Zad. 1.

1. (2 pkt.) Znajdź przestrzeń rozwiązań nad $\mathbb R$ następującego układu jednorodnego:

$$\begin{array}{c} x_1 = 0 \\ \times_2 = -t_1 \end{array}$$

$$x_1 - t_1 + t_1 + t_2 = 0$$

$$x_1 - t_1 + t_1 + t_2 = 0 \qquad x_1 = -t_2$$

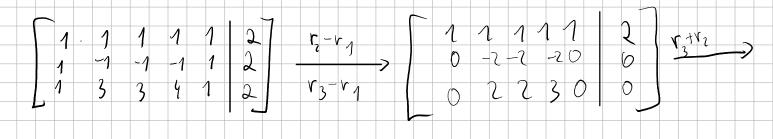
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2230

1 +1+2 ER

$$W = \mathcal{L}\left(\left[0, -1, 1, 0, 0\right], \left[-1, 0, 0, 0, 1\right]\right)$$

2. (1 pkt.) Wykorzystując wynik z punktu 1. rozwiąż układ niejednorodny:

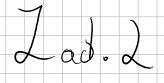


$$\begin{bmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\
0 & 2 & -2 & -2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c}
x_3 = t_1 & x_4 = 0 & x_5 = t_2 \\
x_1 = t_1 & x_4 = 0 & t_7 = 2
\end{array}$$

$$x_3 = t_3 \qquad x_4 = 0 \qquad x_5 = t_2$$

$$x_1 = 1_1$$
 $x_1 = 1_1$
 $x_1 = 1_1$
 $x_2 = 1_2$



Zad. 2

2 1. (2 pkt.) Znajdź wszystkie wektory 3-wymiarowej przestrzeni wektorowej nad ciałem $(Z_2, +_2, \cdot_2)$.

2. (1 pkt.) Sprawdź, czy wielomiany $x^2 + x$, $x^2 + x + 1$ oraz x + 1 są liniowo niezależne w przestrzeni wielomianów $\mathbb{Z}_2[x]$.

γ=0 β=0 α=0

INIONO MEZALEZNY

Zed. 3

Zad. 3 Dane jest przekształcenie liniowe $F: \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ takie, że

$$F\left([x_1,x_2,x_3,x_4]\right) = [x_1 + x_2 + 2x_3, -2x_1 + 2x_2 + 4x_4, x_1 + x_3 - x_4].$$

1. (1 pkt.) Wyznacz macierz tego przekształcenia w bazach standardowych.

$$F\left(\left[0,0,1,0\right]\right)=\left[2,0,1\right]$$

$$F\left(\left(\left(0,0,0,1\right)\right)=\left(\left(0,\frac{1}{2},-1\right)\right)$$

$$x_{1} = -t_{1} + t_{2}$$

$$x_{1} - t_{2} + 2t_{1} = 0$$

$$y = \begin{bmatrix} -t_{1} + t_{2} \\ -t_{1} + t_{2} \end{bmatrix} - t_{1} + t_{2} \begin{bmatrix} -t_{1} + t_{2} \\ -t_{1} + t_{2} \end{bmatrix} - t_{1} \begin{bmatrix} -t_{1} + t_{2} \\ -t_{1} \end{bmatrix} + t_{2} \begin{bmatrix} -t_{1} + t_{2} \\ -t_{1} \end{bmatrix}$$

Zad. 4 Dane jest przekształcenie liniowe $F: \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ takie, że

$$F([x, y, z]) = [-2x + 4y + 2z, 2y + 2z, x - y + z].$$

2 1. (2 pkt.) Wyznacz wszystkie wartości własne i podprzestrzenie wektorów własnych tego przekształcenia.

$$\chi_{A}(\lambda) = \det \left(A - \lambda \cdot I_{A}\right) = \begin{pmatrix} -2 - \lambda & 4 & 2 \\ 0 & 2 - \lambda & 2 \\ 1 & -1 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^{1+1} \cdot (-2-1) \cdot \begin{vmatrix} 2-1 & 2 \\ -1 & 1-2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2-2 & 2 \end{vmatrix} =$$

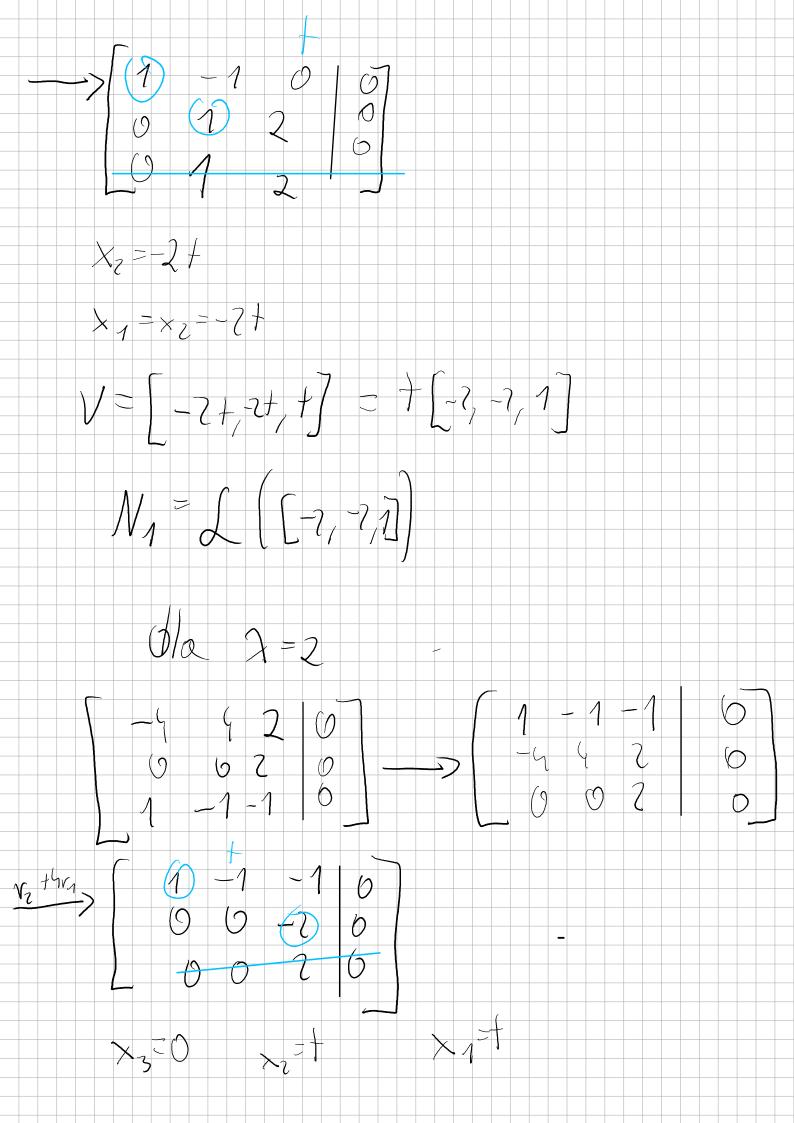
$$= \left(-2-\lambda\right)\left(\left(2-\lambda\right)\left(1-\lambda\right)+2\right)+\left(3-\zeta+2\lambda\right)=\left(-2-\lambda\right)\left(2-3\lambda+\lambda^2+2\right)+\zeta+2\lambda=$$

$$= -(\lambda+2)\left[\lambda^2-3\lambda+4-2\right] = -(\lambda+2)\left[\lambda^2-3\lambda+2\right] = -(\lambda+2)\left[\lambda-2\right)\left[\lambda-1\right]$$

$$\begin{bmatrix}
-3 & 4 & 7 & 6 \\
0 & 1 & 7 & 0
\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
7 & 7 & 7 & 7
\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
7 & 7 & 7
\end{bmatrix}$$



$$\begin{aligned}
\mathbf{V} &= \begin{bmatrix} +1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{N}_1 &= \mathbf{J} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \\
\mathbf{J}_1 &= \mathbf{J}_2 \\
\mathbf{J}_2 &= \mathbf{J}_3 \\
\mathbf{J}_3 &= \mathbf{J}_4 \\
\mathbf{J}_3 &= \mathbf{J}_4 \\
\mathbf{J}_3 &= \mathbf{J}_4 \\
\mathbf{J}_4 &= \mathbf{J}_4 \\
\mathbf{J}$$

(2 pkt.) Wyznacz bazę \mathcal{C} przestrzeni \mathbb{C}^3 składającą się z maksymalnej ilości wektorów własnych przekształcenia F. Podaj macierze $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(F)$ oraz $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\mathrm{Id})$, gdzie \mathcal{B} jest bazą standardową \mathbb{C}^3 .

