MAT2 - Rozwiązania

Z_2

1. Zbadaj istnienie $f'(0)$, gdy: $f(x) = \begin{cases} x^k \sin\dfrac{1}{x} & \text{dla} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0, \end{cases}$ w przypadku, gdy $k = 1$ oraz $k = 2$.

   $k = 1:\ f'(0) : \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h\sin\frac{1}{h}}{h} = \lim_{h\to 0} \sin\frac{1}{h}$ - granica nie istnieje, więc pochodna też nie istnieje.

   $k = 2:\ f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2\sin\frac{1}{h}}{h} = \lim_{h\to 0} h \cdot \sin\frac{1}{h} = 0$
   jako iloczyn funkcji ograniczonej i funkcji zbiegającej do 0.

2. Oblicz granicę funkcji:

   W każdym z poniższych przykładów stosować będziemy regułę de l'Hospitala.

   (a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \dfrac{\text{tg}x}{\ln\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$,

   $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\text{tg}x}{\ln\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = \left\|\ \left[\frac{\infty}{\infty}\right]\ \right\| = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{-1}{\frac{\pi}{2}-x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{x-\frac{\pi}{2}}{\cos^x} = \left\|\ \left[\frac{0}{0}\right]\ \right\| =$
   $= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{-2\sin x\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} -\frac{1}{\sin 2x} = -\left\|\ \left[\frac{1}{0^+}\right]\ \right\| = -\infty$

   (b) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\text{arcsin}x)^{\text{tg}x}$,

   $\lim_{x\to 0^+} (\text{arcsin}x)^{\text{tg}x} = \left\|\ [0^0]\ \right\| = \lim_{x\to 0^+} e^{\text{tg}\,x\cdot\ln(\arcsin x)} = e^0 = 1,$

   bo:

   $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\arcsin x)}{\text{ctg}\,x} = \left\|\ \left[\frac{\infty}{\infty}\right]\ \right\| = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\arcsin x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\sin^2 x}{\arcsin x\cdot\sqrt{1-x^2}} =$

   $= \lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{\sin^2 x}{\arcsin x} = -1 \cdot 0 = 0$

   bo:

   $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2 x}{\arcsin x} = \lim_{x\to 0^+} 2\sin x\cos x \cdot \sqrt{1-x^2} = 0$

   (c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}\right)$,

   $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) = \left\|\ [\infty - \infty]\ \right\| = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x\sin x} = \left\|\ \left[\frac{0}{0}\right]\ \right\| =$
   $= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x} = \left\|\ \left[\frac{0}{0}\right]\ \right\| = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{\cos x + \cos x - x\sin x} = \frac{0}{2} = 0$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\ln x)$,

$\lim_{x\to\infty}(x-\ln x) = \Big\|\ [\infty-\infty]\ \Big\| = \lim_{x\to\infty} x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$

bo:

$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} = \Big\|\ \left[\frac{\infty}{\infty}\right]\ \Big\| = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$

(e) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\mathrm{tg}x)^{x^2-x}$,

$\lim_{x\to 0^+}(\mathrm{tg}x)^{x^2-x} = \Big\|\ [0^0]\ \Big\| = \lim_{x\to 0^+} e^{(x^2-x)\ln \mathrm{tg}\, x} = e^0 = 1$

bo:

$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln \mathrm{tg}\, x}{\frac{1}{x^2-x}} = \Big\|\ \left[\frac{\infty}{\infty}\right]\ \Big\| = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{-1}{(x^2-x)^2}\cdot(2x-1)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{(x^2-x)^2}{-(2x-1)\sin x\cos x} =$
$= \lim_{x\to 0^+}\frac{2(x^2-x)^2}{-(2x-1)\sin 2x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-2}{2x-1}\cdot\frac{(x^2-x)^2}{\sin 2x} = 2\cdot 0 = 0$

bo:

$\lim_{x\to 0^+}\frac{(x^2-x)^2}{\sin 2x} = \Big\|\ \left[\frac{0}{0}\right]\ \Big\| = \lim_{x\to 0^+}\frac{2(x^2-x)(2x-1)}{2\cos 2x} = 0$

(f) $\lim\limits_{x\to\pi^+}(1+2\sin x)^{\frac{1}{\pi-x}}$,

$\lim_{x\to\pi^+}(1+2\sin x)^{\frac{1}{\pi-x}} = \Big\|\ [1^\infty]\ \Big\| = \lim_{x\to\pi^+} e^{\frac{1}{\pi-x}\ln(1+2\sin x)} = e^2$

bo:

$\lim_{x\to\pi^+}\frac{\ln(1+2\sin x)}{\pi-x} = \Big\|\ \left[\frac{0}{0}\right]\ \Big\| = \lim_{x\to\pi^+}\frac{\frac{1}{1+2\sin x}\cdot 2\cos x}{-1} = \lim_{x\to\pi^+}\frac{-2\cos x}{1+2\sin x} = 2$

(g) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{x+1}{2x}\right)^{\frac{3}{x-1}}$.

$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x+1}{2x}\right)^{\frac{3}{x-1}} = \Big\|\ [1^\infty]\ \Big\| = \lim_{x\to 1^+} e^{\frac{3}{x-1}\ln\left(\frac{x+1}{2x}\right)} = e^{-\frac{3}{2}}$

bo:

$\lim_{x\to 1^+} 3\cdot\frac{\ln\left(\frac{x+1}{2x}\right)}{x-1} = \Big\|\ \left[\frac{0}{0}\right]\ \Big\| = 3\lim_{x\to 1^+}\frac{2x}{x+1}\cdot\frac{2x-2(x+1)}{4x^2} = 3\lim_{x\to 1^+}\frac{-2}{2x(x+1)} =$
$= -\frac{3}{2}$

3. Wyznacz równania tych stycznych do krzywej $y = f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}, \quad x \neq 1$, które są równoległe do prostej $x+y=5$.

Musimy wyznaczyć punkty x_0 dla których współczynnik kierunkowy prostej stycznej, czyli $f'(x_0)$, jest równy -1, wtedy styczna będzie równoległa do prostej $y=-x+5$.

$y' = f'(x) = \frac{2x(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$

$f'(x_0) = -1 \iff \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2} = -1 \iff 2x^2-4x = 2x(x-2) = 0 \Rightarrow x_0 = 0 \vee x_0 = 2$

Wystarczy teraz podstawić $x_0, f'(x_0), f(0) = -1, f(2) = 5$ do równania prostej stycznej do wykresu funkcji $y = f(x)$ w punkcie $(x_0, f(x_0))$:

$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

$x_0 = 0: \;\; y + 1 = -x \Rightarrow y = -x - 1$

$x_0 = 2: \;\; y - 5 = -(x - 2) \Rightarrow y = -x + 7$

4. Wykaż, że:

(a) $2\text{arctg}x + \arcsin\left(\frac{2x}{x^2+1}\right) = \pi$ dla $x \geqslant 1$,

W każdym z przykładów w tym zadaniu będziemy korzystać z wniosków z tw. Lagrange'a.

Zdefiniujmy funkcję $f(x) = 2\text{arctg}\, x + \arcsin \frac{2x}{x^2+1}$, spełnia ona założenia tw. Lagrange'a, tzn. jest ciągła na zadanym przedziale lewostronnie domkniętym i różniczkowalna wewnątrz tego przedziału. Aby wykazać powyższą równość wystarczy żeby pochodna zadanej funkcji była równa 0, ponieważ to implikuje, że funkcja jest stała.

$f'(x) = \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{2(1+x^2)-4x}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{1+x^2} + \frac{x^2+1}{\sqrt{(x^2-1)^2}} \cdot \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} =$

$= \frac{2}{1+x^2} + \frac{2(1-x^2)}{|x^2-1| \cdot (1+x^2)} = \frac{2}{1+x^2} - \frac{2}{1+x^2} = 0 \Rightarrow f = \text{const.} \;\; \wedge \;\; f(1) = \pi \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = \pi \;\; \forall x \geqslant 1$

(b) $2x\text{arctg}x \geqslant \ln(x^2 + 1)$ dla $x \in \mathbb{R}$,

Analogicznie, zdefiniujemy funkcję $f(x) = 2x \cdot \text{arctg}\, x - \ln(x^2 + 1)$, która spełnia założenia tw. Lagrange'a i pokażemy, że $f(x) \geqslant 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$.

Zauważmy, że funkcja jest parzysta $f(-x) = f(x)$, więc wystarczy wykazać powyższą nierówność dla $x \geqslant 0$ i z parzystości otrzymamy, że nierówność zachodzi na całym $\mathbb{R}$.

Policzymy pochodną i wartość funkcji w $x = 0$:

$f(0) = 0 \;\; \wedge \;\; f'(x) = 2\text{arctg}\, x + \frac{2x}{1+x^2} - \frac{2x}{1+x^2} = 2\text{arctg}\, x > 0 \;\; \forall x > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow f$ jest rosnąca $\Rightarrow f(x) \geqslant 0 \;\; \forall x \geqslant 0$ i z parzystości $f(x) \geqslant 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$

(c) $\ln x < 2\sqrt{x}$ dla $x > 0$,

Niech $f(x) = \ln x - 2\sqrt{x}$, tutaj ze względu na dziedzinę logarytmu wyznaczymy granicę

$\lim_{x\to 0^+}(\ln x - 2\sqrt{x}) = -\infty$

A następnie policzymy pochodną

$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1-\sqrt{x}}{x}$

$f' > 0 \iff x(1-\sqrt{x}) > 0 \iff x < 1$
$f' < 0 \iff x > 1 \Rightarrow f(1) = -2 < 0$ - maksimum lokalne

Maksimum funkcji ma ujemną wartość, wyznaczona granica wynosi $-\infty$ i dla $x > 1$ funkcja jest malejąca, więc $f(x) < 0 \quad \forall\, x > 0$.

5. Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne funkcji $f(x)$, jeśli:

   (a) $f(x) = x \cdot e^{-\frac{2}{x}}$,

   $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

   $f'(x) = e^{-\frac{2}{x}} + xe^{-\frac{2}{x}} \cdot \frac{2}{x^2} = e^{-\frac{2}{x}} \cdot \frac{x+2}{x} > 0 \iff (x+2)x > 0$

   $\forall\, x \in (-\infty, -2) \quad f' > 0 \Rightarrow f$ jest rosnąca

   $\forall\, x \in (-2, 0) \quad f' < 0 \Rightarrow f$ jest malejąca

   $\forall\, x \in (0, +\infty) \quad f' > 0 \Rightarrow f$ jest rosnąca

   $\Rightarrow f(-2) = -2e$ - maksimum lokalne

   (b) $f(x) = \frac{x}{(1+\ln x)^2}$,

   $D: \quad x > 0 \ \wedge \ 1 + \ln x \neq 0 \Rightarrow x > 0 \ \wedge \ x \neq e^{-1} \Rightarrow x \in \left(0, \frac{1}{e}\right) \cup \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$

   $f'(x) = \frac{(1+\ln x)^2 - 2x(1+\ln x)\cdot\frac{1}{x}}{(1+\ln x)^4} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x + 1)^3}$

   $f' = 0 \iff (\ln x - 1)(\ln x + 1)^3 = 0 \iff \ln x = 1 \iff x = e$

   $f' > 0 \iff x \in \left(0, \frac{1}{e}\right) \Rightarrow f$ - rosnąca

   $f' < 0 \iff x \in \left(\frac{1}{e}, e\right) \Rightarrow f$ - malejąca

   $f' > 0 \iff x > e \Rightarrow f$ - rosnąca

   $\Rightarrow f(e) = \frac{e}{4}$ - minimum lokalne

   (c) $f(x) = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$,

   $-1 \leqslant \frac{1-x^2}{1+x^2} \leqslant 1 \iff -1 - x^2 \leqslant 1 - x^2 \leqslant 1 + x^2 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$

   $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{-2x(1+x^2) - 2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{-(1+x^2)}{\sqrt{4x^2}} \cdot \frac{-4x}{(1+x^2)^2} = \frac{4x}{(1+x^2)\cdot 2|x|} =$

   $= \begin{cases} \frac{2}{1+x^2}, & x > 0 \\ -\frac{2}{1+x^2} & x < 0 \end{cases} \qquad D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

   $f' < 0 \iff x < 0 \Rightarrow f$ - malejąca

   $f' > 0 \iff x > 0 \Rightarrow f$ - rosnąca

$\Rightarrow f(0) = 0$ - minimum

6. Korzystając z wzoru Maclaurina podaj przybliżenie funkcji $f(x) = \cos x$ wielomianem stopnia 6.

   $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f^{(n)}(0) = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^k\,, & n = 2k \\ 0\,, & n = 2k-1 \end{cases}$

   $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$

7. Korzystając z wzoru Maclaurina wykaż, że nierówność $e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2}$ zachodzi dla $x \geqslant 0$.

   $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + R_3 \quad \wedge \quad R_3 = \frac{e^c}{3!}x^3 \geqslant 0 \iff x \geqslant 0\,,\ c \in (0,x) \ \vee\ c \in (x,0) \Rightarrow$
   $\Rightarrow e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2}$