4. Wyznaczniki i ich zastosowanie

$(P, +, \cdot)$ - pierścień przemienny z 1
Z każdą macierzą kwadratową

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n^n(P)$$

związany jest element $DetA$ należąca do zbioru P zwana *wyznacznikiem* macierzy A.

Definicja 1. *Niech* $A \in M_n^n(P)$

$$DetA := \sum_{\sigma \in S_n} sgn\sigma \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{i\sigma(i)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} sgn\sigma \cdot a_{\sigma(1)1} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(i)i} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(n)n} \in P$$

Wyznacznik macierzy A często oznaczamy w następujący sposób:

$$DetA = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Przykład 2. *Dla* $n = 2$, $S_2 = \{\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\}$

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = sgn\sigma_0 \cdot a_{11} \cdot a_{12} + sgn\sigma_1 \cdot a_{21} \cdot a_{22} = a_{11} \cdot a_{12} - a_{21} \cdot a_{22}$$

Przykład 3. *Dla* $n = 3$, $S_3 = \{\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$
$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Przykład 4. Wyznacznik macierzy trójkątnej (górnej).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{nn}.$$

W szczególności:

$$Det(diag(a_{11}, \dots, a_{nn})) = a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

oraz

$$DetI_n = 1.$$

Obliczanie wyznacznika

Niech $A_{ij} \in M_{n-1}^{n-1}(P)$ będzie macierzą otrzymaną z A przez skreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny.

Definicja 5. *Niech $A \in M_n^n(P)$. Element*

$$D_{ij} := (-1)^{i+j} Det A_{ij}$$

nazywamy ***dopełnieniem algebraicznym elementu*** a_{ij} *macierzy A.*

Twierdzenie 6. *Niech $A = (a_{ij}) \in M_n^n(P)$ będzie macierzą stopnia $n \geq 2$. Dla dowolnej liczby $1 \leq i \leq n$, wyznacznik macierzy A jest równy*

$$Det A = a_{i1}D_{i1} + a_{i2}D_{i2} + \ldots + a_{in}D_{in}. \tag{1}$$

Wyrażenie (1) nosi nazwę *rozwinięcia Laplace'a* względem i-tego wiersza.

Twierdzenie 7. *Niech $A = (a_{ij}) \in M_n^n(P)$ będzie macierzą stopnia $n \geq 2$. Dla dowolnej liczby $1 \leq j \leq n$, wyznacznik macierzy A jest równy*

$$Det A = a_{1j}D_{1j} + a_{2j}D_{2j} + \ldots + a_{nj}D_{nj}. \tag{2}$$

Wyrażenie (2) nosi nazwę *rozwinięcia Laplace'a* względem j-tej kolumny.

Przykład 8. Rozwinięcie Laplace'a wyznacznika macierzy względem drugiego wiersza:

$$Det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$(-1) \cdot 1 + 0 + (-1) \cdot 0 = -1.$$

Twierdzenie 9. *Niech $A \in M_n^n(P)$ i $\lambda \in P$.*

1. *Jeżeli macierz A zawiera wiersz złożony z samych zer, to $Det A = 0$.*
2. *Jeżeli zamienimy miejscami dwa różne wiersze macierzy A, to jej wyznacznik zmieni znak.*
3. *Jeżeli macierz A ma dwa jednakowe wiersze, to $Det A = 0$.*
4. *Wyznacznik jest jednorodną funkcją wierszy macierzy, tzn.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda a_{i1} & \ldots & \lambda a_{ij} & \ldots & \lambda a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

dla dowolnego $i = 1, \ldots, n$.
W szczególności, $Det(\lambda A) = \lambda^n Det A$.

5. *Wyznacznik jest addytywną funkcją wierszy macierzy, tzn.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} + b_{i1} & \ldots & a_{ij} + b_{ij} & \ldots & a_{in} + b_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{i1} & \ldots & b_{ij} & \ldots & b_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

dla dowolnego $i = 1, \ldots, n$.

6. $DetA = DetA^T$.

7. *Wyznacznik macierzy A nie ulegnie zmianie, jeśli do dowolnego wiersza dodamy elementy dowolnego innego wiersza tej macierzy pomnożone przez dowolny element $\lambda \in P$:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kj} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}+\lambda a_{k1} & \dots & a_{ij}+\lambda a_{kj} & \dots & a_{in}+\lambda a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kj} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

dla dowolnych $1 \leq i, k \leq n$.

Własności podane w Twierdzeniu 9 pozostają prawdziwe, gdy zamiast wierszy mówić będziemy o kolumnach.

Twierdzenie 10. (*Binet, Cauchy*)
Niech $A, B \in M_n^n(P)$. Wtedy

$$Det(A \cdot B) = DetA \cdot DetB. \tag{3}$$

Zastosowania wyznaczników

1. *Obliczanie macierzy odwrotnej.*

Definicja 11. *Niech $A \in M_n^n(P)$. Transponowaną macierz dopełnień algebraicznych*

$$A^D := [D_{ij}]^T$$

nazywamy ***macierzą dołączoną****.*

Przykład 12.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^D = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T =$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Twierdzenie 13. *Niech $A \in M_n^n(P)$. Wtedy*

$$A \cdot A^D = A^D \cdot A = (DetA) \cdot I_n.$$

Twierdzenie 14. *Niech $A \in M_n^n(P)$.*

1. *Jeśli A jest macierzą odwracalną, to $DetA \neq 0$ oraz*

$$Det(A^{-1}) = \frac{1}{DetA}.$$

2. *Jeśli $DetA \neq 0$, to A jest macierzą odwracalną oraz*

$$A^{-1} = \frac{A^D}{DetA}.$$

Przykład 15.

$$DetA = Det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0.$$

Stąd

$$A^{-1} = -A^D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. ***Rząd macierzy.***

Definicja 16. ***Podmacierzą*** *stopnia $p \times r$ macierzy $A \in M_m^n(P)$ nazywamy macierz otrzymaną z macierzy A przez usunięcie $m - p$ wierszy oraz $n - r$ kolumn.*

Definicja 17. ***Minorem*** *stopnia $r \in \mathbb{N}$ macierzy $A \in M_m^n(P)$ nazywamy wyznacznik dowolnej podmacierzy stopnia $r \times r$ macierzy A.*

Liczba $r \in \mathbb{N}$ jest rzędem macierzy $A \in M_m^n(P)$, jeśli

- istnieje różny od zera minor stopnia r macierzy A,
- nie istnieje różny od zera minor macierzy A stopnia większego od r.

Twierdzenie 18. *Niech $A \in M_m^n(P)$.*

1. *$rzA \leq m$, $rzA \leq n$.*
2. *Jeśli $m = n$, to $rzA = n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $DetA \neq 0$.*

Zadania

1. Obliczyć wyznacznik macierzy A o elementach rzeczywistych:

   (a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$

   (b) $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (c) $A = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 15 & 4 \\ 6 & -5 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 9 & -9 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

   (d) $A = \begin{pmatrix} 11 & 2 & 3 & -1 \\ 22 & 3 & 4 & 2 \\ 33 & 5 & 8 & -9 \\ 11 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

   (e) $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 11 & 18 \\ 5 & 3 & 7 & 9 \\ 6 & 4 & 9 & 13 \\ 10 & 6 & 11 & 19 \end{pmatrix}$

2. Obliczyć wyznacznik macierzy A o elementach w ciele $(Z_5, +_5, \cdot + 5)$:
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Dla jakiego parametru a macierz A nie jest odwracalna:

$$A = \begin{pmatrix} a-1 & 2 & 1-a & 1 \\ 4 & a-8 & -4 & 4 \\ a & 2a & -1 & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Metodą dopełnień algebraicznych obliczyć macierz odwrotną A^{-1}:

   (a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$

   (b) $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$