Matematyka 3. Egzamin 29.06.2020. Część 1.

- Proszę rozwiązania zadań zapisać odręcznie, a następnie przesłać ich skan lub zdjęcie.
- Każdy wysłany plik proszę podpisać wg schematu: $Mat3\_Egz21\_X\_Nazwisko\_Y$
  X - pierwsza litera imienia
  Y - nr wysyłanego pliku (jeśli więcej niż jeden)
- Na końcu rowiązania każdego z dwóch zadań proszę umieścić Oświadczenie o treści:
  "***Oświadczam, że niniejsza praca stanowiąca podstawę do uznania osiągnięcia efektów uczenia się z przedmiotu Matematyka 3 została wykonana przeze mnie samodzielnie.***"
- Pod oświadczeniem proszę wpisać nr Indeksu i złożyć czytelny podpis.

Numer indeksu:

f	e	d	c	b	a

Zad. 1 (15 pkt.)

1. (10 pkt.) Niech $R^5(\mathbb{R})$ będzie przestrzenią unitarną z iloczynem skalarnym

$$< [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5], [y_1, y_2, y_3, y_4, y_5] >= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 + x_5y_5.$$

   Stosujac ortogonalizację Grama-Schmidta znaleźć bazę ortonormalną podprzestrzeni $W \subseteq R^5$ rozwiązań następującego jednorodnego układu równań liniowych:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 &= 0 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 + 2x_5 &= 0 \end{aligned}$$

2. (5 pkt.) Sprawdzić, czy dołączając wektor $\boldsymbol{v} = [a, b, c, d, e]$ do bazy podprzestrzeni W tak utworzony nowy układ pozostaje liniowo niezależny.

Zad. 2 (20 pkt.) Dana jest macierz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

przekształcenia $F\colon R^3 \to R^3$ w bazie standardowej $\mathcal{B} : [1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 1]$.

1. (2 pkt.) Znaleźć wszystkie wartości własne odwzorowania F.
2. (2 pkt.) Znaleźć, jeśli to możliwe, formę dwuliniową hermitowską $g\colon R^3 \times R^3 \to R$, dla której A jest macierzą Grama w bazie standardowej.
3. (16 pkt.) Znaleźć bazę $\mathcal{C}$ przestrzeni $R^3(\mathbb{R})$, w której macierz $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(F)$ jest w postaci diagonalnej. Znaleźć obie macierze zmiany bazy: $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F)$ oraz $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(F)$.