Laboratorium kontrolne

Jan Czechowski

Zadanie 1

Statek - współrzędne :

In[∘]:=
```
x[t_] := t
y[t_] := t^2 - 1
```

Latarnia - współrzędne:

In[∘]:=
```
px := 1
py := 1
```

Odległość statku od latarni

In[∘]:= `odl[t_] :=` $\sqrt{(x[t] - px)^2 + (y[t] - py)^2}$

In[∘]:=
```
d[t_] := (x[t] - px) ^2 + (y[t] - py) ^2
```

In[∘]:=
```
d'[t]
```

Out[∘]=

$$2(-1+t)+4t(-2+t^2)$$

In[∘]:=
```
tMin = Solve[d'[t] == 0, t]
```
rozwiąż równanie

Out[∘]=

$$\left\{\{t\to -1\}, \left\{t\to \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{3}\right)\right\}, \left\{t\to \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)\right\}\right\}$$

Dziedzina to [0, 2]

Jedyną wartością w tym przedziale spośród tMini jest: $t\to \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)$

In[∘]:= `tNajmniejsza :=` $\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)$
```
xMin = tNajmniejsza;
yMin = y[xMin];
```

Najmniejsza odległość:

In[∘]:= `NajmniejszaOdl = Simplify[` $\sqrt{\text{d[tNajmniejsza]}}$ `]`
uprość

Out[∘]=

$$\frac{1}{2}\sqrt{11-6\sqrt{3}}$$

Odp: Najmniejsza odległość to: $\frac{1}{2}\sqrt{11-6\sqrt{3}}$

In[∘]:=
```
wspolrzedneStatku = {x[tNajmniejsza], y[tNajmniejsza]}
```

Out[∘]=

$$\left\{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}\right),\ -1+\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{3}\right)^2\right\}$$

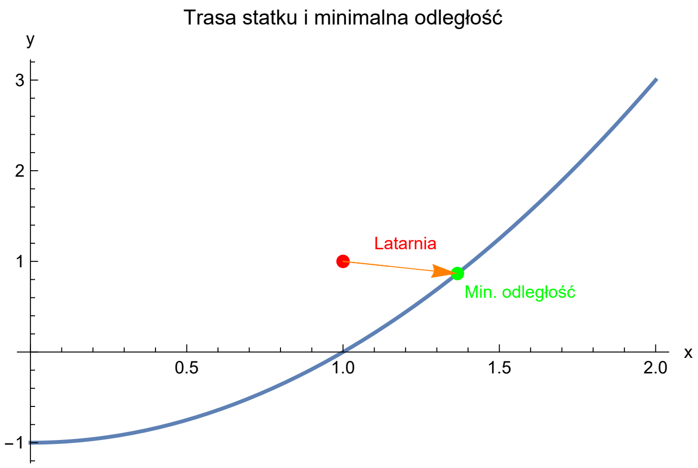
In[∘]:=
```
wektor = wspolrzedneStatku - {px, py}
```

Out[∘]=

$$\left\{-1+\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}\right),\ -2+\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{3}\right)^2\right\}$$

In[∘]:=
```
Plot[y[x], {x, 0, 2}, AxesLabel → {"x", "y"},
wykres                oznaczenia osi
 PlotLabel → "Trasa statku i minimalna odległość",
 etykieta grafiki
 Epilog → {Red, PointSize[Large], Point[{px, py}],
 dopracow···  cz···  rozmiar kro···  duży   punkt
   Text["Latarnia", {px + 0.2, py + 0.2}], Green, PointSize[Large],
   tekst                                  zielony  rozmiar kro···  duży
   Point[{xMin, yMin}], Text["Min. odległość", {xMin + 0.2, yMin - 0.2}],
   punkt                tekst   minimum
   Orange, Arrow[{{px, py}, {xMin, yMin}}]}]
   pomara···  strzałka
```

Out[∘]=



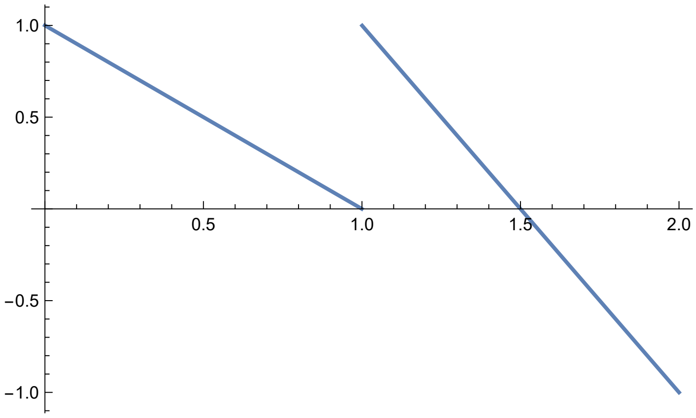
Zadanie 2

In[∘]:=
```
g[x_] := Piecewise[{{1 - x, 0 < x < 1}, {3 - 2 x, 1 < x < 2}}]
              funkcja odcinkowa
```

In[∘]:=
```
Plot[g[x], {x, 0, 2}]
wykres
```

Wykres funkcji g(x)

Out[•]=



a) Przybliżenie samymi sinusami rzędu 9

In[•]:=
```
sin9 = FourierSinSeries[g[x], x, 9, FourierParameters → {1, Pi / 2}]
```
sinusowy szereg Fouriera | parametry transformacji Fouriera | pi

Out[•]=

$$\frac{4\,\text{Sin}\left[\frac{\pi x}{2}\right]}{\pi^2}+\frac{\text{Sin}[\pi x]}{\pi}-\frac{4\,\text{Sin}\left[\frac{3\pi x}{2}\right]}{9\pi^2}+\frac{3\,\text{Sin}[2\pi x]}{2\pi}+\frac{4\,\text{Sin}\left[\frac{5\pi x}{2}\right]}{25\pi^2}+\frac{\text{Sin}[3\pi x]}{3\pi}-\frac{4\,\text{Sin}\left[\frac{7\pi x}{2}\right]}{49\pi^2}+\frac{3\,\text{Sin}[4\pi x]}{4\pi}+\frac{4\,\text{Sin}\left[\frac{9\pi x}{2}\right]}{81\pi^2}$$

b) Przybliżenie samymi cosinusami rzędu 9

In[•]:=
```
cos9 = FourierCosSeries[g[x], x, 9, FourierParameters → {1, Pi / 2}]
```
cosinusowy szereg Fouriera | parametry transformacji Fouriera | pi

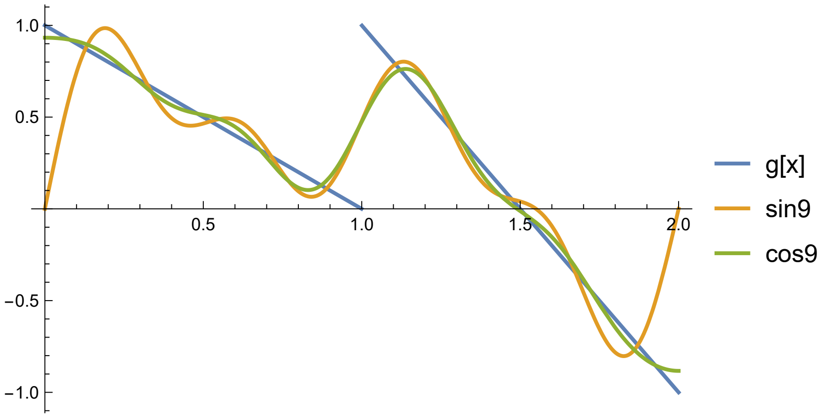
Out[•]=

$$\frac{1}{4}-\frac{2\,(-6+\pi)\,\text{Cos}\left[\frac{\pi x}{2}\right]}{\pi^2}-\frac{2\,\text{Cos}[\pi x]}{\pi^2}+\frac{2\,(2+\pi)\,\text{Cos}\left[\frac{3\pi x}{2}\right]}{3\pi^2}-\frac{2\,(-6+5\pi)\,\text{Cos}\left[\frac{5\pi x}{2}\right]}{25\pi^2}-\frac{2\,\text{Cos}[3\pi x]}{9\pi^2}+\frac{2\,(6+7\pi)\,\text{Cos}\left[\frac{7\pi x}{2}\right]}{49\pi^2}+\frac{(4-6\pi)\,\text{Cos}\left[\frac{9\pi x}{2}\right]}{27\pi^2}$$

In[•]:=
```
Plot[{g[x], sin9, cos9}, {x, 0, 2}, PlotLegends → {"g[x]", "sin9", "cos9"}]
```
wykres | legenda dla grafik

Wykres o którego proszono w poleceniu - funkcji g(x) i jej przybliżeń

Out[•]=



Odp: Lepszym przybliżeniem jest cosinusami rzędu 9, ponieważ lepiej dopasowuje się do funkcji g(x) (np. patrzac na poczatek i koniec wykresu). Wynika to z faktu, że cosinus jest funkcją parzystą, a g(x) ma charakter bardziej parzysty niż nieparzysty.

Zadanie 3

```
In[∘]:= h[x_, y_] := x^2 + x*y^2 - 4*x + y^3
```

Pierwsze pochodne:

```
In[∘]:= hx = D[h[x, y], x]
        oblicz pochodną
        hy = D[h[x, y], y]
        oblicz pochodną
```

Out[∘]=

$-4 + 2x + y^2$

Out[∘]=

$2xy + 3y^2$

Punkty stacjonarne:

```
In[∘]:= Solve[D[h[x, y], x] == 0 && D[h[x, y], y] == 0]
        rozwi⋯  oblicz pochodną         oblicz pochodną
```

Out[∘]=

$\left\{\left\{x \to \frac{3}{2}, y \to -1\right\}, \{x \to 2, y \to 0\}, \{x \to -6, y \to 4\}\right\}$

```
In[∘]:= D[h[x, y], {{x, y}, 2}] // MatrixForm
        oblicz pochodną            postać macierzy
```

Out[∘]//MatrixForm=

$\begin{pmatrix} 2 & 2y \\ 2y & 2x + 6y \end{pmatrix}$

```
In[∘]:= % /. {x → 2, y → 0} // MatrixForm
                              postać macierzy
```

Out[∘]//MatrixForm=

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

```
In[∘]:= Det[%]
        wyznacznik
```

Out[∘]=

8

```
In[∘]:= D[h[x, y], {x, 2}] /. {x → 2, y → 0}
        oblicz pochodną
```

Out[∘]=

2

```
In[∘]:= h[2, 0]
```

Out[∘]=

-4

-4 > 0, więc jest to maksimum lokalne