2. Grupy

Zadania

1. Sprawdzić, które z operacji $*$ określają grupę na zbiorze A. Które z tych grup są przemienne?
   (a) $A = \{a \in \mathbb{R} \mid a \neq 1\}$, $a * b := a + b - ab$;
   (b) $A = \mathbb{Q}$, $* = -$;
   (c) $A = \mathcal{P}(X)$, $* = \cup$;
   (d) $A = \{a \in \mathbb{R} \mid a > 0,\ a \neq 1\}$, $a * b := a^{\ln b}$;
   (e) $A = \mathcal{P}(X)$, $a * b = (a \setminus b) \cup (b \setminus a)$.
2. Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą. Pokazać, że
   (a) w $(G, \cdot)$ istnieje dokładnie jeden element neutralny;
   (b) dla każdego elementu $a \in G$ istnieje dokładnie jeden element do niego odwrotny;
   (c) $\forall (a \in G),\ (a^{-1})^{-1} = a$;
   (d) $\forall (a, b \in G),\ (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.
3. Podać tabelkę działania grupy $(\{1, -1, i, -i\}, \cdot)$ oraz grupy $(D_3, \circ)$ izometrii trójkąta równobocznego.
4. Niech n będzie ustaloną liczbą naturalną i niech $Z_n := \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Określimy w Z_n binarne działanie w następujący sposób:
$$a +_n b := (a + b)_n,$$
gdzie $(x)_n$ oznacza resztę z dzielenia liczby x przez n. Pokazać, że $(Z_n, +_n)$ jest grupą. Podać tabelkę działania grup $(Z_2, +_2)$, $(Z_3, +_3)$ i $(Z_4, +_4)$. Która z tych grup jest cykliczna?
5. Niech n będzie ustaloną liczbą naturalną i niech $E_n := \{\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \mid k = 0, 1, \ldots, n-1\}$ będzie zbiorem wszystkich zespolonych pierwiastków stopnia n z 1. Pokazać, że $(E_n, \cdot)$ jest grupą.
6. Niech n będzie ustaloną liczbą naturalną i niech $Z_n^\star := \{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leq k \leq n-1,\ \mathrm{NWD}(k, n) = 1\}$ będzie zbiorem liczb naturalnych mniejszych od n i względnie pierwszych z n. Określmy w $Z_n^\star$ binarne działanie w następujący sposób:
$$a \cdot_n b := (a \cdot b)_n.$$
Pokazać, że $(Z_n^\star, \cdot_n)$ jest grupą. Podać tabelki działania grup $(Z_6^\star, \cdot_6)$ i $(Z_8^\star, \cdot_8)$. Sprawdzić, czy $(\mathbb{Z}_6^*, \cdot)$ jest grupą cykliczną.
7. Znaleźć wszystkie podgrupy grupy $(Z_8, +_8)$. Znaleźć wszystkie warstwy grupy $(Z_8, +_8)$ względem jej podgrup.
8. Znaleźć wszystkie podgrupy grupy $(\{1, -1, i, -i\}, \cdot)$. Znaleźć wszystkie warstwy grupy $(\{i, -1, i, -i\}, \cdot)$ względem jej podgrup.
9. Znaleźć wszystkie podgrupy grupy Kleina. Znaleźć wszystkie warstwy grupy Kleina względem jej podgrup.
10. Znaleźć wszystkie podgrupy grupy $(\mathbb{Z}, +)$.
11. Pokazać, że grupa $(G, \cdot)$ jest przemienna wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $a, b \in G$ zachodzi $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$.
12. Policzyć rzędy następujących elementów:
    (a) 60 w grupie $(Z_{64}, +_{64})$,
    (b) 18 w grupie $(Z_{37}, +_{37})$,
    (c) 7 w grupie $(Z_{17}^*, \cdot_{17})$;
    (d) 11 w grupie $(Z_{122}^*, \cdot_{122})$.
13. Pokazać, że każda grupa rzędu p, gdzie p jest liczbą pierwszą, jest cykliczna.
14. Pokazać, że jeśli dana grupa posiada tylko elementy rzędu co najwyżej 2 (tzn. dla każdego elemenu $a \in G$, $a^2 = e$), to jest abelowa.
15. * Podać przykład grupy nieskończonej, w której każdy element ma skończony rząd.
16. Niech $h : G \to K$ będzie homomorfizmem skończonych grup $(G, \cdot)$ i $(K, \cdot)$. Pokazać, że dla dowolnego elementu $a \in G$, rząd elementu $h(a)$ jest dzielnikiem rzędu elementu a.
17. Niech $h : G \to K$ będzie izomorfizmem grupy $(G, \cdot)$ na grupę $(K, \cdot)$. Wykazać, że dla każdego $a \in G$ elementy a i $h(a)$ mają równy rząd. Czy grupy $(Z_8, +_8)$ i $(Z_4, +_4) \times (Z_2, +_2)$ są izomorficzne?
18. Niech $(G, \cdot)$ i $(K, \cdot)$ będą grupami. Pokazać, że jeżeli $(G, \cdot) \times (K, \cdot)$ jest grupą cykliczną, to grupy $(G, \cdot)$ i $(K, \cdot)$ również muszą być cykliczne.
19. Ile jest wszystkich nieizomorficznych grup abelowych rzędu 24? Wymienić wszystkie parami nieizomorficzne niecykliczne grupy abelowe rzędu 24.
20. Niech p będzie liczbą pierwszą. Wyznaczyć liczbę nieizomorficznych abelowych grup rzędu p^4 i p^5. Ile jest nieizomorficznych grup abelowych rzędu 1000?