}\right]$$

LINIOWO NIEZALEŻNY

3 wektory nie mogą tworzyć całej przestrzeni → NIE SĄ BAZĄ!

Czym jest baza?

- można nią wygenerować wszystko z przestrzeni
- układ liniowo NIEZALEŻNY

Czym jest wymiar (dim)?

- liczba wektorów w określonej przestrzeni

Przykłady:

- $\mathbb{R}^2$ $\dim = 2$ typowa baza: $\{(1,0), (0,1)\}$
- $\mathbb{R}^3$ $\dim = 3$ — \|\| — : $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$
- $R_2[x]$ $\dim = 3$ — \|\| — : $\{1, x, x^2\}$

5. Znaleźć współrzędne wektorów: nowa baza i chcemy otrzymać wektor V

(a) $v = [-2, 5, 6]$ w bazie $\mathcal{B} = \{[1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 1]\}$ przestrzeni wektorowej $R^3(\mathbb{R})$.

$$\alpha[1,0,0] + \beta[0,1,0] + \gamma[0,0,1] = [-2,5,6]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right]$$

$\alpha = -2$

$\beta = 5$

$\gamma = 6$

$$[v]_\beta = [-2,5,6]$$

(b) $\boldsymbol{v} = [-2,5,6]$ w bazie $\mathcal{B} = \{[1,1,0],[2,1,0],[3,3,1]\}$ przestrzeni wektorowej $R^3(\mathbb{R})$,

$$\alpha[1,1,0] + \beta[2,1,0] + \gamma[3,3,1] = [-2,5,6]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 - r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right]$$

$\gamma = 6$

$\beta = -7$

$\alpha - 14 + 18 = -2$

$\alpha = -6$

$$[v]_\beta = [-6,-7,6]$$

(c) $p = x + x^2$ w bazie $\mathcal{B} = \{1+x, 1-x, 1+x+x^2\}$ przestrzeni wektorowej $R_2[x](\mathbb{R})$.

$$\alpha(x+1) + \beta(1-x) + \gamma(x^2+x+1) = x^2+x$$

$$x^2+x = \gamma x^2 + (\gamma + \alpha - \beta)x + (\alpha + \gamma + \beta)$$

$$\begin{cases} \gamma = 1 \\ \alpha - \beta + 1 = 1 \\ \alpha + \beta = -1 \end{cases}$$

$\alpha - \beta = 0$ $\quad \alpha = \beta$

$\alpha + \beta = -1$

$2\alpha = -1$

$\alpha = -\frac{1}{2} = \beta$

$$[v]_\beta = \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right]$$

4 współrzędne

6. Dla $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \in M_2^4(Z_5)$ znaleźć bazę podprzestrzeni $Rozw(A|\mathbf{0}_4^1)$ przestrzeni wektorowej $Z_5^4(Z_5)$.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \cdot 3} \begin{array}{cccc} & & t_1 & t_2 \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$x_4 = t_2$

$x_3 = t_1$ $\qquad t_1, t_2 \in Z_5$

$x_2 + 3t_1 + 2t_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 2t_1 + 3t_2$

$x_1 + 3t_1 + 4t_2 = 0$

$x_1 = 2t_1 \quad + t_2$

$$\mathrm{Row}\left(A \mid 0_4^1\right) = \left\{ X \in M_4^1\left(\mathbb{Z}_5\right) \mid AX = 0_4^1 \right\}$$