# Zad. 1.

1) Przekształcenie liniowe $F: Z_5^4\ \mathbb{Z}_5 \to Z_5^3(\mathbb{Z}_5)$ dane wzorem

$$F([x_1\ x_2\ x_3\ x_4]) = [3x_1+4x_2+4x_3+x_4,\ 3x_3+2x_4,\ x_1+3x_2+3x_3+2x_4]$$

- Wyz. Ker F ImF, bazy wymiary l. elem.
- czy W. [1,1,2] należy do obrazu przekształcenia F. Uzas.
- sprawdź czy układ $\mathcal{B}$ ~~...~~ $\{[2,1,3][3,0,1][0,1,1]\}$ jest bazą $Z_5^3(\mathbb{Z}_5)$ jeśli tak podaj macierz $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(F)$ gdzie $\mathcal{A} = \{[1,0,0,0][0,1,0,0][0,0,1,0][0,0,0,1]\}$

punktów)
e liniowe $F : Z_5^4(\mathbb{Z}_5) \to Z_5^3(\mathbb{Z}_5)$ dane jest wzorem

$$F([x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4]) = [3x_1+4x_2+4x_3+x_4,\ 3x_3+2x_4,\ x_1+3x_2+3x_3+2x_4].$$

Ker $F$, Im $F$ - podaj ich bazy, wymiary oraz liczbę elementów w tych podprzestrzeniach.

or $[1,1,2]$ należy do obrazu przekształcenia $F$? Odpowiedź uzasadnij.

czy układ $\mathcal{B} = \{[2,1,3],[3,0,1],[0,1,1]\}$ jest bazą $Z_5^3(\mathbb{Z}_5)$. Jeśli tak, podaj macierz $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(F)$, gdzie $\mathcal{A} =$
0], $[0,1,0,0]$, $[0,0,1,0]$, $[0,0,0,1]\}$.

bazy standardowe: $[1,0,0,0]$, $[0,1,0,0]$, $[0,0,1,0]$, $[0,0,0,1]$

$$F([1,0,0,0]) = [3,0,1]$$
$$F([0,1,0,0]) = [4,0,3]$$
$$F([0,0,1,0]) = [4,3,3]$$
$$F([0,0,0,1]) = [1,2,2]$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Ker F: $A \cdot v = 0$ $\quad v = [x_1, x_2, x_3]$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 - 3r_1}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & t_1 & & t_2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 3 & 2 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$x_2 = t_1$

$x_4 = t_2$

$3x_3 + 2t_2 = 0$ $\qquad$ $3x_3 = -2t_2 = 3t_2$

$x_3 = \frac{-2}{3} t_2$ $\qquad$ $x_3 = t_2$

$x_1 = -3t_1 - 3 \cdot \frac{-2}{3} t_2 - 2t_2 = -3t_1 + 2t_2 - 2t_2 = -3t_1 = 2t_1$

$V = [2t_1, t_1, t_2, t_2] = t_1[2, 1, 0, 0] + t_2[0, 0, 1, 1]$

$\operatorname{Ker} F = \mathcal{L}(\underbrace{[2, 1, 0, 0], [0, 0, 1, 1]}_{\text{baza}})$ $\qquad$ $\dim \operatorname{Ker} F = 2$

l. elementów $= 5^2 = 25$

(5 bo jesteśmy w $Z_5$, a 2 bo dim = 2)

$\operatorname{Im} F = \mathcal{L}([3, 0, 1], [4, 3, 3])$ $\qquad$ $\dim \operatorname{Im} F = 2$

$\dim \operatorname{Ker} F + \dim \operatorname{Im} F = 4$ ✓

l. elementów $= 5^2 = 25$

• czy W. [1,1,2] należy do obrazu przekształcenia F. Uzas.

$v = [1, 1, 2] \in \operatorname{Im} F$ ?

$\alpha [3, 0, 1] + \beta [4, 3, 3] \stackrel{?}{=} [1, 1, 2]$

$$\begin{array}{cc} \alpha & \beta \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{array}\right]$$

$3\beta = 1$

$\beta = \frac{1}{3}$

$\alpha + 1 = 2$

$\alpha = 1$

$3\alpha + 4\beta = 1$

$3 + \frac{4}{3} = 1$

$\frac{13}{3} = 1 / \cdot 3$

$13 = 3$

$\begin{array}{c} 13 \\ \text{|||} \\ 3 \end{array}$

Należy ✓

· sprawdź czy układ $B$ ~~...~~ $\{[2,1,3](3,0,1)[0,1,1]\}$ est bazą $Z_5^3$ ($Z_5$) jeśli tak podaj macierz $M_A^B(F)$ gdzie $A = \{(1,0,2,0)(0,1,0,0)(0,0,1,2)(0,0,0,1)\}$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$\det B = 0 + 0 + 9 - 0 - 2 - 3 = 4 \neq 0$$

wektory w $B$ ~~są~~ liniowo niezależne

$$M_A^B(F) = ?$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 - 2r_1}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3 - 3r_2}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[r_2 + 3r_3]{r_1 + r_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\xrightarrow{r_3 \cdot \frac{1}{4}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

$$M_A^B(F) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

# Zad. 2.

cenie liniowe $F : C^3(\mathbb{C}) \to C^3(\mathbb{C})$ w bazie standardowej $\mathcal{E}_3$ ma macierz

$$M_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_3}(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

acz wartości własne i odpowiadające im podprzestrzenie własne przekształcenia $F$.

acz bazę $\mathcal{C}$ przestrzeni $C^3(\mathbb{C})$, w której macierz $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(F)$ ma postać diagonalną, a następnie macierze $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(F)$, $(\mathrm{id}_{C^3})$ oraz $M_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{C}}(\mathrm{id}_{C^3})$.

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda \, \mathrm{Id}) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & i \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -i & 0 & -\lambda \end{pmatrix} =$$

$$\begin{matrix} -\lambda & 0 & i \\ 0 & 1-\lambda & 0 \end{matrix}$$

$$= \lambda^2 - \lambda^3 + 0 + 0 - 1 + \lambda - 0 - 0 =$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = -\lambda^2(\lambda - 1) + (\lambda - 1) = (\lambda - 1)(-\lambda^2 + 1) =$$

$$= (1-\lambda)(\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = -1$$

dla $\lambda = 1$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3 \cdot i} \begin{array}{cccc} & t_1 & t_2 & \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & i & 0 \\ \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{-i} & \cancel{0} \end{array}\right]$$

$x_2 = t_1 \qquad x_3 = t_2 \qquad x_1 = i \cdot t_2$

$$V = [\, it_2,\ t_1,\ t_2 \,] = t_1 [0, 1, 0] + t_2 [i, 0, 1]$$

$$N_1 = \mathcal{L}\left( [0,1,0], [i,0,1] \right)$$

dla $\lambda = -1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 2 & 0 \\ -i & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & i & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3 \cdot i} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & i & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{i} & 0 \end{array}\right]$$

$t$

$x_3 = t$

$x_2 = 0$

$x_1 = -it$

$$V = t[-i, 0, 1]$$

$$N_1 = \mathcal{L}\left( [-i, 0, 1] \right)$$

Wyzn baza C przez $\mathbb{C}^3(\mathbb{C})$ w której macierz $M_C^C(F)$ ma postać diagonalną a następ macierze $M_C^C(F)$ $M_C^{E_3}(id_{C_3})$ $M_{E_3}^C(id_{C_3})$

Baza:

$$C = \{ c_1 = [i, 0, 1],\ c_2 = [0, 1, 0],\ c_3 = [-i, 0, 1] \}$$

$$M_C^C(F) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$M^{\mathcal{E}_3}_{C}(\mathrm{id}) = \begin{bmatrix} i & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} i & 0 & -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1 \cdot i} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3 + r_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & i & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3 \cdot \frac{1}{2}]{r_1 \cdot (-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{i}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_1 + r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \underbrace{\begin{matrix} \frac{-i}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{i}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{matrix}}_{M^{C}_{\mathcal{E}_3}} \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right]$$

# Zad. 3.

e **3** (13 punktów)
est układ równań z parametrem $b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + (2-b)y + z = 0 \\ x + 2y + (1-b)z = b \\ (1-b)x + 2y + z = b \end{cases}$$

ołując się na twierdzenie Kroneckera-Cappeliego określ liczbę rozwiązań powyższego układu w zależności od $b$.

ch $B$ oznacza zbiór tych parametrów $b$, dla których powyższy układ ma nieskończenie wiele rozwiązań. Znajdź rozania powyższego układu, gdy $b \in B$.