

1. gyakorlat (2025. szeptember 10.)

1.1. Naiv algoritmus (nem feltétlen termináló)

Könyv: konyv.pdf#page=105

$$\begin{array}{ll} f_1 \rightarrow (l_2, l_1, l_3) & l_1 \rightarrow (f_1, f_3, f_2) \\ f_2 \rightarrow \text{tetszőleges, pl. } (l_1, l_2, l_3) & l_2 \rightarrow (f_3, f_1, f_2) \\ f_3 \rightarrow (l_1, l_2, l_3) & l_3 \rightarrow \text{tetszőleges, pl. } (f_1, f_2, f_3) \end{array}$$

Algoritmus

1. Keressünk instabilitást a párosításban: egy fiúnak jobban tetszik egy másik lány ÉS aa lánynak jobban tetszik egy másik fiú.
2. Az (egyik) instabilitásbeli négyest felcseréljük.

Kezdeti párosítás: $M_0 = \{(f_1, l_1), (f_2, l_2), (f_3, l_3)\}$, ez nem stabil.

Instabilitás: $[f_3 - l_2]$ és $[f_1 - l_2]$ (több van, ezért választunk egyet)

$$M_1 = \{(f_1, l_2), (f_2, l_1), (f_3, l_3)\}$$

Instabilitás: $[f_3 - l_2]$ és $[f_3 - l_1]$

$$M_2 = \{(f_1, l_3), (f_2, l_1), (f_3, l_2)\}$$

Instabilitás: $[f_1 - l_1]$ és $[f_3 - l_1]$

$$M_3 = \{(f_1, l_3), (f_2, l_2), (f_3, l_1)\}$$

Instabilitás: $[f_1 - l_2]$ és $[f_1 - l_1]$

$$M_4 = \{(f_1, l_1), (f_2, l_2), (f_3, l_3)\} = M_0$$

Végtelen ciklus: $M_0, M_1, M_2, M_3, M_4 = M_0, M_1, M_2, \dots$

1.2. Gale-Shapley algoritmus

(zh. feladat)

$$\begin{array}{ll} f_1 \rightarrow (l_3, l_2, l_5, l_1, l_4) & l_1 \rightarrow (f_3, f_5, f_2, f_1, f_4) \\ f_2 \rightarrow (l_1, l_2, l_5, l_3, l_4) & l_2 \rightarrow (f_5, f_2, f_1, f_4, f_3) \\ f_3 \rightarrow (l_4, l_3, l_2, l_1, l_5) & l_3 \rightarrow (f_4, f_3, f_5, f_1, f_2) \\ f_4 \rightarrow (l_1, l_3, l_4, l_2, l_5) & l_4 \rightarrow (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5) \\ f_5 \rightarrow (l_1, l_2, l_4, l_5, l_3) & l_5 \rightarrow (f_2, f_3, f_4, f_1, f_5) \end{array}$$

	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5
1.	$f_2, f_4, \boxed{f_5}$		f_1	f_3	
2.	f_5	f_2	$f_1, \boxed{f_4}$	f_3	
3.	f_5	$\boxed{f_2}, f_1$	f_4	f_3	
4.	f_5	f_2	f_4	f_3	f_1

Észrevétel 1: minden lányt csak az utolsó napon jelenik meg egy szerenádozó. Ezt a lányt senki sem húzza ki a preferencialistájáról.

Észrevétel 2: a többi lányt legalább 1 fiú nem húzza ki.

Kihúzások száma: $n^2 - n - (n-1) = (n-1)^2 + 1$

Hány nap alatt fejeződik be biztosan? Előadás: $n^2 + 1$ korlát (minden nap legalább 1 lányt kihúznak).

Észrevétel 1: $n^2 + 1 - n$

Észrevétel 2: $n^2 + 1 - n - (n-1)$ (a végén n-1 mert az első észrevételbeli lányt nem számoljuk még egyszer)

Összesen: $n^2 + 1 - n - (n-1) = (n^2 - 2n + 1) + 1 = (n-1)^2 + 1$

Maximum hány stabil párosítás lehetséges n fiú és n lány között? Az összes teljes párosítás száma: $n!$. Gale-Shapley algoritmus: minden lányt csak az utolsó napon jelenik meg egy szerenádozó.

HF. ha minden lánynak ugyanaz a preferencialistája, akkor csak 1 létezik. Észrevétel: néha 1-nél több van.

$$f_1 \rightarrow (l_1, l_2) \quad l_1 \rightarrow (f_2, f_1)$$



$$f_2 \rightarrow (l_2, l_1) \quad l_2 \rightarrow (f_1, f_2)$$

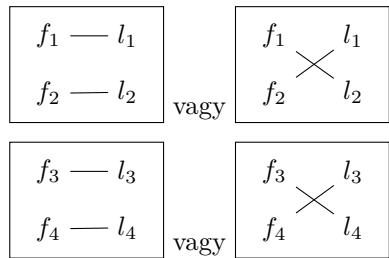
Stabil párosítás: minden **fiú** a preferencialistájának elsőjét kapja.

Stabil párosítás: minden **lány** a preferencialistájának elsőjét kapja.

Meglepetés: 2n fiú és 2n lány van, akár 2^n párosítás is lehetséges.

$$\begin{array}{ll} f_1 \rightarrow (l_1, l_2, \dots) & l_1 \rightarrow (\dots, f_1) \\ f_2 \rightarrow (l_2, l_1, \dots) & l_2 \rightarrow (\dots, f_2) \\ f_3 \rightarrow (l_3, l_4, \dots) & l_3 \rightarrow (\dots, f_3) \\ f_4 \rightarrow (l_4, l_3, \dots) & l_4 \rightarrow (\dots, f_4) \\ f_{2i-1} \rightarrow (l_{2i-1}, l_{2i}, \dots) & l_1 \rightarrow (\dots, f_{2i-1}) \\ f_{2i} \rightarrow (l_{2i}, l_{2i-1}, \dots) & l_1 \rightarrow (\dots, f_{2i}) \\ \vdots & \vdots \\ f_{2n-1} \rightarrow (l_{2n-1}, l_{2n}, \dots) & l_1 \rightarrow (\dots, f_{2n-1}) \\ f_{2n} \rightarrow (l_{2n}, l_{2n-1}, \dots) & l_1 \rightarrow (\dots, f_{2n}) \end{array}$$

A sok-sok stabil párosítás:



Minden sorból választunk egyet: 2^n lehetőség.

HF. az összes így kapott párosítás stabil (nincs instabilitás).

2. gyakorlat (2025. szeptember 17.)

Miért lesz ez mind stabil párosítás?

Ha a felső kockát választottuk, akkor f_1 párja a preferencialistáján az első lány, így f_1 nem lehet instabilitás fiú tagja.

Ha az alsó kockát választottuk, akkor f_1 párja a preferencialistáján a második lány, így f_1 csak az l_1 lánnyal lehet instabilitásban. Azonban f_1 utolsó l_1 preferencialistáján, így akárki is l_1 párja, ő jobban tetszik l_1 -nek, mint f_1 . Így f_1 most sem lehet instabilitás fiú tagja.

Ez a gondolatmenet minden fiúra alkalmazható, így minden a 2^n párosítás stabil.

Stabil szobatárs probléma

Nem feltétlenül létezik stabil párosítás.

$$A \rightarrow (B, C, D)$$

$$B \rightarrow (C, A, D)$$

$$C \rightarrow (A, B, D)$$

$$D \rightarrow \text{mindegy}$$

Három teljes párosítás létezik, A párja egyértelműen meghatározza a párosítást.

1. $(A, B), (C, D) \rightarrow$ instabilitás: B és C
2. $(A, C), (B, D) \rightarrow$ instabilitás: A és B
3. $(A, D), (B, C) \rightarrow$ instabilitás: A és C

Így itt nincs stabil párosítás.

Feladat

Legyen M_1 és M_2 két különböző stabil házasítás (visszatérünk az eredeti fiú-lány feladathoz). minden fiúhoz rendeljük hozzá az M_1 és M_2 -beli párja közül a neki jobban tetszőt. Mutassuk meg, hogy így teljes párosítást kapunk (nem triviális) ami ráadásul stabil.

Teljes párosítás

Indirekt tegyük fel, hogy ez nem teljesül, következésképpen vannak olyan f' és f'' különböző fiúk, hogy:

$$f' — l' \quad f' — \hat{l}'$$

$$M_1: f'' — l'' \quad \text{és} \quad M_2: f'' — \hat{l}''$$

és $\text{JobbanTetszik}_{f'}(l', \hat{l}') = \text{JobbanTetszik}_{f''}(l'', \hat{l}'')$ Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\text{JobbanTetszik}_{f'}(l', \hat{l}')$ és $\text{JobbanTetszik}_{f''}(l', \hat{l}'') = l''$.

Ha ez nem elég meggyőző: négy eset van:

1. $JT_{f'}(l', \hat{l}') = l'$ és $JT_{f''}(l'', \hat{l}'') = l''$
2. $JT_{f'}(l', \hat{l}') = l'$ és $JT_{f''}(l'', \hat{l}'') = \hat{l}''$
3. $JT_{f'}(l', \hat{l}') = \hat{l}'$ és $JT_{f''}(l'', \hat{l}'') = l''$
4. $JT_{f'}(l', \hat{l}') = \hat{l}'$ és $JT_{f''}(l'', \hat{l}'') = \hat{l}'' \rightarrow$ nem lehet

HF. Keressünk instabilitást M_1 -ben vagy M_2 -ben.

Feladat. Hosszú Gale-Shapley algoritmus futás. Először adott 5 fiú - 5 lány.

	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5
1.	f_1, f_5	f_2	f_3	f_4	
2.	f_1	f_2, f_5	f_3	f_4	
3.	f_1	f_2	f_3, f_5	f_4	
4.	f_1	f_2	f_3	f_4, f_5	
5.	f_1, f_4	f_2	f_3	f_5	
6.	f_1	f_2, f_4	f_3	f_5	
7.	f_1	f_2	f_3, f_4	f_5	
8.	f_1	f_2	f_4	f_5, f_3	
9.	f_1, f_3	f_2	f_4	f_5	
10.	f_1	f_2, f_3	f_4	f_5	
11.	f_1	f_3	f_4, f_2	f_5	
12.	f_1	f_3	f_4	f_5, f_2	
13.	f_1, f_2	f_3	f_4	f_5	
14.	f_2	f_3, f_1	f_4	f_5	
15.	f_2	f_3	f_4, f_1	f_5	
16.	f_2	f_3	f_4	f_5, f_1	
17.	f_2	f_3	f_4	f_5	f_1

Ez általánosítható bármely számú fiúra és lányra $\rightarrow (n - 1)^2 + 1$ nap.

HF. "Konstruáljuk meg" a preferencialistákat.

HF. Nem létezik olyan teljes párosítás (stabil vagy nem stabil), amelyben minden fiúnak szigorúan jobban tetszik a párja, mint a Gale-Shapley algoritmus által szolgáltatott párja.

3. gyakorlat (2025. szeptember 24.)

Állítás (pareto optimalitás): Jelölje M a Gale-Shapley algoritmus által szolgáltatott (fiú-optimális) párosítást. Ekkor nem létezik olyan M' teljes párosítás (nem stabil sem), ahol minden fiú jobban jár mint M -ben. (Olyat valószínűleg tudunk mutatni, amiben valamelyik fiú jobban jár mint M -ben, mivel a Gale-Shapley algoritmus esetén lehet olyan fiú aki nem a listájáról az első lányt kapta. Ha ez a fiú megkapja a listájának első lányát (és a többi fiú is valamilyen módon kap egy új párt), akkor márás mutattunk egy ilyen párosítást.)

Bizonyítás: Indirekt tegyük fel, hogy létezik olyan M' teljes párosítás, ahol minden fiú jobban jár, mint M -nél. Nézzük az M -et előállító Gale-Shapley algoritmus lefutását. Ekkor van olyan l lány, ainek csak az utolsó napon jelenik meg az ablaka alatt szerenádozó, aki végül a párja lesz. Legyen ez a fiú f . Most f M' -beli l' párja jobban tetszik f -nek, mint l (spec. $l' \neq l$). Jelölje l M -beli párját f' . Ismét, f' M' -beli l párja jobban tetszik f' -nek, mint az M -beli párja.

Igen ám, de ekkor f' az utolsó nap előtt szerenádozott l -nél és kosarat kapott, ellentmondva annak, hogy l -nél csak az utolsó nap szerenádozik valaki.

Megoldandó probléma

$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$ alakú rekurziók.

Összefűréses rendezés

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \rightarrow T(n) = \Theta(n \log n)$$

Maximális növekedés

Adott pozitív számoknak egy $A[1 : n]$ tömbje. Keressünk olyan $1 \leq i \leq j \leq n$ indexeket, hogy $A[j] - A[i]$ maximális.

Oszd meg és uralkodj algoritmusok

Oszd meg és uralkodj algoritmust tervezünk (van más, hatékony módszer is).

1. Bontsuk a feladatot két feleakkora méretű feladatra:

- $A[1 : \frac{n}{2}]$ -ben hol van a maximális növekedés
- $A[\frac{n}{2} + 1 : n]$ -ben hol van a maximális növekedés

2. Rekurzívan megoldjuk a részfeladatokat:

- $A[1 : \frac{n}{2}] \rightarrow 1 \leq i' \leq j' \leq \frac{n}{2}$
- $A[\frac{n}{2} + 1 : n] \rightarrow \frac{n}{2} + 1 \leq i'' \leq j'' \leq n$

Egyelemű tömbökre direkt megoldás: a két index megegyezik az elem indexével.

3. A maximális növekedést adó i és j meghatározása. Három eset van:

- (a) $A[1 : \frac{n}{2}]$ -ben (az első felében) van a maximális növekedés $\rightarrow i = i'$ és $j = j'$
- (b) $A[\frac{n}{2} + 1 : n]$ -ben (a második felében) van a maximális növekedés $\rightarrow i = i''$ és $j = j''$
- (c) $1 \leq i \leq \frac{n}{2} < j \leq n$ (az egyik az első, a másik a második felében). Ekkor i -t célszerű úgy választani, hogy $A[i]$ az $A[1 : \frac{n}{2}]$ legkisebb értéke, j -t pedig úgy, hogy $A[j]$ az $A[\frac{n}{2} + 1 : n]$ legnagyobb értéke.

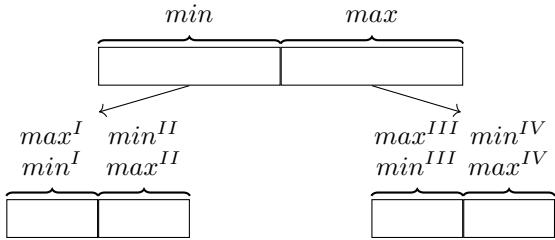
Nem tudjuk előre, hogy (a), (b) és (c) közül melyik adja az optimumot, ezért minden minden megvizsgáljuk és a legkedvezőbbet választjuk.

Költség

$$T(n) = \underbrace{2T\left(\frac{n}{2}\right)}_{\text{két rekurzív hívás}} + \underbrace{\Theta(n)}_{\begin{array}{l} \min A[1 : \frac{n}{2}] \text{-ben} \\ \max A[\frac{n}{2} + 1 : n] \text{-ben} \\ (\text{a}), (\text{b}), (\text{c}) \text{ "közül a legnagyobb"} \end{array}}$$

Ez egy összefűréses rendezés rekurzió $\rightarrow T(n) = \Theta(n \log n)$

Van hatékonyabb? Nem meglepő módon igen:



A rekurzív hívásokba süllyesztve a min és max kiválasztást $\Theta(n)$ $\Theta(1)$ -re csökken a rekurzióban.

Zárt formula erre: $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + 1$

HF. direkt számolás (önmagába helyettesítés)

Még egy érdekes dolog:

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + 1 \rightarrow T(n) = \Theta(\log n)$$

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + n \rightarrow T(n) = \Theta(n)$$

3.1. Mester-tétel

Könyv: konyv.pdf#page=10

$$f(n) \leftrightarrow n^{\log_b a}$$

1.
 - $T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + n$
 - $n^{\log_b a} = n^{\log_3 9} = n^2$ polinomiálisan nagyobb, mint $f(n)$
 - $[f(n) = n = O(n^{2-\epsilon})]$, például $\epsilon = \frac{1}{2}$ esetén]
 - Mester téTEL első eset $\rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n^2)$
2.
 - $T(n) = T\left(\frac{2n}{3}\right) + 1$ ($a = 1, b = \frac{3}{2}, f(n) = 1$)
 - $n^{\log_b a} = n^{\log_{\frac{3}{2}} 1} = n^0 = 1$ aszimptotikusan megegyezik $f(n)$ -nel.
 - $[f(n) = 1 = \Theta(n^0) = \Theta(1)]$
 - Mester téTEL második eset $\rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n) = \Theta(\log n)$
3.
 - $T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + n \log n$ ($a = 3, b = 4, f(n) = n \log n$)
 - $n^{\log_b a} = n^{\log_4 3} \approx n^{0,793}$ ($\log_4 3 < \log_4 4 = 1$)
 - $f(n)$ polinomiálisan nagyobb, mint $n^{0,793}$
 - $f(n) = n \log n = \Omega(n^{0,793+\epsilon})$ pl. $\epsilon = 0, 1$ esetén
 - A Mester téTEL harmadik esetének néz ki, de ahhoz hogy tényleg az legyen, még egy dolgot ellenőrizni kell:
 - ◊ a $f\left(\frac{n}{b}\right) \leq cf(n)$ alkalmas $c < 1$ konstanssal
 - ◊ $3f\left(\frac{n}{4}\right) = 3\left(\frac{n}{4} \log \frac{n}{4}\right) = \frac{3}{4}n \log \frac{n}{4} \leq \frac{3}{4}n \log n$
 - ◊ $c = \frac{3}{4}$ megfelelő
 - ◊ Így tényleg mester téTEL harmadik eset $\rightarrow T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(n \log n)$

HF. mindenféle ilyen rekurziók:

- $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n^3$
- $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$
- $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \log n$

4. gyakorlat (2025. október 1.)

”Oszd meg és uralkodj”

1. részproblémákra bontjuk
2. a részproblémákat megoldjuk
3. ezek eredményéből kiszámoljuk a végeredményt

Inverziószámok keresése/számlálása

Legyen $A[1..n]$ egy tömb egyedi számokkal. Az (i, j) indexpár inverzió, ha $1 \leq i < j \leq n$ és $A[i] > A[j]$. Számoljuk meg, hány inverzió van a tömbben.

Naiv módszer:

Minden indexpárt ellenőrzünk: $O(n^2)$.

Oszd meg és uralkodj (könyv: konyv.pdf#page=8):

1. Részproblémákra bontjuk: keressük az inverziókat $A[1 : \frac{n}{2}]$ és $A[\frac{n}{2} + 1 : n]$ -ben külön
2. A részproblémák megoldása (rekurzívan): ha a részprobléma 1 elemű, akkor nincs inverzió, adjunk vissza 0-t
3. Válaszok egyesítése: keressük az összes inverziót.
 - (a) $1 \leq i < j \leq \frac{n}{2} \rightarrow A[1 : \frac{n}{2}]$ részprobléma
 - (b) $\frac{n}{2} + 1 \leq i < j \leq n \rightarrow A[\frac{n}{2} + 1 : n]$ részprobléma
 - (c) $1 \leq i \leq \frac{n}{2} < j \leq n \rightarrow ?$

Ötlet: rendezzünk menet közben (merge sort). Ha rendezett a két résztömb, könnyebb a (c) esetet ellenőrizni. Két eset van:

- $A[i] < A[j] \rightarrow$ nincs inverzió. Mivel rendezett a tömb, ezért minden $j \leq k \leq n$ k index se lesz inverzió.
- $A[i] > A[j] \rightarrow$ inverzió. Mivel rendezettek a tömbök, ezért minden $i \leq l \leq \frac{n}{2}$ l index is inverzió lesz j-vel.

Végeredmény

A két részprobléma megoldásai + a köztük végzett ellenőrzés eredménye. Futási idő: $O(n \cdot \log n)$ mint a merge sort.

Többségi elem keresése

Egy elem többségi elem egy $A[1 : n]$ tömbben, ha $\frac{n}{2}$ -nél többször fordul elő benne (pl. minimum 6/10, minimum 4/7, stb.). Ha van többségi elem egy tömbben, akkor biztosan egy van. Keressük meg a többségi elemet, amennyiben van ilyen.

Naiv módszer:

Minden elemet megszámolunk: $O(n^2)$.

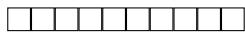
Oszd meg és uralkodj:

1. Részproblémák:
 - Ötlet: ha x többségi elem $A[1 : n]$ tömbben, akkor (mivel $\frac{n}{2}$ -nél többször fordul elő) többségi elem lesz $A[1 : \frac{n}{2}]$ -ben vagy $A[\frac{n}{2} + 1 : n]$ -ben.
 - Szóval a részproblémák: vegyük a tömb egyik ($A[1 : \frac{n}{2}]$) és másik ($A[\frac{n}{2} + 1 : n]$) felét.
2. Részproblémák megoldása rekurzívan:
 - Ha 1 elemű a tömb, akkor az az elem a többségi elem.
 - $A[1 : \frac{n}{2}] \rightarrow m'$, $A[\frac{n}{2} + 1 : n] \rightarrow m''$ (m' és m'' lehet üres is (ha nincs többségi elem az adott résztömbben))
 - m' és m'' közül valamelyik az egész tömb többségi eleme is lesz.
3. Számoljuk meg az előfordulásokat, hogy m' és m'' hányszor szerepel $A[1 : n]$ -ben.

- Ha m' többször fordul elő, mint m'' , akkor m' lesz a többségi elem.
- Ha m'' többször fordul elő, mint m' , akkor m'' lesz a többségi elem.
- Ha m' és m'' ugyanannyiszor fordul elő, akkor nincs többségi elem.

Futási idő: $O(n \cdot \log n)$

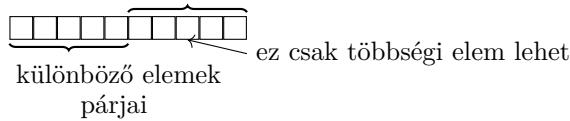
Tudunk-e erre a problémára hatékonyabb (lineáris) algoritmust? Igen, de nem oszd meg és ural-kodj.

 $A[1 : n]$

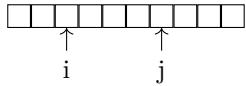
Ha tudjuk, hogy x többségi elem $A[1 : n]$ és $A[1] \neq A[2]$, akkor többségi elem $A[3 : n]$ -ben. $A[1 : 10]$, ha x többségi elem, akkor legalább 6-szor van jelen $A[3 : 10]$ -ben.

Ötlet: rendezzük át az $A[1 : n]$ tömböt úgy, hogy párokat kapunk a tömb elején, amik nem azonos értékek.

minden elem ugyanaz



Hogyan?



Tegyük fel, hogy $A[j]$ -nél vagyunk, és $A[1 : i]$ a párok sora, míg $A[i + 1 : j]$ homogén. Ekkor ha $A[j] = A[i + 1]$, akkor a homogén részhez hozzávesszük $A[j]$ -t. Ha viszont $A[j] \neq A[i + 1]$, akkor megcseréljük $A[j]$ -t $A[i + 2]$ -vel, és ezzel növeljük a párok számát (az első rész 2-vel hosszabb). Innentől a homogén rész az $A[i + 3 : j]$. A rendezés végén ha marad homogén rész, akkor az a többségi elem.

Futási idő: mivel egyszer megyünk végig, ez lineáris, $O(n)$.

Mester téTEL gyakorlás

- $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n^3$
- $a = 2, b = 2, f(n) = n^3$
- $n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n^1 = n$
- $f(n) = n^3 > n$

3. eset: $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon}) \rightarrow \epsilon = 2 \checkmark$

Regularitás:

$$af\left(\frac{n}{b}\right) \leq cf(n)$$

$$2f\left(\frac{n}{2}\right) \leq cf(n)$$

$$2\frac{n^3}{8} \leq cn^3$$

$$f\left(\frac{n^3}{8}\right) \leq cn^3$$

$$\frac{n^3}{4} \leq cn^3$$

$$c < 1, c \geq \frac{1}{4} \checkmark$$

$$T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(n^3)$$

5. gyakorlat (2025. október 8.)

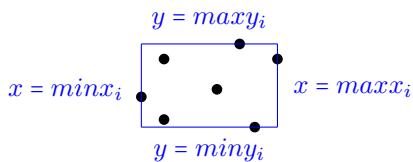
Oszd meg és uralkodj algoritmusok

Geometria

Adott n pont a síkon. Határozzuk meg

1. a két legközelebbiit
2. a két legtávolabbiit.

Kicsit távolabbról indulunk.



$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ a pontok. Határozzuk meg a legkisebb olyan téglalapot amelynek oldalai párhuzamosak a koordinátatengelyekkel és az összes pontot tartalmazza.

Két min és két max számolás $\rightarrow 4n - 4$ összehasonlítás. Lehet kevesebbel is? Egyszerre $\min x_i$ és $\max x_i$, illetve $\min y_i$ és $\max y_i$? Lássuk a $\min x_i$ és $\max x_i$ esetet:

$$\underbrace{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}}_{\text{min } x_i} \underbrace{x_n}_{\text{max } x_i}$$

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy az értékek páronként különbözőek.

Ha $x_1 < x_2$, akkor $x_1 \neq \max x_i$ és $x_2 \neq \min x_i \Rightarrow \left[\frac{n}{2} \right]$ összehasonlítással a feladat visszavezethető $\left[\frac{n}{2} \right]$ szám közül a maximum és a minimum meghatározására. Ezzel az összehasonlítások számát $\left[\frac{n}{2} \right]$ -vel tudtuk csökkenteni. Igazából nem számít, ha az elemek között vannak megegyezők.

Legkisebb téglalap \rightarrow legkisebb sokszög (amely az összes pontot tartalmazza).



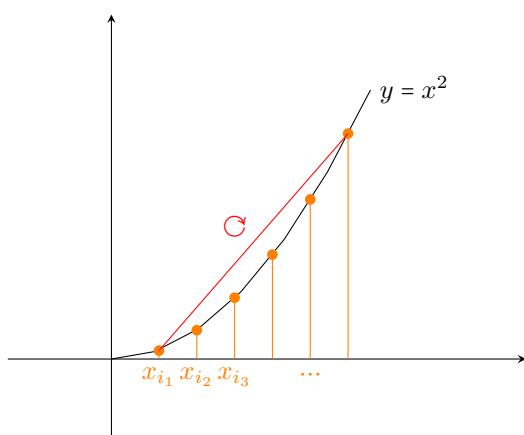
Nem nehéz belátni, hogy a két legtávolabbi pont a konvex burok két csúcsa.

Első lépés a két legtávolabbi pont meghatározásához a konvex burok meghatározása.

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n) \rightarrow$ a konvex burok csúcsainak felsorolása a konvex burkon az óramutató járása szerint.

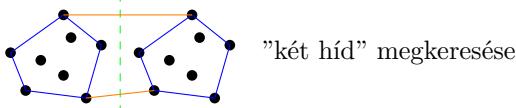
Milyen "bonyolult" a konvex burok meghatározása? Legalább annyira, mint a rendezés.

$(x_1, x_1^2), (x_2, x_2^2), \dots, (x_n, x_n^2)$ bemenethez:



Egy konvex burok algoritmus rendezi is az x_1, x_2, \dots, x_n számokat (csökkenően).

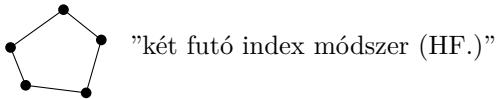
$\mathcal{O}(n \log n)$ költségűek a "jó" konvex burok algoritmusok. Több ilyen is van, oszd meg és uralkodj is:



”két híd” megkeresése

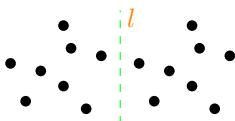
1. két feleakkora feladat
2. rekurzívan megoldjuk a részfeladatokat
3. ”egyesítjük” a két konvex burkot (két híd)

Ezek után a két legtávolabbi csúcs a konvex burkon (nem oszd meg és uralkodj algoritmus):



1. minimális távolság

Oszd meg és uralkodj algoritmus

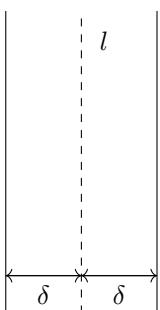


1. két feleakkora feladatra bontás $\rightarrow P_{bal}, P_{jobb}$
2. rekurzívan meghatározzuk a minimális távolságot P_{bal} -ban és P_{jobb} -ban:
 - $P_{bal} \rightarrow \delta_{bal}$
 - $P_{jobb} \rightarrow \delta_{jobb}$
3. min távolság meghatározása

A minimális távolság vagy baloldalon vagy jobboldalon van, vagy keresztezi az l felező egyenest.

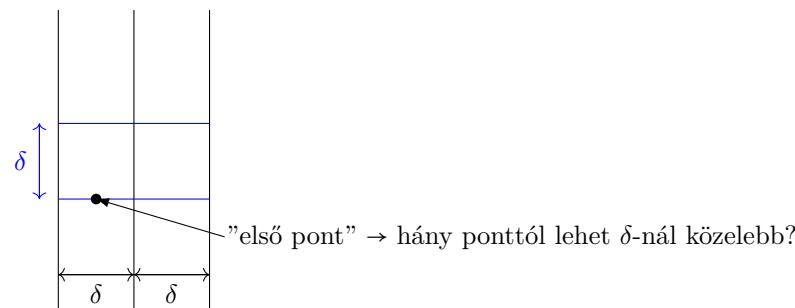
A harmadik esetben l -től nem túl messze lévő pontokra elég szorítkozni.

Legyen $\delta = \min(\delta_{bal}, \delta_{jobb})$.

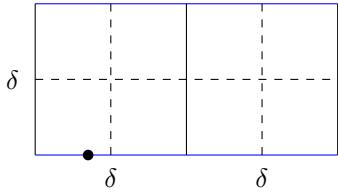


Ebben a δ sugarú sávban kell a két pontnak lenni, amelyek a min távolságot minimalizálják.

Itt van még valami, amit érdemes észrevenni. Tekintsük a sávbeli pontokat az y koordinátájuk szerint monoton növekvően rendezetten.



Minden ilyen pont szükségképpen ebben a téglalapban van:



Tekintsük a fenti 8 kis négyzetet. Mivel ezek átmérője $\frac{8}{2}\sqrt{2} = \frac{8}{\sqrt{2}} < \delta$, és az l bal, illetve jobb oldalán a min. távolság legalább δ , így a 8 kis négyzet egyikében sem lehet egynél több P -beli pont. Így a legalsó ponttól δ -nál kisebb távolságra csak a következő 7 pont valamelyike lehet. Felfelé haladva ez mindenig igaz lesz.

$$\text{Költség: } T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \underbrace{\mathcal{O}(n \log n)}_{\text{rendezések}} \rightarrow T(n)(\mathcal{O}(n \log^2 n))$$

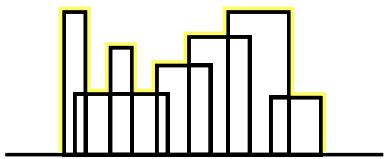
$$\mathcal{O}(n \log^2 n) \rightarrow \mathcal{O}(n \log n)$$

Előfeldolgozás → előrendezés (x és y koordináták szerint is) → rekurzív hívásokban már csak kiválogatás

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \mathcal{O}(n) \rightarrow T(n) = \mathcal{O}(n \log n)$$

6. gyakorlat (2025. október 15.)

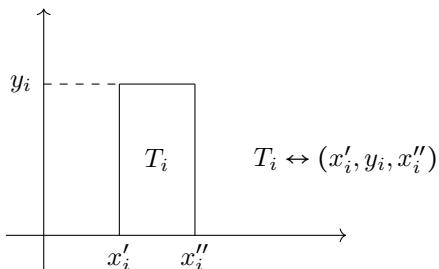
Még egy geometriai oszd meg és uralkodj algoritmus (igazából összefésülés variáció)



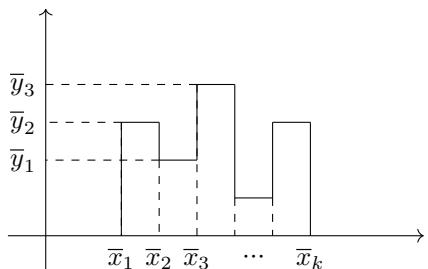
n téglalap, amelyek az x tengelyen állnak

Feladat: sziluett (felső burkoló törötvonal) meghatározása.

Téglalapok: T_1, T_2, \dots, T_n



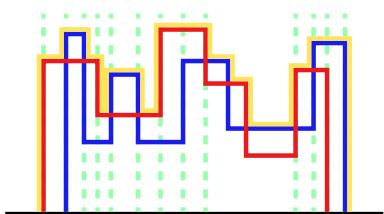
Sziluett



$(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_{k-1}, \bar{x}_k)$

Oszd meg és uralkodj algoritmus

1. Két feleakkora méretű részfeladat
 - $T_1, T_2, \dots, T_{n/2}$ sziluettjének meghatározása
 - $T_{n/2+1}, T_{n/2+2}, \dots, T_n$ sziluettjének meghatározása
2. Rekurzívan megoldjuk a részfeladatokat (egy téglalap esetén triviális)
3. Összekombináljuk a két sziluettet:



(ez már egy összefésülés)

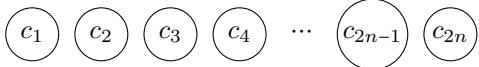
Minden szakaszban a magasabban fekvő szakaszt választjuk a két sziluetten.

Implementáljuk ezt ha tényleg minden részletében érteni szeretnénk.

Költség: $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \mathcal{O}(n) \rightarrow T(n) = (O)(n \log n)$

6.1. Érmék egy sorban (tegnapi előadás)

(Ez már nem oszd meg és uralkodj)



Egy sorban $2n$ (nem feltétlenül páronként) különböző érmék vannak. Két játékos felváltva elvesz a (megmaradt) érmék sorának valamelyik végéről egy érmét. Az győz, aki nél az elvett érmék értékének összege nagyobb.

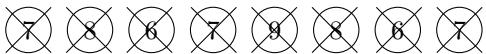


A nyerő stratégia a nem vesztő stratégia.

Nyerő stratégia a kezdő számára: tud úgy érmét elvenni először, hogy erre "bármit lép" a másik játékos, a kezdő megint tud úgy érmét elvenni, hogy erre "bármit lép" a másik játékos, ..., a kezdő nyer (nem veszít)

Nyerő stratégia a másik játékosnak: bármilyen lépést a kezdeti játékos, a másik játékos tud úgy érmét elvenni, hogy erre bármilyen lépést a kezdeti játékos, a másik tud úgy érmét elvenni, ..., a másik játékos nyer (nem veszít).

Ebben a játékban a kezdőnek van nyerő (nem vesztő) stratégiája!

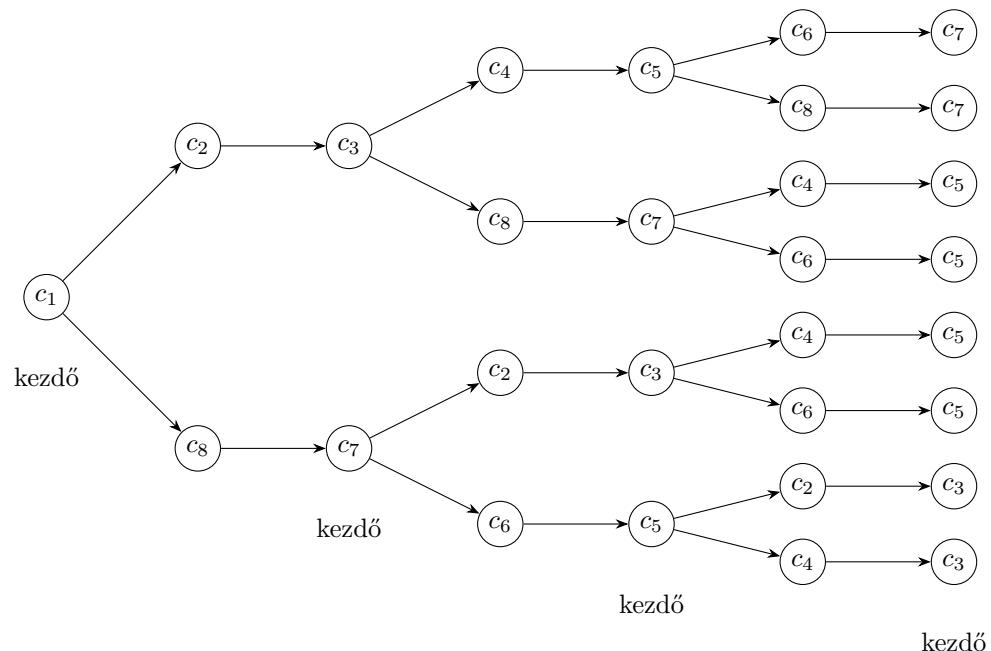


Kezdő (összesen 30): 7 8 6 9

Másik (összesen 28): 7 6 8 7

A kezdő játékos ki tudja kényszeríteni, hogy a másik csak a páros indexű c_i -ket és azt is hogy csak a páratlan indexű c_i -ket vegye el (az összeset).

Pl. a páros indexekre:



Ezek után a nyerő stratégia:

$$S_{ns} := c_2 + c_4 + c_6 + \cdots + c_{2n}$$

$$S_{plan} := c_1 + c_3 + c_5 + \cdots + c_{2n-1}$$

Ha $S_{ps} \leq S_{plan}$, akkor a kezdő mindenkor a páratlan indexű érméket vegye el, különben mindenkor a páros indexűeket.

Példánkban:

$$S_{ns} = 8 + 7 + 8 + 7 = 30$$

$$S_{\text{plan}} \equiv 7 + 6 + 9 + 6 = 28$$

A kezdőnek a páros indexű érméket kell elvenni.

Optimális ez? Nem feltétlenül.

Új kérdés: milyen stratégiát kövessen a kezdő, hogy a különbség a javára maximális legyen? Az előző példánál a második játékosnak (globálisan) nem volt mozgástere. Általában ez nincs így.

Optimális stratégia a kezdő számára: bárhogy játszik a másik, a különbség mindenképp meglesz. Aprópénzre váltva: a másik "optimális stratégiája" mellett is (a másik játékos optimális stratégiája: minimalizálni akarja a különbséget).

7. gyakorlat (2025. október 22.)

7.1. Dinamikus programozás

Mátrixok optimális zárójelezése

$A_1 A_2 \cdots A_n$

A szorzat nem függ a zárójelezéstől, de a kiszámításhoz szükséges elemi szorzások száma általában nagyon is.

Példa (zh. feladat):

$A_1 : 25 \times 30$

$A_2 : 30 \times 10$

$A_3 : 10 \times 5$

$A_4 : 5 \times 10$

$A_5 : 10 \times 15$

$A_6 : 15 \times 20$

Feladat: $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$ optimális zárójelezése.

Megoldás: két 6×6 -os táblázat

0	7500	5250	6500	7875	10000
	0	1500	3000	4500	6750
		0	500	1500	3250
			0	750	2250
				0	3000
					0

$l[i, j]$

	1	1	3	3	3
		2	3	3	3
			3	3	3
				4	5
					5

$k[i, j]$ ("az a bizonyos k ")

$$\begin{aligned} l[1,1] &= 0 & l[1,2] &= 25 \times 30 \times 10 = 7500 \\ l[2,2] &= 0 & l[2,3] &= 30 \times 10 \times 5 = 1500 \\ l[3,3] &= 0 & l[3,4] &= 10 \times 5 \times 10 = 500 \\ l[4,4] &= 0 & l[4,5] &= 5 \times 10 \times 15 = 750 \\ l[5,5] &= 0 & l[5,6] &= 10 \times 15 \times 20 = 3000 \\ l[6,6] &= 0 \end{aligned}$$

Általános formula:

$$l[i, j] = \min_{i \leq k \leq j-1} \{ l[i, k] + l[k+1, j] + \underbrace{q_{i-1} q_k q_j}_{\text{dimenziók}} \}$$

$k[i, j]$ = az a k , ahol a fenti zárójeles összeg a legkisebb.

"1. lépés: átlós kitöltés": amikor egy adott $l[i, j]$ -t számítjuk, már minden $l[i, k]$ és $l[k+1, j]$ ismert.

$$l[1, 3] = \min \left\{ l[1, \boxed{1}] + l[2, 3] + 25 \cdot 30 \cdot 5 = \boxed{5250} \right. \\ \left. l[1, 2] + l[3, 3] + 25 \cdot 10 \cdot 5 = \boxed{8750} \right\}$$

$$l[2, 4] = \min \left\{ l[2, \boxed{2}] + l[3, 4] + 30 \cdot 10 \cdot 10 = \boxed{3500} \right. \\ \left. l[2, \boxed{3}] + l[4, 4] + 30 \cdot 5 \cdot 10 = \boxed{3000} \right\}$$

$$l[3,5] = \min \left\{ \begin{array}{l} l[3,\boxed{3}] + l[4,5] + 10 \cdot 5 \cdot 15 = \boxed{1500} \\ l[3,4] + l[5,5] + 10 \cdot 10 \cdot 15 = 2000 \end{array} \right\}$$

$$l[4,6] = \min \left\{ \begin{array}{l} l[4,4] + l[5,6] + 5 \cdot 10 \cdot 20 = 4000 \\ l[4,\boxed{5}] + l[6,6] + 5 \cdot 15 \cdot 20 = \boxed{2250} \end{array} \right\}$$

$$l[1,4] = \min \left\{ \begin{array}{l} l[1,1] + l[2,4] + 25 \cdot 30 \cdot 10 = 10500 \\ l[1,2] + l[3,4] + 25 \cdot 10 \cdot 10 = 10500 \\ l[1,\boxed{3}] + l[4,4] + 25 \cdot 5 \cdot 10 = \boxed{6500} \end{array} \right\}$$

Ha minden sor egyenlő, akkor bármelyiket választhatjuk minimumnak, majd a backtracking során látjuk, hogy ekkor több optimális zárójelezés is létezik.

$$l[2,5] = \min \left\{ \begin{array}{l} l[2,2] + l[3,5] + 30 \cdot 10 \cdot 15 = 6000 \\ l[2,\boxed{3}] + l[4,5] + 30 \cdot 5 \cdot 15 = \boxed{4500} \\ l[2,4] + l[5,5] + 30 \cdot 10 \cdot 15 = 7500 \end{array} \right\}$$

$$l[3,6] = \min \left\{ \begin{array}{l} l[3,\boxed{3}] + l[4,6] + 10 \cdot 5 \cdot 20 = \boxed{3250} \\ l[3,4] + l[5,6] + 10 \cdot 10 \cdot 20 = 5500 \\ l[3,5] + l[6,6] + 10 \cdot 15 \cdot 20 = 4500 \end{array} \right\}$$

$$l[1,5] = \min \left\{ \begin{array}{l} l[1,1] + l[2,5] + 25 \cdot 30 \cdot 15 = 15750 \\ l[1,2] + l[3,5] + 25 \cdot 10 \cdot 15 = 12750 \\ l[1,\boxed{3}] + l[4,5] + 25 \cdot 5 \cdot 15 = \boxed{7875} \\ l[1,4] + l[5,5] + 25 \cdot 10 \cdot 15 = 10250 \end{array} \right\}$$

$$l[2,6] = \min \left\{ \begin{array}{l} l[2,2] + l[3,6] + 30 \cdot 10 \cdot 20 = 9250 \\ l[2,\boxed{3}] + l[4,6] + 30 \cdot 5 \cdot 20 = \boxed{6750} \\ l[2,4] + l[5,6] + 30 \cdot 10 \cdot 20 = 12000 \\ l[2,5] + l[6,6] + 30 \cdot 15 \cdot 20 = 13500 \end{array} \right\}$$

$$l[1,6] = \min \left\{ \begin{array}{l} l[1,1] + l[2,6] + 25 \cdot 30 \cdot 20 = 21750 \\ l[1,2] + l[3,6] + 25 \cdot 10 \cdot 20 = 15750 \\ l[1,\boxed{3}] + l[4,6] + 25 \cdot 5 \cdot 20 = \boxed{10000} \\ l[1,4] + l[5,6] + 25 \cdot 10 \cdot 20 = 14500 \\ l[1,5] + l[6,6] + 25 \cdot 15 \cdot 20 = 15375 \end{array} \right\}$$

2. lépés: "korábbi szorzások": optimális zárójelezése $A_1A_2A_3$ -nak és $A_4A_5A_6$ -nak

$$A_1A_2A_3 \rightarrow k[1,3] = 1 \rightarrow A_1(A_2A_3)$$

$$A_4A_5A_6 \rightarrow k[4,6] = 5 \rightarrow (A_4A_5)A_6$$

Szumma szummárumban: $(A_1(A_2A_3))((A_4A_5)A_6)$

8. gyakorlat (2025. november 5.)

”Hasonló” feladatok

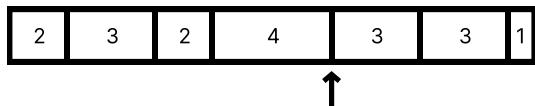
1. Rúd szétvágása

Adott egy l hosszúságú rúd, amit l_1, l_2, \dots, l_n hosszú darabokra akarunk felvágni, adott vágási pontknál.

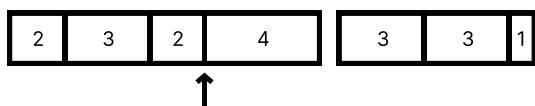


Egy vágás úgy zajlik, hogy a már korábban ”levágott” darabok valamelyikét felemeljük a vágóeszközre, és az ottani vágási pontok valamelyikén vágunk. Egy ilyen vágás költsége legyen az épp vágott darab részeinek összege.

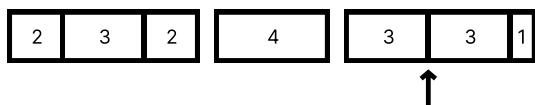
Példa:



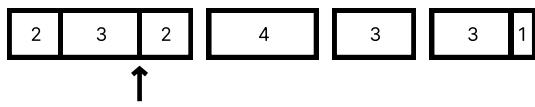
1. vágás (költség: 18)



2. vágás (költség: 11)



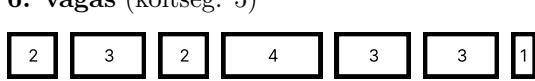
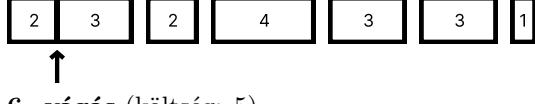
3. vágás (költség: 7)



4. vágás (költség: 7)



5. vágás (költség: 4)



Költség összesen: 52

Van ennél kisebb összköltségű vágássorozat? Mi a legkisebb összköltség?

Vegyük észre az analógiát az optimális zárójelzés feladattal! Várhatóan DP egy alkalmas módszer lesz a megoldásra, analóg módon a zárójelzéshez.

(margó szélére: ha n darabra vágunk, összesen $(n-1)!$ lehetőség van erre, persze ezek közül nem minden ”lényegesen különböző”)

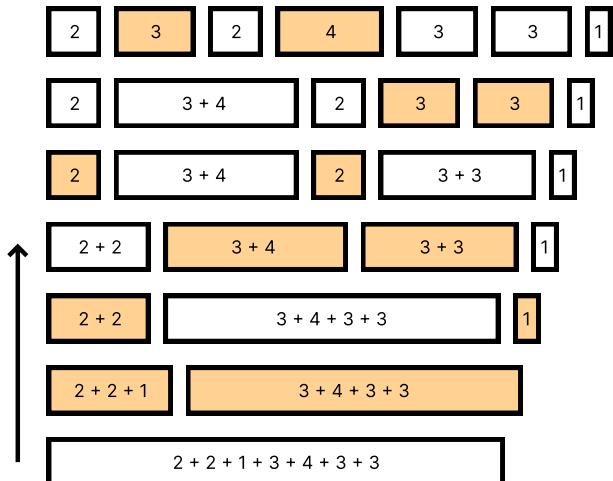
Részproblémák → ”infixek optimális szétvágása”

HF. részletek kidolgozása

Változat: a vágási pontokat is nekünk kell meghatározni (persze $l = l_1 + l_2 + \dots + l_n$ továbbra is). A példát tekintve itt megengedett első vágásnak a bal szélről levágni egy 4 hosszú darabot.

Érdemes visszafelé elképzelni a vágássorozatot (”ragasztások sorozata”).

Példánkban:



Mohó heurisztika: mindenkor a két legrövidebb darabot ragasztjuk összeadjuk. Bizonyítani kell, hogy ezek a lokálisan optimális lépések elvezetnek a globális optimumhoz.

Nagyon hatékony \rightarrow kupaccal $\mathcal{O}(n \log n)$ lépés (eredeti változat DP-vel $\rightarrow \mathcal{O}(n^3)$).

Nagyon hasonló ez az egész az információtömörítésnél megismert Huffman algoritmushoz (Huffman-kódhoz).

2. Optimális bináris keresőfa

Általában bináris keresőfákat dinamikusan változó adathalmazokra alkalmazunk. Itt most statikus lesz az adathalmaz ezzel szemben. Itt ismert az adatelemek keresési gyakorisága is. Olyan bináris keresőfa megépítése a cél az adatelemekből, ahol a keresési út hosszának várható értéke minimális.

9. gyakorlat (2025. november 12.)

9.1. "Sztringológia"

Karaktersorozatok hasonlósága

- Levenshtein távolság (optimális szekvenciaillesztés)
- leghosszabb közös részsorozat (LKR)

Mindkét esetben DP

$X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ és $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \rightarrow \mathcal{O}(mn)$

LKR (előadáson "vázlatosan" volt)

Optimális részstruktúra tulajdonság

$X_i = (x_1, x_2, \dots, x_i)$ és $Y_j = (y_1, y_2, \dots, y_j)$ prefixek LKR-jének meghatározása van éppen terítéken.

Tfh. X_i és Y_j egy LKR-je $Z_h = (z_1, z_2, \dots, z_h)$

Ekkor

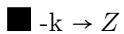
- (A) Ha $x_i = y_j$, akkor $z_h = x_i = y_j$ és $Z' = (z_1, z_2, \dots, z_{h-1})$ egy LKR X_{i-1} -hez és Y_{j-1} -hez. A másik két esetben $x_i \neq y_j$, így biztosan $z_h \neq x_i$ vagy $z_h \neq y_j$.
- (B) Ha $z_h \neq x_i$, akkor Z egy LKR X_{i-1} -hez és Y_j -hez.
- (C) Ha $z_h \neq y_j$, akkor Z egy LKR X_i -hez és y_{j-1} -hez.

Bizonyítás

(A) Itt két állítás van! Kezdjük azzal, hogy $z_h = x_i = y_j$. Indirekt tfh. ez nem igaz, vagyis $z_h \neq x_i, y_j$.

 X_i

 Y_j

 $-k \rightarrow Z$

Ám ekkor Z biztos nem LKR x_i -hez és Y_j -hez, hiszen Z végére írva az $x_i = y_j$ karaktert egy Z -nél hosszabb közös részsorozatát látjuk X_i -nek és Y_j -nek.

Ezek után jöjjön a második rész. Most Z' nyilván közös részsorozata X_{i-1} -nek és Y_{j-1} -nek. Indirekt tfh. Z' nem LKR X_{i-1} -hez és Y_{j-1} -hez, vagyis van olyan Z' -nél hosszabb Z'' sorozat, amely közös részsorozata X_{i-1} -nek és Y_{j-1} -nek. Ha most Z'' végére írjuk az $x_i = y_j$ karaktert, az egy Z -nél hosszabb közös részsorozata lesz X_i -nek és Y_j -nek, **ellentmondás**.

(B) Most egyrészt Z közös részsorozata X_{i-1} -nek és Y_j -nek, másrészt ha lenne egy Z -nél hosszabb közös részsorozata X_{i-1} -nek és Y_j -nek, az egy Z -nél hosszabb közös részsorozata lenne X_i -nek és Y_j -nek, ami nem lehet.

(C) analóg módon (B)-hez.

Rekurzió

$$l[i, j] = \min \begin{cases} 0 & \text{ha } i = 0 \text{ vagy } j = 0 \\ l[i - 1, j - 1] + 1 & \text{ha } i, j \geq 1 \text{ és } x_i = y_j \\ \max\{l[i - 1, j], l[i, j - 1]\} & \text{ha } i, j \geq 1 \text{ és } x_i \neq y_j \end{cases}$$

Példa (zh. feladat):

$X = (A, B, C, B, C, A, B, B, A, C)$

$Y = (B, A, A, C, B, B, A, A, C, B, C)$

Kitöltés menete:

Összehasonlítjuk a sorhoz és az oszlophoz tartozó két betűt.

- Ha megegyeznek (rekurzív képlet 2. esete): az átlósan egygyel fentebb és vízszintesen előző elem + 1
- Ha különböznek (rekurzív képlet 3. esete): a sorban előtte lévő elem és az oszlopban felette lévő elem közül a maximális (ha egyenlők akkor a fölötté lévő)

A nyilak mutatják, hogy az adott cellában lévő elemet honnan vettük. Ezek mentén visszafelé haladva meghatározható a LKR.

	B	A	A	C	B	B	A	A	C	B	C	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A 1	0	\uparrow 0	\nwarrow 1	\nwarrow 1	\leftarrow 1	\leftarrow 1	\leftarrow 1	\nwarrow 1	\nwarrow 1	\leftarrow 1	\leftarrow 1	\leftarrow 1
B 2	0	\nwarrow 1	\uparrow 1	\uparrow 1	\uparrow 1	\nwarrow 2	\nwarrow 2	\leftarrow 2	\leftarrow 2	\leftarrow 2	\nwarrow 2	\leftarrow 2
C 3	0	\uparrow 1	\uparrow 1	\uparrow 1	\nwarrow 2	\uparrow 2	\uparrow 2	\uparrow 2	\nwarrow 3	\leftarrow 3	\leftarrow 3	\nwarrow 3
B 4	0	\nwarrow 1	\uparrow 1	\uparrow 1	\uparrow 2	\nwarrow 3	\nwarrow 3	\leftarrow 3	\leftarrow 3	\uparrow 3	\nwarrow 4	\leftarrow 4
C 5	0	\uparrow 1	\uparrow 1	\uparrow 1	\nwarrow 2	\uparrow 3	\uparrow 3	\uparrow 3	\uparrow 3	\uparrow 4	\uparrow 4	\nwarrow 5
A 6	0	\uparrow 1	\nwarrow 2	\nwarrow 2	\uparrow 2	\uparrow 3	\uparrow 3	\nwarrow 4	\nwarrow 4	\uparrow 4	\uparrow 4	\uparrow 5
B 7	0	\nwarrow 1	\uparrow 2	\uparrow 2	\uparrow 2	\nwarrow 3	\nwarrow 4	\uparrow 4	\uparrow 4	\uparrow 4	\nwarrow 5	\uparrow 5
B 8	0	\nwarrow 1	\uparrow 2	\uparrow 2	\uparrow 2	\nwarrow 3	\nwarrow 4	\uparrow 4	\uparrow 4	\uparrow 4	\nwarrow 5	\uparrow 5
A 9	0	\uparrow 1	\nwarrow 2	\nwarrow 3	\leftarrow 3	\uparrow 3	\uparrow 4	\nwarrow 5	\nwarrow 5	\leftarrow 5	\uparrow 5	\uparrow 5
C 10	0	\uparrow 1	\uparrow 2	\uparrow 3	\nwarrow 4	\leftarrow 4	\uparrow 4	\uparrow 5	\uparrow 5	\nwarrow 6	\leftarrow 6	\nwarrow 6

LKR hossz: 6

LKR: ABBCBC

Az előbbi X és Y Levenshtein távolsága.

Itt még kell valami:

$$g = 3$$

$$c["p", "q"] = 5 \text{ (a csere 5 költségű)}$$

$$c["p", "p"] = 0 \text{ (a nem-csere 0 költségű)}$$

10. gyakorlat (2025. november 19.)

10.1.