MAT2 - Rozwiązania

Z_3

1. Oblicz całki nieoznaczone, korzystając z całkowania przez części:

   (a) $\displaystyle\int e^{2x}\cos 4x\,dx =$

   $= \left\| \begin{matrix} f = e^{2x} & g' = \cos 4x \\ f' = 2e^{2x} & g = \frac{1}{4}\sin 4x \end{matrix} \right\| =$

   $= \frac{1}{4}e^{2x}\sin 4x - \frac{1}{2}\int e^{2x}\sin 4x\,dx = \left\| \begin{matrix} f = e^{2x} & g' = \sin 4x \\ f' = 2e^{2x} & g = -\frac{1}{4}\cos 4x \end{matrix} \right\| =$

   $= \frac{1}{4}e^{2x}\sin 4x + \frac{1}{8}e^{2x}\cos 4x - \frac{1}{4}\int e^{2x}\cos 4x\,dx$

   Stąd

   $\frac{5}{4}\int e^{2x}\cos 4x\,dx = \frac{1}{4}e^{2x}\sin 4x + \frac{1}{8}e^{2x}\cos 4x + C \Rightarrow$

   $\Rightarrow \int e^{2x}\cos 4x\,dx = \frac{e^{2x}}{5}(\sin 4x + \frac{1}{2}\cos 4x) + C$

   (b) $\displaystyle\int \text{arcsin}x \text{ dx} =$

   $= \left\| \begin{matrix} f = \arcsin x & g' = 1 \\ f' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & g = x \end{matrix} \right\| = x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left\| \begin{matrix} y = 1 - x^2 \\ dy = -2x\,dx \\ x\,dx = -\frac{1}{2}\,dy \end{matrix} \right\| =$

   $= x\arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$

2. Oblicz całki nieoznaczone, korzystając z całkowania przez podstawienie:

   (a) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{(1-x^2)^3}} \text{ dx} =$

   $= \left\| \begin{matrix} y = 1 - x^2 \\ dy = -2x\,dx \\ x\,dx = -\frac{1}{2}\,dy \\ x^2 = 1 - y \end{matrix} \right\| = -\frac{1}{2}\int \frac{1-y}{\sqrt{y^3}}\,dy = -\frac{1}{2}\int y^{-\frac{3}{2}}\,dy + \frac{1}{2}\int y^{-\frac{1}{2}}\,dy =$

   $= y^{-\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} + C$

   (b) $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}} \text{ dx} =$

   $= \left\| \begin{matrix} y = \sqrt{x} \\ x = y^2 \\ dx = 2y\,dy \end{matrix} \right\| = 2\int ye^y\,dy = \left\| \begin{matrix} f = y & g' = e^y \\ f' = 1 & g = e^y \end{matrix} \right\| = 2[ye^y - \int e^y\,dy] =$

   $= 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + C$

   (c) $\displaystyle\int \text{arcsin}x \text{ dx} =$

$$= \left\| \begin{array}{c} x = \sin y \\ dx = \cos y\, dy \\ y = \arcsin x \\ y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \end{array} \right\| = \int y \cos y\, dy = \left\| \begin{array}{cc} f = y & g' = \cos y \\ f' = 1 & g = \sin y \end{array} \right\| = y \sin y - \int \sin y\, dy =$$
$$= y \sin y + \cos y + C = x \arcsin x + \cos(\arcsin x) + C = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

3. Oblicz całki nieoznaczone, korzystając z odpowiednich zależności trygonometrycznych:

   (a) $\displaystyle\int \sin^4 x \cos^2 x \,\mathrm{dx} =$

$$= \int \sin^2 x (\sin x \cos x)^2\, dx =$$
$$= \int \frac{1-\cos 2x}{2} \cdot \frac{\sin^2 2x}{4}\, dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\, dx - \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x\, dx =$$
$$= \left\| \begin{array}{c} y = \sin 2x \\ dy = 2\cos 2x\, dx \end{array} \right\| = \frac{1}{8}\int \frac{1-\cos 4x}{2}\, dx - \frac{1}{16}\int y^2\, dy =$$
$$= \frac{1}{16}\int dx - \frac{1}{16}\int \cos 4x\, dx - \frac{1}{16}\int y^2\, dy =$$
$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{48}\sin^3 2x + C$$

   (b) $\displaystyle\int \sin^4 x \cos^3 x \,\mathrm{dx} =$

$$= \int \sin^4 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos x\, dx = \int \sin^4 x \cdot (1-\sin^2 x) \cdot \cos x\, dx = \left\| \begin{array}{c} y = \sin x \\ dy = \cos x\, dx \end{array} \right\| =$$
$$= \int y^4(1-y^2)\, dy = \int (y^4 - y^6)\, dy = \frac{y^5}{5} - \frac{y^7}{7} + C = \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{1}{7}\sin^7 x + C$$

4. Oblicz całki nieoznaczone, korzystając (jeśli trzeba) z rozkładu na ułamki proste:

   (a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 - 6x + 13} \,\mathrm{dx} =$

$$= \int \frac{dx}{(x-3)^2+4} = \left\| \begin{array}{c} y = x-3 \\ dy = dx \end{array} \right\| = \int \frac{dy}{y^2+4} = \int \frac{dy}{4\left[1+\left(\frac{y}{2}\right)^2\right]} = \left\| \begin{array}{c} u = \frac{y}{2} \\ du = \frac{1}{2}dy \end{array} \right\| =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\, \frac{x-3}{2} + C$$

   (b) $\displaystyle\int \frac{1}{x(x+1)^2} \,\mathrm{dx} =$

$$= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{(x+1)^2} = \ln|x| - \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + \frac{1}{x+1} + C$$

bo:

$$\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}$$

5. Oblicz całki nieoznaczone, korzystając z odpowiednich wzorów:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4x+x^2}}\,\mathrm{dx} =$

$= \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2-4}} = \left\| \begin{array}{c} y = x+2 \\ dy = dx \end{array} \right\| = \int \frac{dy}{\sqrt{y^2-4}} = \ln|y+\sqrt{y^2-4}| + C =$
$= \ln|x+2+\sqrt{4x+x^2}| + C$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}\,\mathrm{dx} =$

$= \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x-2)^2}} = \left\| \; y = x-2 \; \right\| = \int \frac{dy}{\sqrt{4-y^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{2}\right)^2}} = \left\| \begin{array}{c} t = \frac{y}{2} \\ dt = \frac{1}{2}dy \end{array} \right\| =$
$= \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin\frac{x-2}{2} + C$

6. Oblicz całki nieoznaczone:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{2\cos x + \sin 2x}\,\mathrm{dx} =$

$= \int \frac{dx}{2\cos x + 2\sin x\cos x} = \int \frac{dx}{2\cos x(1+\sin x)} = \frac{1}{2}\int \frac{\cos x}{(1-\sin^2 x)(1+\sin x)}\,dx = \left\| \begin{array}{c} y = \sin x \\ dy = \cos x\,dx \end{array} \right\| =$
$= \frac{1}{2}\int \frac{dy}{(1-y^2)(1+y)} = -\frac{1}{8}\int \frac{dy}{1-y} + \frac{1}{4}\int \frac{dy}{(1+y)^2} + \frac{1}{8}\int \frac{dy}{1+y} = \frac{1}{8}\ln|1-\sin^2 x| - \frac{1}{4(1+\sin x)} + C$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x + 2\cos x + 3}\,\mathrm{dx} =$

$= \left\| \begin{array}{cc} y = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2} & \sin x = \frac{2y}{1+y^2} \\ dx = \frac{2}{1+y^2}\,dy & \cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2} \end{array} \right\| = \int \frac{2}{y^2+2y+5}\,dy = 2\int \frac{dy}{(y+1)^2+4} = \left\| \; z = y+1 \; \right\| =$
$= 2\int \frac{dz}{z^2+4} = 2\int \frac{dz}{4\left[1+\left(\frac{z}{2}\right)^2\right]} = \left\| \; u = \frac{z}{2} \; \right\| = \int \frac{du}{1+u^2} = \mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}+1}{2} + C$

7. Niech $f : [-a;\ a] \to \mathbb{R}$, gdzie $a > 0$, będzie funkcją ciągłą w $[-a;\ a]$. Wykaż, że:

(a) $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{dx} = \int_{0}^{a} [f(x) + f(-x)]\;\mathrm{dx},$

$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$

W pierwszej całce sumy zamieniamy zmienną

$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \left\| \begin{array}{c} y = -x \\ dy = -dx \\ x = 0 \iff y = 0 \\ x = -a \iff y = a \end{array} \right\| = -\int_{a}^{0} f(-y)\,dy = \int_{0}^{a} f(-y)\,dy =$
$= \int_{0}^{a} f(-x)\,dx$

$\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$

(b) jeśli f jest funkcją parzystą, to $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{dx} = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{dx}$,

Korzystamy z równości (a) i z parzystości funkcji: $f(x) = f(-x)$

$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_0^a f(-x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

(c) jeśli f jest funkcją nieparzystą, to $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{dx} = 0$.

Korzystamy z równości (a) i z nieparzystości funkcji: $f(x) = -f(-x)$

$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_0^a f(-x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(x) - \int_0^a f(x)\,dx = 0$

8. Nie obliczając całki zbadaj monotoniczność funkcji $F(x)$, gdzie

$$F(x) = \int_{x}^{2x} \frac{e^t}{t}\mathrm{dt}\,, \quad x > 0.$$

Korzystamy z tw. o pochodnej funkcji górnej granicy całkowania: $F'(x_0) = f(x_0)$ dla $F(x) = \int_\alpha^x f(t)\,dt$ i f ciągłej w x_0 oraz z tw. o pochodnej funkcji złożonej.

$F(x) = \displaystyle\int_{x}^{2x} \frac{e^t}{t}\mathrm{dt}\,, \quad x > 0.$

$f(t) = \frac{e^t}{t}$ jest funkcją ciągłą dla $t > 0$

$F(x) = \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\,dt = \int_c^{2x} \frac{e^t}{t}\,dt - \int_c^{x} \frac{e^t}{t}\,dt$

$\Rightarrow F'(x) = \frac{e^{2x}}{2x}\cdot 2 - \frac{e^x}{x} = \frac{e^x(e^x-1)}{x} > 0 \iff e^x - 1 > 0 \iff x > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow F$ jest funkcją rosnącą.

9. Oblicz granicę:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\displaystyle\int_{x^2}^{x^2+1} \ln(t+1)\mathrm{dt}}{x^2},$$

$\lim_{x\to\infty} \frac{\int_{x^2}^{x^2+1} \ln(t+1)\,dt}{x^2} = \left\| \left[\frac{\star}{\infty}\right] \right\| = \lim_{x\to\infty} \frac{2x\cdot\ln\frac{x^2+2}{x^2+1}}{2x} = \ln 1 = 0$

bo:

$F(x) = \int_{x^2}^{x^2+1} \ln(t+1)\,dt = \int_c^{x^2+1} \ln(t+1)\,dt - \int_c^{x^2} \ln(t+1)\,dt$

$\Rightarrow F'(x) = \ln(x^2+2)\cdot 2x - \ln(x^2+1)\cdot 2x$

10. Oblicz pole obszaru ograniczonego krzywymi o równaniach $2y=-x^2, \quad 2x=-y^2$,

Wyznaczamy punkty przecięcia krzywych:

$-2x = y^2 = \frac{x^4}{4} \Rightarrow x^4+8x = x(x+2)(x^2-2x+4) = 0 \Rightarrow x=0 \quad \vee \quad x=-2$

$|D| = \int_{-2}^{0} \left[-\frac{x^2}{2} - (-\sqrt{-2x})\right] dx = \quad -\frac{x^3}{6}\Big|_{-2}^{0} - \sqrt{2}\cdot\frac{2}{3} \quad (-x)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-2}^{0} = \frac{4}{3}$

11. Oblicz objętość bryły obrotowej powstałej przez obrót wokół osi OX obszaru opisanego nierównościami $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant y \leqslant \sin x + \cos x$,

Korzystamy z wzoru na objętośc bryły obrotowej powstałej przez obrót krzywej $y = f(x) \geqslant 0\,,\; x\in[a,b]$ wokół osi OX

$$|V| = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx$$

$|V| = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x+\cos x)^2\, dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\sin 2x)\, dx = \pi \quad \left(x - \frac{1}{2}\cos 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$
$= \pi\left(\frac{\pi}{2}+1\right)$

12. Oblicz długość łuku krzywej $y = \mathrm{ch} x$ dla $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Korzystamy z tożsamości hiperbolicznej $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ i z pochodnych funkcji hiperbolicznych $(\cosh x)' = \sinh x$.

$|L| = \int_0^1 \sqrt{1+\sinh^2 x}\, dx = \int_0^1 \sqrt{\cosh^2 x}\, dx = \int_0^1 \cosh x\, dx = \quad \sinh x \Big|_0^1 = \sinh 1$

13. Oblicz, jeśli istnieją, całki niewłaściwe I rodzaju:

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\cdot e^{-x^2}$ dx,

$\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\, dx = \lim_{T\to+\infty}\int_0^T xe^{-x^2}\, dx = \lim_{T\to+\infty} \quad -\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^T =$
$= \lim_{T\to+\infty} -\frac{1}{2}\left(e^{-T^2}-1\right) = \frac{1}{2}$

bo:

$$\int xe^{-x^2}\, dx = \left\| \begin{array}{c} y=-x^2 \\ dy = -2x\, dx \end{array} \right\| = -\frac{1}{2}\int e^y\, dy = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+4x+5}$ dx.

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5} = \left\| \;\Delta < 0\; \right\| = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+4x+5} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5} =$
$= \lim_{S\to-\infty}\int_S^0 \frac{dx}{x^2+4x+5} + \lim_{T\to+\infty}\int_0^T \frac{dx}{x^2+4x+5} =$

$= \quad \lim_{S\to-\infty} \operatorname{arctg}(x+2) \Big|_S^0 + \quad \lim_{T\to+\infty} \operatorname{arctg}(x+2) \Big|_0^T =$
$= \lim_{S\to-\infty}[\operatorname{arctg} 2 - \operatorname{arctg}(S+2)] + \lim_{T\to+\infty}[\operatorname{arctg}(T+2) - \operatorname{arctg} 2] = \pi$

bo:

$\int \frac{dx}{(x+2)^2+1} = \Big\| \; y = x+2 \; \Big\| = \int \frac{dy}{y^2+1} = \operatorname{arctg}(x+2) + C$

14. Oblicz, jeśli istnieją, całki niewłaściwe II rodzaju:

(a) $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x\cdot\sqrt{\ln x}}\,\mathrm{dx}$,

$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \lim_{a\to1^+} \int_a^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \lim_{a\to1^+} \quad 2\sqrt{\ln x}\,\Big|_a^e = \lim_{a\to1^+} 2(1-\sqrt{\ln a}) = 2$

bo:

$\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \left\| \begin{array}{l} y = \ln x \\ dy = \frac{dx}{x} \end{array} \right\| = \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = 2\sqrt{y} + C = 2\sqrt{\ln x} + C$

(b) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{x^2-4x+3}\,\mathrm{dx}$.

$\int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3} = \int_0^2 \frac{dx}{(x-3)(x-1)} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-3)(x-1)} + \int_1^2 \frac{dx}{(x-3)(x-1)} =$
$= \lim_{a\to1^-} \int_0^a \frac{dx}{(x-3)(x-1)} + \lim_{b\to1^+} \int_b^2 \frac{dx}{(x-3)(x-1)} =$
$= \lim_{a\to1^-} \quad \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right| \Big|_0^a + \lim_{b\to1^+} \quad \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right| \Big|_b^2 = +\infty$

bo:

$\frac{1}{(x-3)(x-1)} = \frac{\frac{1}{2}}{x-3} + \frac{-\frac{1}{2}}{x-1}$