SPRAWOZDANIE SYSY

Laboratorium 1

Jan Czechowski 337066

Bartłomiej Gromulski 331475

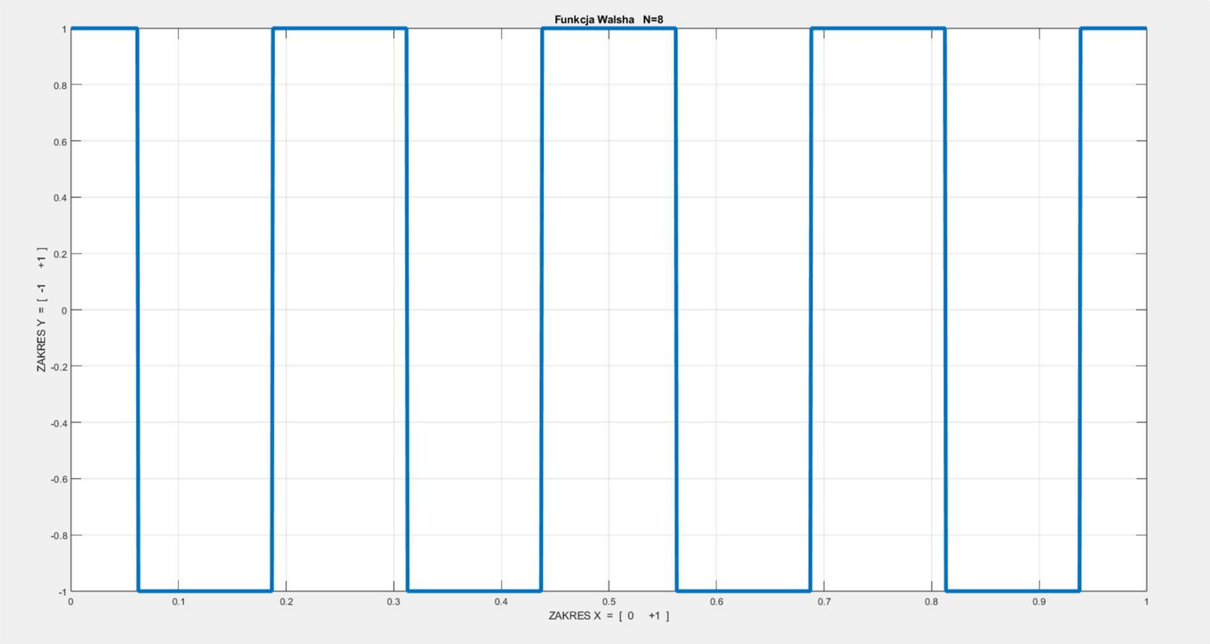
06.03.2025

Zadanie 2.1

Dla numeru albumu 331475, n równe jest:

n = 5 + (3+5)/2 = 9

Funkcje Walsha cechują się przyjmowaniem wartości -1 oraz 1. Wykres Walsha dla wyliczonego n = 9, na przedziale [0,1] znajduje się poniżej (Rysunek 1). W naszym przypadku dla n = 9 wystąpiło 8 przełączeń wartości (zamian między wartościami -1 i 1).



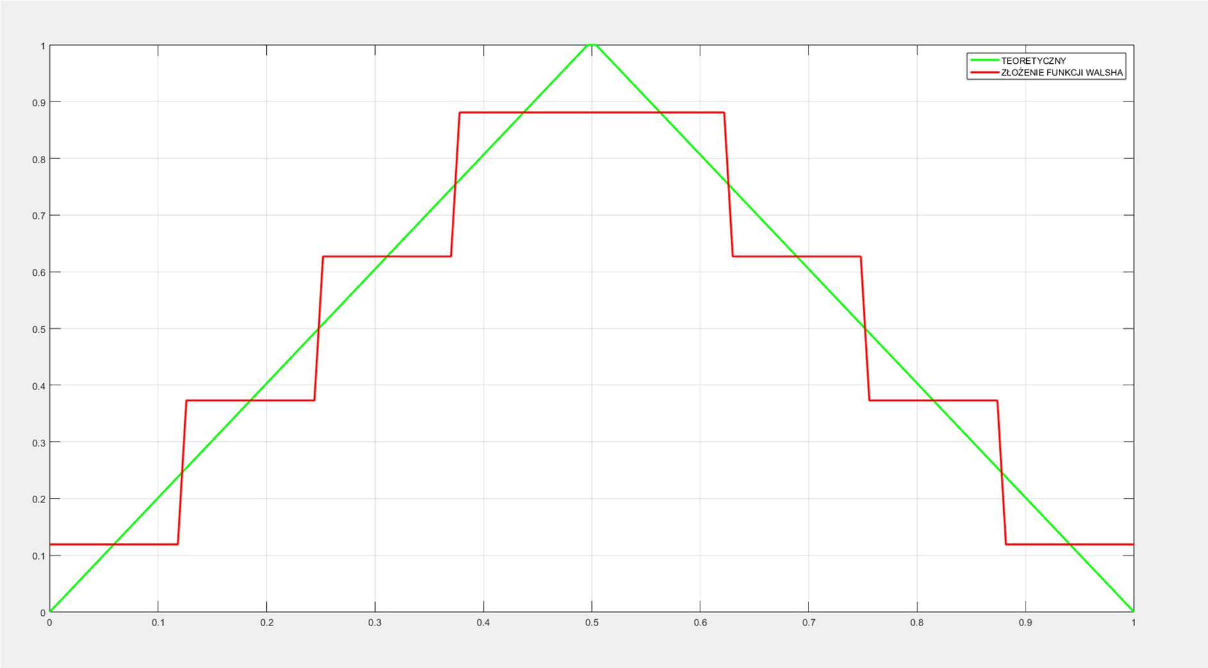
Rysunek 1 Wykres n-tej funkcji Walsha dla n=9.

Zadanie 2.2.

1) W zadaniu rozważamy **sygnał trójkątny**, zdefiniowany na przedziale [0,1].
   Po przeprowadzeniu obliczeń otrzymano następujące współczynniki rozwinięcia dla sygnału trójkątnego w bazie funkcji Walsha (dla n=9):
   - 0.1190
   - 0.3730
   - 0.6270
   - 0.8810
   - 0.8810
   - 0.6270
   - 0.3730
   - 0.1190
2) Na poniższym rysunku przedstawiono dwa przebiegi (Rysunek 2):

   1. **Sygnał teoretyczny (kolor zielony)** – jest to idealny sygnał trójkątny zdefiniowany na przedziale [0,1]. Ma on kształt liniowy: rośnie od 0 do wartości maksymalnej w połowie przedziału, a następnie opada z powrotem do 0 w punkcie t=1.

   2. **Sygnał złożony z funkcji Walsha (kolor czerwony)** – powstał on w wyniku sumowania odpowiednich funkcji Walsha. Każda funkcja Walsha przyjmuje jedynie wartości -1 lub 1, więc ich liniowa kombinacja daje przebieg o charakterze schodkowym.



Rysunek 2 Wykresy czasowe funkcji - teoretyczny oraz otrzymany po złożeniu z funkcji Walsha.

3) W niniejszym ćwiczeniu obliczono moc średnią zarówno dla przebiegu trójkątnego teoretycznego, jak i dla sygnału otrzymanego z rozwinięcia w funkcje Walsha dla n = 9.

   Moc średnia na podstawie przebiegu teoretycznego:

   Energia_y1 = 0.3386

   Moc średnia na podstawie obliczonych współczynników rozwinięcia:

   Energia_y2 = 0.3306

W przypadku sygnałów rozpatrywanych na ustalonym przedziale [0,1], okres T przyjmuje wartość 1. Wówczas energia i moc średnia przyjmują taką samą wartość liczbową.

Zadanie 2.3.

Procedura Gramma-Schmidta:

$$1.\quad \boxed{g_1(t) = \frac{f_1(t)}{\sqrt{E_1}} \;;\; \text{gdzie } E_1 = \int_{t_1}^{t_2} f_1^2(t)dt}$$

$$2.\quad \boxed{g_2(t) = \frac{\Theta_2(t)}{\sqrt{E_2}} \;;\; \text{gdzie } \Theta_2(t) = f_2(t) - g_1(t)\int_{t_1}^{t_2} f_2(t)\cdot g_1(t)dt \;;\; E_2(t) = \int_{t_1}^{t_2} \Theta_2^2(t)dt}$$

Obliczenie $g_1(t)$:

$$E_1 = \int_0^1 (t-1)^2 \, dt = \frac{1}{3}$$
$$g_1(t) = \frac{t-1}{\sqrt{\frac{1}{3}}} = (t-1) \cdot \sqrt{3}$$

Obliczenie $g_2(t)$:

$$\Theta_2(t) = (-3t+3) - \sqrt{3}(t-1) \int_0^1 (-3t+3)\sqrt{3}(t-1) \, dt$$
$$\Theta_2(t) = (-3t+3) - 3(t-1)(-1)$$
$$\Theta_2(t) = -3t+3+3t-3$$
$$E_2 = \int_0^1 0 \, dt$$
$$E_2 = 0$$

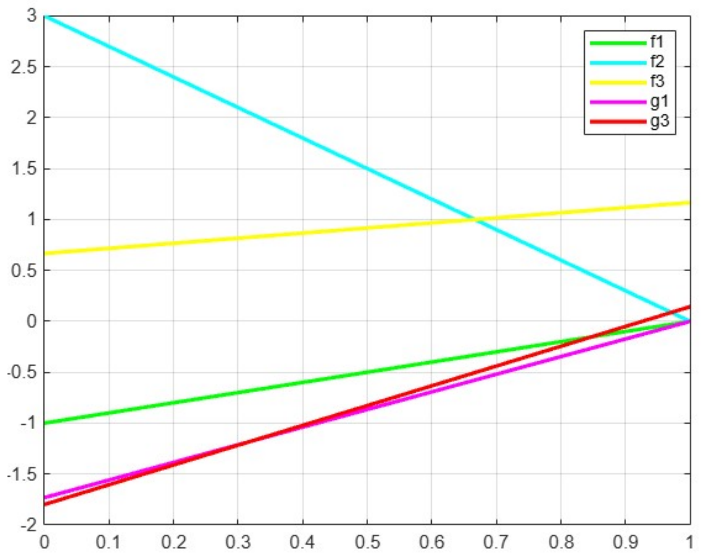
$g_2(t)$ nie istnieje, ponieważ y_2 jest kombinacją liniową y_1:

$$y_2 = -3y_1$$

-3x –3 = -3(x-1)

Obliczenie $g_3(t)$:

$$\Theta_3(t) = y_3(t) - g_1(t) \int_0^1 y_3(t) g_1(t) \, dt$$
$$\Theta_3(t) = \left(0.5t + \frac{2}{3}\right) - \sqrt{3}(t-1) \int_0^1 \left(0.5t + \frac{2}{3}\right) \sqrt{3}(t-1) \, dt$$
$$\Theta_3(t) = 2.25t - \frac{25}{12}$$
$$E_3 = \int_0^1 \Theta_3(t)^2 \, dt$$
$$E_3 = \int_0^1 \left(2.25t - \frac{25}{12}\right)^2 \, dt = \frac{193}{144}$$
$$g_3(t) = \frac{27t - 25}{\sqrt{193}}$$



Rysunek 3 Wykresy funkcji f1, f2, f3 oraz g1 i g3

Zadanie 2.4. - Wnioski

- Naszkicowana funkcja Walsha (dla wyznaczonego n) wyraźnie ukazuje charakterystyczne cechy tej rodziny funkcji – zmiany wartości między -1 a 1 w określonych przedziałach.
- Gdy przy obliczeniach wychodzi n=9, korzystamy z bazy, która zawiera elementy w liczbie będącej potęgą dwójki (czyli 8 elementów). W efekcie przy rozwinięciu sygnału otrzymujemy tylko 8 współczynników.
- Współczynniki występują w symetrycznej kolejności: od 0.1190 przez 0.3730, 0.6270 do 0.8810, a następnie dokładnie w odwrotnej kolejności. Taka lustrzana symetria współczynników odzwierciedla symetryczny charakter analizowanego sygnału, który jest równomiernie rozłożony względem środka przedziału.
- Rozwinięcie sygnału w bazie funkcji Walsha pozwala na efektywną aproksymację sygnałów okresowych trójkątnych, gdzie obliczona moc średnia potwierdza poprawność obliczeń oraz wysoką zgodność między sygnałem teoretycznym a jego rekonstrukcją przy użyciu skończonej liczby składników.

Spis Ilustracji: