

# PELP1 - wykład 7

## Niepewności pomiarów

dr inż. Łukasz Maślikowski

Instytut Systemów Elektronicznych  
Politechnika Warszawska

14 kwietnia 2021

# Spis treści

- 1 Źródła niepewności pomiaru
- 2 Podstawowe definicje
- 3 Określanie niepewności
- 4 Dokumentacja wyników pomiarów

# Źródła niepewności pomiaru

- zaburzenie stanu obiektu badanego przez sam pomiar
- losowy rozrzut odczytywanej wartości (pomimo identycznych warunków powtarzanych pomiarów)
- upraszczające założenia stosowane w metodach pomiarowych
- niedokładnie znane wartości przypisane wzorcom bądź stałym
- niedokładne przetwarzanie wielkości mierzonej na porównywaną
- skończona rozdzielczość lub próg czułości przyrządu
- nieuwzględnienie wpływu warunków środowiskowych na pomiar (np. temperatura)
- błędy w odczytywaniu wskazań przyrządu (np. paralaksa, uszkodzenie wyświetlacza)

# Błędy pomiaru

- $x_M$  - wartość uzyskana w wyniku pomiaru
- $x_R$  - wartość rzeczywista mierzonej wielkości, w praktyce **nieznana**

## Błąd bezwzględny

$$\Delta(x) = x_M - x_R$$

## Błąd względny

$$\delta(x) = \frac{\Delta(x)}{x_R}$$

Ze względu na nieznajomość wartości  $x_R$ , pojęcia te mają ograniczone znaczenie praktyczne. Wyjątkiem są błędy systematyczne właściwe, których wpływ należy skorygować przez wprowadzenie **poprawki** do wyniku.

# Niepewność pomiaru

to parametr związany z wynikiem pomiaru, charakteryzujący rozrzut wartości, który można w uzasadniony sposób przypisać wielkości mierzonej

## Niepewność standardowa $u(x)$

niepewność pomiaru wyrażona jako odchylenie standardowe

- przykładowa notacja:  $I = 12,3(0,2) \text{ mA}$

## Niepewność standardowa złożona $u_c(x)$ (ang. *combined*)

niepewność standardowa otrzymana z wykorzystaniem poszczególnych standardowych niepewności pomiaru związanych z wielkościami wejściowymi w modelu pomiaru

# Niepewność pomiaru

## Niepewność graniczna $\Delta_g(x)$

określa taki przedział wokół wyniku pomiaru  $x_M$ , który na pewno obejmie prawdziwą wartość wielkości mierzonej

- definiowana przez producenta przyrządu

## Niepewność rozszerzona $U(x) = ku(x)$ (ang. *expanded*)

określa taki przedział wokół wyniku pomiaru  $x_M$ , który obejmie z przyjętym (dużym) prawdopodobieństwem prawdziwą wartość wielkości mierzonej

- współczynnik rozszerzenia  $k$  zależy od przyjętego poziomu prawdopodobieństwa (*poziomu ufności* - np. 95%) oraz rozkładu prawdopodobieństwa wielkości mierzonej
- przykładowa notacja:  $I = (12,3 \pm 0,2) \text{ mA}$

# Pomiary bezpośrednie

Niepewność wyniku pomiaru bezpośredniego może mieć kilka składowych.

Pod względem sposobu szacowania niepewności, składowe można podzielić na dwa rodzaje:

- **typu A** - szacowana metodami statystycznymi na podstawie serii powtarzanych pomiarów
  - dla składowej typu A otrzymujemy **empiryczne odchylenie standardowe**  $s$
- **typu B** - szacowane innymi metodami
  - dla każdej składowej typu B otrzymujemy **niepewność standardową**  $u_k$

Niepewność standardowa (złożona) wyniku pomiaru bezpośredniego wynosi

$$u(x) = \sqrt{s^2 + \sum_{k=1}^K u_k^2(x)}$$

# Niepewność typu A

- wartość średnia z  $N$  powtórzonych pomiarów  $x_n$

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n$$

- empiryczne odchylenie standardowe pojedynczego wyniku pomiaru

$$s(x) = \sqrt{\frac{1}{\nu} \sum_{n=1}^N (x_n - \bar{x})^2}$$

- gdzie  $\nu = N - 1$  to liczba stopni swobody
- empiryczne odchylenie wartości średniej

$$s(\bar{x}) = \frac{s(x)}{\sqrt{N}}$$



# Niepewność typu B

Gdy w niepewności występują składowe niemożliwe do oszacowania metodą A np.

- powtarzany pomiar daje ten sam wynik,
- nie ma możliwości powtarzania pomiaru,

określane są także niepewności typu B.

Do ich oszacowania wykorzystuje się:

- specjalistyczną wiedzę i doświadczenie (np. wyniki wcześniejszych pomiarów, wiedzę o badanych zjawiskach, pomiary wykonane dokładniejszym przyrządem)
- dane producenta przyrządu

# Niepewność graniczna przyrządu

Producent przyrządu często definiuje niepewność w postaci **niepewności granicznej** bezwzględnej  $\Delta_g(x)$ , bądź względnej  $\delta_g(x)$ .

Może być ona obliczona na podstawie:

- klasy dokładności  $kl = \frac{\Delta_g(x)}{x_{zagr}} \cdot 100\%$  np. 0,01; 0,02; 0,05; 0,1; ... , 5

$$\Delta_g(x) = kl [\%] \cdot x_{zagr} \qquad \delta_g(x) = kl [\%] \cdot \frac{x_{zagr}}{|x|}$$

- równania obejmującego niepewność czułości i niepewność zera

$$\Delta_g(x) = \delta_{cz}|x| + \delta_0 x_{zagr} \qquad \delta_g(x) = \delta_{cz} + \delta_0 \frac{x_{zagr}}{|x|}$$

**Zdolność rozdzielcza** przyrządu (np. wartość ostatniej cyfry wyświetlacza bądź różnica między sąsiednimi wskazaniami podziałki) nie jest tożsama z niepewnością graniczną.

# Zamiana niepewności granicznej na standardową

- Aby uwzględnić niepewność graniczną w obliczaniu niepewności złożonej, należy ją przeliczyć na niepewność standardową.
- Jeżeli nie zaznaczono inaczej, zakłada się, że wartość mierzona ma rozkład równomierny w przedziale  $[x_M - \Delta_g, x_M + \Delta_g]$ .
- odchylenie standardowe rozkładu równomiernego, a więc i niepewność standardowa ma wartość

$$u(x) = \frac{\Delta_g(x)}{\sqrt{3}}$$

# Niepewność w pomiarach pośrednich

Jeżeli dane są:

- model pomiaru pośredniego wielkości  $y = f(x_1, \dots, x_N)$ ,
  - zmierzone wielkości składowe  $x_n$  (nieskorelowane),
  - niepewności standardowe  $u(x_n)$  pomiarów wielkości składowych,
- to niepewność standardowa pomiaru  $y$  wyniesie:

$$u(y) = \sqrt{\sum_{n=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^2 u^2(x_n)}$$

# Wykorzystanie niepewności względnych $u_{\text{rel}}(x_n)$

Niepewnością względną  $u_{\text{rel}}(x)$  nazywamy stosunek niepewności  $u(x)$  do wartości wielkości mierzonej  $x$ .

$$u_{\text{rel}}(x) = \frac{u(x)}{x}$$

Dla modelu pomiaru złożonego o postaci:

$$y = A \prod_{n=1}^N x_n^{\alpha_n},$$

obliczenia niepewności można uprościć przez wykorzystanie niepewności względnych:

$$u_{\text{rel}}(y) = \sqrt{\sum_{n=1}^N (\alpha_n u_{\text{rel}}(x_n))^2}$$

# Protokół pomiarowy

Protokół pomiarowy musi zawierać:

- datę i miejsce wykonania pomiarów
- dane eksperymentatorów
- wykaz aparatury
- schemat układu pomiarowego
- opis procedury pomiarowej (np. nastawy przyrządów)
- istotne okoliczności pomiarów
- **wyniki pomiarów**

# Wyniki pomiarów bezpośrednich

Wynik każdego pomiaru bezpośredniego zapisujemy **na bieżąco** do protokołu, z precyzją, jaką zapewniają użyte przyrządy bądź wzorce.

- w nagłówku tabeli określamy jednostkę miary i nie powtarzamy jej w komórkach z wynikami
  - gdy przyrząd bezpośrednio wskazuje wynik wyrażony inną jednostką (np. mV, a nie V jak inne pomiary w tabeli)
  - wtedy po liczbie zapisujemy przedrostek (np. *100,4 m*)
- jeśli ostatnie cyfry wskazania przyrządu to zera, to należy je zapisać
- w pierwszych kolumnach zapisujemy wyniki pomiarów bezpośrednich, w kolejnych wyniki obliczeń.

# Wyniki obliczeń i wyniki końcowe

Zaokrągleń dokonujemy dopiero na końcu obliczeń

- Niepewności wyników końcowych zaokrąglamy w górę do **jednej** cyfry znaczącej
  - gdy pierwszą cyfrą jest 1, podajemy dwie cyfry znaczące
  - niepewności wykorzystywanych w obliczeniach nie zaokrąglamy, bądź zaokrąglamy z precyzją co najmniej dwóch cyfr znaczących
- Najpierw obliczamy i zaokrąglamy niepewność, następnie zaokrąglamy wynik.
- Ostatnia cyfra znacząca **wyniku** pomiaru powinna być na tej samej pozycji, co ostatnia cyfra zaokrąglonej niepewności



# Wykresy

- musi zawierać tytuł oraz opisy i skale obu osi układu
- powinien mieć siatki (lin-lin, lin-log, log-lin, log-log) dobrane odpowiednio do zakresu zmienności danych
- na wykresie zaznaczmy punkty pomiarowe (z tabeli)
- nie przeprowadzamy na siłę krzywej przez wszystkie punkty pomiarowe