Mat3 - Praca domowa

Jan Czechowski
337066 IIR

Zad. 1.

1. (1p.) Przedstawić pełny dowód Twierdzenia Lagrange'a (ze wszystkimi szczegółami).

Twierdzenie Lagrange'a:

Jeśli $(G, \cdot)$ jest skończoną grupą, a $(H, \cdot)$ jej podgrupą, to $|H|$ dzieli $|G|$.

Dowód:

1. Dla dowolnego $a \in G$, warstwą lewostronną H wyznaczoną przez a nazywamy zbiór:

$$aH = \{a \cdot h \mid h \in H\}$$

2. Własności warstw:

• Równoliczność: Każda warstwa aH ma tyle samo elementów co H.

Dowód:

Rozważam funkcję $f: H \to aH$ daną wzorem: $f(h) = a \cdot h$.

- Injektywność: Jeśli $f(h_1) = f(h_2)$, to $a \cdot h_1 = a \cdot h_2$. Mnożąc lewostronnie przez a^{-1}, otrzymujemy $h_1 = h_2$.

– Surjektywność: Dla dowolnego $y \in aH$ istnieje $h \in H$ takie, że $y = a \cdot h$.

Zatem $|aH| = |H|$

• Rozłączność lub identyczność:

Dla dowolnych $a, b \in G$, warstwy aH i bH są albo rozłączne, albo identyczne.

Dowód:

Załóżmy, że $aH \cap bH \neq \emptyset$. Wtedy istnieje $x \in aH \cap bH$, czyli $x = a \cdot h_1 = b \cdot h_2$ dla pewnych $h_1, h_2 \in H$.

Stąd: $a = b\, h_2 \cdot h_1^{-1}$ $(h_1^{-1} \in H)$

Weźmy dowolny element $a \cdot h \in aH$.

Wtedy: $a \cdot h = b \cdot (h_2 \cdot h_1^{-1} \cdot h)$

Ponieważ $h_2 \cdot h_1^{-1} \cdot h \in H$ (gdyż H jest podgrupą) mamy $a \cdot h \in bH$. Zatem $aH \subseteq bH$.

Analogicznie, z $b = a \cdot h_1 \cdot h_2^{-1}$ wynika $bH \subseteq aH$.

Ostatecznie $aH = bH$.

3. Rozbicie grupy na warstwy:

Grupa G jest sumą rozłączną różnych warstw lewostronnych względem H.

Dowód:

- Każdy element $g \in G$ należy do warstwy gH (bo $g = g \cdot e$, gdzie e jest elementem neutralnym H).
- Z własności (2) warstwy są parami rozłączne lub identyczne.

Możemy więc wybrać reprezentantów $a_1, \dots, a_k \in G$ takich, że warstwy $a_1 H, \dots, a_k H$ są parami rozłączne i:

$$G = \bigcup_{i=1}^{k} a_i H$$

4. Obliczenie rzędu grupy:

$$|G| = \sum_{i=1}^{k} |a_i H| = \sum_{i=1}^{k} |H| = k \cdot |H|$$

ponieważ wszystkie warstwy mają moc równą $|H|$ (z własności (1)).

k - liczba warstw lewostronnych

5. Wniosek:

Z równości $|G| = k|H|$ wynika, że $|H|$ dzieli $|G|$.

c.n.d. ■

Zad. 2.

2. (0,5p.) Niech $(G, \cdot)$ będzie grupą i H będzie jej podgrupą normalną. Oznaczmy przez G/H zbiór warstw lewostronnych G względem H. Sprawdzić, że (G/H) z działaniem $* : G/H \times G/H \to G/H$ danym wzorem

$$(aH) * (bH) = (a \cdot b)H$$

tworzy grupę.

1. Działanie jest dobrze określone - nie zależy od wyboru reprezentantów warstw.

Załóżmy, że $aH = a'H$ i $bH = b'H$. Musimy pokazać, że:

$$(a \cdot b)H = (a' \cdot b')H$$

Z założenia: $a' = a \cdot h_1$, $b' = b \cdot h_2$ dla $h_1, h_2 \in H$

Wówczas: $a' \cdot b' = (a \cdot h_1) \cdot (b \cdot h_2) = a(h_1 \cdot b) \cdot h_2$

Ponieważ H jest normalna, zachodzi $h_1 \cdot b = b \cdot h_3$ dla pewnego $h_3 \in H$.

Zatem:
$$a' \cdot b' = a \cdot (b \cdot h_3) \cdot h_2 = (a \cdot b) \cdot (h_3 \cdot h_2)$$

Gdyż $h_3 \cdot h_2 \in H$, mamy:

$$(a' \cdot b') \in (a \cdot b)H \Rightarrow (a' \cdot b')H = (a \cdot b)H$$

Działanie jest dobrze określone ✓

2. Działanie jest łączne

dla dowolnych $aH, bH, cH \in G/H$:

$$((aH) * (bH)) * (cH) = (a \cdot b)H * cH = ((a \cdot b) \cdot c)H = (a \cdot (b \cdot c))H$$

$$(aH) * ((bH) * (cH)) = aH * (b \cdot c)H = (a \cdot (b \cdot c))H.$$

Z łączności działania $\cdot$ w G wynika, że:

$$(a \cdot (b \cdot c))H = ((a \cdot b) \cdot c)H$$

Zatem działanie $*$ jest łączne ✓

3. Istnieje element neutralny

e - element neutralny w G

Dla dowolnego $aH \in G/H$:

$(eH) * (aH) = (e \cdot a)H = aH$
$(aH) * (eH) = (a \cdot e)H = aH$
} Warstwa eH spełnia warunek el. neutralnego ✓

4. Każdy element ma element odwrotny

$(aH) * (a^{-1}H) = (a a^{-1})H = eH$

$\Rightarrow$ $\forall aH \in G/H$ elementem odwrotnym jest $a^{-1}H$ ✓

Wniosek:

$(G/H, *)$ spełnia wszystkie aksjomaty grupy, więc tworzy grupę.

Zad. 3.

3. Niech $(P, +, \cdot)$ będzie pierścieniem z jedynką.

(a) (0,5p.) Uzasadnić, że zachodzi $(-1)^2 = 1$.

a)

1. Rozważam wyrażenie $(-1)\cdot(-1) + (-1)$

2. Korzystając z rozdzielności mnożenia względem dodawania:

$$(-1)\cdot(-1) + (-1) = (-1)\cdot(-1) + (-1)\cdot 1 = (-1)\cdot[(-1)+1]$$

Ponieważ $(-1)+1 = 0$:

$$(-1)\cdot[(-1)+1] = (-1)\cdot 0 = 0$$

Więc:

$$(-1)\cdot(-1) + (-1) = 0$$

Następnie dodaję 1 do obu stron:

$$(-1)\cdot(-1) + (-1) + 1 = 0 + 1 \Rightarrow (-1)\cdot(-1) + 0 = 1$$

$$\Rightarrow (-1)\cdot(-1) = 1$$

Wniosek:

$(-1)^2 = 1$ c.n.d. ■

b)

(b) (1p.) Załóżmy, że $a \in P$ oraz istnieje $n \in \mathbb{N}_+$ takie, że $a^n = 0$. Uzasadnić, że $1 + a$ jest odwracalny.

Założenia: $a \in P$, $n \in N_+$ takie, że $a^n = 0$

Musimy znaleźć element $b \in P$ taki, że $(1+a)b = 1$

$(1-x)(1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}) = 1 - x^n$ $\leftarrow$ to równanie jest prawdziwe

$x = -a$

$$(1-(-a))\left(1+(-a)+(-a)^2+\ldots+(-a)^{n-1}\right) = 1-(-a)^n$$

$$(1+a)\left(1-a+a^2-a^3+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot a^{n-1}\right) = 1-(-1)^n\cdot a^n$$

z założenia $a^n = 0$

$$(1+a)\underbrace{\left(1-a+a^2-a^3+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot a^{n-1}\right)}_{b} = 1-(-1)^n\cdot 0 = 1$$

Wniosek: $1+a$ jest odwracalny ✓

Zad. 4

4. (1p.) Niech U, W będą podprzestrzeniami przestrzeni wektorowej V. Uzasadnić, że $U+W$ oraz $U \cap W$ są również podprzestrzeniami przestrzeni V.

$\underline{U+W}$

$$U+W = \{u+w \mid u \in U, w \in W\}$$

Dowód:

- Niepustość: ✓
  $0 \in U$, $0 \in W$
  $0 = 0+0 \in U+W$

- Zamkniętość na dodawanie:

Niech $x, y \in U+W$

$x = u_1+w_1$, $y = u_2+w_2$ gdzie $u_1, u_2 \in U$, $w_1, w_2 \in W$

$x+y = (u_1+w_1)+(u_2+w_2) = (u_1+u_2)+(w_1+w_2)$

Ponieważ U i W są podprzestrzeniami: $u_1+u_2 \in U$, $w_1+w_2 \in W$

Zatem: $x+y \in U+W$ ✓

- Zamkniętość na mnożenie przez skalar:

Niech $\lambda \in \mathbb{K} \wedge x \in U+W$

$x = u+w$, $u \in U$, $w \in W$

$\lambda x = \lambda(u+w) = \lambda u + \lambda w$

U i W są podprzestrzeniami $\lambda u \in U$, $\lambda w \in W$

Zatem: $\lambda x \in U+W$ ✓

Wniosek: $U+W$ jest podprzestrzenią V.

$U \cap W$

$$U \cap W = \{ v \in V \mid v \in U \text{ i } v \in W \}$$

Dowód:

- Niepustość:

$0 \in U \wedge 0 \in W \Rightarrow 0 \in U \cap W$ ✓

$U \cap W \neq \emptyset$

- Zamkniętość na dodawanie:

$x, y \in U \cap W$

$x \in U$, $x \in W$, $y \in U$, $y \in W$

U i W są podprzestrzeniami $\Rightarrow$ $x+y \in U$ i $x+y \in W$

Zatem: $x+y \in U \cap W$ ✓

• Zamkniętość na mnożenie przez skalar

Niech $\lambda \in \mathbb{K} \wedge x \in U \cap W$

$x \in U \wedge x \in W$

U i W są podprzestrzeniami $\Rightarrow \lambda x \in U \wedge \lambda x \in W$

zatem: $\lambda x \in U \cap W$ ✓

Wniosek: $U \cap W$ jest podprzestrzenią V

Zad. 5.

5. (1p.) Załóżmy, że V jest skończenie wymiarową przestrzenią wektorową oraz dane są dwie bazy, $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}$, przestrzeni V. Niech $F : V \to V$ będzie dowolnym przekształceniem liniowym. Uzasadnić, że macierze $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(F)$ oraz $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)$ mają takie same wielomiany charakterystyczne.

Niech $P = M_A^B(Id_V)$ będzie macierzą zmiany bazy z A do B

$M_B^B(F) = P^{-1} \cdot M_A^A(F) \cdot P \Rightarrow M_A^A(F)$ i $M_B^B(F)$ są podobne

$$\chi_M(\lambda) = \det(M - \lambda Id)$$

dla $M_B^B(F)$:

$$\chi_{M_B^B(F)}(\lambda) = \det(M_B^B(F) - \lambda Id) = \det(P^{-1} \cdot M_A^A(F) \cdot P - \lambda Id) =$$

$$= \det(P^{-1} \cdot (M_A^A(F) - \lambda Id) \cdot P)$$

bo $\lambda Id = P^{-1} \cdot (\lambda Id) \cdot P$

$$\chi_{M_B^B(F)}(\lambda) = \det(P^{-1}) \cdot \det(M_A^A(F) - \lambda Id) \cdot \det(P) =$$

$\det(P^{-1}) = [\det(P)]^{-1}$, więc:

$$[\det(P)]^{-1} \cdot \det(M_A^A(F) - \lambda Id) \cdot \det(P) = \det(M_A^A(F) - \lambda Id)$$

Zatem: $\det(M_B^B(F) - \lambda Id) = \det(M_A^A(F) - \lambda Id)$

Wniosek: $\chi_{M_B^B(F)}(\lambda) = \chi_{M_A^A(F)}(\lambda)$ c.n.d. ■