# 1. előadás (2025. szeptember 9.)

## 1.1. Stabil párosítás

Könyv: `konyv.pdf#page=105`

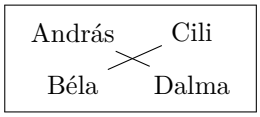
- Van n fiú $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$
- és n lány $(l_1, l_2, \cdots, l_n)$
- Minden fiúnak van egy preferencialistája a lányokról: $f_i \to (l_{i_1}, l_{i_2}, \cdots, l_{i_n})$
- és minden lánynak van egy preferencialistája a fiúkról: $l_j \to (f_{j_1}, f_{j_2}, \cdots, f_{j_n})$.
- A preferencialisták "teljesek" és "holtversenymentesek".

Pl.

| |
|---|
| András (C, D) — Cili (B, A) |
| Béla (C, D) — Dalma (A, B) |

Erre a párosításra Béla és Cili instabilitást jelent: jobban tetszenek egymásnak, mint amennyire a párosításbeli párjuk tetszik nekik.

**Kérdés:** van-e olyan (teljes) párosítás, amelyekre nézve nincs instabilitási tényező?
A példában igen:




### Algoritmus tervezése

Teljes párosítás, instabilitás nélkül → stabil házasítás.
**Kérdés (újra):** tetszőleges preferencialistához van-e stabil házasítás? Ha van, akkor hogyan található ilyen (gyorsan)?

#### Naiv algoritmus

- Kiindulunk egy tetszőleges $M_0$ teljes párosításból.
- Ha található instabilitást jelentő f fiú és l lány erre a párosításra, akkor cseréljük a "négyesben" a párokat $\to M_1$ párosítás.
- Ezt addig ismételjük, amíg található instabilitás.

**Pozitívum**: megállás után stabil házasításunk van.
**Negatívum**: nem feltétlenül terminál az algoritmus.

#### Közgazdasági Nobel-díjas algoritmus

Gale-Shapley algoritmus (1962). Ez egy házasítási rituálénak is felfogható, ami több napig tart.

- Minden reggel a lányok kiállnak az erkélyükre és várják hogy a fiúk jöjjenek szerenádozni.
- Minden fiú ahhoz a lányhoz megy szerenádozni, aki a legjobban tetszik neki azok közül, akiktől még nem kapott kosarat.
- Ha valamelyik fiú már minden lánytól kosarat kapott, otthon marad másnap.
- Ha egy lány erkélye alatt legalább egy fiú szerenádozik, akkor a lány a szerenádozói közül a neki legjobban tetszőnek azt mondja, hogy várja másnap is, a többinek meg azt, hogy ne jöjjenek többet mert semmiképp nem lesz a feleségük (kikosarazás).
- Este azok a fiúk, akiket kikosaraztak, kihúzzák a kikosarazó lányt a preferencialistájukról.

**Megállási feltétel:** minden lány erkélye alatt LEGFELJEBB egy fiú szerenádozik.
**Párosítás a terminálás után:** lány $\leftrightarrow$ ablaka alatt szerenádozó fiú.

## Algoritmus elemzése

### Hatékonyság

- legrosszabb esetben hány napig tart (egyáltalán befejeződik-e véges sok lépésben)

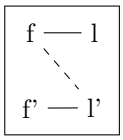
**Állítás:** az algoritmus legfeljebb az $(n^2 + 1)$. napon befejeződik.
**Bizonyítás:** Egy olyan nap, amikor az algoritmus nem fejeződik be, van olyan lány, akinek az erkélye alatt legalább két fiú szerenádozik, következésképpen van olyan fiú, aki kosarat kap és kihúz egy lányt a preferencialistájáról. Kezdetben a fiúk preferencialistájának összhossza $n^2$. Ha a megállás előtt ezekről minden nap legalább egy lány kihúzásra kerül, akkor az $(n^2 + 1)$. napon már nincs kit kihúzni. Következésképpen ekkorra az algoritmus biztosan befejeződik.

### Helyesség

- teljes párosítás
- stabilitás

**Állítás:** az algoritmus teljes párosítást ad.
**Bizonyítás:** Indirekt tegyük fel, hogy a párosítás nem teljes. Ekkor van olyan fiú, akinek nincs párja. Ez úgy lehetséges, hogy mindenkinél szerenádozott és mindenkitől kosarat kapott. Ezen kívül kell lenni olyan lánynak akinek nincs párja. Ez úgy lehetséges, hogy nála soha senki nem szerenádozott.

**Állítás:** az algoritmus stabil párosítást ad.
**Bizonyítás:** Indirekt tegyük fel, hogy létezik instabilitási tényező. Azaz f-nek jobban tetszik l' mint l és l'-nek jobban tetszik f mint f'.




Az f előbb szerenádozott l'-nél, mint l-nél (és l'-nél kosarat kapott). Az l' a szerenádozói közül viszont a neki legjobban tetszőnek lesz végül a párja, ellentmondva annak, hogy l'-nek jobban tetszik f, mint f'.

# 2. előadás (2025. szeptember 16.)

Könyv: `konyv.pdf#page=108`

### Ismétlés

**Gale-Shapley algoritmus:** tetszőleges preferencialisták esetén generál (egy) stabil párosítást.
**Megjegyzés:** a stabil párosítások száma akár exponenciálisan nagy lehet (n-ben).
**Megjegyzés:** időnként egész "egzotikus" stabil párosítások is előfordulnak, pl. az összes fiú/lány a preferencialistájának első/utolsó lányát/fiúját kapja.

### Optimalitás

Egy adott fiú és adott lány **szóba jönnek egymásnak**, ha van olyan stabil párosítás, amelyben ők egy párt alkotnak.
Egy adott fiú és adott lány **lelki társa** egymásnak, ha minden stabil párosításban ők egy párt alkotnak.

### Állítás

- **A:** az algoritmus minden fiúhoz a számára szóba jövő lányok közül a neki legjobban tetszőt párosítja.
- **B:** algoritmus minden lányhoz a számára szóba jövő fiúk közül a neki legkevésbé tetszőt párosítja.

**Bizonyítás**
**A)**

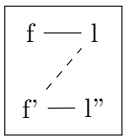
Indirekt tegyük fel, hogy van olyan fiú, akihez a Gale-Shapley algoritmus a számára szóba jövő lányok közül nem a neki legjobban tetszőt párosítja. Ekkor ez a fiú valamelyik nap szerenádozik a számára szóba jövő lányok közül a neki legjobban tetszőnél, akitől kosarat kap. Tekintsük azt a napot, amikor egy ilyen szomorú esemény először fordul elő. Legyen a kosarat kapó fiú $f$ és a kosarat kapó lány $l$, és $f'$ az a fiú, aki miatt $f$ kosarat kapott.

**Ekkor $l$-nek jobban tetszik $f'$, mint $f$.** Mivel az első olyan napon vagyunk, amikor egy fiút kikosaraz a számára szóba jövő lányok közül a neki legjobban tetsző, $f'$-t nem kosarazhatta még ki a számára szóba jövő lányok közül a neki legjobban tetsző $l*$. Egy $l*$ ben kehet $l$ előtt $f'$ preferencialistáján ($l* = l$ lehetséges).

Ezek után tekintsünk egy olyan M stabil párosítást, amelyben $f$ és $l$ egy párt alkotnak. Ez különbözik a Gale-Shapley algoritmus által meghatározott párosítástól. Jelölje $l''$ az $f'$ M-beli párját. Mivel $l''$ szóba jön $f'$ számára, $l''$ nem lehet $l*$ előtt $f'$ preferencialistáján ($l'' = l*$ lehetséges).

**Konklúzió:** $f' \to (l, l*, l'')$, azaz $f'$-nek jobban tetszik $l$, mint $l''$

**Illusztráció (M-ben a párok):**

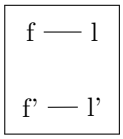



Az eredeti feltevésünk szerint $f'$ és $l$ instabilitás (M-re) $\to$ **ellentmondás**.

**B)**

Indirekt tegyük fel, hogy van olyan lány, akihez a Gale-Shapley algoritmus a számára szóba jövő fiúk közül nem a neki legkevésbé tetszőt párosítja. Legyen $l$ egy ilyen lány. Legyen M egy olyan stabil párosítás, amelyben $l$ párja $f$, kevésbé tetszik $l$-nek, mint a Gale-Shapley algoritmus szolgáltatta $f'$ párja. Legyen $f'$ M-beli párja $l'$.

**Illusztráció (M-ben a párok):**



Most a feltételünk szerint $l$-nek jobban tetszik $f'$, mint $f$. Másrészt a Gale-Shapley algoritmus $f'$-höz a szóba jövő lányok közül a neki legjobban tetszőt párosítja, következésképpen $f'$-nek jobban tetszik $l$ (Gale-Shapley-beli párja), mint $l'$ (M-beli párja). Egy $f'$ és $l$ instabilitás (M-re) $\rightarrow$ **ellentmondás**.

**Egyértelműség**

Futtassuk le a Gale-Shapley algoritmust úgy, hogy a fiúk szerenádoznak $\rightarrow M_1$.
Ezután futtassuk le úgy, hogy a lányok szerenádoznak $\rightarrow M_2$.

$M_1$ az $M_2$ stabil párosítások.
Ha $M_1 \neq M_2$, akkor van legalább két különböző stabil párosítás.
Ha $M_1 = M_2$, akkor ez az egyetlen stabil párosítás. Mivel ez egyben fiú-optimális és fiú-pesszimális, valamint lány-optimális és lány-pesszimális, mindenki számára pontosan egy ellenkező nemű jön szóba.

**Stabil szobatárs probléma (unisex változat)**

2n fiú van. Mindenkinek van egy preferencialistája a többiekről. 2 ágyas szobákba szeretnénk beosztani őket.
Instabilitás: $[f_i - f_j]$ és $[f_k - f_l]$
$f_i$ szívesebbek lenne $f_k$-val egy szobában, mint $f_j$-vel.
$f_k$ szívesebbek lenne $f_i$-vel egy szobában, mint $f_l$-lel.
Nem feltétlenül van stabil párosítás.

# 3. előadás (2025. szeptember 23.)

## 3.1. Stabil házasítás

Gale-Shapley algoritmus: arra optimalizált, hogy a fiúk a lehető legjobban járjanak. Most azt szeretnénk, hogy átlagosan mindenki a lehető legjobban járjon (pl. randiapp).
**Állítás (pareto optimalitás):** nincs olyan teljes párosítás (nem stabil sem), amelynél minden fiú jobban jár, mint a Gale-Shapley algoritmus által szolgáltatott párosításnál.

**További optimalizálási változatok**

- **Jelölés:** $r_f(l) \rightarrow$ hányadik az $l$ lány az $f$ fiú preferencialistáján
- **Jelölés:** $r_l(f) \rightarrow$ hányadik az $f$ fiú az $l$ lány preferencialistáján

1. legyen M stabil párosítás és tekintsük minden $l$ lányra és $f$ fiúra, ahol $(f, l) \in M$ az $r_f(l)$ és $r_l(f)$ értékeket.
2. Keressük azt az M stabil párosítást, amelyre:
   (a) az $r_f(l)$ és $r_l(f)$ értékek közül a legnagyobb a lehető legkisebb (mindenki a lehető legjobban jár)
   (b) az $r_f(l)$ és $r_l(f)$ összege a lehető legnagyobb (mindenki a lehető legjobban jár)
   (c) az $r_f(l)$ értékek összegének és az $r_l(f)$ értékek összegének különbségének abszolútértéke a lehető legkisebb (kb. egyenlően jól jár mindkét nem)

**Megjegyzés:** (a)-(b): polinom időben megoldható, (c): NP-nehéz

## 3.2. Algoritmustervezési módszerek

1. Oszd meg és uralkodj (pl. összefésüléses rendezés)
2. Randomizálás (pl. gyorsrendezés)
3. Dinamikus programozás (pl. Floyd-Warshall algoritmus)
4. Mohó algoritmusok (pl. Kruskal, Prim, Dijkstra algoritmus)
5. Közelítő (approximációs) algoritmusok (pl. utazó ügynök)

## 3.3. Oszd meg és uralkodj algoritmusok

Könyv: `konyv.pdf#page=8`

**Séma:**

1. A feladatot hasonló, csak méretű részfeladatokra bontjuk.
2. A részfeladatokat rekurzívan megoldjuk (ha a mérete elég kicsi, akkor közvetlenül oldjuk meg).
3. A részfeladatok megoldását összekombináljuk az eredeti feladat megoldásává

## Algoritmus elemzése

**Helyesség**

**Hatékonyság**

**Legegyszerűbb algoritmusok**

- $a >= 1$ részfeladat
- ha $n$ az eredeti feladat mérete, akkor $n/b$ az összes részfeladat mérete, ahol $b > 1$
- a harmadik fázis költsége $f(n) >= 0$
- ha $f(n)$ jelöli az algoritmus költségét (lényeges lépések száma), akkor $T(n) = a \cdot T(n/b) + f(n)$
- pl. összefésüléses rendezésnél $T(n) = 2T(n/b) + n$

Összehasonlítás más algoritmusok hatékonyságával: zárt képlet. Ilyen egyszerű rekurziókra kézzel levezethető zárt képlet. Az egyszerűség kedvéért tfh. $n = 2^k$ kettő hatvány.
"Önmagába helyettesítés":

$$
\begin{aligned}
T(n) &= n + \boxed{2T\left(\frac{n}{2}\right)} \\
&= n + 2\left(\frac{n}{2} + 2T\left(\frac{\frac{n}{2}}{2}\right)\right) \\
&= n + n + 2^2 T\left(\frac{n}{2^2}\right) \\
&= 2n + 2^2\boxed{T\left(\frac{n}{2^2}\right)} \\
&= 2n + 2^2\left(\frac{n}{2^2} + 2T\left(\frac{\frac{n}{2^2}}{2}\right)\right) \\
&= 2n + n + 2^3 T\left(\frac{n}{2^3}\right) \\
&= 3n + 2^3 T\left(\frac{n}{2^3}\right) \\
&\vdots \\
&= in + 2^i T\left(\frac{n}{2^i}\right) \\
&\vdots \\
&= kn + 2^k T\left(\frac{n}{2^k}\right) \\
&= kn + 2^k T\left(\frac{n}{1}\right) \\
&= (1) = 0, \text{ hiszen az egyelemű tömbök rendezettek.}
\end{aligned}
$$

Így $T(n) = k = n$. De $n = 2^k \to k = \log_2 n$, ezért $T(n) = n \log_2 n$. Általánosítva (nem bizonyítjuk): mester tétel.

**Mester-tétel**

Könyv: `konyv.pdf#page=10`
Zárt formula $T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$ formájú rekurziókhoz (nem fed le mindent).
$\big[f(n)$-t hasonlítjuk össze $n^{\log_b a}$-val$\big]$.

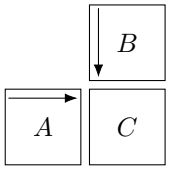
1. ha $f(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b a - \mathcal{E}})$ valamilyen pozitív $\mathcal{E}$-nal, akkor $T(n) = \Theta(n^{log_b a})$
2. ha $f(n) = \Theta(n^{log_b a})$, akkor $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} log n)$
3. ha $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \mathcal{E}})$ valamely pozitív $\mathcal{E}$-nal ÉS $af(\frac{n}{b}) \leq cf(n)$ valamely $c < 1$ és n elég nagy esetén, akkor $T(n) = \Theta(f(n))$

# 4. előadás (2025. szeptember 30.)

**Gyors mátrixszorzás**

Könyv: `konyv.pdf#page=12`

**Feladat:** $\underset{p\times q}{A}$ és $\underset{q\times r}{B}$ kompatibilis mátrixok AB szorzatának kiszámítása.




$\underset{p\times r}{C} = \underset{p\times q}{A} \cdot \underset{q\times r}{B}$

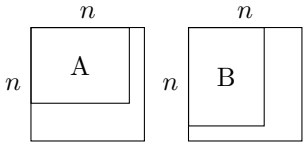
$c_{ij} = \sum_{k=1}^{q} a_{ik} \cdot b_{kj} \rightarrow 1$ elem kiszámításához $q$ db elemi szorzás és $q-1$ db elemi összeadás kell.
$p \times r$ darab elem $\rightarrow pqr$

Ha ezek mind $n \times n$-es mátrixok:

- $M(n) = n^3 \in \Theta(n^3)$ (M az elemi szorzások száma)
- $S(n) = n^3 \in \Theta(n^3)$ (S az elemi összeadások száma)

Cél: ennél hatékonyabb algoritmus.

Ha A, B, C nem négyzetes, 0-ákkal feltöltjük:




Oszd meg és uralkodj ötlet:

$$A = \begin{array}{c} \\ \frac{n}{2} \\ \frac{n}{2} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \frac{n}{2} & \frac{n}{2} \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \\ \hline \end{array} \end{array} \quad B = \begin{array}{|c|c|} \hline B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \\ \hline \end{array} \quad C = \begin{array}{|c|c|} \hline C_{11} & C_{12} \\ \hline C_{21} & C_{22} \\ \hline \end{array}$$

Az $A$ és $B$ mátrixok helyett 4-4 db $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$-es mátrix.

$C_{11} = A_{11} \cdot B_{11} + A_{12} \cdot B_{21}$
$C_{12} = A_{11} \cdot B_{12} + A_{12} \cdot B_{22}$
$C_{21} = A_{21} \cdot B_{11} + A_{22} \cdot B_{12}$
$C_{22} = A_{21} \cdot B_{12} + A_{12} \cdot B_{22}$

Elemi szorzások száma: $M(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 8M\left(\frac{n}{2}\right) & n \geq 2 \end{cases}$

Elemi összeadások száma: $S(n) = \begin{cases} 0 & n = 1 \\ 8S\left(\frac{n}{2}\right) + 4\left(\frac{n}{2}^2\right) & n \geq 2 \end{cases}$

**Kérdés: hatékonyabb-e ez a módszer?**

Csökkent-e az $M(n)$ és $S(n)$ érték? Használjuk a Mester tételt: $T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$

- $M(n) = 8M\left(\frac{n}{2}\right)$
- $a = 8$, $b = 2$, $f(n) = 0$
- $n^{\log_2 8} = n^3$

M.T. 1. eset: ha $f(n) \in \mathcal{O}(n^{log_b a} - \mathcal{E})$ valamilyen $\mathcal{E} > 0$-ra (pl. $\mathcal{E} = 0.5$), akkor $M(n) \in \Theta(n^3)$.

- $S(n) = 8M\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$

- $a = 8$, $b = 2$, $f(n) = n^2 \in \mathcal{O}(n^{\log_2 8 - \mathcal{E}})$, pl. $\mathcal{E} = 0.5$
- $n^{\log_2 8} = n^3$

M.T. 1. eset $\rightarrow S(n) \in \Theta(n^3)$.

Sajnos az elemi műveletek száma nem javult, nem nyertünk semmit.

Volker Strassen észrevétele: 7 db $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$-es szorzással is megkaphatjuk az eredményt.

$P_1 = A_{11} \cdot (B_{12} - B_{22})$
$P_2 = (A_{11} + A_{12}) \cdot B_{22}$
$P_3 = (A_{21} + B_{22}) \cdot B_{11}$
$P_4 = A_{22} \cdot (B_{21} - B_{11})$
$P_5 = (A_{11} + A_{22}) \cdot (B_{11} + B_{22})$
$P_5 = (A_{12} - A_{22}) \cdot (B_{21} + B_{22})$
$P_5 = (A_{11} - A_{21}) \cdot (B_{11} + B_{12})$

$C_{11} = P_5 + P_4 - P_2 + P_6$
$C_{12} = P_1 + P_2$
$C_{21} = P_3 + P_4$
$C_{22} = P_5 + P_1 - P_3 - P_7$

Összesen:

- 7 db szorzás (7 db rekurzív hívás $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$ méretű mátrixokra)
- 18 db összeadás

$$M(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 7M\left(\frac{n}{2}\right) & n \geq 2 \end{cases} \text{ és } S(n) = \begin{cases} 0 & n = 1 \\ 7S\left(\frac{n}{2}\right) + 18\left(\frac{n}{2}^2\right) & n \geq 2 \end{cases}$$

M.T. ezekre a rekurzív függvényekre:

- $M(n) = 7M\left(\frac{n}{2}\right)$
- $a = 7$, $b = 2$, $f(n) = 0$

M.T. 1. eset: mivel $f(n) \in \mathcal{O}(n^{log_2 7 - \mathcal{E}})$ valamilyen $\mathcal{E} > 0$-ra (pl. $\mathcal{E} = 0.5$), ezért $M(n) \in \Theta(n^{log_2 7})$.

- $S(n) = 7S\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{9}{2}n^2$
- $a = 7$, $b = 2$, $f(n) = 4.5n^2$
- $n^{\log_2 7} = n^{2.81}$

M.T. 1. eset: mivel $f(n) \in \mathcal{O}(n^{log_2 7 - \mathcal{E}})$ pl. $\mathcal{E} = 0.1$, ezért $S(n) \in \Theta(n^{log_2 7})$.

$$\begin{aligned} C_{12} &= P_1 + P_2 \\ &= A_{11}(B_{12} - B_{22}) + (A_{11} + A_{12})B_{22} \\ &= A_{11}B_{12} - \cancel{A_{11}B_{22}} + \cancel{A_{11}B_{22}} + A_{11}B_{22} \end{aligned}$$

$C_{21}$ hasonlóan

$$\begin{aligned} C_{11} &= P_5 + P_4 - P_2 + P_6 \\ &= (A_{11} - A_{22})(B_{11} + B_{22}) + A_{21}(B_{21} - B_{11}) - (A_{11} + A_{12})B_{22} + (A_{12} - A_{22})(B_{21} + B_{22}) \\ &= \cdots \end{aligned}$$

**HF.** kérdés: adott $A, B, C \in \mathcal{R}^{n \times n}$ mátrixok esetén a számolások elvégzése nélkül eldönthető-e, hogy AB = C?

## 4.1. Randomizált algoritmusok

- Las Vegas típusú: sosem téved, de néha lassú, pl. quicksort
- Monte Carlo típusú: gyors, de néha téved, pl. Freivalds algoritmus

**Freivalds algoritmus**

- Véletlenszerűen választunk egy $\alpha \in \{0,1\}^n$ bitvektort és kiszámoljuk ($\Theta(n^2)$ költséggel) a $\beta = (AB) \cdot \alpha = A \cdot (B\alpha)$ és $\gamma = C \cdot \alpha$ vektorokat.
- Ha $\beta \neq \gamma$, akkor visszatérünk HAMIS válasszal (itt biztosan nem tévedtünk).
- Ha $\beta = \gamma$, akkor visszatérünk IGAZ válasszal (lehet, hogy tévedtünk).

**Észrevétel:** az utóbbi eset az n dimenziós $\alpha$ bitvektorok legfeljebb felére teljesülhet. Ha $\alpha$-t véletlenszerűen választjuk, akkor a tévedés valószínűsége $\leq \frac{1}{2}$. Az algoritmus: végezzük el ezt 100-szor egymás után $\rightarrow$ a tévedés valószínűsége $\leq (\frac{1}{2})^{100}$.

**Észrevétel bizonyítása:**
Ha $AB \neq C$ és valamilyen $\alpha$-ra $AB\alpha = C\alpha$, akkor

- $AB - C$ mátrix nem az azonosan 0 mátrix.
- tfh. az $i$. sor $j$. eleme $d > 0$.
- legyen $\alpha'$ az a vektor, ha $\alpha$-ban a $j$. elemet átváltjuk (bit flip).

Ekkor $(AB - C)\alpha'$ $i$. koordinátája megváltozott ($-d$-re, $+d$-re), tehát $(AB - C)\alpha' \neq 0$. Minden $\alpha$ vektorhoz találhatunk $\alpha'$ vektort, ami kimutatja az $AB \neq C$ tényt, és különböző $\alpha$ vektorokhoz különböző $\alpha'$-t kapunk $\rightarrow$ a hamis eredményt adó vektorok száma $\geq$ helyes eredményt adó vektorok száma.

# 5. előadás (2025. október 7.)

### Polinomok szorzása

Könyv: `konyv.pdf#page=16`

$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$ és $B(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_{m-1}x^{m-1}$ $(n-1)$-ed és $(m-1)$-edfokú polinomok. Határozzuk meg a szorzatpolinomot: $C(x) = A(x) \cdot B(x)$, ahol $C(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_{n+m-2}x^{n+m-2}$.

$c_0 = a_0b_0$

$c_1 = a_0b_1 + a_1b_0$

$c_2 = a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0$

$\vdots$

$c_i = a_0b_i + a_1b_{i-1} + a_2b_{i-2} + \cdots + a_{i-1}b_1 + a_ib_0$

$$\begin{bmatrix} a_0b_0 & a_0b_1 & a_0b_2 & a_0b_3 \\ a_1b_0 & a_1b_1 & a_1b_2 & \\ a_2b_0 & a_2b_1 & & \\ a_3b_0 & & & \end{bmatrix}$$

Szorzatpolinom meghatározása: $\to c_0, c_1, c_2, \cdots, c_{n+m-2}$ értékei. Naiv módszer költsége: $\mathcal{O}(nm)$.

**Van-e ennél hatékonyabb?** Van! Oszd meg és uralkodj algoritmust fejlesztünk (a szokásos egyszerűsítő feltételezésekkel élünk, $n = m$ kettő hatvány). Naiv algoritmus: elemi algebra, szofisztikált algoritmus: analízis.

### Interpoláció

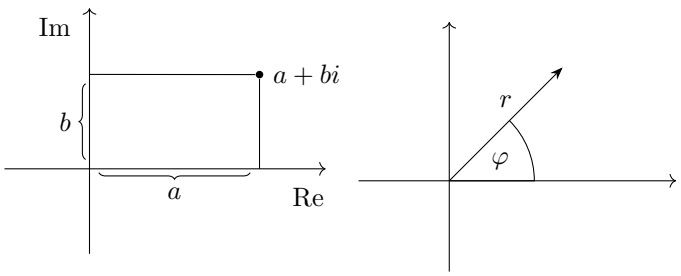
Egy $(n-1)$-edfokú valós (komplex) polinomot meghatároz $n$ helyettesítési értéke $\to$ interpolációs formulák (Newton, Lagrange).

**Ötlet:** határozzuk meg az $A(x)$ és $B(x)$ polinomok helyettesítési értékeit bizonyos $z_1, z_2, \cdots$ pontokban. Ebből meglesznek $C(x)$ helyettesítési értékei a $z_1, z_2, \cdots$ pontokban. Ezekből határozzuk meg $C(x)$ együtthatóit.

**Boszorkányos ötlet:** ha $A(x)$ és $B(x)$ $(n-1)$-edfokú polinomok, akkor $z_1, z_2, \cdots$ legyenek a $2n$-edik komplex egységgyökök.

### Komplex számok

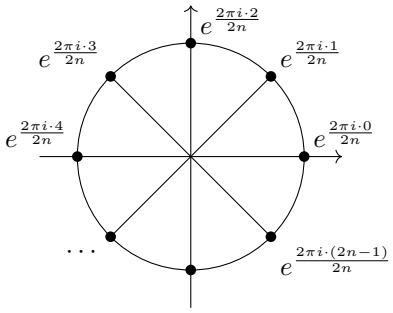
$a + bi$ alak, ahol $i = \sqrt{-1}$.




Trigonometrikus alak: $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
Exponenciális alak: $re^2\varphi$

**Algebra alaptétele:** minden legalább elsőfokú komplex együtthatós polinomnak van komplex gyöke.

**2n. komplex egységgyökök:** $x^{2n} - 1$ gyökei.




Jelölés: $\omega_{j,2n} = e^{\frac{2\pi i j}{2n}}$

**Algoritmus**

**1.** $A(x)$ és $B(x)$ helyettesítési értékei a $2n$. komplex egységgyökön oszd meg és uralkodj algoritmussal lássuk $A(x)$-nél a számítást. Trükk: $A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$.

Elkészítünk két feleakkora fokszámú polinomot:

- $A_{\text{páros}} = a_0 + a_2 x + a_4 x^2 + \cdots + a_{2n-2} x^{\frac{n-2}{2}}$
- $A_{\text{páratlan}} = a_1 + a_3 x + a_5 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{\frac{n-2}{2}}$

Ekkor $A(x) = A_{\text{páros}}(x^2) + A_{\text{páratlan}}(x^2)$.

**Észrevétel:** egy $2n$. komplex egységgyök négyzete egy $n$. komplex egységgyök: $\left(e^{\frac{2\pi i j}{2n}}\right)^2 = e^{\frac{2\pi i j}{n}}$.

Így $A(x)$ helyettesítési értékének kiszámítását a $2n$. komplex egységgyökön visszavezettük két feleakkora polinom helyettesítési értékének kiszámítására az $n$. komplex egységgyökön. (Persze itt van még némi munka, de az $\mathcal{O}(n)$ költségű.)

**Összköltség:** $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \mathcal{O}(n) \to T(n) = \mathcal{O}(n \log n)$.

**2.** $C(x) = A(x) \cdot B(x)$ helyettesítési értékeinek kiszámítása a $2n$. komplex egységgyökön $\to \mathcal{O}(n)$.

**3.** $C(x)$ helyettesítési értékeiből a $2n$. komplex egységgyökökön kiszámítjuk $C(x)$ együtthatóit (gyors Fourier-transzformált).

**Általánosabban:** legyen $C(x)$ legfeljebb $(2n-1)$-edfokú polinom, amelynek ismertek a helyettesítési értéki a $2n$. komplex egységgyökökön.

Vezessük be a következő $D(x)$ polinomot: $D(x) = d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \cdots + d_{2n-1} x^{2n-1}$ ahol $d_S = C(\omega_{S,2n})$ $(S = 0, 1, \cdots, 2n-1)$.

$\boxed{\text{Ekkor } D(\omega_{t,2n}) = 2n c_{2n-t}}$ (ezt még bizonyítani kell)

Alkalmazva az algoritmus oszd meg és uralkodj algoritmusát, a $D(x)$ polinomra a $D(\omega_{t,2n})$ helyettesítési értékek, így $C(x)$ együtthatói $\mathcal{O}(n \log n)$ lépésben kiszámíthatók $\to O(n \log n)$.

# 6. előadás (2025. október 14.)

## 6.1. Gyors Fourier transzformált

Legyen $C(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_{2n-1}x^{2n-1}$. Tfh. ismerjük $C(x)$ helyettesítési értékeit az $\omega_{1,2n}, \omega_{2,2n}, \cdots, \omega_{2n,2n}$ $2n$-edik komplex egységgyökökön.
Kérdés: $c_0, c_1, \cdots, c_{2n-1}$.

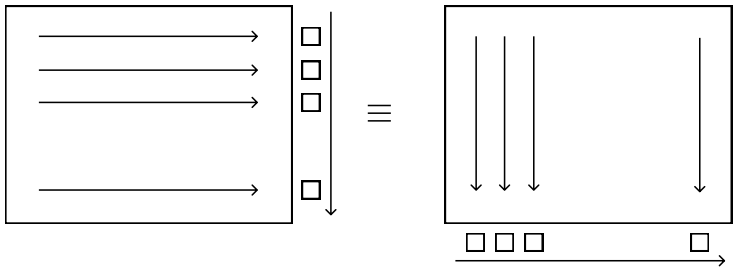
Bevezetünk egy $D(x) = d_0 + d_1 x + \cdots + d_{2n-1}x^{2n-1}$ polinomot, ahol $d_S = C(\omega_{S,2n})$ $(S = 0, 1, \cdots, 2n-1)$ (semmi pánik, $\omega_{0,2n} = \omega_{2n,2n}$).

**Állítás:** $D(\omega_{j,2n}) = 2nc_{2n-j}$ vagyis $c_{2n-j} = \frac{1}{2n}D(\omega_{j,2n})$ $(j = 1, 2, \cdots, 2n)$.

**Bizonyítás:**

$$\begin{aligned} D(\omega_{j,2n}) &= \sum_{S=0}^{2n-1} d_S \cdot \omega_{j,2n}^S \\ &= \sum_{S=0}^{2n-1} C(\omega_{S,2n}) \cdot \omega_{j,2n}^S \\ &= \sum_{S=0}^{2n-1} \left( \sum_{S=0}^{2n-1} c_t \cdot \omega_{S,2n}^t \right) \omega_{j,2n}^S \end{aligned}$$

Kettős összegzés



”a sorrend felcserélhető”

Kitérő (C. F. Gauss):

$$1 + 2 + \cdots + 49 + 50 = \frac{50 \cdot 51}{2}$$
$$\underbrace{\frac{50}{51} + \frac{49}{51} + \cdots + \frac{2}{51} + \frac{1}{51}}_{50 \cdot 51}$$

Visszatérve az eredeti gondolatmenethez:
$\sum_{S=0}^{2n-1} \left( \sum_{t=0}^{2n-1} c_t + \omega_{S,2n}^t \right) \omega_{j,2n}^S = \sum_{t=0}^{2n-1} c_t \boxed{\sum_{S=0}^{2n-1} \omega_{S,2n}^t \cdot \omega_{j,2n}^S}$ ez könnyen számolható:

$$\begin{aligned} \omega_{S,2n}^t \cdot \omega_{j,2n}^S &= (e^{2\pi i \cdot \frac{S}{2n}})^t (e^{2\pi i \cdot \frac{j}{2n}})^S \\ &= e^{2\pi i \cdot \frac{St}{2n}} \cdot e^{2\pi i \cdot \frac{Sj}{2n}} \\ &= e^{2\pi i \cdot \frac{St}{2n} + 2\pi i \cdot \frac{Sj}{2n}} \\ &= e^{\frac{(2\pi i \cdot St + 2\pi i \cdot Sj)}{2n}} \\ &= e^{\frac{S \cdot 2\pi i (t+j)}{2n}} \\ &= \left( e^{\frac{2\pi i (t+j)}{2n}} \right)^S \\ &= \omega_{t+j,2n}^S \end{aligned}$$

Az egész így:
$\sum_{t=0}^{2n-1} c_t \boxed{\sum_{S=0}^{2n-1} \omega_{t+j,2n}^S}$

Egy pillanatra bevezetve az $\omega = \omega_{t+j,2n}$ jelölést $\sum_{S=0}^{2n-1} \omega^S = 1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{2n-1}$.

Vegyük észre (bizonyítsuk teljes indukcióval): $(\omega - 1)(1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{2n-1}) = \omega^{2n} - 1$.

Mivel $\omega = \omega_{t+j,2n}$, egy $2n$-edik komplex egységgyök, ezért $\omega^{2n} - 1 = 0$.
Ebből következik, hogy ha $\omega \neq 1$, akkor $1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{2n-1} = 0$.
Ha $\omega = 1$, akkor $1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{2n+1} = 1 + 1 + \cdots + 1 = 2n$.
Mikor lesz $\omega_{t+j,2n} = 1$? Ha $t = 2n - j$!
Valóban, $t + j$ többszöröse kell, hogy legyen $2n$-nek, azonban $1 \leq j \leq 2n$ és $0 \leq t \leq 2n - 1$ miatt ez csak $t + j = 2n$ esetén áll fenn.

Így $\sum_{t=0}^{2n-1} c_t \underbrace{\sum_{S=0}^{2n-1} \omega_{t+j,2n}^S}_{\text{csak } t=2n-j \text{ esetén} \neq 0} = c_{2n-j} \cdot 2n.$

**Nagy egészek szorzása**

$A$, $B$ n db számjegyből áll (tízes számrendszerben felírva).
Kérdés: $A \cdot B =$?

**Általános iskola**
$\begin{array}{r} 234 \cdot 425 \\ \hline 936 \\ 468 \\ 1170 \\ \hline 99450 \end{array}$
$\mathcal{O}(n^2)$ "elemi" szorzás

**Oszd meg és uralkodj trükk** (magunk is kitalálhatjuk):

$A = A_1 \cdot 10^{\frac{n}{2}} + A_0$
$B = B_1 \cdot 10^{\frac{n}{2}} + B_0$
$A_1, A_0, B_1, B_0$ $\frac{n}{2}$ db számjegyből áll.

$AB = (A_1 \cdot 10^{\frac{n}{2}} + A_0)(B_1 \cdot 10^{\frac{n}{2}} + B_0) = A_1B_1 \cdot 10^n + (A_1B_0 + A_0B_1) \cdot 10^{\frac{n}{2}} + A_0B_0$

**Nyertünk valamit azzal**, hogy az eredeti feladatot négy feleakkora méretű feladatra redukáltuk?
$T(n) = 4 \cdot T(\frac{n}{2}) \to T(n) = \Theta(n^{\log_2 4}) = \Theta(n^2)$ :(
Azért ilyen olcsón nem várhatunk sokat!

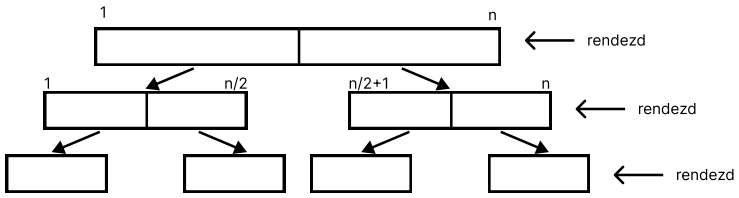
Viszont $A_0B_0, A_0B_1, A_1B_0, A_1B_1$ helyett igazából $A_0B_0, A_0B_1 + A_1B_0, A_1B_1$ számolandó.
Piszkos trükk: $(A_1 + A_0)(B_1 + B_0)$ egy szorzás.
Eredmény: $A_1B_1 + \boxed{A_0B_1 + A_1B_0} + A_0B_0$.
Így $A_0B_1 + A_1B_0 = (A_1 + A_0)(B_1B_0) - A_1B_1 - A_0B_0$

Így a feladat visszavezethető csupán 3 feleakkora méretű feladatra.
$T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) \to T(n) = \Theta(n^{\log_2 3})$ :)

## 6.2. Dinamikus programozás

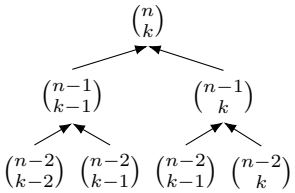
Alapelv: itt is ugyanaz, mind az oszd meg és uralkodj algoritmusoknál. A feladatot (rekurzívan) visszavezetjük hasonló, csak kisebb méretű feladatok megoldására.

Egy tipikus oszd meg és uralkodj algoritmusnál (összefésüléses rendezés):




Független részproblémák

Nem mindig ez a helyzet!
Illusztráció:




"Átfedő részproblémák"

**Összefoglalva**

- **Oszd meg és uralkodj** tipikusan fentről lefelé.
- **Dinamikus programozás** tipikusan lentről felfelé és a részproblémák megoldását egy táblázatban jegyezzük fel (létezik fentről lefelé is → memoizálás).

**Mi mindenre jó?**
Elhelyezünk egy sorban különböző címletű érméket, és két játékos felváltva elvehet egy érmét a sor valamelyik végéről.

(5) (100) (5) (20) (50) (200) (100) (50) (10)

Milyen stratégiát kövessen Aliz az elvett érmék összértékének maximalizálására, feltéve, hogy Robi is ugyanezt akarja maga számára?

# 7. előadás (2025. október 21.)

## 7.1. Dinamikus programozás

Adottak az $A_1, A_2, \cdots, A_n$ mátrixok, ahol $A_1$ egy $q_0 \times q_1$ dimenziós, az $A_2$ egy $q_1 \times q_2$ dimenziós, $\cdots$, $A_n$ pedig egy $q_{n-1} \times q_n$ dimenziós mátrix. Ekkor képezhető az $A_1 A_2 \cdots A_n$ szorzat. A szorzatmátrix a mátrixszorzás asszociativitása miatt nem függ a zárójelezéstől. Viszont az, hogy a szorzat kiszámítása hány elemi műveletet igényel, már általában függ a zárójelezéstől. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a mátrixok szorzását a hagyományos módon végezzük: $A_{p\times q} \times A_{q\times r} = A_{p\times r}$.

Az elemi lépések most legyenek csupán az elemi szorzások. Ekkor $p \times q \times r$ az elemi szorzások száma a szorzatmátrix kiszámításánál.

**Példa**
három mátrix:

$A_1 \to 50 \times 5$
$A_2 \to 5 \times 20$
$A_3 \to 20 \times 200$

Kétféleképpen számolhatunk:

- $(A_1 A_2) A_3$
- $A_1 (A_2 A_3)$

Általában: határozzuk meg azt a zárójelezést, amelynek mentén a szorzat számítása a lehető legkevesebb elemi szorzással jár.

A szorzat kiszámítása nem része a feladatnak.

Az algoritmus költségét $n$ függvényében keressük, a dimenziók nem számítanak.

Első gondolat: nézzük meg az összes zárójelezést és válasszuk ki a legkedvezőbbet.

Rossz hír: a mátrixot $\Omega\left(\frac{4^n}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$ módon lehet zárójelezni.

$\Omega\left(\frac{4^n}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \to$ Catalan számok.

[Számos példa van. Egy mozi pénztáránál $2n$ ember áll sorba, $n$ embernél egy ezres, a többi $n$ embernél egy kétezres van. A mozijegy ezer forint. A pénztárban nyitáskor üres a kassza. Hányféleképpen állhatnak sorba az emberek, hogy mindenkinek lehessen visszaadni.]

### Polinomiális algoritmus

Tfh. az $A_1 A_2 \cdots A_n$ szorzatot akarjuk kiszámítani. Zárójelezés $\Leftrightarrow$ szorzások sorrendje.
Pl. $(A_1 A_2)(A_3(A_4 A_5))$

1. Első szorzás $A_1 A_2$ vagy $A_4 A_5$.
2. Második szorzás $(A_3(A_4 A_5))$ vagy $(A_1 A_2)$.
3. Harmadik szorzás $A_3(A_4 A_5)$
4. Negyedik (utolsó) szorzás $(A_1 A_2)(A_3(A_4 A_5))$

A zárójelezés nem feltétlenül határozza meg egyértelműen a szorzások sorrendjét, de egyértelműen meghatározza az elemi szorzások számát.

### Dinamikus programozás algoritmus tervezése

**1.** Részproblémák meghatározása
$R[i,j] \to$ az $A_i A_{i+1} \cdots A_j$ szorzat optimális zárójelezésének meghatározása

**2.** Keressünk kapcsolatot a részproblémák optimális megoldása és a részproblémák optimális megoldása között.
Tegyük fel, hogy megvan $A_i A_{i+1} \cdots A_j$ optimális zárójelezése: $\underbrace{(A_1 A_{i+1} \cdots A_k)}_{\text{ezek is zárójelezve vannak}} \underbrace{(A_{k+1} \cdots A_{j-1} A_j)}_{\text{ezek is}}$

**Állítás**
Az optimális zárójelezés $A_i$-től $A_k$-ig terjedő része, illetve a $A_{k+1}$-től $A_j$-ig terjedő része optimális megoldása $R[i,k]$-nak és $R[k+1,j]$-nek.

**Bizonyítás**
Ha lenne pl. $A_1A_{i+1}\cdots A_k$-nak a fentinél kevesebb elemi szorzást használó kiszámítása, erre cserélve $A_{k+1}\cdots A_{j-1}A_j$ optimális zárójelezésében az $A_i\cdots A_k$ részt, egy az "optimálisnál" kevesebb elemi szorzást használó zárójelezéshez jutnánk $\rightarrow$ **ellentmondás**.

**3.** Aprópénzre váltjuk (2.)-t: rekurzió
Jelölje $l[i,j]$ az $R[i,j]$ optimális megoldásában az elemi szorzások számát.

Alapeset:

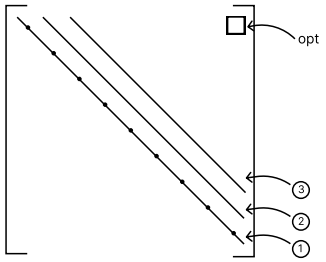
$l[i,i] = 0$
$l[i,i+1] = q_{i-1}q_iq_{i+1}$

Általában: $l[i,j] = l[i,k] + l[k+1,j] + q_{i-1}q_kq_j$

"Ne akadjunk fenn" $\rightarrow$ honnan tudjuk $k$-t? Nem tudjuk, de $k$ biztosan $i, i+1, \cdots, j-1$ közül valamelyik. Piszkos trükk: vizsgáljuk meg az összes lehetőséget, és válasszuk $k$-nak a legkisebb értéket adót.

$$l[i,j] = \min_{i\le j\le j-1}\{l[i,k] + l[k+1,j] + q_{i-1}q_kq_j\}$$

**4.** Számolás (3.) mentén

$l[i,j] =$ 

$n \times n$-es táblázat

Költség: $\mathcal{O}(n^2)$ cella, cellánként $\mathcal{O}(n)$ számítás $\rightarrow \mathcal{O}(n^3)$

**5.** Optimális zárójelezés
Minden $l[i,j]$-nél megjegyezzük a minimumot adó $k$-t $\rightarrow$ backtracking a jobb felső sarokból.

# 8. előadás (2025. november 4.)

Ha az $l[i,j]$ értékek mellett feljegyezzük az optimumot adó $k$ értékeket is egy $k[i,j]$ táblázatban, akkor egy $k[1,n]$ fogja megmutatni az utolsó szorzást, pl. 9 mátrix esetén ha $k[1,9]=6$, akkor az optimális zárójelezés úgy néz ki, hogy

$$\underbrace{(A_1A_2\cdots A_6)}_{\text{ezek is zárójelezve vannak}}\quad\underbrace{(A_7A_8A_9)}_{\text{ezek is}}$$

Hogyan? Általánosan:

$$\underbrace{(A_1\cdots A_{k[1,n]})}_{\text{itt az első szorzás helyét }(k[1,k[1,n]])}\qquad\underbrace{(A_7A_8A_9)}_{\text{itt pedig }k[k[1,n]+1,n]\text{ helyét mutatja}}$$

Az előző példát ha nézzük és azt mondjuk $k[1,6]=3$ és $k[1,9]=8$, akkor a zárójelezés egy szintet lejjebb lépve $((A_1A_2A_3)(A_4A_5A_6))((A_7A_8)A_9)$ és így tovább.

## 8.1. Sztringológia

String-ekkel, string-ek hasonlóságával kapcsolatos kérdésekre keresünk válaszokat (gyorsan).

#### Az egyik legegyszerűbb ilyen kérdés

Egy adott $T$ karaktersorozat tartalmaz-e egy adott $P$ karaktersorozatot?

Híres algoritmus: (Knuth-Morris-Pratt) $\to \Theta(|T|+|P|)$ ($|T|$ és $|P|$ a string-ek hossza) Fő ötlet $P$ előfeldolgozása (Dinamikus Programozás).

#### Egy másik kérdés

Adott egy $X$ és egy $Y$ karaktersorozat. Keressük a leghosszabb közös részsorozatokat.

$X=(x_1,x_2,\cdots,x_m)$
$Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$

Ezeknek $Z=(z_1,z_2,\cdots,z_k)$ egy közös részsorozata lesz, ha léteznek olyan

$1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le m$
$1\le j_1<j_2<\cdots<j_k\le n$

részsorozatok, hogy

$x_{i_1}=y_{j_1}=z_1$
$x_{i_2}=y_{j_2}=z_2$
$\cdots$
$x_{i_k}=y_{j_k}=z_k$

Kérdés a legnagyobb ilyen $k$. $X$ és $Y$ hasonló, ha ez a $k$ nagy, és különböző, ha kicsi.

Például:

$X=$ A C G C T A G C
$Y=$ A T G C A ATC C
$Z=$ AGCAC

**Egy harmadik**

Megint kiindulunk egy $X$ és egy $Y$ karaktersorozatból, de a hasonlóság definíciója kicsit más lesz.

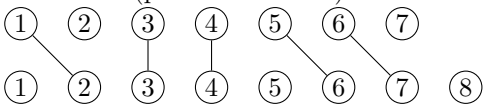
Legyen $X = (x_1, x_2, \cdots, x_m)$ és $Y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$. Az $X$ és $Y$ között bevezetjük a szekvenciaáttekintés fogalmát: ez egy párosítás az $X$-beli pozíciók és az $Y$-beli pozíciók között: $M \subseteq \{1, 2, \cdots, m\} \times \{1, 2, \cdots, n\}$, úgy, hogy minden $X$-beli és minden $Y$-beli legfeljebb egy $M$-beli párban fordul elő (kimaradhat pár pozíció) ÉS ha $(i, j), (i', j') \in M$ és $i \leq i'$, akkor $j \leq j'$.

Például:

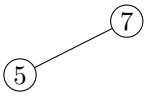
| X = | A | C | G | A | C | G | T | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | |
| Y = | C | A | G | A | T | G | G | A |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |

Az $M$ szekvenciaillesztés itt lehet pl. $M = \{(1, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 6), (6, 7)\}$.

Vizuálisan (pozíciókat nézve):

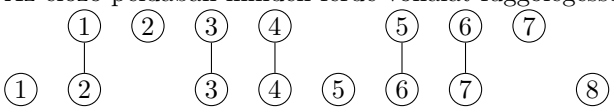



Az $i < i'$ feltétel kizárja pl. a következőt:




A szekvenciaillesztés megjeleníthető az $X$ karaktersorozatból az $Y$ karaktersorozat előállításaként karakterek törlése, beszúrása, cseréje (változatlanul hagyása) egymásutánjaként.

Az előző példában minden ferde vonalat függőlegessé teszünk:




Nézzük a betűket:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| - | A | C | G | A | - | C | G | T | - |
| C | A | - | G | A | T | G | G | - | A |
| beszúrás | | törlés | | | | csere | | | |

Az $X$ transzformációja $Y$-ná ennek megfelelően:

1. Szúrjunk be egy C-t
2. Másoljuk A-t
3. Töröljük C-t
4. Másoljuk G-t
5. Másoljuk A-t
6. Szúrjunk be egy T-t
7. Cseréljük C-t G-re
8. $\cdots$

Persze nem csak ez az egy lehetőség van. Melyiket használjuk a hasonlóság mérésére?

Egy $M$ szekvenciaillesztés minőségét a következőképpen definiáljuk:

1. az $M$-ben nem szereplő pozíciókra felszámolunk egy fix $y > 0$ értéket (ez része az inputnak)
2. ha $(i, j) \in M$, akkor erre felszámolunk egy $c[\text{"}p\text{"}, \text{"}q\text{"}] \geq 0$ értéket, ahol $x_i = \text{"}p\text{"}$ és $y_j = \text{"}q\text{"}$ (ez is része az inputnak)

Ezeket összeadjuk, és keressük a legjobb minőségű szekvenciaillesztést, vagyis egy olyat, ahol ez az összeg minimális.

Az összes szekvenciaillesztés végigbogarászása exponenciálisan hosszú idő: $DP \to \Theta(mn)$. Erős érvek szólnak amellett, hogy ennél polinomiálisan hatékonyabb algoritmus nem létezik.

[megjegyzés: $\theta(\frac{mn}{\log m+n})$ aszimptotikusan hatékonyabb, de polinomiálisan nem]

### DP algoritmus

Miféle részproblémák jöhetnek elő itt? Az eddigi szerény tapasztalataink alapján: optimális szekvenciaillesztés $(x_i, x_{i+1}, \cdots, x_j)$, $(y_k, y_{k+1}, \cdots, y_l)$ között (infixek).

Kiderül, hogy prefixek is elegek lesznek. $R[i, j]$ részprobléma: $(X_i) = (x_1, x_2, \cdots, x_i)$ és $(Y_j) = (y_1, y_2, \cdots, y_j)$ optimális szekvenciaillesztés meghatározása.

# 9. előadás (2025. november 11.)

## 9.1. Optimális szekvenciaillesztés

(Levenshtein távolság)

Pozíciók:

$X = (x_1, x_2, \cdots, x_m) \rightsquigarrow \{1, 2, \cdots, m\}$
$Y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \rightsquigarrow \{1, 2, \cdots, n\}$

Egy olyan $M$ párosítást (pontosabban szekvenciaillesztést) keresünk $\{1, 2, \cdots, m\}$ és $\{1, 2, \cdots, n\}$ között, melyre a következő mennyiség minimális:

- egyrészt annyiszor egy $g > 0$ valós számot, ahány pozíció nem szerepel $M$-ben
- másrészt ha $(i, j) \subseteq M$, akkor egy $c[x_i, y_j] \geq 0$ valós számot

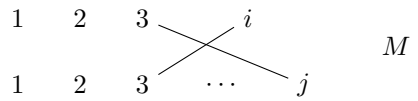
**DP algoritmus**

**1. Részproblémák**
$R[i, j] \rightarrow$ optimális szekvenciaillesztés meghatározása az $X_i = (x_1, x_2, \cdots, x_i)$ és $Y_j = (y_1, y_2, \cdots, y_j)$ prefixek között.

**2. Optimális részstruktúra tulajdonság**
**Észrevétel**
Legyen $M$ szekvenciaillesztés (akármilyen) $X_i$ és $Y_j$ között. Ekkor három eset lehet csak:

1. $(i, j) \in M$
2. $i$ nem szerepel $M$-ben első tagként
3. $j$ nem szerepel $M$-ben második tagként

Ami hiányzik: $j$ szerepel második tagként, $i$ nem szerepel első tagként. $(i, j) \notin M$.
Ám ekkor




ami nem szekvenciaillesztés.

**Állítás**
Legyen $M$ optimális szekvenciaillesztés $X_i$ és $Y_j$ között.
Ekkor

1. Ha $(i, j) \in M$, akkor $M \setminus \{(i, j)\}$ optimális szekvenciaillesztés $X_{i-1}$ és $Y_{j-1}$ között.
2. Ha $i$ nem szerepel $M$-ben első tagként, akkor $M$ optimális szekvenciaillesztés $X_{i-1}$ és $Y_j$ között.
3. Ha $j$ nem szerepel $M$-ben második tagként, akkor $M$ optimális szekvenciaillesztés $X_i$ és $Y_{j-1}$ között.

**Bizonyítás**

1. Ha $X_{i-1}$ és $Y_{j-1}$ között lenne egy $M \setminus \{(i, j)\}$-nél kedvezőbb $M^*$ szekvenciaillesztés, akkor $M^* \cup \{(i, j)\}$ egy $M$-nél kedvezőbb szekvenciaillesztés lenne $X_i$ és $Y_j$ között, **ellentmondás**.
2. Ha lenne $X_{i-1}$ és $Y_j$ között egy egy $M$-nél kedvezőbb $M^*$ szekvenciaillesztés, akkor itt lenne $X_i$ és $Y_j$ között is.
3. Analóg (2.)-hoz.

**3. Rekurzió**
Jelölje $l[i, j]$ az $R[i, j]$ megoldásának "értékét".

**"Alapeset"**
Az egyik (vagy mindkettő) karaktersorozat üres

$l[i, 0] = i - g$
$l[0, j] = j + g$

($M = \emptyset$ az egyetlen párosítás)

**"Általában"**

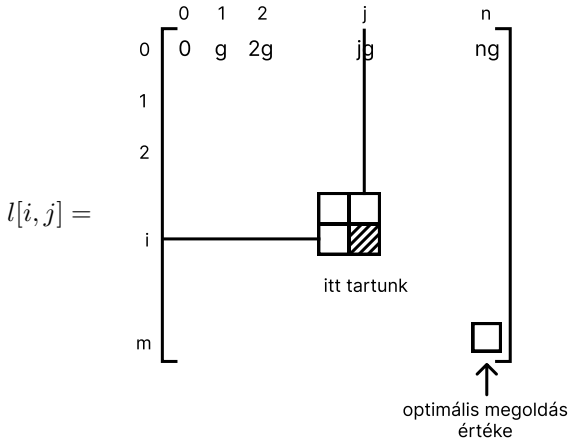
$(A) \to l[i,j] = l[i-1, j-1] + c[x_i, y_j]$
$(B) \to l[i,j] = l[i-1, j] + g$
$(C) \to l[i,j] = l[i, j-1] + g$

Sajnos nem tudjuk, hogy $(A)$ és $(B)$ és $(C)$ közül melyik teljesül, így mindhármat megvizsgáljuk és a legkedvezőbbet választjuk.

$$l[i,j] = min \begin{cases} l[i-1, j-1] + c[x_i, y_j] \\ l[i-1, j] + g \\ l[i, j-1] + g \end{cases}$$

[szakirodalomban sok helyen (bizonyítás nélkül) az áll, hogy ha $x_i = y_j$, akkor $l[i,j] = l[i-1, j-1]$ (feltéve, hogy $c["p","q"] \geq 0$ mindig)]

**4. Optimális megoldás értéke**
Az $(m+1) \times (n+1)$-es $l[i,j]$ táblázatot töltjük ki fentről lefelé, soronként balról jobbra.




Az első sorral kezdünk, az aktuális érték a három szomszédból számítódik (amiket már ismerünk)

Számítási bonyolultság: $\mathcal{O}(mn)$ cella, cellánként $\mathcal{O}(1)$ számítás $\to \mathcal{O}(mn)$.

**5. Optimális megoldás**
$\to$ optimális $M$

$l[i,j]$ számításakor az $(A)$, $(B)$ és $(C)$ közül a legkedvezőbbet adót magát is feljegyezzük.

$\rightarrow$ $\searrow$ $\downarrow$ (vizuálisan)

Ezeket tároljuk egy $k[i,j]$ táblázatban, amelynek elkészülte után a jobb alsó sarokból a nyilak mentén a "margóig" lépkedünk.

Ha $k[i,j] = \nwarrow$, akkor $M = M \cup \{(i,j)\}$ az üres $M$-ből indulva.

## 9.2. Leghosszabb közös részsorozat

$X = (x_1, x_2, \cdots, x_m)$
$Y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$

Egy leghosszabb olyan $Z = (z_1, z_2, \cdots, z_k)$-t keresünk, amely megkapható $X$-ből is és $Y$-ból is "néhány" karakter törlésével.

Hasonló DP algoritmus működik itt is, mint az előbb.

**1.** $R[i,j]$ $X_i$ és $Y_j$ egy leghosszabb közös részsorozatának meghatározása
**2.** **Állítás**

Legyen $Z_k = (z_1, z_2, \cdots, z_k)$ az $X_m = (x_1, x_2, \cdots, x_m)$ és $Y_n = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ egy leghosszabb közös részsorozata (LKR).

1. Ha $x_m = y_n$, akkor $z_k = x_m = y_n$ ÉS $Z_{k-1}$ egy LKR $X_{m-1}$-hez és $Y_{n-1}$-hez.
2. Ha $x_m \neq z_k$, akkor $Z_k$ egy LKR $X_{m-1}$-hez és $Y_n$-hez.
3. Ha $y_n \neq z_k$, akkor $Z_k$ egy LKR $X_m$-hez és $Y_{n-1}$-hez.

**3.** Legyen $l[i,j]$ az $R[i,j]$ optimális megoldásának értéke (hossza).

$(A) \rightarrow l[i,j] = l[i-1, j-1] + 1$
$(B) \rightarrow l[i,j] = l[i-1, j]$
$(C) \rightarrow l[i,j] = l[i, j-1]$

$$l[i,j] = min \begin{cases} 0 & \text{ha } i = 0 \text{ vagy } j = 0 \text{ "elvarrás"} \\ l[i-1, j-1] + 1 & \text{ha } i,j \geq 1 \text{ és } x_i = y_j \ (A) \\ min\{l[i-1,j], l[i,j-1]\} & \text{ha } i,j \geq 1 \text{ és } x_i \neq y_j \ (B), \ (C) \end{cases}$$

# 10. előadás (2025. november 18.)

## 10.1. NP-nehéz feladatok és DP

### 1. Részhalmaz-összeg

(NP-teljes eldöntési feladat)

Adott $a_1, a_2, \cdots, a_n, B$ pozitív egészekhez létezik-e olyan $I \in \{1, 2, \cdots, n\}$, hogy $\sum_{i \in I} a_i = B$?

### 2. Pénzváltás

Adott $a_1, a_2, \cdots, a_n, B$ pozitív egészekhez léteznek-e olyan $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ nemnegatív egészek, hogy $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i = B$?

**Optimalizálási feladat**
Ha a válasz igen, mi $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ minimális értéke?

**"Boltban"**
$B \to$ visszajáró pénz
$a_1, a_2, \cdots, a_n \to$ rendelkezésre álló címletek (pl. érmék)

A legkevesebb érmével akarjuk a $B$ összeget kifizetni.

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a címletek között szerepel az 1, mondjuk $1 = c_1 < c_2 < c_3 < \cdots < c_n$.

**Bolti algoritmus:** vegyük a legnagyobb olyan $c_i$-t, amelyre $c_i \leq B$, és adjunk belőle annyit, amennyit lehetséges. Ezután rekurzívan fizetjük ki a maradékot.

Optimális megoldást ad az algoritmus?

A tipikus (ahol a címletek: $1c, 2c, 5c, 10c, 20c, 50c$) boltokban igen.
Sajnos nem minden címlethalmaznál "működik" ez: $1, 6, 10$.

$12 \to 10 + 1 + 1$ algoritmus
$12 \to 6 + 6$ optimális

Tetszőleges $c_1, c_2, \cdots, c_n$ címletekre ez egy NP-nehéz feladat.

Meglepetés: polinom időben eldönthető, hogy adott $c_1, c_2, \cdots, c_n$ címletekre a bolti algoritmus optimális megoldást ad-e.

### 3. Hátizsák feladat

Adottak az $a_1, a_2, \cdots, a_n, c_1, c_2, \cdots, c_n, B$ pozitív egész számok, határozzunk meg egy olyan $I \subseteq \{1, 2, \cdots, n\}$ indexhalmazt, amelyre $\sum_{i \in I} a_i \leq B$ és $\sum_{i \in I} c_i$ maximális.

Mitől hátizsák feladat ez? Van $n$ tárgyunk $t_1, t_2, \cdots, t_n$. A $t_i$ tárgy súlya $b_i$, értéke $c_i$. Van egy hátizsákunk, amelynek (súly)kapacitása $B$.
Mely tárgyakat tegyük a hátizsákba, hogy az összérték maximális legyen, a súlykorlátot nem túllépve?

### Összefüggések 1-2-3 között

**Részhalmaz-összeg és hátizsák feladat**
Hogyan lehetne alkalmazni egy hátizsák feladatra adott algoritmust a részhalmaz-összeg feladat megoldására? (visszavezetés, rekurzió)

Tekintsük a részhalmaz-összeg feladat egy példányát: $a_1, a_2, \cdots, a_n, B$

Elkészítünk ehhez egy hátizsák feladat példányt:
n tárgy, az $i$-edik súlya és értéke is $a_i$
a hátizsák kapacitása $B$

Tegyük fel, hogy ennek a hátizsák feladatnak $I$ egy megoldása: $\sum_{i \in I} a_i \leq B$ és $\sum_{i \in I} c_i$ maximális

Két eset van:
$\rightarrow \sum_{i \in I} = B \rightarrow$ igen a részhalmaz-összegnél
$\rightarrow \sum_{i \in I} < B \rightarrow$ nem (igen esetén $I$ nem lenne optimális megoldás)

**Részhalmaz-összeg és pénzváltás**
(eldöntési változat)

Pénzváltás példány:
$a_1, a_2, \cdots, a_n, B$ $a_1$-ből vegyünk $\left\lfloor \frac{B}{a_1} \right\rfloor$ példányt
$a_2$-ből vegyünk $\left\lfloor \frac{B}{a_2} \right\rfloor$ példányt
$\vdots$
$a_n$-ből vegyünk $\left\lfloor \frac{B}{a_n} \right\rfloor$ példányt

Részhalmaz-összeg példány:
$\underbrace{a_1, \cdots, a_1}_{\left\lfloor \frac{B}{a_1} \right\rfloor}, \underbrace{a_2, \cdots, a_2}_{\left\lfloor \frac{B}{a_2} \right\rfloor}, \cdots, \underbrace{a_n, \cdots, a_n}_{\left\lfloor \frac{B}{a_n} \right\rfloor}, B$

Ha itt igen, akkor a pénzváltásnál is igen, ha nem, akkor ott is nem.

**Probléma:** a részhalmaz-összeg példány mérete nem csak $n$-től, de $B$-től is függ, ez utóbbitól lineárisan.

**Lineárisan:** ez elfogadhatatlan! Ami elfogadható lenne itt: $\Omega(\log B)$.

Elérhető ez? IGEN!

$a_1 \rightarrow \underbrace{a_1, 2a_1, 4a_1, 8a_1, \cdots, 2^{\lfloor \log_2 B \rfloor} a_1}_{\substack{\text{kettes számrendszerben gondolkodhatunk} \\ a_1, 2a_1, 3a_1, \cdots \left\lfloor \frac{B}{a_1} \right\rfloor a_1 \text{ közül minden} \\ \text{felírható csupán ezeket használva}}}$

Ugyanez $a_2, a_3, \cdots, a_n$ esetén.

# 11. előadás (2025. november 25.)

**Hátizsák feladat**

Legyenek $t_1, t_2, \cdots, t_n$ tárgyak. Minden $t_i$ tárgynak van egy $w_i$ súlya és egy $v_i$ értéke. Adott egy hátizsák $W$ kapacitással. Válasszunk ki a tárgyak közül néhányat úgy, hogy a kiválasztott tárgyak összsúlya ne haladja meg a hátizsák $W$ kapacitását és az összértéke a lehető legnagyobb.

Ismert, hogy ez egy NP-nehéz feladat. Ezzel együtt van egy különös tulajdonsága: bármely $\mathcal{E} > 0$ valós számhoz van olyan polinomiális algoritmus, amely által szolgáltatott megoldásban az összérték legalább $\frac{1}{1+\mathcal{E}}$-szorosa az optimális összértéknek. (aprópénzre váltva legalább 99%-a, legalább $99,9$%-a, legalább $99,99$%-a, és így tovább)

Hátizsák feladat input: $w_1, v_1, w_2, v_2, \cdots, w_n, v_n, W$ mind pozitív egészek.

**DP algoritmus (általánosan nem polinomiális!)**
**1. Részproblémák**
$R[i,j] \to$ tárgyak $t_1, t_2, \cdots, t_i$, hátizsák kapacitás: $j$

**2. Optimális részstruktúra tulajdonság**
Legyen Opt egy optimális (maximális összértékű) megoldása $R[i,j]$-nek.

Most $t_i \notin$ Opt (Opt most egy tárgyhalmaz) esetén Opt optimális megoldása $R[i-1,j]$-nek. Valóban, ha lenne $R[i-1,j]$-nek Opt-nál nagyobb összértékű megoldása, az Opt-nál nagyobb összértékű megoldása lenne $R[i,j]$-nek is, **ellentmondás**.

Másrészt $t_i \in Opt$ esetén Opt$\setminus\{t_i\}$ egy maximális összértékű megoldása $R[i-1, j-w_i]$-nek. Valóban, ha lenne $R[i-1,j-w_i]$-nek Opt$\setminus\{t_i\}$-nél nagyobb összértékű megoldása, akkor ezt kiegészítve $t_i$-vel, $R[i,j]$-nek egy Opt-nál nagyobb összértékű megoldását kapnánk, **ellentmondás**.

**3. Rekurzió**
Jelölje $h[i,j]$ az $R[i,j]$ optimális megoldásánál az összértéket.

Nyilván $h[i,0]$ és $h[0,j]$ nulla.

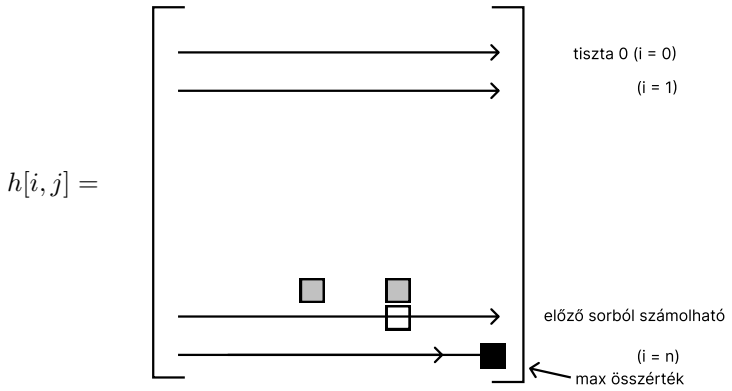
Különben, vagyik amikor $i, j \geq 1$, akkor

**A** ha $w_i > j$, akkor $t_i$ nem lehet benne az optimális megoldásban, így $h[i,j] = h[i-1,j]$.

**B** ha viszont $w_i \leq j$, akkor $t_i$ vagy benne van az optimális megoldásban, vagy nincs, és nem is tudjuk melyik áll fenn a kettő közül. Így szokásos módon mindkét lehetőséget megvizsgáljuk, és a kedvezőbb lesz a befutó:

$$h[i,j] = max \begin{cases} v_i + h[i-1, j-w_i] & \text{(benne van)} \\ h[i-1,j] & \text{(nincs benne)} \end{cases}$$

**4. Táblázat**
Az $(n+1) \times (w+1)$-dimenziós $h[i,j]$ táblázatot töltjük ki (felülről lefelé)




Oszlopok: $j = 0, 1, \cdots, W$

Költség:
egy cella: $\mathcal{O}(1)$
cellák száma: $\mathcal{O}(nW)$
összesen: $\mathcal{O}(nW)$, nem polinomiális!

A táblázatban az oszlopok száma $W + 1$, ez $W$, mint input input méretében (ami $\log W$) exponenciálisan nagy.

Megjegyzés: kis súlyok esetén az algoritmus polinomiális (pontosítva: $w_1 + w_2 + \cdots + w_n \leq W$ esetén a feladat triviális, itt nem ilyenekről van szó)

**5. Optimális tárgyhalmaz**
$h[i, j]$ számolásakor feljegyezzük, hogy $t_i$ beválasztása vagy kihagyása volt kedvezőbb, a jobb alsó sarkoból indulva ezek segítségével rekonstruálható egy optimális megoldás.

**Lássunk ezek után egy alternatív megközelítést**
Hátizsák feladat kicsit másképpen

- input változatlan
- "Célfüggvény" legalább V összértéket szeretnénk elérni az ehhez szükséges tárgyak minimális összsúlya mellett.

DP itt is működik (ezt talán mindenki érzi)

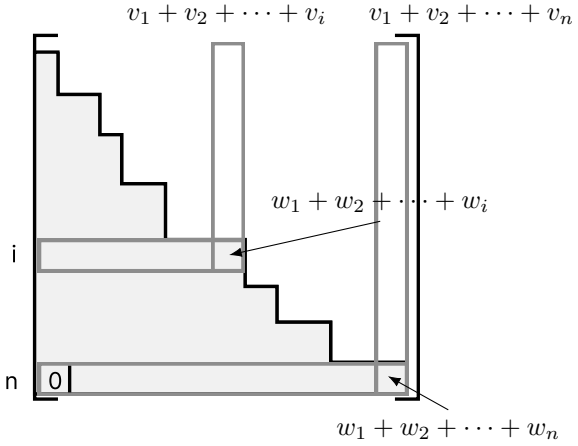
**1. Részproblémák**
$R[i, j]$ a $t_1, t_2, \cdots, t_i$ tárgyakból választhatunk és legalább $j$ összértéket akarunk elérni minimális összsúly mellett.

Jelölje $h^*[i, j]$ a minimális összsúlyt.

**2.** - **3.** nagyon hasonlít az előbbiekhez.

**4. Táblázat**

$h^*[i, j] =$




Csak az "alsó" részt töltjük ki.

Hogyan használható ez a táblázat az "eredeti" hátizsák feladat megoldására (ahol $W$ a hátizsák kapacitása)? Az utolsó sorban balról jobbra haladva megkeressük az utolsó $\leq W$ értéket, ennek oszlopindexe lesz az elérhető maximális összsúly.

Költség:
egy cella: $\mathcal{O}(1)$
cellák száma: legyen $v^* = max v_i$
sorok száma: $\mathcal{O}(n)$
oszlopok száma: $\mathcal{O}(nv^*)$
összesen: $\mathcal{O}(n^2 v^*)$, nem polinomiális!

Azonban kis értékek esetén polinomiális! Pl. ha $v^* = (n^3)$