MAT2 Rozwiązania
Z_4

1. Zbadaj zbieżność szeregu:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$,

   Skorzystamy z kryterium porównawczego :
   $b_n \geqslant a_n \geqslant 0 \ \wedge\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$

   $\frac{\ln n}{n} \geqslant \frac{1}{n} \geqslant 0 \ \wedge\ \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n}$ - szereg harmoniczny - rozbieżny, więc $\sum_{n=3}^{\infty} \dfrac{\ln n}{n}$ jest rozbieżny

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}$,

   Skorzystamy z kryterium Cauchy'ego: $a_n \geqslant 0 \ \wedge\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = g > 1 \Rightarrow$
   $\Rightarrow$ szereg rozbieżny

   $\sqrt[n]{a_n} = \frac{3 \cdot n^n}{(n+1)^n} = \frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{3}{e} > 1 \Rightarrow$ szereg rozbieżny

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{1}{n}\right)$,

   Skorzystamy z kryterium porównawczego :
   $0 \leqslant a_n \leqslant b_n \ \wedge\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$

   $0 \leqslant \sin^2 \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n^2} \ \wedge\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ - zbieżny $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{1}{n}\right)$ - zbieżny

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 5^n}{3^n + 4^n}$,

   Skorzystamy z kryterium Cauchy'ego i z tw. o 3 ciągach:

   $\frac{5}{4} \leftarrow \sqrt[n]{\frac{5^n}{2 \cdot 4^n}} \leqslant \sqrt[n]{a_n} \leqslant \sqrt[n]{\frac{2 \cdot 5^n}{4^n}} \to \frac{5}{4} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{5}{4} > 1 \Rightarrow$ szereg rozbieżny

   (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+2) \cdot 3^n}$,

   Skorzystamy z kryterium d'Alemberta: $a_n > 0 \ \wedge\ \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g < 1 \Rightarrow$
   $\Rightarrow$ szereg zbieżny

   $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+2)^2 \cdot 3^n}{(n+3)(n+1) \cdot 3^{n+1}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{(n+2)^2}{(n+3)(n+1)} \to \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow$ szereg zbieżny

2. Zbadaj zbieżność bezwzględną i warunkową szeregu:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\dfrac{2n+1}{3n+1}\right)^n$,

Szereg zbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny, jeśli zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, w przeciwnym przypadku szereg jest warunkowo zbieżny.

$\sqrt[n]{|a_n|} \to \frac{2}{3} < 1 \Rightarrow$ szereg jest bezwzględnie zbieżny

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Szereg nie jest zbieżny bezwzględnie, bo z kryterium porównawczego $\sin\frac{1}{n} \geqslant \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n} \geqslant 0$ i szereg harmoniczny jest rozbieżny

Aby wykazać zbieżność warunkową szeregu skorzystamy z kryterium Lebniza: $a_n > 0\,,\ \lim_{n\to\infty} a_n = 0\,,\ (a_n)$ - nierosnący $\Rightarrow$ szereg naprzemienny $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ jest zbieżny

$\sin\frac{1}{n} > 0\,,\ \lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{n} = 0\,,\ \left(\sin\frac{1}{n}\right)$ - malejący $\Rightarrow$ szereg zbieżny

3. Wyznaczyć promienie zbieżności i przedziały zbieżności szeregów potęgowych

$$\text{(a)}\qquad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n2^n\cdot\ln n}$$

$\lambda = \lim_{n\to\infty}\left|\ \frac{a_{n+1}}{a_n}\ \right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n2^n\ln n}{(n+1)2^{n+1}\ln(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\frac{\ln n}{\ln(n+1)} =$
$= \frac{1}{2} \Rightarrow R = 2 \Rightarrow (-1,3)$.

Końce przedziału:

$x=-1:\ \ \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\ln n} \Rightarrow$ szereg zbieżny z kryterium Leibniza.

$x=3:\ \ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ skorzystamy z kryterium całkowego:

$f(x) = \frac{1}{x\ln x} > 0\,,\ x \geqslant 2\,,\ \ f'(x) = \frac{-(\ln x+1)}{(x\ln x)^2} < 0 \Rightarrow$ - funkcja malejąca

$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln x} = \lim_{T\to\infty}\int_2^T\frac{dx}{x\ln x} = \lim_{T\to\infty}\ \ln|\ln|x||\ \Big|_2^T =$
$= \lim_{T\to\infty}\ln|\ln|T| - \ln|\ln 2| = +\infty \Rightarrow$ całka rozbieżna $\Rightarrow$ szereg rozbieżny

$\int\frac{dx}{x\ln x} = \left\|\ y=\ln x\ \right\| = \int\frac{dy}{y} = \ln|\ln|x|| + C$

Przedział zbieżności: $X = [-1,3)$.

$$\text{(b)}\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{n+1}(x-1)^{n+2}$$

Zastosujemy kryterium d'Alemberta dla szeregów liczbowych:

$\lim_{n\to\infty}\left|\ \frac{a_{n+1}}{a_n}\ \right| = \lim_{n\to\infty}\left|\ \frac{4^{n+1}(n+1)(x-1)^{n+3}}{4^n(n+2)(x-1)^{n+2}}\ \right| = \lim_{n\to\infty}4\cdot\frac{n+1}{n+2}\cdot|x-1| =$
$= 4|x-1| < 1$

$4|x-1| < 1 \iff |x-1| < \frac{1}{4} \Rightarrow \left(\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right)$.

Końce przedziału:

$x=\frac{3}{4}:\ \ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{n+1}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^{n+2} = \frac{1}{16}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1} \Rightarrow$ szereg anharmoniczny, zbieżny,

$x = \frac{5}{4}:\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{n+1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n+2} = \frac{1}{16} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ - szereg harmoniczny, rozbieżny
$\Rightarrow X = \left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right)$.

4. Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcje

$$\text{(a)}\quad f(x) = 2\sin x \sin 3x$$

Skorzystamy z wzoru trygonometrycznego i z rozwinięcia $\cos x$ w szereg Maclaurina:
$\sin \alpha x \cdot \sin \beta x = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta)x - \cos(\alpha + \beta)x]$

$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\,,\quad x \in \mathbb{R}$

$f(x) = 2\sin x \sin 3x = \cos(-2x) - \cos 4x = \cos 2x - \cos 4x =$
$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(2^{2n} - 4^{2n}) \cdot x^{2n}\,,\quad x \in \mathbb{R}$

$$\text{(b)}\quad f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$$

Skorzystamy z rozwinięcia: $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n\,,\quad x \in (-1, 1]$
Wtedy: $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\,,\quad x \in [-1, 1)$

$f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}\,,\quad x \in (-1, 1)$

5. Rozwinąć funkcję $f(x)$ w szereg Taylora wokół punktu x_0

$$\text{(a)}\quad f(x) = \ln x\,,\quad x_0 = 1$$

W rozwinięciu $\ln(1+x)$ w szereg Maclaurina robimy podstawienie $1 + x = y$ i wracamy potem do oznaczenia zmiennej przez x:

$\ln x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n\,,\quad x \in (0, 2]$

$$\text{(b)}\quad f(x) = \frac{1}{x}\,,\quad x_0 = 3$$

$f(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{x-3+3} = \frac{1}{3\left(1+\frac{x-3}{3}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{3^{n+1}}\,,$
$\left|\frac{x-3}{3}\right| < 1 \iff |x-3| < 3$

6. Rozwinąć w szereg Fouriera funkcje o okresie 2π

$$\text{(a)}\quad f(x) = \sin x + x\,,\quad x \in (0, 2\pi)$$

Niech $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, definiujemy funkcję
$f^*(x) = f(x)\ \forall x \in (0, 2\pi)\,,\ f^*(0) = f^*(2\pi) = \pi$, którą rozwijamy w szereg Fouriera (spełnia warunki Dirichleta).

$[0, 2\pi] = [a, a + 2l] \Rightarrow l = \pi$

$f_1(x) = \sin x \Rightarrow a_0 = 0\,, \quad b_1 = 1\,, \quad b_n = 0 \quad \forall n \geqslant 2\,, \quad a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Jest to rozwinięcie w szereg Fouriera $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, w którym jest tylko jeden wyraz.

Dla funkcji $f_2(x) = x$ wyznaczamy wszystkie współczynniki

$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\,dx = 2\pi$

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos nx\,dx = \left\| \begin{matrix} u = x & v' = \cos nx \\ u' = 1 & v = \frac{1}{n}\sin nx \end{matrix} \right\| = \frac{1}{\pi}\left[\left. \frac{x}{n}\sin nx \right|_0^{2\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\sin nx\,dx \right] =$

$= -\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}\sin nx\,dx = \left. \frac{1}{n^2\pi}\cos nx \right|_0^{2\pi} = \frac{1}{n^2\pi}(\cos 2n\pi - 1) = 0$

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin nx\,dx = \left\| \begin{matrix} u = x & v' = \sin nx \\ u' = 1 & v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{matrix} \right\| =$

$= \frac{1}{\pi}\left[\left. -\frac{x}{n}\cos nx \right|_0^{2\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\cos nx\,dx \right] = -\frac{2}{n}\cos 2n\pi + \frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}\cos nx\,dx =$

$= -\frac{2}{n} + \left. \frac{1}{n^2\pi}\sin nx \right|_0^{2\pi} = -\frac{2}{n}$

Stąd rozwinięcie w szereg Fouriera funkcji $f(x) = \left. f^*(x) \right|_{(0,2\pi)}$:

$f(x) = \sin x + \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} = \pi - \sin x - 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$

$$\text{(b)} \quad f(x) = x + 2\cos x\,, \quad x \in (-\pi, \pi)$$

Niech $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, definiujemy funkcję
$f^*(x) = f(x)\ \forall x \in (-\pi, \pi)\,,\ f^*(-\pi) = f^*(\pi) = 0$, którą rozwijamy w szereg Fouriera (spełnia warunki Dirichleta).

$f_2(x) = 2\cos x \Rightarrow a_0 = 0\,, \quad a_1 = 2\,, \quad a_n = 0 \quad \forall n \geqslant 2\,, \quad b_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Jest to rozwinięcie w szereg Fouriera $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, w którym jest tylko jeden wyraz.

Funkcja $f_1(x) = x$ jest nieparzysta, więc $a_0 = a_n = 0$, a współczynnik
$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f_1(x)\sin\frac{n\pi x}{l}$

$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx = \left\| \begin{matrix} u = x & v' = \sin nx \\ u' = 1 & v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{matrix} \right\| =$

$= \frac{2}{\pi}\left[\left. -\frac{x}{n}\cos nx \right|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx \right] = -\frac{2}{n}\cos n\pi + \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx =$

$= -\frac{2}{n}(-1)^n + \left. \frac{2}{n^2\pi}\sin nx \right|_0^{\pi} = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$

Stąd rozwinięcie w szereg Fouriera funkcji $f(x) = \left. f^*(x) \right|_{(-\pi,\pi)}$:

$f(x) = 2\cos x + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$

7. Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\,, & 0 < x < \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\,, & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

(a) samych sinusów

Przedłużamy funkcję $f(x)$ na przedział $[-1,1]$ w sposób nieparzysty, stąd
$l = 1\,,\ a_0 = a_n = 0$

$b_n = 2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\,dx = 2\left[\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}\sin n\pi x\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(-\frac{1}{2}\right)\sin n\pi x\,dx\right] =$

$= \ -\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x\ \Big|_0^{\frac{1}{2}} + \ \frac{1}{n\pi}\cos n\pi x\ \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = -\frac{1}{n\pi}\left(\cos n\frac{\pi}{2} - 1\right) + \frac{1}{n\pi}\left(\cos n\pi - \cos n\frac{\pi}{2}\right) =$

$$= \frac{1}{n\pi}[1+(-1)^n] - \frac{2}{n\pi}\cos n\frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0\,, & n = 2k-1 \\ 0\,, & n = 4l \\ \frac{4}{n\pi}\,, & n = 4l-2 \end{cases}$$

Stąd rozwinięcie funkcji w szereg samych sinusów:

$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n-2}\sin(4n-2)\pi x$

(b) samych cosinusów

Przedłużamy funkcję $f(x)$ na przedział $[-1,1]$ w sposób parzysty, stąd
$l = 1\,,\ b_n = 0\,,\ a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,dx\,,\ a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$

$a_0 = 2\int_0^1 f(x)\,dx = 2\left[\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1\left(-\frac{1}{2}\right)\,dx\right] = 2\left[\ \frac{1}{2}x\ \Big|_0^{\frac{1}{2}} + \ \left(-\frac{1}{2}x\right)\ \Big|_{\frac{1}{2}}^1\right] = 0$

$a_n = 2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\,dx = 2\left[\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}\cos n\pi x\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1\left(-\frac{1}{2}\right)\cos n\pi x\,dx\right] =$

$= \ \frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\ \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \ \frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\ \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{n\pi}\left(\sin n\frac{\pi}{2} - 0\right) - \frac{1}{n\pi}\left(\sin n\pi - \sin n\frac{\pi}{2}\right) =$

$$= \frac{2}{n\pi}\sin n\frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0\,, & n = 2k \\ \frac{2}{n\pi}(-1)^{k+1}\,, & n = 2k-1 \end{cases}$$

Stąd rozwinięcie funkcji w szereg samych cosinusów:

$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\cos(2n-1)\pi x$

8. Rozwinąć w szereg Fouriera w przedziale $\langle -\pi;\pi\rangle$ funkcję $f(x) = x^2$. Jaki szereg liczbowy otrzymujemy podstawiając $x = \pi$, a jaki $x = 0$?

Funkcja jest parzysta na przedziale $[-\pi,\pi] \Rightarrow l = \pi\,,\ \ b_n = 0$

$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx = \frac{2}{3}\pi^2$

$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos nx\,dx = \left\| \begin{array}{ll} u = x^2 & v' = \cos nx \\ u' = 2x & v = \frac{1}{n}\sin nx \end{array} \right\| =$

$\frac{2}{\pi}\left[\ \frac{x^2}{n}\sin nx\ \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx\right] =$

$= -\frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx = \left\| \begin{array}{ll} u = x & v' = \sin nx \\ u' = 1 & v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{array} \right\| =$

$-\frac{4}{n\pi}\left[-\ \frac{x}{n}\cos nx\ \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right] =$

$= \ \frac{4x}{n^2\pi}\cos nx\ \Big|_0^{\pi} - \frac{4}{n^2\pi}\cdot\frac{1}{n}\ \sin nx\ \Big|_0^{\pi} = \frac{4}{n^2}\cos n\pi = \frac{4}{n^2}(-1)^n$

$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$

$x = 0:\ \ 0 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$

$x = \pi:\ \ \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cdot(-1)^n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$