9. Formy dwuliniowe hermitowskie i przestrzenie unitarne.

Zadania

Niech $\boldsymbol{u} = [x_1, x_2, x_3], \boldsymbol{v} = [y_1, y_2, y_3] \in C^3$.

1. Sprawdzić, czy podane odwzorowanie $g\colon C^3 \times C^3 \to C$ jest formą dwuliniową hermitowską:
   (a) $g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = x_1\overline{y_1} - ix_1\overline{y_2} + (1-2i)x_2\overline{y_2} + ix_2\overline{y_1} - x_3\overline{y_3}$,
   (b) $g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = x_1\overline{y_1} + ix_1\overline{y_2} + 2x_2\overline{y_2} - ix_2\overline{y_1} + 2x_1\overline{y_3} + 2x_3\overline{y_1} + 3x_3\overline{y_3}$,
   (c) $g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = x_1\overline{y_3} + x_3\overline{y_1}$,
   (d) $g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 2x_1\overline{y_1} + ix_1\overline{y_2} - ix_2\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + 2x_1\overline{y_3} + 2x_3\overline{y_1} - x_3\overline{y_3}$.
2. Dla podanej formy dwuliniowej hermitowskiej $g\colon C^3 \times C^3 \to C$ znaleźć macierz Grama $M_g(\mathcal{B})$ w bazie standardowej $\mathcal{B}$:
   (a) $g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 2x_1\overline{y_1} + ix_1\overline{y_2} - ix_2\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + 2x_1\overline{y_3} + 2x_3\overline{y_1} - x_3\overline{y_3}$,
   (b) $g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = ix_1\overline{y_3} - ix_3\overline{y_1}$,
   (c) $g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = x_2\overline{y_2} + x_2\overline{y_3} + x_3\overline{y_2} + x_3\overline{y_3}$.
3. Zbadać określoność formy dwuliniowej hermitowskiej $g\colon C^3 \times C^3 \to C$, $g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 2x_1\overline{y_1} + ix_1\overline{y_2} - ix_2\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + 2x_1\overline{y_3} + 2x_3\overline{y_1} - x_3\overline{y_3}$.
4. Znaleźć formę biegunową formy hermitowskiej $h\colon C^3 \to C$: $h([x_1, x_2, x_3]) = x_1\overline{x_1} - ix_1\overline{x_2} + ix_2\overline{x_1} - x_2\overline{x_2}$.
5. Znaleźć formę biegunową formy kwadratowej $h\colon R^3 \to R$:
   (a) $h([x_1, x_2, x_3]) = x_1^2 - 4x_1x_2 - 4x_2^2$,
   (b) $h([x_1, x_2, x_3]) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_3^2$.
6. Znaleźć w bazie standardowej macierz formy kwadratowej $h\colon R^3 \to R$, $h([x_1, x_2, x_3]) = 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$.
7. Zbadać określoność formy hermitowskiej $h\colon C^3 \to C$, $h(\boldsymbol{u}) = 2x_1\overline{x_1} + 4x_1\overline{x_2} + 2ix_1\overline{x_3} + 4x_2\overline{x_1} + x_2\overline{x_2} - 2ix_3\overline{x_1} + x_3\overline{x_3}$.
8. Sprawdzić, czy podana funkcja $g\colon R^2 \times R^2 \to R$ jest iloczynem skalarnym w przestrzeni $R^2(\mathbb{R})$:
   (a) $g([x_1, x_2], [y_1, y_2]) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$,
   (b) $g([x_1, x_2], [y_1, y_2]) = 3x_1y_1 + 4x_1y_2 + 4x_2y_1 + 5x_2y_2$,
   (c) $g([x_1, x_2], [y_1, y_2]) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$.
9. Obliczyć kąt między wektorami $\boldsymbol{u}[1, 0]$ i $\boldsymbol{v} = [1, 1]$ w przestrzeni unitarnej $R^2(\mathbb{R})$, jeśli iloczyn skalarny $< \cdot, \cdot >$ jest określony wzorem:
   (a) $< [x_1, x_2], [y_1, y_2] >= x_1y_1 + x_2y_2$,
   (b) $< [x_1, x_2], [y_1, y_2] >= x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 7x_2y_2$.
10. Sprawdzić, czy podane wektory tworzą bazę ortonormalną przestrzeni unitarnej $R^3(\mathbb{R})$ z iloczynem skalarnym $< [x_1, x_2, x_3], [y_1, y_2, y_3] >= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$:
    (a) $\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{5}[4, 3, 0], \boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{5}[3, -4, 0], \boldsymbol{v}_3 = [0, 0, 1]$,
    (b) $\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{9}[1, 4, 8], \boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{9}[-4, -7, 4], \boldsymbol{v}_3 = \frac{1}{3}[2, -2, 1]$,
    (c) $\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{3}[1, 2, 2], \boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{3}[2, 1, -2], \boldsymbol{v}_3 = \frac{1}{3}[2, -2, 1]$.
11. Stosujac ortogonalizację Grama-Schmidta znaleźć bazę ortonormalną danej podprzestrzeni U przestrzeni unitarnej $R^4(\mathbb{R})$ z iloczynem skalarnym $< [x_1, x_2, x_3, x_4], [y_1, y_2, y_3, y_4] >= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$:
    (a) $U = \mathcal{L}([1, 1, 1, 1], [3, 3, 1, 1], [7, 5, 3, 1])$,
    (b) $U = \mathcal{L}([5, 3, 1, 1], [11, 5, 1, 1], [13, 1, 3, 1])$,
    (c) $U = \mathcal{L}([2, 2, 1, 0], [4, 1, 8, 2], [9, -3, 6, 2])$.
12. W przestrzeni unitarnej $C_{[-1,1]}$ funkcji ciągłych na przedziale $[-1, 1]$ z iloczynem skalarnym $< \cdot, \cdot >\colon C[-1, 1] \times C[-1, 1] \to R$, $< f, g >= \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$, znaleźć bazę ortonormalną podprzestrzeni $U = \mathcal{L}(1, x, x^2)$.

13. Niech $R^4(\mathbb{R})$ będzie przestrzenią unitarną z iloczynem skalarnym $< [x_1, x_2, x_3, x_4], [y_1, y_2, y_3, y_4] >= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$. Znaleźć rzut ortogonalny wektora $\boldsymbol{v} \in R^4$ na podprzestrzeń W przestrzeni $R^4(\mathbb{R})$:

    (a) $\boldsymbol{v} = [7, 11, -7, 5]$, $W = \mathcal{L}([1, 1, -1, -1])$,

    (b) $\boldsymbol{v} = [7, 6, 5, -5]$, $W = \mathcal{L}([1, 2, 0, 2], [7, 4, 4, 6])$,

    (c) $\boldsymbol{v} = [5, 4, -3, -4]$, $W = \mathcal{L}([1, 1, 1, 1], [5, 5, 9, 1], [4, 7, 7, 4])$.

14. Korzystając z nierówności Schwarza pokazać, że w przestrzeni unitarnej $C^n(\mathbb{C})$ z iloczynem skalarnym $< [x_1, \ldots, x_n], [y_1, \ldots, y_n] >= \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j}$, funkcja $\| \cdot \| \colon V \times V \to R$, $\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{< \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} >}$ jest normą.

15. Niech $V(\mathbb{K})$ będzie przestrzenią unitarną z iloczynem skalarnym $<,>$ i niech $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ będzie bazą ortonormalną przestrzeni $V(\mathbb{K})$. Pokazać, że dla każdego wektora $\boldsymbol{v} \in V$ zachodzi:

$$\boldsymbol{v} =< \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_1 > \boldsymbol{v}_1 + \ldots + < \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_n > \boldsymbol{v}_n.$$

16. Niech U będzie podprzestrzenią przestrzeni unitarnej $V(\mathbb{K})$. Pokazać, że dopełnienie ortogonalne $U^{\perp}$ jest podprzestrzenią $V(\mathbb{K})$.

17. Niech $C^3(\mathbb{C})$ będzie przestrzenią unitarną z iloczynem skalarnym $< [x_1, x_2, x_3], [y_1, y_2, y_3] >= \sum_{j=1}^{3} x_j \overline{y_j}$ i niech $F \colon C^3 \to C^3$, $F([x_1, x_2, x_3]) = [-2ix_3, -x_2, 2ix_1 + 3x_3]$ będzie przekształceniem liniowym. Pokazać, że F jest przekształceniem hermitowskim. Znaleźć wartości własne F oraz bazę złożoną z wektorów własnych tego przekształcenia. Znaleźć bazę ortonormalną przestrzeni $C^3(\mathbb{C})$ złożoną z wektorów własnych odwzorowania F.
    Niech $\mathcal{B}$ będzie bazą standardową w przestrzeni $C^3(\mathbb{C})$ i niech $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)$. Obliczyć A^{1000}.

18. Niech $A \in M_n^n(K)$ będzie macierzą hermitowską. Pokazać, że $Det A \in R$.

19. Sprawdzić, czy macierz $A = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{3}/3 & \sqrt{6}/6 \\ 0 & -\sqrt{3}/3 & \sqrt{6}/3 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{3}/3 & \sqrt{6}/6 \end{pmatrix}$ jest macierzą ortogonalną w przestrzeni $R^3(\mathbb{R})$ z iloczynem skalarnym $< [x_1, x_2, x_3], [y_1, y_2, y_3] >= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$.

20. Sprawdzić, czy macierz $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+i) & \frac{1}{2}(1-i) \\ \frac{1}{2}(1-i) & \frac{1}{2}(1+i) \end{pmatrix}$ jest macierzą unitarną w przestrzeni $C^2(\mathbb{C})$ z iloczynem skalarnym $< [x_1, x_2], [y_1, y_2] >= x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2}$.