# 1. gyakorlat (2025. szeptember 10.)

## 1.1. Naiv algoritmus (nem feltétlen termináló)

Könyv: `konyv.pdf#page=105`

$f_1 \to (l_2, l_1, l_3)$
$f_2 \to$ tetszőleges, pl. $(l_1, l_2, l_3)$
$f_3 \to (l_1, l_2, l_3)$

$l_1 \to (f_1, f_3, f_2)$
$l_2 \to (f_3, f_1, f_2)$
$l_3 \to$ tetszőleges, pl. $(f_1, f_2, f_3)$

**Algoritmus**

1. Keressünk instabilitást a párosításban: egy fiúnak jobban tetszik egy másik lány ÉS aa lánynak jobban tetszik egy másik fiú.
2. Az (egyik) instabilitásbeli négyest felcseréljük.

**Kezdeti párosítás:** $M_0 = \{(f_1, l_1), (f_2, l_2), (f_3, l_3)\}$, ez nem stabil.
**Instabilitás:** $[f_3 - l_2]$ és $[f_1 - l_2]$ (több van, ezért választunk egyet)

$M_1 = \{(f_1, l_2), (f_2, l_1), (f_3, l_3)\}$
**Instabilitás:** $[f_3 - l_2]$ és $[f_3 - l_1]$

$M_2 = \{(f_1, l_3), (f_2, l_1), (f_3, l_2)\}$
**Instabilitás:** $[f_1 - l_1]$ és $[f_3 - l_1]$

$M_3 = \{(f_1, l_3), (f_2, l_2), (f_3, l_1)\}$
**Instabilitás:** $[f_1 - l_2]$ és $[f_1 - l_1]$

$M_4 = \{(f_1, l_1), (f_2, l_2), (f_3, l_3)\} = M_0$
Végtelen ciklus: $M_0, M_1, M_2, M_3, M_4 = M_0, M_1, M_2, \cdots$

## 1.2. Gale-Shapley algoritmus

(zh. feladat)

$f_1 \to (\cancel{l_3}, \cancel{l_2}, l_5, l_1, l_4)$
$f_2 \to (\cancel{l_1}, l_2, l_5, l_3, l_4)$
$f_3 \to (l_4, l_3, l_2, l_1, l_5)$
$f_4 \to (\cancel{l_1}, l_3, l_4, l_2, l_5)$
$f_5 \to (l_1, l_2, l_4, l_5, l_3)$

$l_1 \to (f_3, f_5, f_2, f_1, f_4)$
$l_2 \to (f_5, f_2, f_1, f_4, f_3)$
$l_3 \to (f_4, f_3, f_5, f_1, f_2)$
$l_4 \to (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$
$l_5 \to (f_2, f_3, f_4, f_1, f_5)$

| | $l_1$ | $l_2$ | $l_3$ | $l_4$ | $l_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | $f_2$, $f_4$, $\boxed{f_5}$ | | $f_1$ | $f_3$ | |
| 2. | $f_5$ | $f_2$ | $f_1$, $\boxed{f_4}$ | $f_3$ | |
| 3. | $f_5$ | $\boxed{f_2}$, $f_1$ | $f_4$ | $f_3$ | |
| 4. | $f_5$ | $f_2$ | $f_4$ | $f_3$ | $f_1$ |

**Észrevétel 1:** mindig van egy lány, akinél csak az utolsó napon jelenik meg egy szerenádozó. Ezt a lányt senki sem húzza ki a preferencialistájáról.
**Észrevétel 2:** a többi lányt legalább 1 fiú nem húzza ki.
Kihúzások száma: $n^2 - n - (n-1) = (n-1)^2 + 1$

**Hány nap alatt fejeződik be biztosan?** Előadás: $n^2 + 1$ korlát (minden nap legalább 1 lányt kihúznak).
**Észrevétel 1:** $n^2 + 1 - n$
**Észrevétel 2:** $n^2 + 1 - n - (n-1)$ (a végén n-1 mert az első észrevételbeli lányt nem számoljuk még egyszer)
**Összesen:** $n^2 + 1 - n - (n-1) = (n^2 - 2n + 1) + 1 = (n-1)^2 + 1$

**Maximum hány stabil párosítás lehetséges n fiú és n lány között?** Az összes teljes párosítás száma: $n!$. Gale-Shapley algoritmus: mindig van legalább 1.
**HF.** ha minden lánynak ugyanaz a preferencialistája, akkor csak 1 létezik. Észrevétel: néha 1-nél több van.

$f_1 \to (l_1, l_2)$ — $l_1 \to (f_2, f_1)$

$f_2 \to (l_2, l_1)$ — $l_2 \to (f_1, f_2)$

Stabil párosítás: minden **fiú** a preferencialistájának elsőjét kapja.
Stabil párosítás: minden **lány** a preferencialistájának elsőjét kapja.

**Meglepetés:** 2n fiú és 2n lány van, akár $2^n$ párosítás is lehetséges.

$$\begin{array}{ll}
f_1 \to (l_1, l_2, \cdots) & l_1 \to (\cdots, f_1) \\
f_2 \to (l_2, l_1, \cdots) & l_2 \to (\cdots, f_2) \\
f_3 \to (l_3, l_4, \cdots) & l_3 \to (\cdots, f_3) \\
f_4 \to (l_4, l_3, \cdots) & l_4 \to (\cdots, f_4) \\
f_{2i-1} \to (l_{2i-1}, l_{2i}, \cdots) & l_1 \to (\cdots, f_{2i-1}) \\
f_{2i} \to (l_{2i}, l_{2i-1}, \cdots) & l_1 \to (\cdots, f_{2i}) \\
\vdots & \vdots \\
f_{2n-1} \to (l_{2n-1}, l_{2n}, \cdots) & l_1 \to (\cdots, f_{2n-1}) \\
f_{2n} \to (l_{2n}, l_{2n-1}, \cdots) & l_1 \to (\cdots, f_{2n})
\end{array}$$

A sok-sok stabil párosítás:

$$\boxed{\begin{array}{c} f_1 \text{ — } l_1 \\ f_2 \text{ — } l_2 \end{array}} \text{ vagy } \boxed{\begin{array}{ccc} f_1 & & l_1 \\ & \times & \\ f_2 & & l_2 \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} f_3 \text{ — } l_3 \\ f_4 \text{ — } l_4 \end{array}} \text{ vagy } \boxed{\begin{array}{ccc} f_3 & & l_3 \\ & \times & \\ f_4 & & l_4 \end{array}}$$

Minden sorból választunk egyet: $2^n$ lehetőség.
**HF.** az összes így kapott párosítás stabil (nincs instabilitás).

## 2. gyakorlat (2025. szeptember 17.)

### Miért lesz ez mind stabil párosítás?

Ha a felső kockát választottuk, akkor $f_1$ párja a preferencialistáján az első lány, így $f_1$ nem lehet instabilitás fiú tagja.

Ha az alsó kockát választottuk, akkor $f_1$ párja a preferencialistáján a második lány, így $f_1$ csak az $l_1$ lánnyal lehet instabilitásban. Azonban $f_1$ utolsó $l_1$ preferencialistáján, így akárki is $l_1$ párja, ő jobban tetszik $l_1$-nek, mint $f_1$. Így $f_1$ most sem lehet instabilitás fiú tagja.

Ez a gondolatmenet minden fiúra alkalmazható, így mind a $2^n$ párosítás stabil.

### Stabil szobatárs probléma

Nem feltétlenül létezik stabil párosítás.

$A \to (B, C, D)$
$B \to (C, A, D)$
$C \to (A, B, D)$
$D \to mindegy$

Három teljes párosítás létezik, A párja egyértelműen meghatározza a párosítást.

1. $(A, B), (C, D) \to$ instabilitás: B és C
2. $(A, C), (B, D) \to$ instabilitás: A és B
3. $(A, D), (B, C) \to$ instabilitás: A és C

Így itt nincs stabil párosítás.

### Feladat

Legyen $M_1$ és $M_2$ két különböző stabil házasítás (visszatértünk az eredeti fiú-lány feladathoz). Minden fiúhoz rendeljük hozzá az $M_1$ és $M_2$-beli párja közül a neki jobban tetszőt. Mutassuk meg, hogy így teljes párosítást kapunk (nem triviális) ami ráadásul stabil.

### Teljes párosítás

Indirekt tegyük fel, hogy ez nem teljesül, következésképpen vannak olyan $f'$ és $f''$ különböző fiúk, hogy:

$$M_1 : \begin{array}{c} f' - l' \\ f'' - l'' \end{array} \quad \text{és } M_2 : \begin{array}{c} f' - \hat{l'} \\ f'' - \hat{l''} \end{array}$$

és $JobbanTetszik_{f'}(l', \hat{l}') = JobbanTetszik_{f''}(l'', \hat{l}'')$ Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $JobbanTetszik_{f'}(l'$
$l'$ és $JobbanTetszik_{f''}(l', \hat{l}'') = l''$.

Ha ez nem elég meggyőző: négy eset van:

1. $JT_{f'}(l', \hat{l}') = l'$ és $JT_{f''}(l'', \hat{l}'') = l''$
2. $JT_{f'}(l', \hat{l}') = l'$ és $JT_{f''}(l'', \hat{l}'') = \hat{l}''$
3. $JT_{f'}(l', \hat{l}') = \hat{l}'$ és $JT_{f''}(l'', \hat{l}'') = l''$
4. $JT_{f'}(l', \hat{l}') = \hat{l}'$ és $JT_{f''}(l'', \hat{l}'') = \hat{l}'' \to$ nem lehet

**HF.** Keressünk instabilitást $M_1$-ben vagy $M_2$-ben.

**Feladat.** Hosszú Gale-Shapley algoritmus futás. Először adott 5 fiú - 5 lány.

| | $l_1$ | $l_2$ | $l_3$ | $l_4$ | $l_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | $\boxed{f_1}, f_5$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ | |
| 2. | $f_1$ | $\boxed{f_2}, f_5$ | $f_3$ | $f_4$ | |
| 3. | $f_1$ | $f_2$ | $\boxed{f_3}, f_5$ | $f_4$ | |
| 4. | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_4, \boxed{f_5}$ | |
| 5. | $\boxed{f_1}, f_4$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_5$ | |
| 6. | $f_1$ | $\boxed{f_2}, f_4$ | $f_3$ | $f_5$ | |
| 7. | $f_1$ | $f_2$ | $f_3, \boxed{f_4}$ | $f_5$ | |
| 8. | $f_1$ | $f_2$ | $f_4$ | $\boxed{f_5}, f_3$ | |
| 9. | $\boxed{f_1}, f_3$ | $f_2$ | $f_4$ | $f_5$ | |
| 10. | $f_1$ | $f_2, \boxed{f_3}$ | $f_4$ | $f_5$ | |
| 11. | $f_1$ | $f_3$ | $\boxed{f_4}, f_2$ | $f_5$ | |
| 12. | $f_1$ | $f_3$ | $f_4$ | $\boxed{f_5}, f_2$ | |
| 13. | $f_1, \boxed{f_2}$ | $f_3$ | $f_4$ | $f_5$ | |
| 14. | $f_2$ | $\boxed{f_3}, f_1$ | $f_4$ | $f_5$ | |
| 15. | $f_2$ | $f_3$ | $\boxed{f_4}, f_1$ | $f_5$ | |
| 16. | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ | $\boxed{f_5}, f_1$ | |
| 17. | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ | $f_5$ | $f_1$ |

Ez általánosítható bármely számú fiúra és lányra → $(n-1)^2+1$ nap.

**HF.** ”Konstruáljuk meg” a preferencialistákat.
**HF.** Nem létezik olyan teljes párosítás (stabil vagy nem stabil), amelyben minden fiúnak szigorúan jobban tetszik a párja, mint a Gale-Shapley algoritmus által szolgáltatott párja.

# 3. gyakorlat (2025. szeptember 24.)

**Állítás (pareto optimalitás):** Jelölje $M$ a Gale-Shapley algoritmus által szolgáltatott (fiú-optimális) párosítást. Ekkor nem létezik olyan $M'$ teljes párosítás (nem stabil sem), ahol minden fiú jobban jár mint $M$-ben. (Olyat valószínűleg tudunk mutatni, amiben valamelyik fiú jobban jár mint $M$-ben, mivel a Gale-Shapley algoritmus esetén lehet olyan fiú aki nem a listájáról az első lányt kapta. Ha ez a fiú megkapja a listájának első lányát (és a többi fiú is valamilyen módon kap egy új párt), akkor máris mutattunk egy ilyen párosítást.)

**Bizonyítás:** Indirekt tegyük fel, hogy létezik olyan $M'$ teljes párosítás, ahol minden fiú jobban jár, mint $M$-nél. Nézzük az M-et előállító Gale-Shapley algoritmus lefutását. Ekkor van olyan $l$ lány, akinek csak az utolsó napon jelenik meg az ablaka alatt szerenádozó, aki végül a párja lesz. Legyen ez a fiú $f$. Most $f$ $M'$-beli $l'$ párja jobban tetszik $f$-nek, mint $l$ (spec. $l' \neq l$). Jelölje $l$ $M$-beli párját $f'$. Ismét, $f'$ $M'$-beli $l$ párja jobban tetszik $f'$-nek, mint az $M$-beli párja.

Igen ám, de ekkor $f'$ az utolsó nap előtt szerenádozott $l$-nél és kosarat kapott, ellentmondva annak, hogy $l$-nél csak az utolsó nap szerenádozik valaki.

## Megoldandó probléma

$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$ alakú rekurziók.

**Összefésüléses rendezés**
$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \to T(n) = \Theta(n \log n)$

**Maximális növekedés**
Adott pozitív számoknak egy $A[1:n]$ tömbje. Keressünk olyan $1 \leq i \leq j \leq n$ indexeket, hogy $A[j] - A[i]$ maximális.

## Oszd meg és uralkodj algoritmusok

Oszd meg és uralkodj algoritmust tervezünk (van más, hatékony módszer is).

1. Bontsuk a feladatot két feleakkora méretű feladatra:
   - $A[1:\frac{n}{2}]$-ben hol van a maximális növekedés
   - $A[\frac{n}{2}+1:n]$-ben hol van a maximális növekedés
2. Rekurzívan megoldjuk a részfeladatokat:
   - $A[1:\frac{n}{2}] \to 1 \leq i' \leq j' \leq \frac{n}{2}$
   - $A[\frac{n}{2}+1:n] \to \frac{n}{2}+1 \leq i'' \leq j'' \leq n$

   Egyelemű tömbökre direkt megoldás: a két index megegyezik az elem indexével.
3. A maximális növekedést adó $i$ és $j$ meghatározása. Három eset van:
   (a) $A[1:\frac{n}{2}]$-ben (az első felében) van a maximális növekedés $\to i = i'$ és $j = j'$
   (b) $A[\frac{n}{2}+1:n]$-ben (a második felében) van a maximális növekedés $\to i = i''$ és $j = j''$
   (c) $1 \leq i \leq \frac{n}{2} < j \leq n$ (az egyik az első, a másik a második felében). Ekkor $i$-t célszerű úgy választani, hogy $A[i]$ az $A[1:\frac{n}{2}]$ legkisebb értéke, $j$-t pedig úgy, hogy $A[j]$ az $A[\frac{n}{2}+1:n]$ legnagyobb értéke.

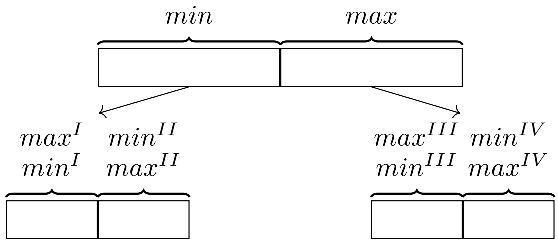
Nem tudjuk előre, hogy (a), (b) és (c) közül melyik adja az optimumot, ezért mindet megvizsgáljuk és a legkedvezőbbet választjuk.

**Költség**

$$T(n) = \underbrace{2T(\tfrac{n}{2})}_{\text{két rekurzív hívás}} + \underbrace{\Theta(n)}_{\substack{\min A[1:\frac{n}{2}]\text{-ben} \\ \max A[\frac{n}{2}+1:n]\text{-ben} \\ \text{(a), (b), (c) "közül a legnagyobb"}}}$$

Ez egy összefésüléses rendezés rekurzió $\to T(n) = \Theta(nlogn)$

**Van hatékonyabb?** Nem meglepő módon igen:




A rekurzív hívásokba süllyesztve a min és max kiválasztást $\Theta(n)$ $\Theta(1)$-re csökken a rekurzióban.

Zárt formula erre: $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + 1$
**HF.** direkt számolás (önmagába helyettesítés)

Még egy érdekes dolog:
$T(n) = T(\frac{n}{2}) + 1 \rightarrow T(n) = \Theta(\log n)$
$T(n) = T(\frac{n}{2}) + n \rightarrow T(n) = \Theta(n)$

## 3.1. Mester-tétel

Könyv: `konyv.pdf#page=10`
$f(n) \leftrightarrow n^{\log_b a}$

1. 
   - $T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + n$
   - $n^{\log_b a} = n^{\log_3 9} = n^2$ polinomiálisan nagyobb, mint $f(n)$
   - $[f(n) = n = O(n^{2-\mathcal{E}})$, például $\mathcal{E} = \frac{1}{2}$ esetén$]$
   - Mester tétel első eset $\rightarrow T(n) = \Theta(n^{log_b a}) = \Theta(n^2)$
2. 
   - $T(n) = T\left(\frac{2n}{3}\right) + 1$ $(a = 1,\ b = \frac{3}{2},\ f(n) = 1)$
   - $n^{log_b a} = n^{log_{\frac{3}{2}} 1} = n^0 = 1$ aszimptotikusan megegyezik $f(n)$-nel.
   - $[f(n) = 1 = \Theta(n^0) = \Theta(1)]$
   - Mester tétel második eset $\rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n) = \Theta(\log n)$
3. 
   - $T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + n \log n$ $(a = 3,\ b = 4,\ f(n) = n \log n)$
   - $n^{log_b a} = n^{log_4 3} \approx n^{0,793}$ $(\log_4 3 < log_4 4 = 1)$
   - $f(n)$ polinomiálisan nagyobb, mint $n^{0,793}$
   - $f(n) = n \log n = \Omega(n^{0,793+\mathcal{E}})$ pl. $\mathcal{E} = 0,1$ esetén
   - A Mester tétel harmadik esetének néz ki, de ahhoz hogy tényleg az legyen, még egy dolgot ellenőrizni kell:
     - a $f\left(\frac{n}{b}\right) \leq cf(n)$ alkalmas $c < 1$ konstanssal
     - $3f\left(\frac{n}{4}\right) = 3\left(\frac{n}{4} \log \frac{n}{4}\right) = \frac{3}{4} n \log \frac{n}{4} \leq \frac{3}{4} n \log n$
     - $c = \frac{3}{4}$ megfelelő
     - Így tényleg mester tétel harmadik eset $\rightarrow T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(n \log n)$

**HF.** mindenféle ilyen rekurziók:

- $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n^3$
- $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$
- $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \log n$

# 4. gyakorlat (2025. október 1.)

**"Oszd meg és uralkodj"**

1. részproblémákra bontjuk
2. a részproblémákat megoldjuk
3. ezek eredményéből kiszámoljuk a végeredményt

### Inverziószámok keresése/számlálása

Legyen $A[1..n]$ egy tömb egyedi számokkal. Az $(i,j)$ indexpár inverzió, ha $1 \le i < j \le n$ és $A[i] > A[j]$. Számoljuk meg, hány inverzió van a tömbben.

**Naiv módszer:**
Minden indexpárt ellenőrzünk: $O(n^2)$.

**Oszd meg és uralkodj** (könyv: `konyv.pdf#page=8`):

1. Részproblémákra bontjuk: keressük az inverziókat $A[1:\frac{n}{2}]$ és $A[\frac{n}{2}+1:n]$-ben külön
2. A részproblémák megoldása (rekurzívan): ha a részprobléma 1 elemű, akkor nincs inverzió, adjunk vissza 0-t
3. Válaszok egyesítése: keressük az összes inverziót.
   (a) $1 \le i < j \le \frac{n}{2} \to A[1:\frac{n}{2}]$ részprobléma
   (b) $\frac{n}{2}+1 \le i < j \le n \to A[\frac{n}{2}+1:n]$ részprobléma
   (c) $1 \le i \le \frac{n}{2} < j \le n \to ?$

Ötlet: rendezzünk menet közben (merge sort). Ha rendezett a két résztömb, könnyebb a (c) esetet ellenőrizni. Két eset van:

- $A[i] < A[j] \to$ nincs inverzió. Mivel rendezett a tömb, ezért minden $j \le k \le n$ k index se lesz inverzió.
- $A[i] > A[j] \to$ inverzió. Mivel rendezettek a tömbök, ezért minden $i \le l \le \frac{n}{2}$ l index is inverzió lesz j-vel.

**Végeredmény**
A két részprobléma megoldásai + a köztük végzett ellenőrzés eredménye. Futási idő: $O(n \cdot \log n)$ mint a merge sort.

### Többségi elem keresése

Egy elem többségi elem egy $A[1:n]$ tömbben, ha $\frac{n}{2}$-nél többször fordul elő benne (pl. minimum 6/10, minimum 4/7, stb.). Ha van többségi elem egy tömbben, akkor biztosan egy van. Keressük meg a többségi elemet, amennyiben van ilyen.

**Naiv módszer:**
Minden elemet megszámolunk: $O(n^2)$.

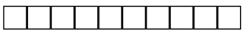
**Oszd meg és uralkodj:**

1. Részproblémák:
   - Ötlet: ha $x$ többségi elem $A[1:n]$ tömbben, akkor (mivel $\frac{n}{2}$-nél többször fordul elő) többségi elem lesz $A[1:\frac{n}{2}]$-ben vagy $A[\frac{n}{2}+1:n]$-ben.
   - Szóval a részproblémák: vegyük a tömb egyik ($A[1:\frac{n}{2}]$) és másik ($A[\frac{n}{2}+1:n]$) felét.
2. Részproblémák megoldása rekurzívan:
   - Ha 1 elemű a tömb, akkor az az elem a többségi elem.
   - $A[1:\frac{n}{2}] \to m'$, $A[\frac{n}{2}+1:n] \to m''$ ($m'$ és $m''$ lehet üres is (ha nincs többségi elem az adott résztömbben))
   - $m'$ és $m''$ közül valamelyik az egész tömb többségi eleme is lesz.
3. Számoljuk meg az előfordulásokat, hogy $m'$ és $m''$ hányszor szerepel $A[1:n]$-ben.

- Ha $m'$ többször fordul elő, mint $m''$, akkor $m'$ lesz a többségi elem.
- Ha $m''$ többször fordul elő, mint $m'$, akkor $m''$ lesz a többségi elem.
- Ha $m'$ és $m''$ ugyanannyiszor fordul elő, akkor nincs többségi elem.

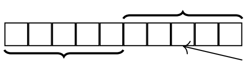
**Futási idő:** $O(n \cdot \log n)$

**Tudunk-e erre a problémára hatékonyabb (lineáris) algoritmust?** Igen, de nem oszd meg és uralkodj.

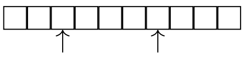
 $A[1:n]$

Ha tudjuk, hogy x többségi elem $A[1:n]$ és $A[1] \neq A[2]$, akkor többségi elem $A[3:n]$-ben. $A[1:10]$, ha x többségi elem, akkor legalább 6-szor van jelen $A[3:10]$-ben.

**Ötlet:** rendezzük át az $A[1:n]$ tömböt úgy, hogy párokat kapjunk a tömb elején, amik nem azonos értékek.




**Hogyan?**




Tegyük fel, hogy $A[j]$-nél vagyunk, és $A[1:i]$ a párok sora, míg $A[i+1:j]$ homogén. Ekkor ha $A[j] = A[i+1]$, akkor a homogén részhez hozzávesszük $A[j]$-t. Ha viszont $A[j] \neq A[i+1]$, akkor megcseréljük $A[j]$-t $A[i+2]$-vel, és ezzel növeljük a párok számát (az első rész 2-vel hosszabb). Innentől a homogén rész az $A[i+3:j]$. A rendezés végén ha marad homogén rész, akkor az a többségi elem.

**Futási idő:** mivel egyszer megyünk végig, ez lineáris, $O(n)$.

### Mester tétel gyakorlás

- $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n^3$
- $a = 2,\ b = 2,\ f(n) = n^3$
- $n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n^1 = n$
- $f(n) = n^3 > n$

3. eset: $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \mathcal{E}}) \rightarrow \mathcal{E} = 2$ ✓

Regularitás:

$$af(\frac{n}{b}) \leq cf(n)$$
$$2f(\frac{n}{2}) \leq cf(n)$$
$$2\frac{n^3}{8} \leq cn^3$$
$$f(\frac{n^3}{8}) \leq cn^3$$
$$\frac{n^3}{4} \leq cn^3$$

$c < 1,\ c \geq \frac{1}{4}$ ✓

$T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(n^3)$

# 5. gyakorlat (2025. október 8.)

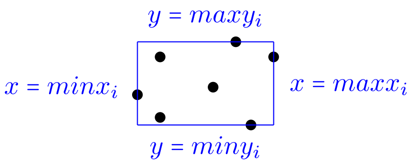
## Oszd meg és uralkodj algoritmusok

### Geometria

Adott $n$ pont a síkon. Határozzuk meg

1. a két legközelebbit
2. a két legtávolabbit.

Kicsit távolabbról indulunk.




$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$ a pontok. Határozzuk meg a legkisebb olyan téglalapot amelynek oldalai párhuzamosak a koordinátatengelyekkel és az összes pontot tartalmazza.

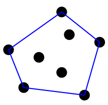
Két min és két max számolás → $4n - 4$ összehasonlítás. Lehet kevesebbel is? Egyszerre $minx_i$ és $maxx_i$, illetve $miny_i$ és $maxy_i$? Lássuk a $minx_i$ és $maxx_i$ esetet:

$\underbrace{x_1, x_2}, \underbrace{x_3, x_4}, \underbrace{x_5, x_6}, \cdots, x_{n-2}, \underbrace{x_{n-1}, x_n}$

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy az értékek páronként különbözőek.

Ha $x_1 < x_2$, akkor $x_1 \neq maxx_i$ és $x_2 \neq minx_i \Rightarrow \lceil \frac{n}{2} \rceil$ összehasonlítással a feladat visszavezethető $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ szám közül a maximum és a minimum meghatározására. Ezzel az összehasonlítások számát $\lceil \frac{n}{2} \rceil$-vel tudtuk csökkenteni. Igazából nem számít, ha az elemek között vannak megegyezőek.

Legkisebb téglalap → legkisebb sokszög (amely az összes pontot tartalmazza).



konvex burok

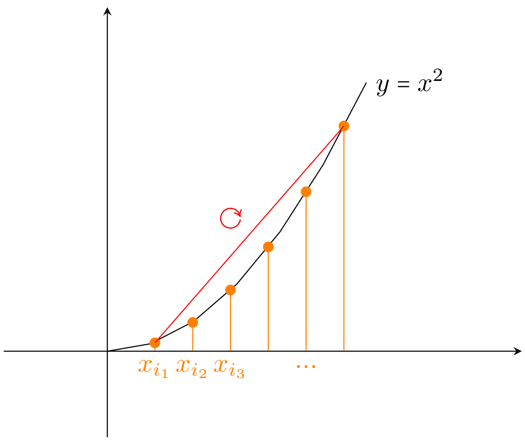
Nem nehéz belátni, hogy a két legtávolabbi pont a konvex burok két csúcsa.

Első lépés a két legtávolabbi pont meghatározásához a konvex burok meghatározása.

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$ → a konvex burok csúcsainak felsorolása a konvex burkon az óramutató járása szerint.

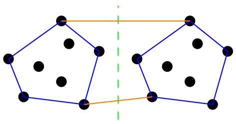
Milyen "bonyolult" a konvex burok meghatározása? Legalább annyira, mint a rendezés.

$(x_1, x_1^2), (x_2, x_2^2), \cdots, (x_n, x_n^2)$ bemenethez:



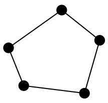

Egy konvex burok algoritmus rendezi is az $x_1, x_2, \cdots, x_n$ számokat (csökkenően).

$\mathcal{O}(n \log n)$ költségűek a "jó" konvex burok algoritmusok. Több ilyen is van, oszd meg és uralkodj is:

 ”két híd” megkeresése

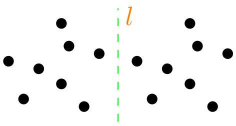
1. két feleakkora feladat
2. rekurzívan megoldjuk a részfeladatokat
3. ”egyesítjük” a két konvex burkot (két híd)

Ezek után a két legtávolabbi csúcs a konvex burkon (nem oszd meg és uralkodj algoritmus):

 ”két futó index módszer (HF.)”

**1. minimális távolság**

Oszd meg és uralkodj algoritmus

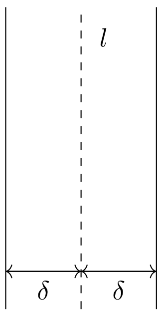



$P_{jobb}$ $\quad P \quad$ $P_{bal}$

1. két feleakkora feladatra bontás → $P_{bal}, P_{jobb}$
2. rekurzívan meghatározzuk a minimális távolságot $P_{bal}$-ban és $P_{jobb}$-ban:
   - $P_{bal} \to \delta_{bal}$
   - $P_{jobb} \to \delta_{jobb}$
3. min távolság meghatározása

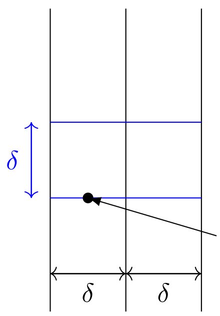
A minimális távolság vagy baloldalon vagy jobboldalon van, vagy keresztezi az $l$ felező egyenest.

A harmadik esetben $l$-től nem túl messze lévő pontokra elég szorítkozni.
Legyen $\delta = min(\delta_{bal}, \delta_{jobb})$.



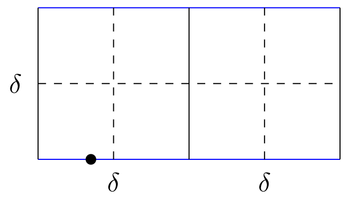

Ebben a $\delta$ sugarú sávban kell a két pontnak lenni, amelyek a min távolságot minimalizálják.

Itt van még valami, amit érdemes észrevenni. Tekintsük a sávbeli pontokat az $y$ koordinátájuk szerint monoton növekvően rendezetten.




”első pont” → hány ponttól lehet $\delta$-nál közelebb?

Minden ilyen pont szükségképpen ebben a téglalapban van:



Tekintsük a fenti 8 kis négyzetet. Mivel ezek átmérője $\frac{8}{2}\sqrt{2} = \frac{8}{\sqrt{2}} < \delta$, és az $l$ bal, illetve jobb oldalán a min távolság legalább $\delta$, így a 8 kis négyzet egyikében sem lehet egynél több $P$-beli pont. Így a legalsó ponttól $\delta$-nál kisebb távolságra csak a következő 7 pont valamelyike lehet. Felfelé haladva ez mindig igaz lesz.

Költség: $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \underbrace{\mathcal{O}(n \log n)}_{\text{rendezések}} \rightarrow T(n)(\mathcal{O}(n \log^2 n))$

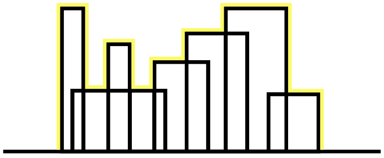
$\mathcal{O}(n \log^2 n) \rightarrow \mathcal{O}(n \log n)$

Előfeldolgozás → előrendezés (x és y koordináták szerint is) → rekurzív hívásokban már csak kiválogatás

$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \mathcal{O}(n) \rightarrow T(n) = \mathcal{O}(n \log n)$

# 6. gyakorlat (2025. október 15.)

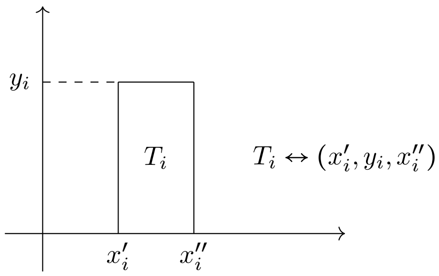
**Még egy geometriai oszd meg és uralkodj algoritmus (igazából összefésülés variáció)**



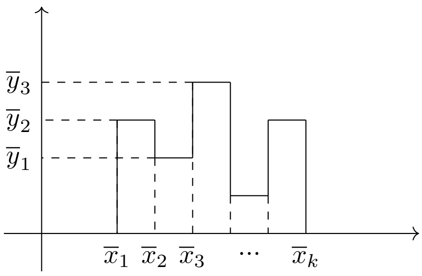
$n$ téglalap, amelyek az $x$ tengelyen állnak

Feladat: sziluett (felső burkoló töröttvonal) meghatározása.

Téglalapok: $T_1, T_2, \cdots, T_n$



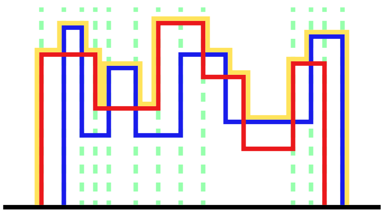

Sziluett




$(\overline{x}_1, \overline{y}_1, \overline{x}_2, \overline{y}_2, \cdots, \overline{y}_{k-1}, \overline{x}_k)$

**Oszd meg és uralkodj algoritmus**

1. Két feleakkora méretű részfeladat
   - $T_1, T_2, \cdots, T_{n/2}$ sziluettjének meghatározása
   - $T_{n/2+1}, T_{n/2+2}, \cdots, T_n$ sziluettjének meghatározása
2. Rekurzívan megoldjuk a részfeladatokat (egy téglalap esetén triviális)
3. Összekombináljuk a két sziluettet:



(ez már egy összefésülés)

Minden szakaszon a magasabban fekvő szakaszt választjuk a két sziluetten.

Implementáljuk ezt ha tényleg minden részletében érteni szeretnénk.

Költség: $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \mathcal{O}(n) \to T(n) = (O)(n \log n)$

## 6.1. Érmék egy sorban (tegnapi előadás)

(Ez már nem oszd meg és uralkodj)

$c_1$ $c_2$ $c_3$ $c_4$ $\cdots$ $c_{2n-1}$ $c_{2n}$

Egy sorban $2n$ (nem feltétlenül páronként) különböző érmék vannak. Két játékos felváltva elvesz a (megmaradt) érmék sorának valamelyik végéről egy érmét. Az győz, akinél az elvett érmék értékének összege nagyobb.

Először is: döntetlen lehetséges. 1 1 1 1 1 1

A nyerő stratégia a nem vesztő stratégia.

Nyerő stratégia a kezdő számára: tud úgy érmét elvenni először, hogy erre ”bármit lép” a másik játékos, a kezdő megint tud úgy érmét elvenni, hogy erre ”bármit lép” a másik játékos, $\cdots$, a kezdő nyer (nem veszít)

Nyerő stratégia a másik játékosnak: bármit lép a kezdő játékos, a másik játékos tud úgy érmét elvenni, hogy erre bármit lép a kezdő játékos, a másik tud úgy érmét elvenni, $\cdots$, a másik játékos nyer (nem veszít).

Ebben a játékban a kezdőnek van nyerő (nem vesztő) stratégiája!

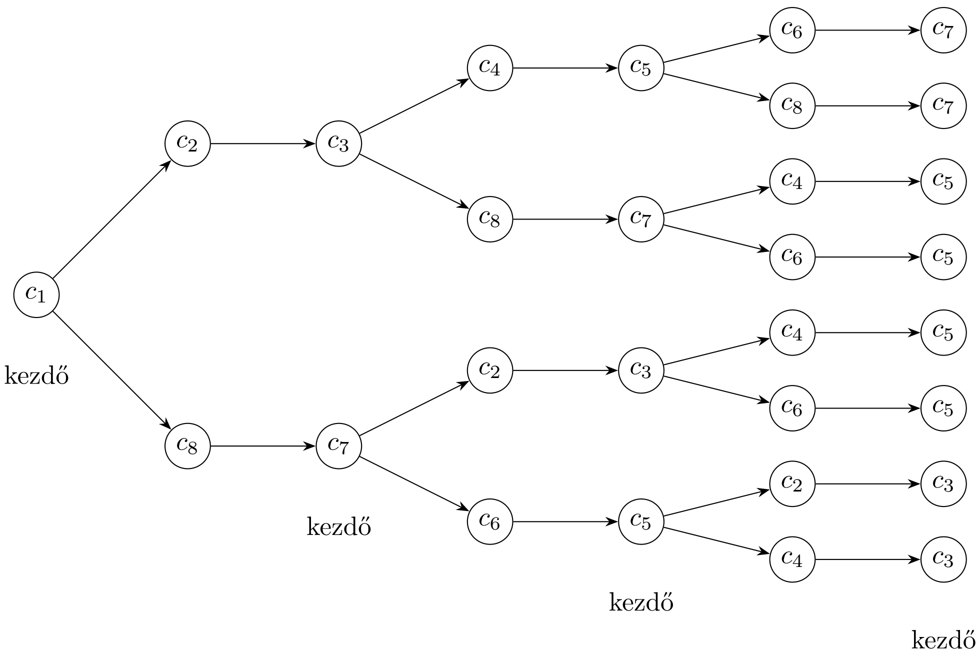
$\cancel{7}$ $\cancel{8}$ $\cancel{6}$ $\cancel{7}$ $\cancel{9}$ $\cancel{8}$ $\cancel{6}$ $\cancel{7}$

Kezdő (összesen 30): 7 8 6 9

Másik (összesen 28): 7 6 8 7

A kezdő játékos ki tudja kényszeríteni, hogy a másik csak a páros indexű $c_i$-ket és azt is hogy csak a páratlan indexű $c_i$-ket vegye el (az összeset).

Pl. a páros indexekre:




Ezek után a nyerő stratégia:
$S_{ps} := c_2 + c_4 + c_6 + \cdots + c_{2n}$
$S_{plan} := c_1 + c_3 + c_5 + \cdots + c_{2n-1}$

Ha $S_{ps} \leq S_{plan}$, akkor a kezdő mindig a páratlan indexű érméket vegye el, különben mindig a páros indexűeket.

Példánkban:
$S_{ps} = 8 + 7 + 8 + 7 = 30$
$S_{plan} = 7 + 6 + 9 + 6 = 28$
A kezdőnek a páros indexű érméket kell elvenni.

Optimális ez? Nem feltétlenül.
Új kérdés: milyen stratégiát kövessen a kezdő, hogy a különbség a javára maximális legyen? Az előző példánál a második játékosnak (globálisan) nem volt mozgástere. Általában ez nincs így.

Optimális stratégia a kezdő számára: bárhogy játszik a másik, a különbség mindenképp meglesz. Aprópénzre váltva: a másik "optimális stratégiája" mellett is (a másik játékos optimális stratégiája: minimalizálni akarja a különbséget).

# 7. gyakorlat (2025. október 22.)

## 7.1. Dinamikus programozás

### Mátrixok optimális zárójelezése

$A_1 A_2 \cdots A_n$
A szorzat nem függ a zárójelezéstől, de a kiszámításhoz szükséges elemi szorzások száma általában nagyon is.

**Példa** (zh. feladat):

$A_1 : 25 \times 30$

$A_2 : 30 \times 10$

$A_3 : 10 \times 5$

$A_4 : 5 \times 10$

$A_5 : 10 \times 15$

$A_6 : 15 \times 20$

Feladat: $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$ optimális zárójelezése.

Megoldás: két $6 \times 6$-os táblázat

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 7500 | 5250 | 6500 | 7875 | 10000 |
| | 0 | 1500 | 3000 | 4500 | 6750 |
| | | 0 | 500 | 1500 | 3250 |
| | | | 0 | 750 | 2250 |
| | | | | 0 | 3000 |
| | | | | | 0 |

$l[i,j]$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | 3 | 3 | 3 |
| | | 2 | 3 | 3 | 3 |
| | | | 3 | 3 | 3 |
| | | | | 4 | 5 |
| | | | | | 5 |
| | | | | | |

$k[i,j]$ ("az a bizonyos $k$")

l[1,1] = 0    l[1,2] = 25 ×30 ×10 = 7500
l[2,2] = 0    l[2,3] = 30 ×10 ×5 = 1500
l[3,3] = 0    l[3,4] = 10 ×5 ×10 = 500
l[4,4] = 0    l[4,5] = 5 ×10 ×15 = 750
l[5,5] = 0    l[5,6] = 10 ×15 ×20 = 3000
l[6,6] = 0

**Általános formula:**

$$l[i,j] = \min_{i \le k \le j-1} \{ l[i,k] + l[k+1,j] + \underbrace{q_{i-1} q_k q_j}_{\text{dimenziók}} \}$$

$k[i,j]$ = az a k, ahol a fenti zárójeles összeg a legkisebb.

**"1. lépés: átlós kitöltés":** amikor egy adott $l[i,j]$-t számítjuk, már minden $l[i,k]$ és $l[k+1,j]$ ismert.

$$l[1,3] = min \begin{Bmatrix} l[1,\boxed{1}] + l[2,3] + 25 \cdot 30 \cdot 5 = \boxed{5250} \\ l[1,2] + l[3,3] + 25 \cdot 10 \cdot 5 = 8750 \end{Bmatrix}$$

$$l[2,4] = min \begin{Bmatrix} l[2,2] + l[3,4] + 30 \cdot 10 \cdot 10 = 3500 \\ l[2,\boxed{3}] + l[4,4] + 30 \cdot 5 \cdot 10 = \boxed{3000} \end{Bmatrix}$$

$$l[3,5] = min\begin{Bmatrix} l[3,\boxed{3}] + l[4,5] + 10 \cdot 5 \cdot 15 = \boxed{1500} \\ l[3,4] + l[5,5] + 10 \cdot 10 \cdot 15 = 2000 \end{Bmatrix}$$

$$l[4,6] = min\begin{Bmatrix} l[4,4] + l[5,6] + 5 \cdot 10 \cdot 20 = 4000 \\ l[4,\boxed{5}] + l[6,6] + 5 \cdot 15 \cdot 20 = \boxed{2250} \end{Bmatrix}$$

$$l[1,4] = min\begin{Bmatrix} l[1,1] + l[2,4] + 25 \cdot 30 \cdot 10 = 10500 \\ l[1,2] + l[3,4] + 25 \cdot 10 \cdot 10 = 10500 \\ l[1,\boxed{3}] + l[4,4] + 25 \cdot 5 \cdot 10 = \boxed{6500} \end{Bmatrix}$$

Ha minden sor egyenlő, akkor bármelyiket választhatjuk minimumnak, majd a backtracking során látjuk, hogy ekkor több optimális zárójelezés is létezik.

$$l[2,5] = min\begin{Bmatrix} l[2,2] + l[3,5] + 30 \cdot 10 \cdot 15 = 6000 \\ l[2,\boxed{3}] + l[4,5] + 30 \cdot 5 \cdot 15 = \boxed{4500} \\ l[2,4] + l[5,5] + 30 \cdot 10 \cdot 15 = 7500 \end{Bmatrix}$$

$$l[3,6] = min\begin{Bmatrix} l[3,\boxed{3}] + l[4,6] + 10 \cdot 5 \cdot 20 = \boxed{3250} \\ l[3,4] + l[5,6] + 10 \cdot 10 \cdot 20 = 5500 \\ l[3,5] + l[6,6] + 10 \cdot 15 \cdot 20 = 4500 \end{Bmatrix}$$

$$l[1,5] = min\begin{Bmatrix} l[1,1] + l[2,5] + 25 \cdot 30 \cdot 15 = 15750 \\ l[1,2] + l[3,5] + 25 \cdot 10 \cdot 15 = 12750 \\ l[1,\boxed{3}] + l[4,5] + 25 \cdot 5 \cdot 15 = \boxed{7875} \\ l[1,4] + l[5,5] + 25 \cdot 10 \cdot 15 = 10250 \end{Bmatrix}$$

$$l[2,6] = min\begin{Bmatrix} l[2,2] + l[3,6] + 30 \cdot 10 \cdot 20 = 9250 \\ l[2,\boxed{3}] + l[4,6] + 30 \cdot 5 \cdot 20 = \boxed{6750} \\ l[2,4] + l[5,6] + 30 \cdot 10 \cdot 20 = 12000 \\ l[2,5] + l[6,6] + 30 \cdot 15 \cdot 20 = 13500 \end{Bmatrix}$$

$$l[1,6] = min\begin{Bmatrix} l[1,1] + l[2,6] + 25 \cdot 30 \cdot 20 = 21750 \\ l[1,2] + l[3,6] + 25 \cdot 10 \cdot 20 = 15750 \\ l[1,\boxed{3}] + l[4,6] + 25 \cdot 5 \cdot 20 = \boxed{10000} \\ l[1,4] + l[5,6] + 25 \cdot 10 \cdot 20 = 14500 \\ l[1,5] + l[6,6] + 25 \cdot 15 \cdot 20 = 15375 \end{Bmatrix}$$

**2. lépés: "korábbi szorzások":** optimális zárójelezése $A_1A_2A_3$-nak és $A_4A_5A_6$-nak

$A_1A_2A_3 \rightarrow k[1,3] = 1 \rightarrow A_1(A_2A_3)$

$A_4A_5A_6 \rightarrow k[4,6] = 5 \rightarrow (A_4A_5)A_6$

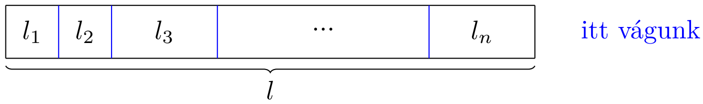
Szumma szummárum: $(A_1(A_2A_3))((A_4A_5)A_6)$

# 8. gyakorlat (2025. november 5.)

**"Hasonló" feladatok**

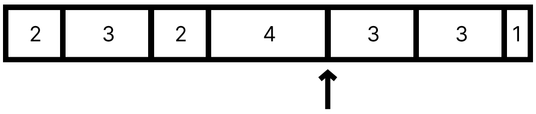
**1. Rúd szétvágása**

Adott egy $l$ hosszúságú rúd, amit $l_1, l_2, \cdots, l_n$ hosszú darabokra akarunk felvágni, adott vágási pontoknál.

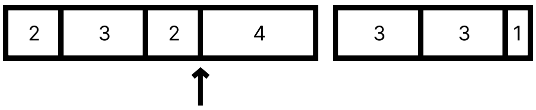



Egy vágás úgy zajlik, hogy a már korábban "levágott" darabok valamelyikét felemeljük a vágóeszközre, és az ottani vágási pontok valamelyikén vágunk. Egy ilyen vágás költsége legyen az épp vágott darab részeinek összege.

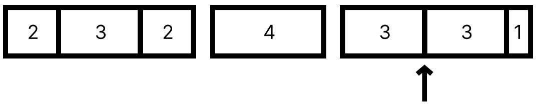
**Példa:**



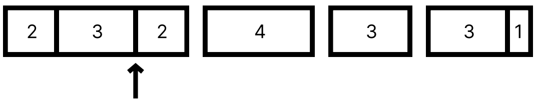

**1. vágás** (költség: 18)



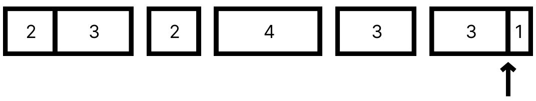

**2. vágás** (költség: 11)



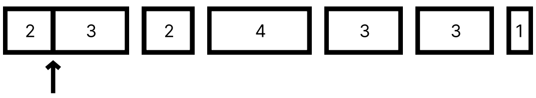

**3. vágás** (költség: 7)



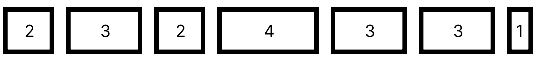

**4. vágás** (költség: 7)




**5. vágás** (költség: 4)




**6. vágás** (költség: 5)




**Költség összesen:** 52

Van ennél kisebb összköltségű vágássorozat? Mi a legkisebb összköltség?

Vegyük észre az analógiát az optimális zárójelezés feladattal! Várhatóan DP egy alkalmas módszer lesz a megoldásra, analóg módon a zárójelezéshez.

(margó szélére: ha $n$ darabra vágunk, összesen $(n-1)!$ lehetőség van erre, persze ezek közül nem mind "lényegesen különböző")

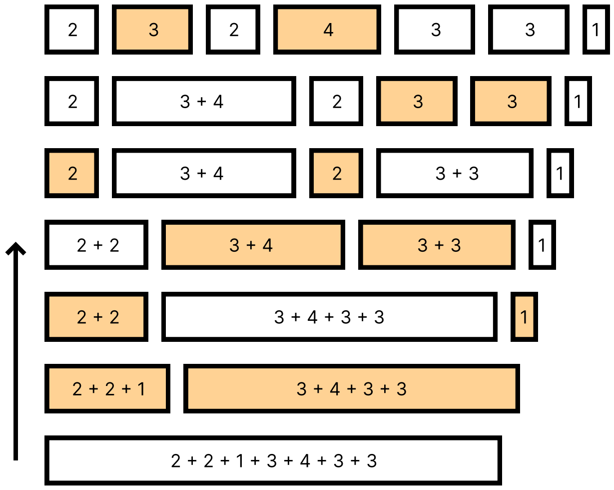
Részproblémák →"infixek optimális szétvágása"

**HF.** részletek kidolgozása

**Változat:** a vágási pontokat is nekünk kell meghatározni (persze $l = l_1 + l_2 + \cdots + l_n$ továbbra is). A példát tekintve itt megengedett első vágásnak a bal szélről levágni egy 4 hosszú darabot.

Érdemes visszafelé elképzelni a vágássorozatot ("ragasztások sorozata").

Példánkban:




Mohó heurisztika: mindig a két legrövidebb darabot ragasztjuk összeadjuk Bizonyítani kell, hogy ezek a lokálisan optimális lépések elvezetnek a globális optimumhoz.

Nagyon hatékony → kupaccal $\mathcal{O}(n \log n)$ lépés (eredeti változat DP-vel → $\mathcal{O}(n^3)$).

Nagyon hasonló ez az egész az információtömörítésnél megismert Huffman algoritmushoz (Huffman-kódhoz).

### 2. Optimális bináris keresőfa

Általában bináris keresőfákat dinamikusan változó adathalmazokra alkalmazunk. Itt most statikus lesz az adathalmaz ezzel szemben. Itt ismert az adatelemek keresési gyakorisága is. Olyan bináris keresőfa megépítése a cél az adatelemekből, ahol a keresési út hosszának várható értéke minimális.

# 9. gyakorlat (2025. november 12.)

## 9.1. ”Sztringológia”

Karaktersorozatok hasonlósága

→ Levenshtein távolság (optimális szekvenciaillesztés)

→ leghosszabb közös részsorozat (LKR)

Mindkét esetben DP
$X = (x_1, x_2, \cdots, x_m)$ és $Y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \to \mathcal{O}(mn)$

**LKR (előadáson ”vázlatosan” volt)**

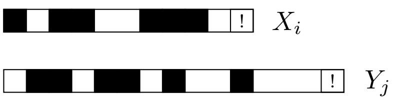
**Optimális részstruktúra tulajdonság**

$X_i = (x_1, x_2, \cdots, x_i)$ és $Y_j = (y_1, y_2, \cdots, y_j)$ prefixek LKR-jének meghatározása van éppen terítéken.

Tfh. $X_i$ és $Y_j$ egy LKR-je $Z_h = (z_1, z_2, \cdots, z_h)$

Ekkor
**(A)** Ha $x_i = y_j$, akkor $z_h = x_i = y_j$ és $Z' = (z_1, z_2, \cdots, z_{h-1})$ egy LKR $X_{i-1}$-hez és $Y_{j-1}$-hez. A másik két esetben $x_i \neq y_j$, így biztosan $z_h \neq x_i$ vagy $z_h \neq y_j$.
**(B)** Ha $z_h \neq x_i$, akkor $Z$ egy LKR $x_{i-1}$-hez és $Y_j$-hez.
**(C)** Ha $z_h \neq y_j$, akkor $Z$ egy LKR $X_i$-hez és $y_{j-1}$-hez.

**Bizonyítás**
**(A)** Itt két állítás van! Kezdjük azzal, hogy $z_h = x_i = y_j$. Indirekt tfh. ez nem igaz, vagyis $z_h \neq x_i, y_j$.




■ -k → $Z$

Ám ekkor $Z$ biztos nem LKR $x_i$-hez és $Y_j$-hez, hiszen $Z$ végére írva az $x_i = y_j$ karaktert egy $Z$-nél hosszabb közös részsorozatát látjuk $X_i$-nek és $Y_j$-nek.

Ezek után jöjjön a második rész. Most $Z'$ nyilván közös részsorozata $X_{i-1}$-nek és $Y_{j-1}$-nek. Indirekt tfh. $Z'$ nem LKR $X_{i-1}$-hez és $Y_{j-1}$-hez, vagyis van olyan $Z'$-nél hosszabb $Z'$ sorozat, amely közös részsorozata $X_{i-1}$-nek és $Y_{j-1}$-nek. Ha most $Z$” végére írjuk az $x_i = y_j$ karaktert, az egy $Z$-nél hosszabb közös részsorozata lesz $X_i$-nek és $Y_j$-nek, **ellentmondás**.

**(B)** Most egyrészt $Z$ közös részsorozata $X_{i-1}$-nek és $Y_j$-nek, másrészt ha lenne egy $Z$-nél hosszabb közös részsorozata $X_{i-1}$-nek és $Y_j$-nek, az egy $Z$-nél hosszabb közös részsorozata lenne $X_i$-nek és $Y_j$-nek, ami nem lehet.

**(C)** analóg módon (B)-hez.

**Rekurzió**

$$l[i,j] = min \begin{cases} 0 & \text{ha } i = 0 \text{ vagy } j = 0 \\ l[i-1, j-1] + 1 & \text{ha } i, j \geq 1 \text{ és } x_i = y_j \\ max\{l[i-1, j], l[i, j-1]\} & \text{ha } i, j \geq 1 \text{ és } x_i \neq y_j \end{cases}$$

**Példa** (zh. feladat):

$X = (A, B, C, B, C, A, B, B, A, C)$
$Y = (B, A, A, C, B, B, A, A, C, B, C)$

**Kitöltés menete:**
Összehasonlítjuk a sorhoz és az oszlophoz tartozó két betűt.

- Ha megegyeznek (rekurzív képlet 2. esete): az átlósan eggyel fentebb és vízszintesen előző elem + 1
- Ha különböznek (rekurzív képlet 3. esete): a sorban előtte lévő elem és az oszlopban felette lévő elem közül a maximális (ha egyenlőek akkor a fölötte lévő)

A nyilak mutatják, hogy az adott cellában lévő elemet honnan vettük. Ezek mentén visszafele haladva meghatározható a LKR.

$l[i,j] =$

| | | | B | A | $\boxed{A}$ | C | $\boxed{B}$ | $\boxed{B}$ | A | A | $\boxed{C}$ | $\boxed{B}$ | $\boxed{C}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $\boxed{A}$ | 1 | 0 | ↑ 0 | ↖ 1 | ↖ 1 | ← 1 | ← 1 | ← 1 | ↖ 1 | ↖ 1 | ← 1 | ← 1 | ← 1 |
| $\boxed{B}$ | 2 | 0 | ↖ 1 | ↑ 1 | ↑ 1 | ↑ 1 | ↖ 2 | ↖ 2 | ← 2 | ← 2 | ← 2 | ↖ 2 | ← 2 |
| C | 3 | 0 | ↑ 1 | ↑ 1 | ↑ 1 | ↖ 2 | ↑ 2 | ↑ 2 | ↑ 2 | ↑ 2 | ↖ 3 | ← 3 | ↖ 3 |
| $\boxed{B}$ | 4 | 0 | ↖ 1 | ↑ 1 | ↑ 1 | ↑ 2 | ↖ 3 | ↖ 3 | ← 3 | ← 3 | ↑ 3 | ↖ 4 | ← 4 |
| $\boxed{C}$ | 5 | 0 | ↑ 1 | ↑ 1 | ↑ 1 | ↖ 2 | ↑ 3 | ↑ 3 | ↑ 3 | ↑ 3 | ↖ 4 | ↑ 4 | ↖ 5 |
| A | 6 | 0 | ↑ 1 | ↖ 2 | ↖ 2 | ↑ 2 | ↑ 3 | ↑ 3 | ↖ 4 | ↖ 4 | ↑ 4 | ↑ 4 | ↑ 5 |
| B | 7 | 0 | ↖ 1 | ↑ 2 | ↑ 2 | ↑ 2 | ↖ 3 | ↖ 4 | ↑ 4 | ↑ 4 | ↑ 4 | ↖ 5 | ↑ 5 |
| $\boxed{B}$ | 8 | 0 | ↖ 1 | ↑ 2 | ↑ 2 | ↑ 2 | ↖ 3 | ↖ 4 | ↑ 4 | ↑ 4 | ↑ 4 | ↖ 5 | ↑ 5 |
| A | 9 | 0 | ↑ 1 | ↖ 2 | ↖ 3 | ← 3 | ↑ 3 | ↑ 4 | ↖ 5 | ↖ 5 | ← 5 | ↑ 5 | ↑ 5 |
| $\boxed{C}$ | 10 | 0 | ↑ 1 | ↑ 2 | ↑ 3 | ↖ 4 | ← 4 | ↑ 4 | ↑ 5 | ↑ 5 | ↖ 6 | ← 6 | ↖ 6 |

**LKR hossz:** 6
**LKR:** ABBCBC
Az előbbi $X$ és $Y$ Levenshtein távolsága.

Itt még kell valami:

$g = 3$
$c[”p”,”q”] = 5$(a csere 5 költségű)
$c[”p”,”p”] = 0$(a nem-csere 0 költségű)