3. Macierze

Definicja 1. *Trójkę $(P,+,\cdot)$ nazywamy* ***pierścieniem****, jeśli*

- $(P,+)$ *jest grupą przemienną,*
- *dla dowolnych* $a,b,c \in P$, $a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$,
- *dla każdego* $a,b,c \in P$, $a\cdot(b+c) = (a\cdot b)+(a\cdot c)$ *oraz* $(a+b)\cdot c = (a\cdot c)+(b\cdot c)$.

Element neutralny działania mnożenia (jeśli istnieje) ozn. 1 i nazywamy *jedynką pierścienia.*

Pierścień $(P,+,\cdot)$ jest *przemienny*, jeśli $\forall(a,b\in P),\ \ a\cdot b = b\cdot a$.

Definicja 2. ***Ciałem*** *nazywamy trójkę $(P,+,\cdot)$ taką, że*

- $(P,+)$ *jest grupą przemienną,*
- $(P* = P\setminus\{0\},\cdot)$ *jest grupą przemienną,*
- *dla dowolnych* $a,b,c\in P$, $(a+b)\cdot c = (a\cdot c)+(b\cdot c)$.

$(P,+,\cdot)$ - pierścień przemienny z 1

Definicja 3. *Funkcję*

$$A : \{1,\dots,m\}\times\{1,\dots,n\}\to P,\ \ (i,j)\mapsto A(i,j)$$

nazywamy ***macierzą*** *stopnia $m\times n$ o elementach w zbiorze P.*

Funkcja A przyporządkowuje każdej parze (i,j) liczb takich, że $i\in\{1,\dots,m\}$, $j\in\{1,\dots,n\}$ *element macierzy*

$$A(i,j)\in P.$$

Najczęściej zamiast $A(i,j)$ będziemy pisać a_{ij} dla $i=1,\dots,m$ oraz $j=1,\dots,n$, natomiast macierz o elementach a_{ij} oznaczamy $A=[a_{ij}]_m^n$ lub po prostu $A=[a_{ij}]$.
Elementy macierzy $A=[a_{ij}]_m^n$ wygodnie jest ustawić w prostokątną tablicę

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

Para indeksów (i,j) przy każdym elemencie a_{ij} określa odpowiednio *wiersz* oraz *kolumnę* macierzy, w których ten element się znajduje. Zatem macierz A stopnia $m\times n$ jest macierzą o m wierszach i n kolumnach.

Równość dwóch macierzy $A=[a_{ij}]$ i $B=[b_{ij}]$ oznacza, że obie macierze są tego samego stopnia (tzn. mają tę samą liczbę wierszy i tę samą liczbę kolumn), oraz $a_{ij}=b_{ij}$ dla wszystkich $i\in\{1,\dots,m\}$, $j\in\{1,\dots,n\}$.

Symbolem $M_m^n(P)$ będziemy oznaczali zbiór wszystkich macierzy stopnia $m\times n$ o elementach w P.

Przykład 4.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 7 & -5 & 1 & 5\\ 2 & 1 & -1 & 1 & 3 & -1\\ 5 & 3 & 1 & 0 & 8 & 0\\ 3 & 2 & 2 & -1 & 5 & 1\\ 4 & 1 & -9 & 7 & 8 & -1\end{pmatrix}$$

Dla ustalonego $i\in\{1,\dots,m\}$, elementy i-tego wiersza macierzy $A=[a_{ij}]$ będziemy oznaczać jako

$$r_i(A) := (a_{i1},a_{i2},\dots,a_{in}).$$

Analogicznie, dla ustalonego $j\in\{1,\dots,n\}$, elementy j-tej kolumny macierzy $A=[a_{ij}]_m^n$ będziemy oznaczać

$$c^j(A) := (a_{1j},a_{2j},\dots,a_{mj}). \tag{1}$$

Macierzą zerową stopnia $m\times n$ nazywamy macierz, której wszystkie wyrazy są równe zero i oznaczamy $\mathbf{0}_m^n$.

$$\mathbf{0}_m^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Definicja 5. *Macierz stopnia $n \times n$ nazywamy **macierzą kwadratową** stopnia n.*

O wyrazach $a_{11}, \dots, a_{nn}$ macierzy kwadratowej mówimy, że *leżą na głównej przekątnej* tej macierzy.

$$A = \begin{pmatrix} \color{red}{a_{11}} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \color{red}{a_{22}} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & \color{red}{a_{ii}} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & \color{red}{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

Definicja 6. *Jeżeli wszystkie elementy pod główną przekątną w macierzy kwadratowej są równe zero:*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{ii} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

*to taką macierz nazywamy **macierzą trójkątną górną**.*
Jeżeli wszystkie elementy nad główną przekątną w macierzy kwadratowej są równe zero:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

*to taką macierz nazywamy **macierzą trójkątną dolną**.*

Przykład 7. Macierz trójkątna górna:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 & 9 \\ 0 & 8 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Macierz trójkątna dolna:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Definicja 8. *Macierz $A = [a_{ij}]_m^n$ nazywamy **schodkową (trapezową)**, jeżeli dla każdego $i > j$, $a_{ij} = 0$.*

Przykład 9. *Określenie macierz trapezowa bierze się z faktu, że niezerowe elementy takiej macierzy "układają się" w trapez:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 7 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 9 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Definicja 10. *Macierz kwadratowa $A \in M_n^n(P)$, której wszystkie elementy poza główną przekątną są zerami, tzn. $A(i,j) = 0$ dla $i \neq j$, nazywamy* ***macierzą diagonalną*** *i oznaczamy $diag(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$.*

$$diag(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{ii} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Przykład 11. *Macierz diagonalna stopnia 3×3:*

$$diag(1,2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Macierz diagonalą $diag(1, 1, \ldots, 1)$ stopnia $n \times n$ nazywamy *macierzą jednostkową* i oznaczamy I_n lub I.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Przykład 12. *Macierz jednostkowa stopnia 3×3:*

$$I_3 = diag(1,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definicja 13. *Niech $A, B \in M_m^n(P)$ i $\lambda \in P$.*

Sumą macierzy *$A = [a_{ij}]_m^n$ i $B = [b_{ij}]_m^n$ nazywamy macierz $A + B = [a_{ij} + b_{ij}] \in M_m^n(P)$ taką, że*

$$(A+B)(i,j) := A(i,j) + B(i,j)$$

dla $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \ldots & a_{1j}+b_{1j} & \ldots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \ldots & a_{2j}+b_{2j} & \ldots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \ldots & a_{ij}+b_{ij} & \ldots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \ldots & a_{mj}+b_{mj} & \ldots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Iloczynem macierzy *A* ***przez liczbę*** *$\lambda \in \mathbb{R}$ nazywamy macierz $\lambda A = [\lambda a_{ij}] \in M_m^n(P)$ taką, że*

$$(\lambda A)(i,j) := \lambda A(i,j)$$

dla $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$:

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1j} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2j} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & \lambda a_{ij} & \dots & \lambda a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mi} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

W szczególności,

$$(-A)(i,j) = -A(i,j):$$

$$-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1j} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2j} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \dots & -a_{ij} & \dots & -a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \dots & -a_{mi} & \dots & -a_{mn} \end{pmatrix}$$

Przykład 14.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 10 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}$$

Definicja 15. *Niech $A \in M_m^n(P)$ i $B \in M_n^p(P)$.*

Iloczynem macierzy *A i B nazywamy macierz $C = AB = [\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}] \in M_m^p(P)$ taką, że*

$$C(i,j) := \sum_{k=1}^{n} A(i,k)B(k,j)$$

dla $i = 1,\dots,m$, $j = 1,\dots,p$.

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{is} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{ms} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \dots & b_{sj} & \dots & b_{sp} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k2} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k}b_{kj} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k}b_{kp} \\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_{2k}b_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{2k}b_{k2} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{2k}b_{kj} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{2k}b_{kp} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{k2} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kp} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_{mk}b_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{mk}b_{k2} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{mk}b_{kj} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{n} a_{mk}b_{kp} \end{pmatrix}$$

Przykład 16.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bt \\ cx+dz & cy+dt \end{pmatrix}$$

Przykład 17.

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+3b+5c & 2a+4b+6c \\ x+3y+5z & 2x+4y+6z \end{pmatrix}$$

Mnożenie macierzy nie jest przemienne a także wynikiem mnożenia dwóch niezerowych macierzy może być macierz zerowa.

Przykład 18. Niech $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Wtedy

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}_2^2$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq AB.$$

Przykład 19.

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa & 0 & 0 \\ 0 & yb & 0 \\ 0 & 0 & zc \end{pmatrix}$$

Uwaga 20. *Iloczyn dwóch macierzy diagonalnych jest macierzą diagonalną, której elementy są iloczynami odpowiednich elementów macierzy będących czynnikami:*

$$diag(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}) \cdot diag(b_{11}, b_{22}, \ldots, b_{nn}) = diag(a_{11} \cdot b_{11}, a_{22} \cdot b_{22}, \ldots, a_{nn} \cdot b_{nn}).$$

Własności sumy i iloczynu macierzy

Niech $A, A', A'' \in M_m^n(P)$, $B, B' \in M_n^p(P)$, $C \in M_p^r(P)$ oraz $\lambda \in P$. Wtedy

- $(A + A') + A'' = A + (A' + A'')$,
- $A + A' = A' + A$,
- $A + \mathbf{0}_m^n = A$,
- $A + (-A) = \mathbf{0}_m^n$,
- $(M_m^n(P), +)$ - grupa przemienna
- $(AB)C = A(BC)$,
- $(A + A')B = (AB) + (A'B)$ oraz $A(B + B') = (AB) + (AB')$,
- $I_m A = A = A I_n$,
- $(M_n^n(P), +, \cdot)$ - pierścień z $1 = I_n$
- $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$,

Uwaga 21. *Niech $A \in M_m^n(P)$ i $B \in M_n^p(P)$. Wtedy*

- $r_i(AB) = r_i(A)B$, *dla* $i = 1, \ldots, m$,
- $c^j(AB) = Ac^j(B)$, *dla* $j = 1, \ldots, n$.

Definicja 22. ***Macierzą transponowaną*** *względem macierzy $A = [a_{ij}]_m^n$ nazywamy macierz A^T stopnia $n \times m$ taką, że*

$$A^T(i, j) := A(j, i)$$

dla $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

Przykład 23.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Własności macierzy transponowanej

Niech $A, B \in M_m^n(P)$, $C \in M_n^k(P)$ i $\lambda \in P$. Wtedy

- $(A+B)^T = A^T + B^T$,
- $(\lambda A)^T = \lambda A^T$,
- $(A^T)^T = A$,
- $I_n^T = I_n$,
- $(AC)^T = C^T A^T$.

Macierz odwrotna

Definicja 24. *Macierz kwadratowa $A \in M_n^n(P)$ jest **odwracalna**, jeśli istnieje macierz $B \in M_n^n(P)$ taka, że*

$$AB = BA = I_n.$$

*Macierz B nazywamy **macierzą odwrotną** do macierzy A i oznaczamy A^{-1}.*

Przykład 25. *Dla $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ macierz odwrotna jest równa*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Przykład 26. *Niech $0 \neq a, b, c \in P$ Wtedy*

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix}$$

Przykład 27. *Macierz odwrotna do macierzy diagonalnej $diag(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$, w której $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn} \neq 0$:*

$$(diag(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}))^{-1} = diag(\frac{1}{a_{11}}, \frac{1}{a_{22}}, \ldots, \frac{1}{a_{nn}}).$$

Twierdzenie 28. *Niech $A, B \in M_n^n(P)$ będą macierzami odwracalnymi i $0 \neq \lambda \in P$. Wtedy*

- $I_n^{-1} = I_n$,
- $(A^{-1})^{-1} = A$,
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$,
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$,
- $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$.

Operacje elementarne macierzy

Niech $A \in M_n^m(P)$. Elementarnymi operacjami wierszowymi macierzy A są:

- Mnożenie dowolnego wiersza macierzy A przez element $0 \neq \lambda \in P$.
  $A \xrightarrow{\lambda r_i} A'$ oznaczać będzie, że macierz A' powstała z macierzy A w wyniku pomnożenia i-tego wiersza macierzy A przez $\lambda \neq 0$.
- Dodawanie do dowolnego wiersza macierzy A dowolnego innego wiersza pomnożonego przez dowolny element $\lambda \in P$.
  $A \xrightarrow{r_i+\lambda r_k} A'$ oznaczać będzie, że macierz A' powstała z macierzy A w wyniku dodania do i-tego wiersza macierzy A wiersza k-tego pomnożonego przez λ.
- Zamiana dwóch wierszy miejscami.
  $A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_k} A'$ oznaczać będzie, że macierz A' powstała z macierzy A w wyniku zamiany miejscami wierszy i-tego oraz k-tego.

Operacje elementarne na wierszach macierzy można opisać jako mnożenie tej macierzy przez odpowiednio zmodyfikowaną macierz jednostkową:

$$A \xrightarrow{\lambda r_i} A'$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{ii} = \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} A =$$

$$diag(1, \dots, \lambda, \dots, 1)A = [\lambda r_i](I_m)A$$

$$A \xrightarrow{r_i+\lambda r_k} A'$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{ii} = 1 & \dots & a_{ik} = \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & a_{kk} = 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} A =$$

$$[r_i + \lambda r_k](I_m)A$$

$$A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_k} A'$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & a_{ik} = 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{ki} = 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} A =$$

$$[r_i \leftrightarrow r_k](I_m)A$$

Definicja 29. *Każde złożenie skończonej liczby elementarnych operacji wierszowych będziemy nazywali* ***operacją wierszową****.*

Przykład 30.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Definicja 31. *Powiemy, że macierz A' jest* ***wierszowo równoważna*** *macierzy A, jeśli A' można utworzyć z A za pomocą pewnej operacji wierszowej.*

Przykład 32. *Macierz*

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

jest wierszowo równoważna macierzy

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Algorytm Gaussa

Każdą macierz kwadratową można sprowadzić do postaci trójkątnej górnej bądź dolnej (a czasami do postaci diagonalnej) za pomocą skończonej liczby wierszowych operacji elementarnych (tzn. każda macierz kwadratowa jest wierszowo równoważna macierzy trójkątnej). Jedną z metod prowadzących do tego celu nazywamy *algorytmem Gaussa.*

Algorytm Gaussa działa dla macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}]_n^n$ w taki sposób, że uzyskujemy zera pod główną przekątną w kolumnie $1 \leq j \leq n$, odejmując od wierszy o numerach $j+1, \ldots, n$ wiersz o numerze j pomnożony przez odpowiednio dobrane stałe. Czasami trzeba dodatkowo przestawić wiersze, jeśli wystąpi sytuacja, w której na głównej przekątnej macierzy znajdzie się wartość zero.

Przykład 33.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-3r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Przykład 34.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-3r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{2}{5}r_3+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{3}{5}r_3+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Uwaga 35. *Każda macierz kwadratowa jest wierszowo równoważna macierzy trójkątnej (górnej).*

Twierdzenie 36. *Macierz A jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest wierszowo równoważna macierzy jednostkowej.*

Niech $A \in M_m^n(P)$ i $B \in M_m^p(P)$. Symbolem $A|B$ będziemy oznaczali macierz stopnia $m \times (n+p)$ o elementach w P taką, że

$$c^j(A|B) = \begin{cases} c^j(A), & \text{dla } j = 1, \ldots, n, \\ c^{j-n}(B), & \text{dla } j = n+1, \ldots, n+p. \end{cases}$$

Przykład 37. *Niech $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$. Wtedy*

$$A|B = \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & x & y \\ c & d & z & w \end{array}\right).$$

Twierdzenie 38. *Niech $A \in M_n^n(P)$ będzie odwracalną macierzą kwadratową. Jeśli f jest operacją wierszową taką, że*

$$A|I_n \xrightarrow{f} I_n|B,$$

to wtedy

$$B = A^{-1}.$$

Przykład 39. *Niech* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. *Stosując Twierdzenie 38 znajdziemy macierz odwrotną do macierzy A.*

$$A|I_2 = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1+3r_2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-r_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right).$$

Stąd

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Przykład 40. *Niech* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. *Stosując wniosek 38 znajdziemy macierz odwrotną do macierzy A.*

$$A|I_4 = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2-r_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_4-r_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3+r_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_4+r_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}r_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{r_1-r_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{r_2-r_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2+r_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{r_3-r_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Stąd

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Postępując analogicznie jak w przypadku macierzy trójkątnej, możemy każdą macierz stopnia $m \times n$ sprowadzić do macierzy (górnej) trapezowej.

Przykład 41.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 8 \\ 5 & 4 & 13 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -1 \\ 3 & 3 & 8 \\ 5 & 4 & 13 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-3r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 5 & 4 & 13 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4-5r_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -6 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4-2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Twierdzenie 42. *Każda niezerowa macierz $A \in M_m^n(P)$ jest wierszowo równoważna pewnej macierzy (górnej) trapezowej.*

Definicja 43. *Macierze $A, B \in M_n^n(\mathbb{K})$ są **podobne**, jeśli istnieje macierz odwracalna $N \in M_n^n(\mathbb{K})$ taka, że*

$$B = N^{-1}AN.$$

Definicja 44. ***Podmacierzą** stopnia $p \times r$ macierzy $A \in M_m^n(P)$ nazywamy macierz otrzymaną z macierzy A przez usunięcie $m-p$ wierszy oraz $n-r$ kolumn.*

Definicja 45. ***Rzędem** macierzy $A \in M_m^n(P)$ nazywamy maksymalny stopień odwracalnej podmacierzy macierzy A.*

Przykład 46. *Sprowadzimy macierz*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 7 & -5 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 3 & -1 \\ 5 & 3 & 1 & 0 & 8 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & -1 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & -9 & 7 & 8 & -1 \end{pmatrix}$$

do postaci trapezowej (górnej).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 7 & -5 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 3 & -1 \\ 5 & 3 & 1 & 0 & 8 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & -1 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & -9 & 7 & 8 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & -5 & 1 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 0 & 8 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & -1 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & -9 & 7 & 8 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2r_3}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & -5 & 1 & 5 \\ 10 & 6 & 2 & 0 & 16 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & -1 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & -9 & 7 & 8 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2r_4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & -5 & 1 & 5 \\ 10 & 6 & 2 & 0 & 16 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & -2 & 10 & 2 \\ 4 & 1 & -9 & 7 & 8 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 5r_1}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & -5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 7 & -5 & 1 & 5 \\ 6 & 4 & 4 & -2 & 10 & 2 \\ 4 & 1 & -9 & 7 & 8 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4 - 3r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & -5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 7 & -5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 7 & -5 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & -9 & 7 & 8 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_5 - 2r_1}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & -5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 7 & -5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 7 & -5 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -7 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & -5 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -5 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -7 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4 - r_2}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & -5 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_5 + r_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & -5 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_5}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & -5 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Otrzymana macierz B ma rząd równy 3.

Zadania

1. Rozwiązać równanie macierzowe: $3(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -i & 0 \end{pmatrix} + X) + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ i & 4 \end{pmatrix} = X$.

2. Dla macierzy $A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ obliczyć A^2 i A^3.

3. Obliczyć iloczyny AB dla macierzy

   (a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

   (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 0 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$

   (c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

4. Podać przykład macierzy A i B (różnych od macierzy jednostkowych), dla których $AB = BA$.

5. Metodą eliminacji Gaussa sprowadzić macierz A do postaci trójkątnej/trapezowej. Podać rząd macierzy A.

   (a) $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

   (c) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

   (d) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 7 & 13 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \\ 8 & 5 & 5 & 14 \\ -4 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

6. Metodą przekształceń elementarnych znaleźć macierz odwrotną do macierzy A:

   (a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$

   (b) $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

   (d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$