MAT2 Rozwiązania

Z_6

1. Obliczyć $\int_C f(z)dz$, gdzie

$$\text{(a)} \quad f(z) = z^2 - 2z\,, \quad C - \text{odcinek } \overline{AB}:\ A = 1\,,\ B = i$$

Funkcja $f(z)$ jest holomorficzna, więc wartość całki nie zależy od drogi całkowania, a tylko od punktu początkowego i końcowego, stosujemy odpowiednik wzoru podstawowego rachunku całkowego

$\int_C (z^2 - 2z)\,dz = \left(\frac{z^3}{3} - z^2\right)\Big|_1^i = \frac{i^3}{3} - \frac{1}{3} - i^2 + 1 = 1\frac{2}{3} - \frac{i}{3}$

$$\text{(b)} \quad f(z) = \frac{\bar{z}}{z+i}\,, \quad C = K^+(-i,3):\ |z+i| = 3$$

Zastosujemy twierdzenie o zamianie całki funkcji zmiennej zespolonej na całkę Riemanna:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(z(t)) \cdot z'(t)\,dt$$

gdzie $z(t)$ jest parametryzacją łuku C zgodną z kierunkiem tego łuku.

Parametryzacja okręgu $K(-i,3):\ z(t) = -i + 3e^{it}\,, \quad t \in [0, 2\pi]$

Dlatego $\bar{z}(t) = 3e^{-it} + i\,,\ z'(t) = 3ie^{it}$ i stąd

$\int_{K^+(-i,3)} \frac{\bar{z}}{z+i}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{3e^{-it}+i}{3e^{it}} \cdot 3ie^{it}\,dt = 3i\int_0^{2\pi} e^{-it}\,dt - \int_0^{2\pi}\,dt =$
$= 3i\ \frac{e^{-it}}{-i}\Big|_0^{2\pi} - \ t\Big|_0^{2\pi} = -2\pi$

2. Obliczyć całkę $\oint_{C_k^+} \frac{z}{z^4-1}\,dz$, gdzie C_k jest dodatnio zorientowanym okręgiem

$$\text{(a)} \quad C_1:\ |z - i| = 1$$

$f(z) = \frac{z}{z^4-1} = \frac{z}{(z-1)(z+1)(z-i)(z+i)}$

Skorzystamy z twierdzenia całkowego o residuach:

$$\oint_{C^+} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \mathrm{res}_{z_k} f(z)$$

gdzie $z_1, \ldots, z_m$ są punktami osobliwymi funkcji $f(z)$ leżącymi wewnątrz krzywej C.

Wewnątrz krzywej C_1 leży jeden punkt osobliwy funkcji $f(z)$: $z = i$, który jest biegunem 1-krotnym funkcji $f(z)$.

Możemy skorzystać z wzoru dla bieguna rzędu 1 funkcji $f(z)$ w punkcie z_0:

$$\mathrm{res}_{z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$

$\mathrm{res}_i f(z) = \lim_{z\to i} \frac{z}{(z^2-1)(z+i)} = \frac{-i}{-4i} = -\frac{1}{4}$

Stąd

$\int_{C_1^+} \frac{z}{z^4-1}\, dz = 2\pi i \cdot \mathrm{res}_i f(z) = 2\pi i \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{\pi i}{2}$

$$\text{(b)} \quad C : |z - i| = 3$$

Krzywa C zawiera wszystkie punkty nieholomorficzności funkcji podcałkowej, więc:

$$\oint_{C^+} f(z)\, dz = 2\pi i \left[\mathrm{res}_1 f(z) + \mathrm{res}_{-1} f(z) + \mathrm{res}_i f(z) + \mathrm{res}_{-i} f(z))\right]$$

$\mathrm{res}_1 f(z) = \lim_{z\to 1} \frac{z}{(z^2+1)(z+1)} = \frac{1}{4}$

$\mathrm{res}_{-1} f(z) = \lim_{z\to -1} \frac{z}{(z^2+1)(z-1)} = \frac{1}{4}$

$\mathrm{res}_{-i} f(z) = \lim_{z\to -i} \frac{z}{(z^2-1)(z-i)} = -\frac{1}{4}$

$\Rightarrow \oint_{C^+} \frac{z}{z^4-1}\, dz = 2\pi i \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = 0$

$$\text{(c)} \quad C : |z-3| = 1$$

Z tw. podstawowego Cauchy'ego wynika, że $\oint_{C^+} \frac{z}{z^4-1}\, dz = 0$, ponieważ punkty nieholomorficzności funkcji podcałkowej leżą na zewnątrz krzywej C.

3. Przedstawić funkcję

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - 3z + 2}$$

w postaci szeregu (Taylora lub Laurenta) zbieżnego w obszarze

$$\text{(a)} \quad |z| < 1$$

$f(z) = \frac{2}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \frac{2}{z-2} + \frac{1}{1-z}$

$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{-2\left(1-\frac{z}{2}\right)} = \left\| \begin{array}{c} \left|\frac{z}{2}\right| < 1 \\ |z| < 2 \end{array} \right\| = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$

$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad |z| < 1$

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) z^n$

$$\text{(b)} \quad 1 < |z| < 2$$

$\frac{1}{z-2}$ - jak wyżej

$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)} = \left\| \begin{array}{c} \left|\frac{1}{z}\right| < 1 \\ |z| > 1 \end{array} \right\| = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}$

$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}$

$$(c) \quad |z| > 2$$

$\frac{1}{1-z}$ - jak wyżej

$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z\left(1-\frac{2}{z}\right)} = \left\| \begin{array}{l} \left|\frac{2}{z}\right| < 1 \\ |z| > 2 \end{array} \right\| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}}$

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} (2^{n+1} - 1) \frac{1}{z^{n+1}}$

5. Rozwiązać równanie różniczkowe

$$(a) \quad x \cdot y' = \mathrm{tg} y,$$

$x \frac{dy}{dx} = \mathrm{tg}\, y \Rightarrow \int \frac{dy}{\mathrm{tg}\, y} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{\cos y}{\sin y}\, dy = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|\sin y| = \ln|x| + C \Rightarrow$
$\Rightarrow \sin y = Cx$

$$(b) \quad y' + 2xy = xe^{-x^2}$$

Równanie jednorodne: $\frac{dy}{dx} = -2xy \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -2 \int x\, dx \Rightarrow$
$\Rightarrow \ln|y| = -x^2 + C \Rightarrow y = Ce^{-x^2}$

Aby wyznaczyć całkę szczególną równania niejednorodnego stosujemy metodę uzmienniania stałej, ponieważ np. po lewej stronie równania współczynnik przy y nie jest stały

$y = C(x) \cdot e^{-x^2} \Rightarrow y' = C'(x)e^{-x^2} + C(x)e^{-x^2} \cdot (-2x)$

Podstawiamy do równania niejednorodnego y, y':

$C'(x)e^{-x^2} + C(x)e^{-x^2} \cdot (-2x) + 2xC(x)e^{-x^2} = xe^{-x^2} \Rightarrow C'(x) = x \Rightarrow$
$\Rightarrow C(x) = \frac{x^2}{2} + C$

$y(x) = \left(\frac{x^2}{2} + C\right) e^{-x^2} = Ce^{-x^2} + \frac{x^2}{2} e^{-x^2}$

$$\text{(c)} \quad y' - 2y = \cos x - x \sin x$$

Równanie jednorodne: $\frac{dy}{dx} = 2y \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = 2 \int dx \Rightarrow \ln|y| = 2x + C \Rightarrow$
$\Rightarrow y_0(x) = Ce^{2x}$

Równanie niejednorodne (metoda przewidywań): $f(x) = \cos x - x \sin x \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha = 0, \beta = 1, \alpha + i\beta = i \neq 2 \Rightarrow k = 0$

Dlatego y_1 przewidujemy w postaci $y_1 = (Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x \Rightarrow$
$\Rightarrow y_1' = A\cos x - (Ax + B)\sin x + C\sin x + (Cx + D)\cos x$

Podstawiamy y_1, y_1' do wyjściowego równania, porównujemy współczynniki przy $\cos x$, $\sin x$, $x\cos x$ i $x \sin x$ otrzymując układ równań liniowych z niewiadomymi A, B, C i D.

$$\begin{cases} A + D - 2B = 1 \\ -B + C - 2D = 0 \\ C - 2A = 0 \\ -A - 2C = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{5} \\ B = -\frac{6}{25} \\ C = \frac{2}{5} \\ D = \frac{8}{25} \end{cases}$$

$y(x) = y_0(x) + y_1(x) = Ce^{2x} + \left(\frac{1}{5}x - \frac{6}{25}\right)\cos x + \left(\frac{2}{5}x + \frac{8}{25}\right)\sin x$

$$\text{(d)} \quad y'' - 4y' = 8x, \;\; y(0) = 1, \;\; y'(0) = -1$$

Równanie jednorodne jest równaniem drugiego rzędu o stałych współczynnikach, szukamy całek szczególnych tworzących układ podstawowy całek w postaci funkcji $y = e^{rx}$, $r \in \mathbb{C}$ i otrzymujemy równanie charakterystyczne:

$r^2 - 4r = r(r-4) = 0 \Rightarrow r_1 = 0\,,\, r_2 = 4 \Rightarrow \{1, e^{4x}\}$ - układ podstawowy całek, rozwiązanie ogólne równania jednorodnego jest kombinacją liniową tych funkcji:

$y_0(x) = C_1 + C_2 e^{4x}$

Całkę szczególną równania niejednorodnego y_1 wyznaczamy stosując metodę przewidywań, bo współczynniki w równaniu są stałe i funkcja po prawej stronie jest odpowiedniej postaci, tzn $f(x) = e^{\alpha x}[W_1(x)\cos\beta x + W_2(x)\sin\beta x]$, gdzie W_1, W_2 są wielomianami.

y_1 przewidujemy w postaci $y_1 = x^k \cdot e^{\alpha x}[V_1(x)\cos\beta x + V_2(x)\sin\beta x]$, gdzie

$k =$ krotność pierwiastka $\alpha + i\beta$ w równaniu charakterystycznym,

V_1, V_2 - wielomiany w postaci ogólnej takie, że $\deg V_1 = \deg V_2 = \max(\deg W_1, \deg W_2)$.

$f(x) = 8x \Rightarrow \alpha = 0, \beta = 0, \alpha + i\beta = 0 = r_1 \Rightarrow k = 1$

Dlatego przewidujemy $y_1 = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx \Rightarrow y_1' = 2Ax + B \Rightarrow$
$\Rightarrow y_1'' = 2A$

Podstawiamy y_1, y_1', y_1'' do wyjściowego równania:

$2A - 4(2Ax + B) = 8x$ i dostajemy układ równań:

$$\begin{cases} -8A = 8 \\ 2A - 4B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Stąd całka ogólna równania niejednorodnego: $y = C_1 + C_2 e^{4x} - x^2 - \frac{1}{2}x$

Wyznaczymy teraz stałe C_1, C_2 korzystając z warunku początkowego:

$$\begin{cases} y = C_1 + C_2 e^{4x} - x^2 - \frac{1}{2}x \\ y' = 4C_2 e^{4x} - 2x - \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ 4C_2 - \frac{1}{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{9}{8} \\ C_2 = -\frac{1}{8} \end{cases}$$

Całka szczególna $y(x) = \frac{9}{8} - \frac{1}{8}e^{4x} - x^2 - \frac{1}{2}x$

(e) $\quad y'' - 7y' + 12y = -e^{4x}$

Równanie charakterystyczne dla równania jednorodnego:

$r^2 - 7r + 12 = 0 \Rightarrow r_1 = 4\,,\ r_2 = 3 \Rightarrow \{e^{4x}, e^{3x}\}$ - układ podstawowy całek $\Rightarrow y_0 = C_1e^{4x} + C_2e^{3x}$ - rozwiązanie ogólne równania jednorodnego

Stosujemy metodę przewidywań:

$f(x) = -e^{4x} \Rightarrow \alpha = 4, \beta = 0, \alpha + i\beta = 4 = r_1 \Rightarrow k = 1$

Dlatego przewidujemy $y_1 = Axe^{4x} \Rightarrow y_1' = Ae^{4x} + 4Axe^{4x} \Rightarrow$
$\Rightarrow y_1'' = 8Ae^{4x} + 16Axe^{4x}$

Podstawiamy y_1, y_1', y_1'' do wyjściowego równania:

$16Axe^{4x} + 8Ae^{4x} - 7Ae^{4x} - 28Axe^{4x} + 12Axe^{4x} = -e^{4x} \Rightarrow A = -1$

Stąd

$y(x) = C_1e^{4x} + C_2e^{3x} - xe^{4x}$

$$\text{(f)}\quad y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2+1}$$

W tym przykładzie zastosujemy metodę uzmienniania stałych, ponieważ ze względu na postać funkcji $f(x)$ po prawej stronie równania nie możemy użyć metody przewidywań, równanie jednorodne jest równaniem o stałych współczynnikach, więc znajdziemy jego całkę ogólną korzystając z równania charakterystycznego.

Równanie charakterystyczne równania jednorodnego: $r^2-2r+1 = (r-1)^2 = = 0 \Rightarrow r_{1,2} = 1 \Rightarrow y(x) = C_1e^x + C_2xe^x$

Równanie niejednorodne: definiujemy funkcję $y(x) = C_1(x)e^x + C_2(x)xe^x \quad (*)$

Aby spełniała ona równanie niejednorodne muszą zachodzić następujące warunki na funkcje $C_1(x), C_2(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)xe^x = 0 \\ C_1'(x)e^x + C_2'(x)(e^x + xe^x) = \frac{e^x}{x^2+1} \end{cases}$$

Jest to układ Cramera względem $C_1'(x), C_2'(x)$, a wyznacznik macierzy współczynników przy niewiadomych jest wyznacznikiem Wrońskiego, który jest niezerowy, bo funkcje $y_1(x), y_2(x)$ tworzą układ podstawowy całek i stąd układ ma dokładnie jedno rozwiązanie, które możemy wyznaczyć z wzorów Cramera

Liczymy wyznacznik Wrońskiego i stosujemy wzory Cramera:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x + xe^x \end{vmatrix} = e^{2x} \neq 0$$

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & xe^x \\ \frac{e^x}{x^2+1} & e^x + xe^x \end{vmatrix}}{e^{2x}} = -\frac{x}{x^2+1}$$

$$C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \frac{e^x}{x^2+1} \end{vmatrix}}{e^{2x}} = \frac{1}{x^2+1}$$

$$C_1(x) = -\tfrac{1}{2}\ln|x^2+1| + C_1\,, \quad C_2(x) = \operatorname{arctg} x + C_2$$

Podstawiamy wyznaczone funkcje $C_1(x)$, $C_2(x)$ do $(*)$ i otrzymujemy całkę ogólną równania niejednorodnego:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + x e^x \operatorname{arctg} x - \tfrac{1}{2} e^x \ln|x^2+1|$$