
# Elementy i układy elektroniczne *(UKEL)*

Prowadzenie: dr inż. Daniel Gryglewski
pok.549 i 533
Daniel.Gryglewski@pw.edu.pl lub D.Gryglewski@ire.pw.edu.pl

# Moc w obwodach prądu sinusoidalnie zmiennego: czynna, bierna, pozorna

moc chwilowa: $p(t) = u(t) \cdot i(t)$ moc średnia: $P_{śr} = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\ dt = \frac{1}{2}U_0 I_0 \cos(\varphi)$

W dziedzinie wskazów

$$P_{śr} = \frac{1}{2}U_0 I_0 \cos(\varphi) \Rightarrow \overbrace{\underline{S} = \frac{1}{2}U_0 I_0\ e^{j(\varphi)}}^{\text{Moc pozorna}} = \overbrace{\frac{1}{2}U_0 I_0 \cdot \cos(\varphi)}^{\text{Moc czynna}} + j \cdot \overbrace{\frac{1}{2}U_0 I_0 \cdot \sin(\varphi)}^{\text{Moc bierna}}$$

$$\underline{S} = P + jQ \qquad |\underline{S}|^2 = P^2 + Q^2$$ - „trójkąt mocy”

Uwzględniając, że:

$\varphi = \varphi_u - \varphi_i$

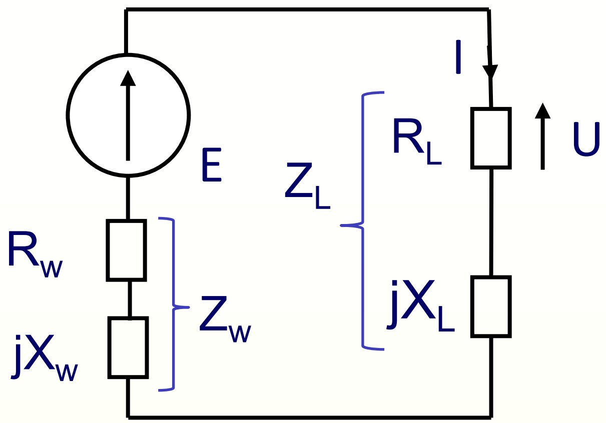
$$S = \frac{1}{2}U_0 I_0\ e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = \frac{1}{2}U_0 I_0\ e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = \frac{1}{2}U_0 e^{j\varphi_u} I_0\ e^{-j\varphi_i}$$

$$\boxed{\underline{S} = \frac{1}{2}U_0\ I_0^*}$$

wartość sprzężona

Współczynnik mocy: $\cos\varphi = \frac{P}{|S|}$

# Dopasowane energetyczne dla prądu sinusoidalnego

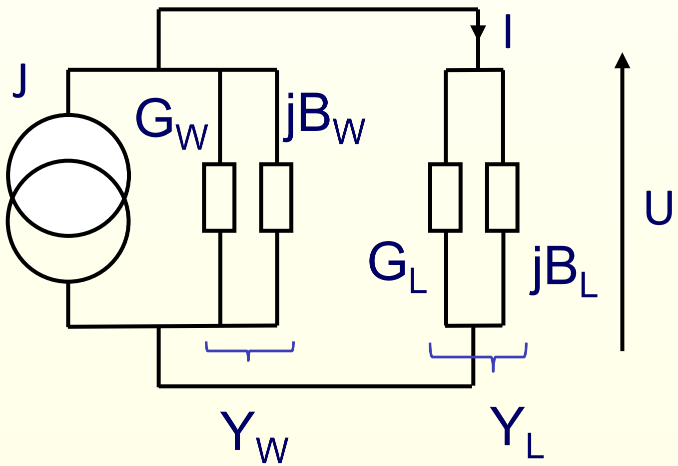



$$P_L = \frac{1}{2}|I|^2 Re(Z_L) = \frac{1}{2}\left|\frac{E}{Z_W+Z_L}\right|^2 R_L$$

$$P_L = \frac{|E|^2}{2}\frac{R_L}{(R_W+R_L)^2+(X_W+X_L)^2}$$

$$P_{Lmax} = \frac{|E|^2}{8R_L} = \frac{|E|^2}{8R_W}$$

$E = Z_w J \quad \equiv \quad J = E\, Y_w \qquad Z_w = 1/Y_w$




**Warunek dopasowania energetycznego:**

$$Z_L = Z_W^* \rightarrow R_L = R_W \ i \ X_L = -X_W$$

$$Y_L = Y_W^* \rightarrow G_L = G_W \ i \ B_L = -B_W$$

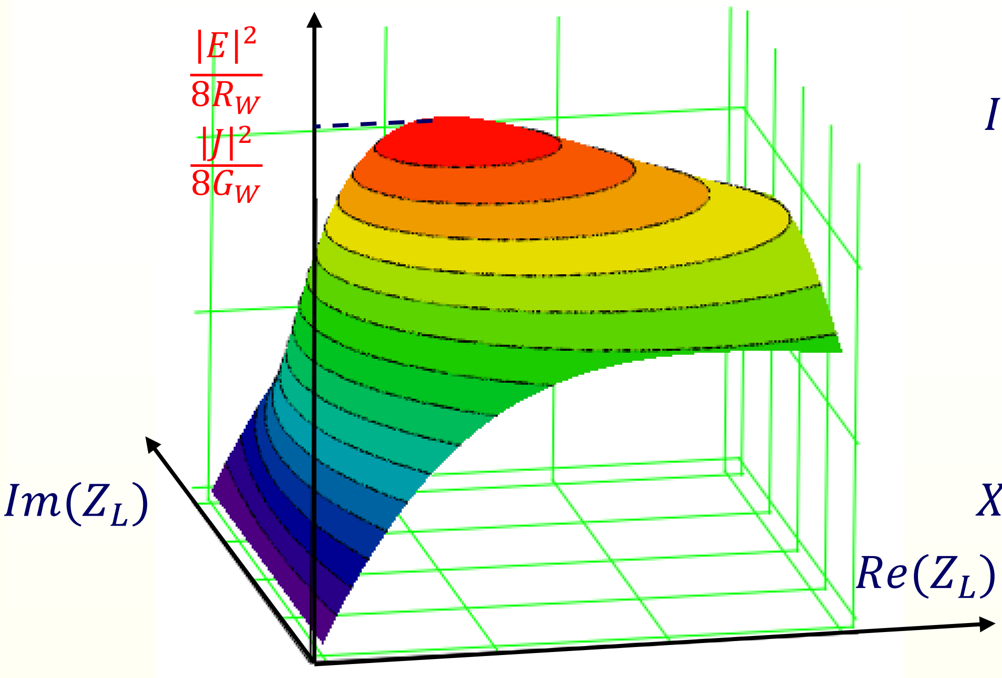
$$P_{Max} = \frac{1}{2}\cdot P_Z \rightarrow \eta = \frac{P_L}{P_Z} = 50\%$$

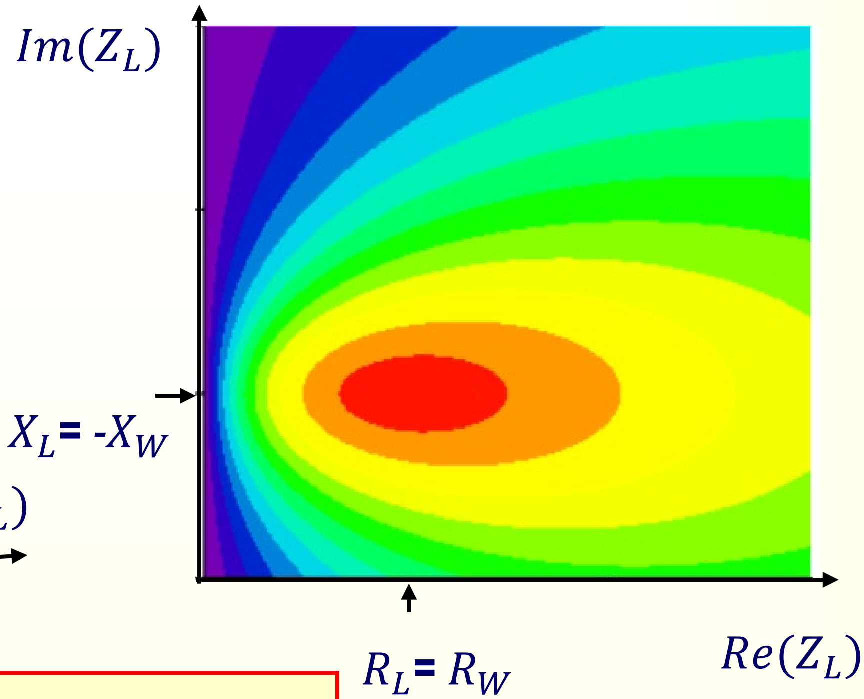
$$P_L = \frac{1}{2}|U|^2 Re(Y_L) = \frac{1}{2}\left|\frac{J}{Y_W+Y_L}\right|^2 G_L$$

$$P_L = \frac{|J|^2}{2}\frac{G_L}{(G_W+G_L)^2+(B_W+B_L)^2}$$

$$P_{Lmax} = \frac{|J|^2}{8G_L} = \frac{|J|^2}{8G_W}$$

# Dopasowane energetyczne dla prądu sinusoidalnego



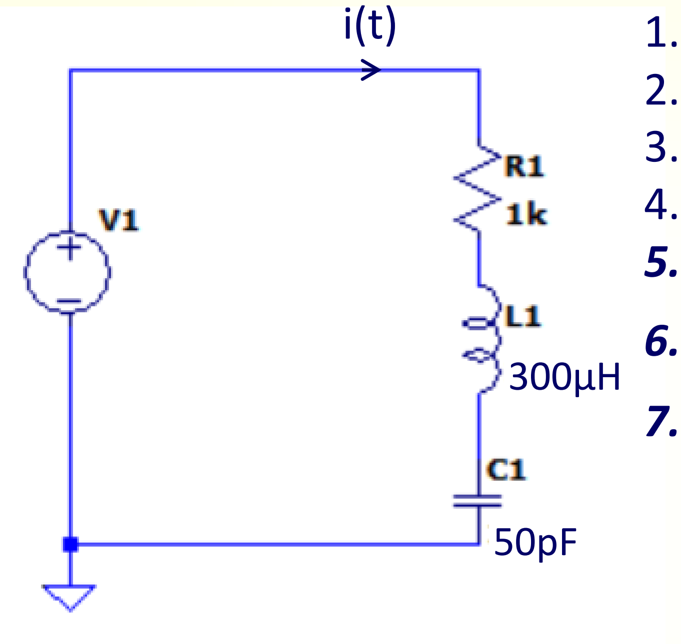




Warunek dopasowania energetycznego:

$$Z_L = Z_W^* \rightarrow R_L = R_W \text{ i } X_L = -X_W$$

$$Y_L = Y_W^* \rightarrow G_L = G_W \text{ i } B_L = -B_W$$

Przykład : Należy wyznaczyć: Prąd I, napięcie na R1, L1, C1, jeżeli V1=10sin(ωt), f=10/(2π) [MHz].
(Wskazy i przebiegi czasowe)




1. V1(t) = 10 sin(ωt) -> $\boldsymbol{V1} = -10j\ [V]$
2. ω = $10^7$ [rad/s]
3. $X_L$= ωL1 = 3000 [Ω]=3 [kΩ]
4. $X_C$= -1/(ωC1)= -2000 [Ω]= -2 [kΩ]
5. ***Z***=R1+j($X_L$ +$X_C$)=1+j(3-2)=1+1j [kΩ]
6. $I = \frac{V1}{Z} = \frac{-10j}{1+1j} = \frac{-10j\cdot(1-1j)}{(1+1j)(1-1j)} = -5-5j\ [mA]$
7. $U_{R1} = I \cdot R = (-5-5j)\cdot 1 = -5-5j$ [mA kΩ] $= -5-5j$ [V]

   $U_{R1} = \sqrt{5^2+5^2}\cdot e^{j\left(\pi+arctg\left(\frac{-5}{-5}\right)\right)} = \sqrt{2}\cdot 5\cdot e^{j\left(\frac{5}{4}\pi\right)} =$

   $U_{R1} = =\sqrt{2}\cdot 5\cdot e^{j\left(-\frac{3}{4}\pi\right)}$

8. $U_{L1} = I\cdot Z_L = (-5-5j)\cdot j\,X_L = (-5-5j)\cdot j\,3$ [mA kΩ] $= 15-15j$ [V]

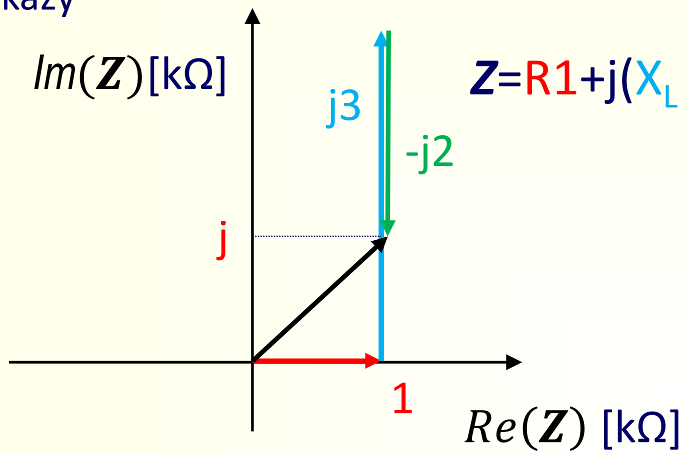
   $U_{L1} = \sqrt{2}\cdot 15\cdot e^{j\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$

9. $U_{C1} = I\cdot Z_C = (-5-5j)\cdot j\,X_C = (-5-5j)\cdot(-j\,2)$ [mA kΩ] $= -10+10j$ [V]

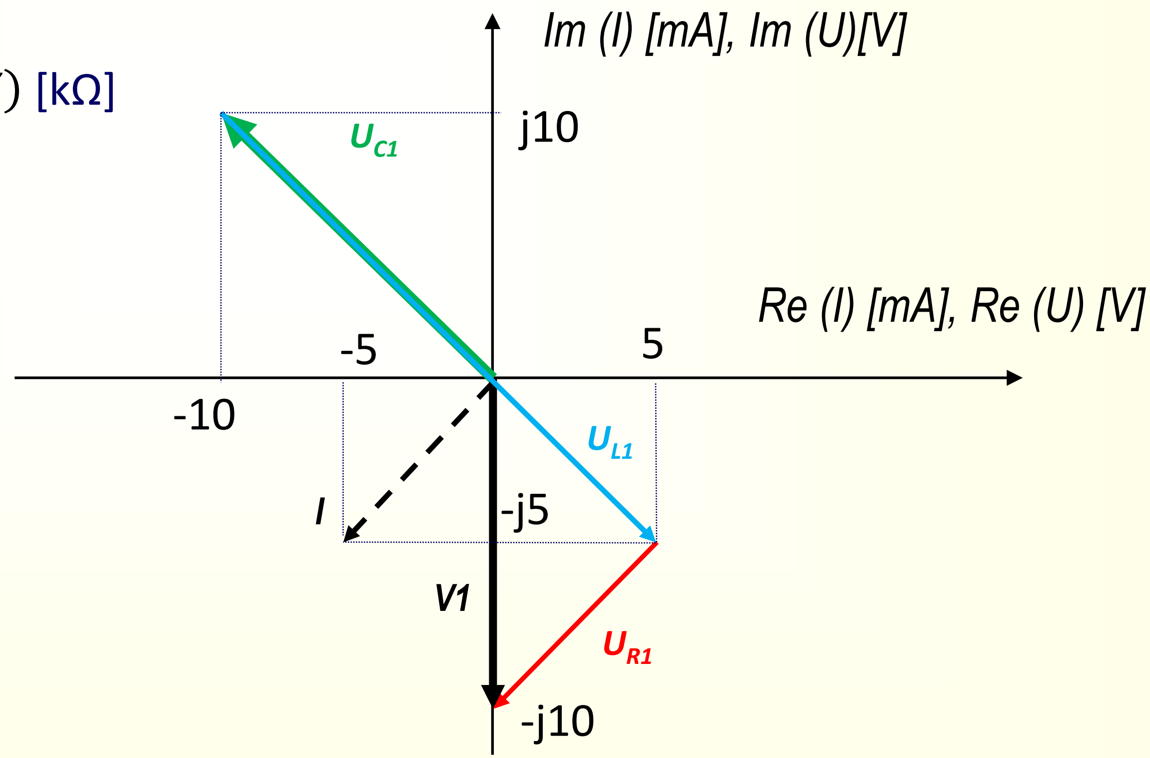
   $U_{C1} = \sqrt{2}\cdot 10\cdot e^{j\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$

Przykład : Należy wyznaczyć: Prąd I, napięcie na R1, L1, C1, jeżeli V1=10sin(ωt), f=10/(2π) [MHz].

Wskazy




$\boldsymbol{Z}=R1+j(X_L+X_C)=1+j(3-2)=1+1j$ [kΩ]




$\boldsymbol{V1} = -10j\ [V]$

$\boldsymbol{I} = -5 - 5j\ [mA]$

$\boldsymbol{I} = 5\sqrt{2} \cdot e^{j(-\frac{3}{4}\pi)}$ [mA]

$\boldsymbol{U_{R1}} = -5 - 5j$ [V]

$\boldsymbol{U_{R1}} = 5\sqrt{2} \cdot e^{j\left(\frac{5}{4}\pi\right)}$

$\boldsymbol{U_{L1}} = 15 - 15j$ [V]

$\boldsymbol{U_{L1}} = 15\sqrt{2} \cdot e^{j(-\frac{\pi}{4})}$ [V]

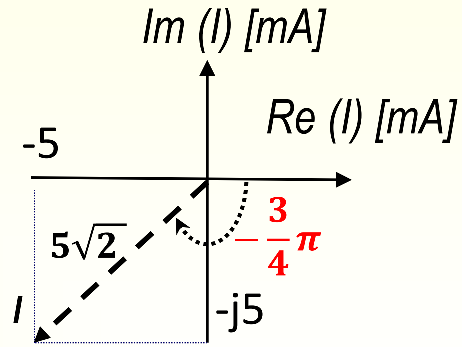
$\boldsymbol{U_{C1}} = -10 + 10j$ [V]

$\boldsymbol{U_{C1}} = 10\sqrt{2} \cdot e^{\,j(\frac{3\pi}{4})}$ [V]

Przykład : Należy wyznaczyć: Prąd I, napięcie na R1, L1, C1, jeżeli V1=10sin(ωt), f=10/(2π) [MHz].
(Wskazy i przebiegi czasowe)

**10.** $\boldsymbol{I} = -5 - 5j\ [mA]$

$\boldsymbol{I} = 5\sqrt{2} \cdot e^{j(-\frac{3}{4}\pi)}$ [mA]




→ i(t)= -5 cos(ωt) + 5 sin(ωt) [mA]

→ i(t)=$5\sqrt{2}$ cos(ωt$-\frac{3}{4}\pi$) [mA]

**11.** $\boldsymbol{U_{R1}} = -5 - 5j$ [V] → $u_{R1}$(t)= -5 cos(ωt) + 5 sin(ωt) [V]

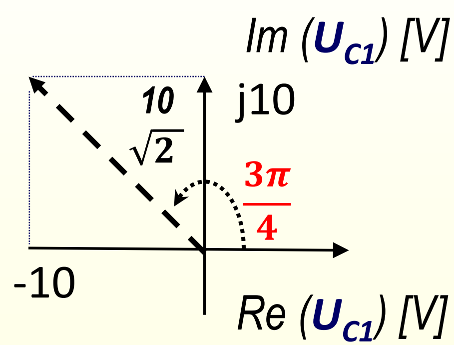
$\boldsymbol{U_{R1}} = 5\sqrt{2} \cdot e^{j\left(\frac{5}{4}\pi\right)}$ → $u_{R1(}$t)= $5\sqrt{2}$ cos(ωt $-\frac{3}{4}\pi$) [V]

**12.** $\boldsymbol{U_{L1}} = 15 - 15j$ [V] → $u_{L1}$(t)= 15 cos(ωt) + 15 sin(ωt) [V]

$\boldsymbol{U_{L1}} = 15\sqrt{2} \cdot e^{j(-\frac{\pi}{4})}$ → $u_{L1}$(t)= $15\sqrt{2}$ cos(ωt $-\frac{\pi}{4}$) [V]

13. $\boldsymbol{U_{C1}} = -10 + 10j$ [V]

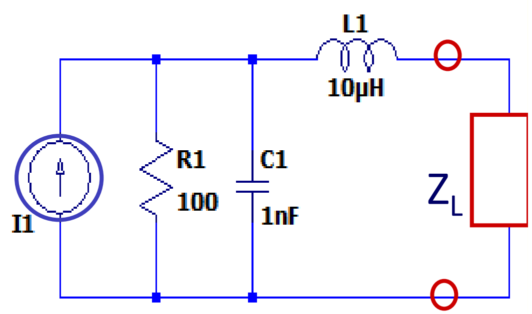
$\boldsymbol{U_{C1}} = 10\sqrt{2} \cdot e^{j(\frac{3\pi}{4})}$




→ $u_{C1}$ (t)= -10 cos(ωt) - 10 sin(ωt) [V]

→ $u_{C1}$ (t)= $10\sqrt{2}$ cos(ωt + $\frac{3\pi}{4}$) [V]

Przykład : Należy wyznaczyć optymalną impedancję obciążenia oraz moc dostarczona do obciążenia w tych warunkach dla układu. Dane: I1(t)= 20 cos(ωt) [mA], $\omega=10^7$ rad/s




$\omega := 10^7$ $\quad I1 := 20\cdot 10^{-3}$ [A]

$R1 := 100$ [Ω] $\quad G1 := \frac{1}{R1}$ $\quad G1 = 0.01$ [S]

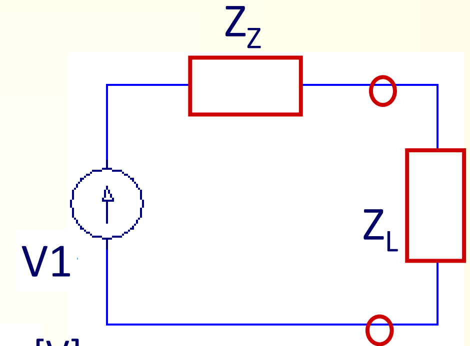
$C1 := 1\cdot 10^{-9}$ $\quad Bc1 := \omega\cdot C1$ $\quad Bc1 = 0.01$ [S]

$Y1 := G1 + i\cdot Bc1$ $\quad Y1 = 0.01 + 0.01i$ [S]

$Z1 := \frac{1}{Y1}$ $\quad Z1 = 50 - 50i$ [Ω]

$L1 := 10\cdot 10^{-6}$ $\quad Xl1 := \omega\cdot L1$ $\quad Xl1 = 100$ [Ω]

$Zz := Z1 + iXl1$ $\quad Zz = 50 + 50i$ [Ω]




$V1 := I1\cdot Z1$ [V]

$V1 = 1 - i$ [V]

$V1 := \sqrt{2}\cdot e^{-i\cdot\frac{\pi}{4}}$ [V]

$Z_{LOPT} = Zz^*$

$Z_{LOPT} = 50 - 50i$ [Ω]

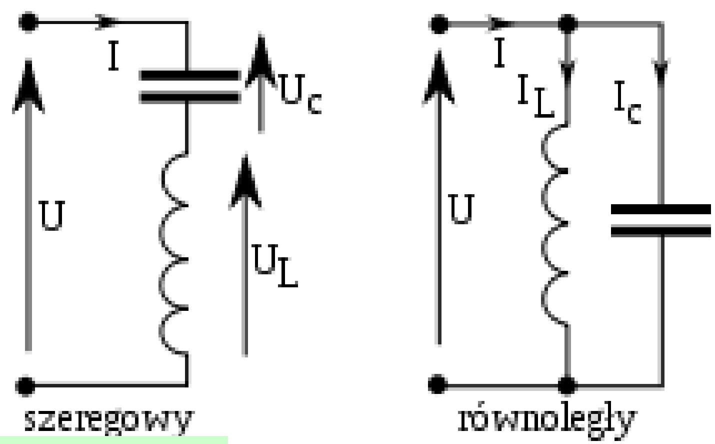
$$Pmax := \frac{1}{8}\cdot\frac{(|V1|)^2}{Re(Zlopt)}$$

$Pmax := \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{50}$ $\qquad Pmax = 5\times 10^{-3}$ [W] $\qquad$ Pmax = 5 [mW]

# Obwody rezonansowe

Idealne obwody rezonansowe

Równoległe lub szeregowe połączenie kondensatora z cewką (obwód rezonansowy) charakteryzuje się silną zależnością impedancji od częstotliwości.




$$Z = jX = j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

$$Y = jB = j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

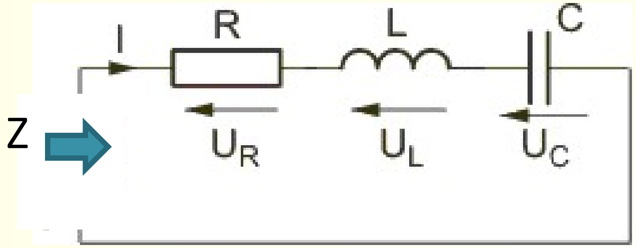
Częstotliwość rezonansowa $f_0$ to taka częstotliwość przy której:
w idealnym obwodzie szeregowym **Z=0**
a w idealnym obwodzie równoległym **Y=0**

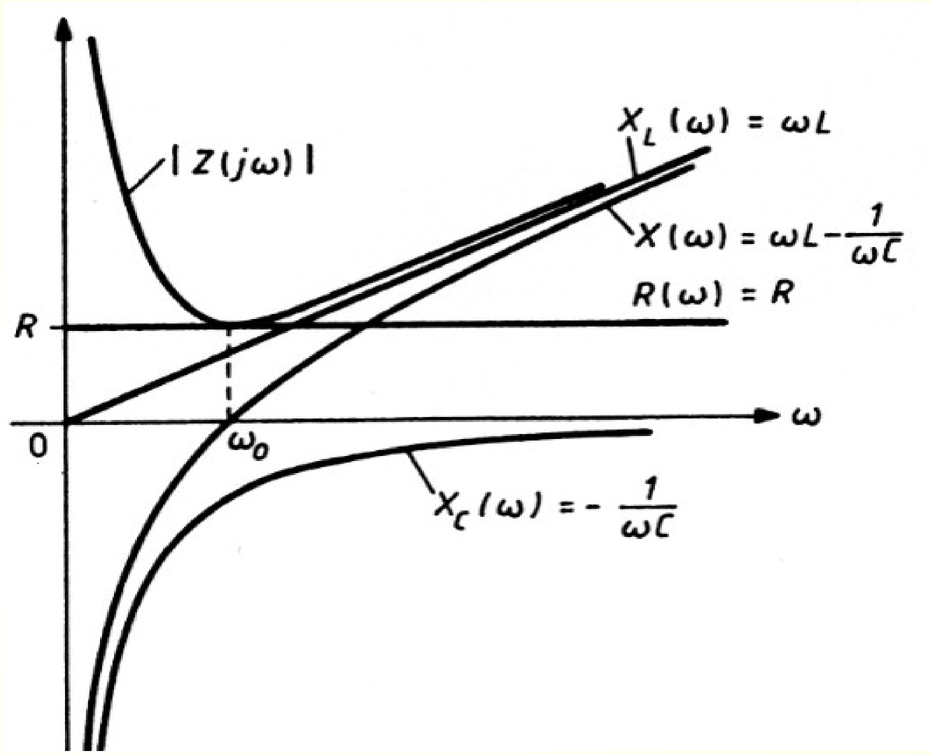
$$\omega C = \frac{1}{\omega L} \quad gdy \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Taką wartość ω nazywamy pulsacją rezonansową :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad czyli \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

# Szeregowy obwód rezonansowy (ze stratami) cd.




$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

$$\mathrm{Re}(Z) = R$$

$$\mathrm{Im}(Z) = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

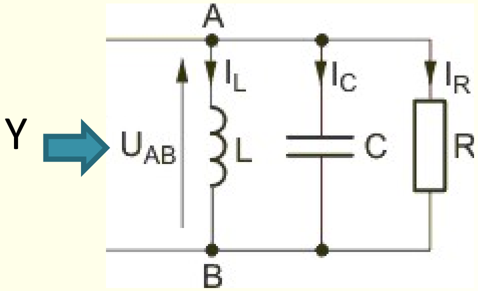
$$\varphi_Z = arctg\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

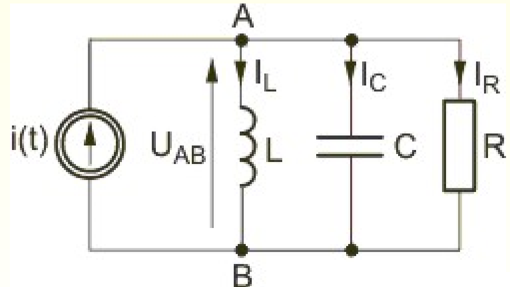
Wnioski:
Jeśli $f=f_0$ (rezonans):
$|Z|=|Z|_{min}=R$
$X=0$
więc $\varphi_Z=0$

Wnioski:
Jeśli $f<f_0$
- charakter pojemnościowy

jeśli $f>f_0$
- charakter indukcyjny

# Równoległy obwód rezonansowy (ze stratami)




$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad czyli \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

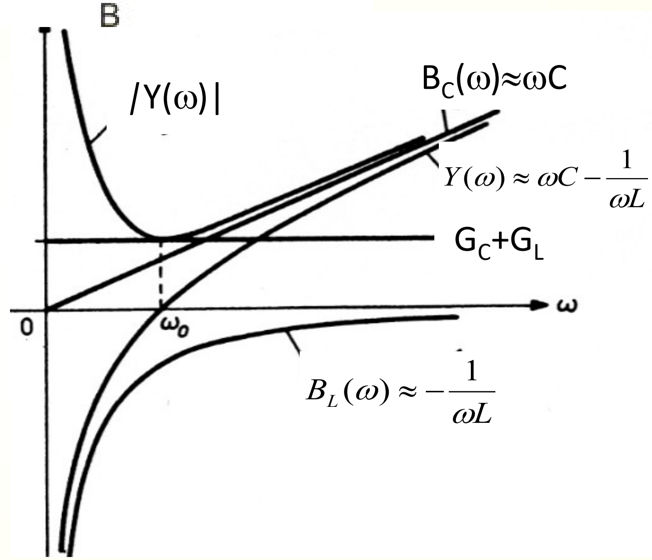
$$Y = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

$$\mathrm{Re}(Y) = G = \frac{1}{R}$$

$$\mathrm{Im}(Y) = \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

$$|Y| = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}$$

$$\varphi_Y = arctg\left[R\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)\right]$$




| | |
|---|---|
| Wnioski:<br>Jeśli $f=f_0$ (rezonans):<br>$\lvert Y\rvert = \lvert Y\rvert_{min} = 1/R$<br>$B=0$<br>więc $\varphi_Y=0$ | Wnioski:<br>Jeśli $f<f_0$<br>- charakter indukcyjny<br>jeśli $f>f_0$<br>- charakter pojemnościowy |

# Dobroć

Definicja „pasmowa”:

$$Q^{\star} = \frac{f_{\mathrm{r}}^{\star}}{\Delta f_{3\mathrm{dB}}} = \frac{\omega_{\mathrm{r}}^{\star}}{\Delta \omega_{3\mathrm{dB}}}$$

Definicja „energetyczna”:

$$Q = 2\pi f_{\mathrm{r}} \frac{W_{L,C\,\max}}{P} = \omega_{\mathrm{r}} \frac{W_{L,C\,\max}}{P}$$

Definicja „obwodowa”:

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\sqrt{L/C}}{R}$$

Obwód szeregowy

$$Q = R\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{R}{\omega_0 L} = \frac{R}{\sqrt{L/C}}$$

Obwód równoległy

## Pobudzenie sygnałem złożonym: DC i sinusoidalnie zmiennym z wieloma harmonicznymi

- Każdy przebieg okresowy można, zapisać w postaci szeregu Fouriera
- Zgodnie z zasadą superpozycji, obliczenia należy wykonać oddzielnie dla DC i każdej harmonicznej
- Na końcu należy dodać „składniki” od DC i każdej harmonicznej.

$$\boxed{u(t) = U_{DC} + \sum_n U_n \cos(n\omega t + \varphi_n)\,, i(t) = I_{DC} + \sum_n I_n \cos(n\omega t + \varphi_n)}$$

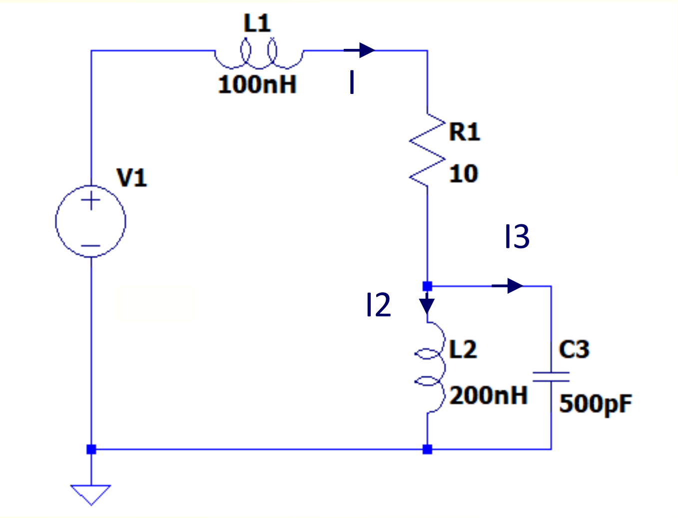
## Moc w obwodach dla pobudzenia sygnałem złożonym: DC i sinusoidalnie zmiennym z wieloma harmonicznymi

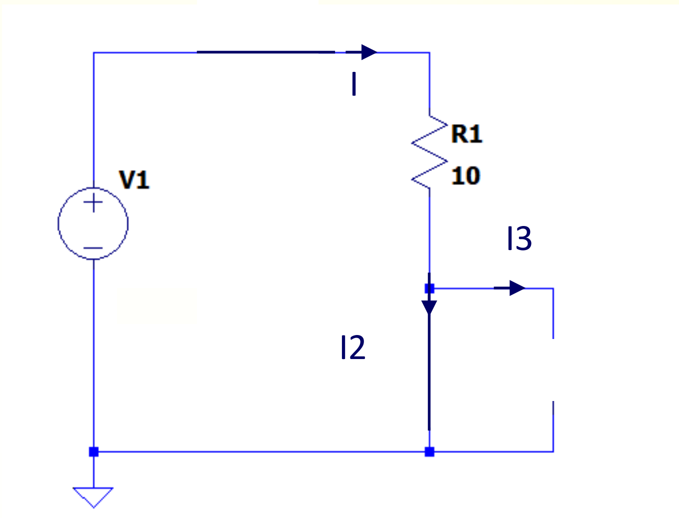
Twierdzenie Parsevala

$$P = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} p(t)\ dt = P_{DC} + \sum_n P_n = U_{DC}I_{DC} + \sum_n \frac{1}{2} Re(U_n I_n^*)$$

Przykład : Należy wyznaczyć: Prąd I, I1, I2, napięcie UR1, U2, U3 C1, jeżeli V1=5+ 10sin(ωt) + 20cos(2*ωt) f=100/(2π) [MHz], oraz moc wydzielaną w rezystorze R1.

DC




U1 =V1= 5V

I3 = 0 A

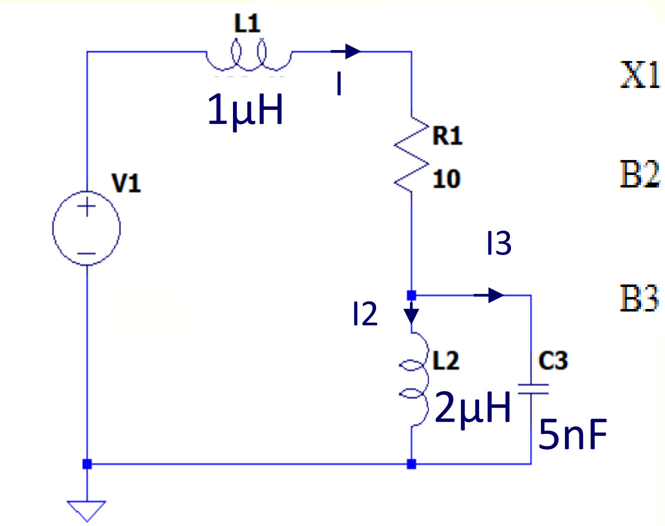
U2=U3 = 0V

I = I2 = V1/R1= 0.5A

P= U1 I = 2.5W

Przykład : Należy wyznaczyć: Prąd I, I1, I3, napięcie UR1, U2, U3 C1, jeżeli V1=5+ 10sin(ωt) + 20cos(2*ωt) f=100/(2π) [MHz], oraz moc wydzielaną w rezystorze R1.

AC




$$X1 := \omega \cdot L1$$

$$B2 := \frac{-1}{\omega \cdot L2}$$

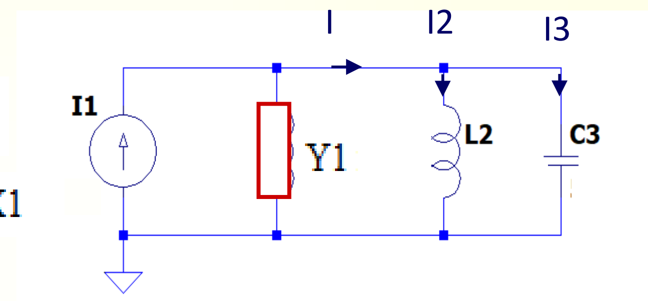
$$B3 := \omega \cdot C3$$

$$I1 := V1 \cdot Y1$$

$$Z1 := R1 + i \cdot X1$$

$$Y1 := \frac{1}{Z1}$$

$$Y1 := \frac{R1 - i \cdot X1}{R1^2 + X1^2}$$




$$U2 := \frac{I1}{[Y1 + i \cdot (B2 + B3)]} = U3$$

$$I := \frac{i \cdot (B2 + B3) \cdot I1}{Y1 + i \cdot (B2 + B3)}$$

$$I2 := \frac{i \cdot B2 \cdot I1}{Y1 + i \cdot (B2 + B3)}$$

$$I3 := \frac{i \cdot B3 \cdot I1}{Y1 + i \cdot (B2 + B3)}$$

$$U1 := \frac{V1 \cdot R1}{R1 + i \cdot X1 + \frac{1}{i \cdot B2 + i \cdot B3}}$$

Przykład : Należy wyznaczyć: Prąd I, I1, I2, napięcie 1 L1, C1, jeżeli V1=5+ 10sin(ωt) + 20cos(2*ωt) f=100/(2π) [MHz].

| | f=0 Hz (DC) | f=100/(2π) $10^6$ Hz | f=200/(2π) ) $10^6$ Hz |
|---|---|---|---|
| V1 | 5 V | - j10 V | 20 V |
| X1 | 0 Ω | 10 Ω | 20 Ω |
| Z1 | 10 Ω | 10 + j 10 Ω | 10 + j 20 Ω |
| Y1 | 100 mS | 50 – j 50 mS | 20 – j 40 mS |
| B2 | ∞ S | - 50 mS | - 25 mS |
| B3 | 0 S | 50 mS | 100 mS |
| U1 | 5 V | 0 V | 13.8 – j 9.23 V |
| U2=U3 | 0 V | - j10 V | -12.3 – j 18.5 |
| I | 0.5 A | 0 A | 1.38 – j 0.922 A |
| I2 | 0.5 A | -0.5 A | -0.461 + j 0.308 A |
| I3 | 0 A | 0.5 A | 1.84 – j1.23 A |

$i(t)= 0.5 + 0 \cdot \cos(100\cdot 10^6 \cdot t) + 0 \cdot \sin(100\cdot 10^6 \cdot t) + 1.38 \cos(200\cdot 10^6 \cdot t) + 0.922 \sin(200\cdot 10^6 \cdot t)$ [A]

$I2(t)= 0.5 - 0.5 \cdot \cos(100\cdot 10^6 \cdot t) + 0 \cdot \sin(100\cdot 10^6 \cdot t) - 0.461 \cos(200\cdot 10^6 \cdot t) - 0.308 \sin(200\cdot 10^6 \cdot t)$ [A]

$I3(t)= 0 + 0.5 \cdot \cos(100\cdot 10^6 \cdot t) + 0 \cdot \sin(100\cdot 10^6 \cdot t) + 1.84 \cos(200\cdot 10^6 \cdot t) + 1.23 \sin(200\cdot 10^6 \cdot t)$ [A]

$u1(t)= 5 + 0 \cdot \cos(100\cdot 10^6 \cdot t) + 0 \cdot \sin(100\cdot 10^6 \cdot t) + 13.8 \cos(200\cdot 10^6 \cdot t) + 9.23 \sin(200\cdot 10^6 \cdot t)$ [V]

$P = 5^2/10 + \frac{1}{2} \cdot (0^2 + 0^2)/10 + \frac{1}{2} \cdot ((13.8)^2 + (-9.23)^2)/10 = 2.5 + 0 + 13.8 = 16.3$ [W]